

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. Н. КАРАЗІНА

В. П. Олефір

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЕЛЕКТРИКИ ТА МАГНЕТИЗМУ
В ОБМЕЖЕНИХ ДІЕЛЕКТРИКАХ ТА МАГНЕТИКАХ**

Навчальний посібник

Харків – 2022

УДК 537(076)
О-53

Рецензенти:

М. І. Гришанов – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики та фізики УкрДУЗТ;

О. С. Леонов – кандидат фізико-математичних наук, доцент Навчально-наукового інституту «Фізико-технічний факультет» ХНУ імені В. Н. Каразіна.

*Затверджено до друку рішенням Вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 11 від 25 жовтня 2021 року)*

Олефір В. П.

О-53 Розв'язування задач з електрики та магнетизму в обмежених діелектриках та магнетиках : навчальний посібник / В. П. Олефір. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2022. – 216 с.

ISBN 978-966-285-775-7

У посібнику розглянуто методи визначення характеристик електромагнітного поля в обмежених діелектриках та магнетиках з пласкою, циліндричною та сферичною симетрією з урахуванням просторового розподілу електричних зарядів і струмів. Посібник складається з 4 розділів, в яких системно розглядається необхідна інформація фізичного та математичного змісту. Розв'язання задач супроводжується великою кількістю графіків, рисунків і завдань для самостійної роботи, що сприяють наочності, поглибленому розумінню законів електромагнетизму та набуттю практичних навичок.

Для студентів вищих навчальних закладів фізичних фахів.

УДК 537(076)

ISBN 978-966-285-775-7

© Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2022

© Олефір В. П., 2022

© Пруднік Н. Є., макет обкладинки, 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. Інтегральні та диференціальні характеристики векторного поля.....	8
1.1. Теорема Гельмгольца	8
1.2. Диференціальні характеристики векторного поля.....	9
1.3. Градієнт скалярного поля	10
1.4. Теорема Гаусса–Остроградського	14
1.5. Дивергенція векторного поля.....	14
1.6. Теорема Стокса	18
1.7. Ротор векторного поля	19
1.8. Струм зміщення	22
1.9. Рівняння Максвелла	27
1.10. Питання до розділу 1.....	29
Розділ 2. Диференціальні векторні оператори в криволінійних ортогональних координатах	31
2.1. Циліндрична система координат	31
2.2. Сферична система координат.....	32
2.3. Криволінійні системи координат. Коефіцієнти Ламе.....	34
2.4. Градієнт у криволінійних ортогональних координатах	40
2.5. Дивергенція у криволінійних ортогональних координатах.....	41
2.6. Оператор Лапласа в криволінійних ортогональних координатах.....	44
2.7. Ротор в криволінійних ортогональних координатах	44
2.8. Градієнт, дивергенція, лапласіан та ротор в циліндричній системі координат.....	46
2.9. Градієнт, дивергенція, ротор та лапласіан у сферичній системі координат.....	49
2.10. Питання до розділу 2.....	52
Розділ 3. Електричне поле.....	53
3.1. Плaska геометрія.....	59
3.1.1. Електричне поле плаского шару, однорідно зарядженого вільним зарядом	59
3.1.2. Електричне поле плаского шару, неоднорідно зарядженого вільним зарядом	61
3.1.3. Електричне поле плаского шару однорідного діелектрика, однорідно зарядженого вільним зарядом	66
3.1.4. Електричне поле плаского шару з однорідного діелектрика, неоднорідно зарядженого вільним зарядом	69
3.1.5. Електричне поле плаского шару з неоднорідного діелектрика, неоднорідно зарядженого вільним зарядом	75
3.2. Циліндрична геометрія	96
3.2.1. Електричне поле циліндра з однорідного діелектрика, однорідно зарядженого вільним зарядом	97
3.2.2. Електричне поле циліндра з неоднорідного діелектрика, однорідно зарядженого вільним зарядом	101

3.2.3. Електричне поле циліндра з неоднорідного діелектрика, неоднорідно зарядженого вільним зарядом	105
3.3. Сферична геометрія.....	115
3.3.1. Електричне поле кулі з однорідного діелектрика, однорідно зарядженої вільним зарядом.....	116
3.3.2. Електричне поле кулі, неоднорідно зарядженої вільним зарядом.....	119
3.3.3. Електричне поле кулі з неоднорідного діелектрика, однорідно зарядженої вільним зарядом.....	123
3.3.4. Електричне поле сферичного прошарку з однорідного діелектрика, однорідно зарядженого вільним зарядом	130
3.4. Питання до розділу 3	137
Розділ 4. Магнітне поле	138
4.1. Плоска геометрія.....	143
4.1.1. Магнітне поле плоского шару зі струмом	143
4.1.2. Шар магнетика з однорідним струмом, розташований у магнітному середовищі	151
4.1.3. Магнітне поле шару провідника зі струмом, неоднорідно розподіленим по поперечному перерізу	157
4.1.4. Вплив неоднорідності струму провідності по перерізу шару однорідного магнетика на розподіл магнітного поля	161
4.1.5. Магнітне поле плоского шару неоднорідного магнетика зі струмом провідності, неоднорідно розподіленим по поперечному перерізу	165
4.2. Циліндрична геометрія	180
4.2.1. Магнітне поле циліндричного провідника зі струмом.....	180
4.2.2. Магнітне поле циліндричного провідника з магнетика, розташованого в магнітному середовищі, зі струмом провідності, однорідно розподіленим по поперечному перерізу циліндра	182
4.2.3. Магнітне поле циліндричного провідника зі струмом, неоднорідно розподіленим по поперечному перерізу	184
4.2.4. Магнітне поле циліндричного провідника зі струмом, неоднорідно розподіленим по поперечному перерізу, за різних постійних значень магнітних проникностей циліндра та оточуючого середовища	189
4.2.5. Магнітне поле, що створюється струмом провідності, неоднорідно розподіленим по поперечному перерізу циліндра з неоднорідного магнетика.....	196
4.2.6. Магнітне поле коаксіального провідника зі струмом	202
4.3. Питання до розділу 4.....	207
Література.....	208
Додаток	209
Предметний покажчик	214

ВСТУП

Багаторічний досвід викладання курсу загальної фізики «Електрика та магнетизм» показав наявність значних труднощів у студентів під час розв'язування задач із визначення характеристик електричного та магнітного поля в обмежених електричних та магнітних середовищах. У значній мірі це обумовлено тим, що електричне поле в середовищі характеризується кількома векторними полями: індукцією \vec{D} , напруженістю \vec{E} , що є силовою характеристикою поля, та поляризацією \vec{P} . Електростатичне поле окрім того характеризується також ще й потенціалом φ , який є його скалярною енергетичною характеристикою. Властивості середовищ описуються за допомогою діелектричної проникності ε та діелектричної сприйнятливості χ_e . Зазначені векторні поля пов'язані між собою, запис співвідношення між ними залежить від системи одиниць, якими зазвичай є міжнародна система СІ та система СГСЕ, яка широко використовується в теоретичних роботах і в якій одиниці вимірювання довжини, маси та часу (сантиметр, грам, секунда) доповнені одиницями вимірювання електричних одиниць. Важливою частиною розв'язання задач зі знаходження характеристик електричного поля у випадку обмежених середовищ, є використання граничних умов на межі розділу середовищ із різними діелектричними властивостями. Відповідні граничні умови для компонент електромагнітного поля наводяться в додатку та широко використовуються під час розв'язування задач.

Важлива частина досліджень електричного поля в обмежених діелектричних структурах пов'язана зі знаходженням зв'язаних електричних зарядів в об'ємі діелектриків та на межі їх розділу. Ще одна частина досліджень стосується просторового розподілу енергії електричного поля та сил, з якими воно діє на поляризований діелектрик в його об'ємі та на межу розділу діелектриків.

Аналогічна ситуація має місце під час визначення магнітного поля в магнітних середовищах, оскільки воно характеризується трьома векторними полями: індукцією \vec{B} , що є його силовою характеристикою, напруженістю \vec{H} та намагніченістю \vec{J} . Магнітні властивості середовищ описуються за допомогою магнітної проникності μ та магнітної сприйнятливості χ_m . Зазначені векторні поля пов'язані між собою співвідношенням, запис якого залежить від системи одиниць, якими може бути система СІ, система СГСЕ або система СГСМ, яка широко використовується в теоретичних роботах і в якій одиниці вимірювання довжини, маси та часу (сантиметр, грам, секунда) доповнені одиницями вимірювання магнітних одиниць. Системи СГСЕ та СГСМ разом складають гауссову систему. Під час розв'язування задач зі знаходження векторних характеристик магнітного поля в магнетиках використовуються граничні умови на межі розділу середовищ із різними магнітними властивостями, що наводяться в додатку.

Важлива частина досліджень магнітного поля в обмежених магнітних структурах пов'язана зі знаходженням струмів намагнічування в об'ємі

магнетиків та на межі їх розділу. Ще одна частина досліджень стосується просторового розподілу енергії магнітного поля та сил, з якими воно діє на намагнічене середовище в його об'ємі та на межі розділу магнетиків.

У навчальному посібнику розглянуто математичне визначення та фізичний зміст характеристик електромагнітного поля, що описують його джерела та вихори. Один із поширених підходів, що зазвичай використовується під час розв'язування задач із електрики та магнетизму, які мають ту чи іншу симетрію, базується на інтегральних теоремах, таких як теорема Гаусса–Остроградського та теорема Стокса. Інший ефективний метод полягає у знаходженні електричних та магнітних полів за заданими джерелами та вихорами. Застосування цього методу потребує знань про метрику ортогональних криволінійних координат та диференціальні векторні оператори в декартових, циліндричних та сферичних координатах.

Задачі, що розглядаються в курсі загальної фізики «Електрика та магнетизм», досить часто мають циліндричну та сферичну симетрію, і під час їх розв'язування використовуються інтегральні співвідношення між електричними та магнітними полями, зарядами та струмами.

Рідше використовуються дивергенція та ротор, які є диференціальними характеристиками електромагнітного поля, що мають виражений фізичний характер, оскільки описують джерела та вихори електричного та магнітного поля.

Характерною рисою даного посібника є те, що в ньому чітко та компактно пов'язані необхідні математичні знання та методи конкретних фізичних задач з визначення характеристик електромагнітного поля в обмежених структурах з діелектриками та магнетиками. Розгляд задач відбувається у напрямку від досить простих до більш складних. Під час аналізу найбільш складних структур використовуються результати більш простих випадків. Велика увага при цьому приділяється поєднанню аналітичних досліджень із наочними графічними методами. Ще однією рисою посібника є наявність змістовних рисунків, що значно полегшують вивчення матеріалу.

У процесі викладання матеріалу студентам пропонується самостійно взяти участь у знаходженні відповідних математичних співвідношень, в аналізі граничних випадків та ін. В кінці кожного розділу наводиться ряд питань, відповіді на які сприяють поглибленому вивченню матеріалу.

У першому розділі розглядаються математичні визначення та фізичний зміст градієнта, дивергенції та ротора, для чого використовуються теореми Гаусса–Остроградського та Стокса. Проаналізовано поняття струму зміщення та його роль в рівняннях Максвелла.

У другому розділі розглянуто системи криволінійних ортогональних координат, в тому числі циліндрична та сферична, для яких визначені коефіцієнти Ламе та вирази елементів довжини, поверхні та об'єму. Отримано математичний запис диференціальних векторних операторів: градієнта, дивергенції, ротора та лапласіана у випадку довільної криволінійної ортогональної системи координат. Наведено математичний запис цих операторів у декартовій,

циліндричній та сферичній системах координат. Інформація математичного характеру другого розділу широко використовується в подальших розділах посібника під час розв'язування задач.

У третьому розділі розв'язуються задачі з визначення характеристик електричного поля та розподілу зв'язаних зарядів в об'ємі діелектриків та на межі їх розділу за різних просторових розподілів вільного заряду в однорідних та неоднорідних діелектриках. Досліджуються енергетичні характеристики електричного поля в обмежених діелектриках; тиск, з яким поле діє на межу розділу діелектриків, та сили, що діють в об'ємі поляризованого діелектрика.

У четвертому розділі розв'язуються задачі з визначення характеристик магнітного поля та розподілу струмів намагнічування в об'ємі магнетиків та на межі їх розділу за різних розподілів струму провідності в однорідних та неоднорідних магнетиках. Окрім того досліджуються енергетичні характеристики магнітного поля в обмежених магнетиках; тиск, з яким воно діє на межу розділу магнетиків, та сили, що діють в об'ємі магнетиків.

Визначення електричного та магнітного поля в обмежених діелектриках та магнетиках потребує використання відповідних граничних умов, тому невід'ємною та важливою частиною посібника є **додаток**, в якому розглядаються граничні умови для електричного та магнітного поля на межі розділу середовищ із різними електродинамічними властивостями.

У кінці посібника для зручності роботи з матеріалом наведений **предметний покажчик**.