

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Гончарук Анни Борисівни

**«Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях
та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь»**

яка подається на здобуття ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 — Математика та статистика

за спеціальністю 111 — Математика

1. Оцінка роботи здобувача у процесі підготовки дисертації і виконання індивідуального плану навчальної і наукової роботи.

Аспірантка Гончарук Анна Борисівна виконала в повному обсязі Індивідуальний план освітньо-наукової програми підготовки доктора філософії. Освітня програма в обсязі 40 кредитів ECTS виконана в повному об'ємі. Вона успішно пройшла викладацьку практику (100 б.) і склала 7 заліків і іспитів з наступних дисциплін:

Заліки:

- 1) Підготовка наукових публікацій та презентація результатів досліджень – 95 б.
- 2) Філософські засади та методологія наукових досліджень – 99 б.
- 3) Англійська мова – 72 б.

Іспити:

- 4) Англійська мова – 90 б.
- 5) Сучасна теорія керування – 100 б.
- 6) Теорія несамоспряжених операторів – 100 б.
- 7) Сучасний гармонічний аналіз – 100 б.

2. Обґрунтування вибору теми дослідження.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами є добре вивченими в класичній ситуації, тобто в просторах неперервних диференційованих функцій над полем дійсних або комплексних чисел. Добре відомо, що воно має нескінченно багато розв'язків; формула для загального розв'язку такого рівняння є добре відомою. Так само добре вивченими є лінійні різницеві рівняння виду $a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \dots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n$, $n \geq 0$: вони теж мають нескінченно багато розв'язків, один для кожного початкового значення w_0, w_1, \dots, w_{m-1} .

Зовсім інша ситуація виникає, якщо розглядати ці рівняння над кільцями: припускаючи, що коефіцієнти лежать в деякому комутативному кільці, шукати розв'язок також над цим кільцем. Нескладно побачити, що розглянуте різницеве рівняння над кільцем та лінійне диференціальне рівняння в кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з кільця є подібними. Виявляється, що в багатьох випадках ці рівняння мають єдиний розв'язок над кільцем, або не мають жодного. Крім того, класичні методи для знаходження розв'язку в цьому випадку не підходять. Тому постають питання щодо умов єдиності розв'язку, умов його існування та методів знаходження цього розв'язку. До сих пір розглянуті рівняння над кільцями вивчались мало, хоча постановка задачі є доволі простою, що робить дане дослідження *актуальним*. Особливу цікавість представляє вивчення таких рівнянь над кільцем цілих чисел та над кільцем поліномів.

У випадку єдиності розв'язку є доцільним розглянути рівняння у вигляді нескінченної системи рівнянь і спробувати знайти розв'язок методами лінійної алгебри. Також корисним може бути в теорії лінійних диференціальних рівнянь над кільцями побудувати аналог фундаментального розв'язку диференціального оператора, що є класичною побудовою в звичайній теорії диференціальних рівнянь, бо ця конструкція дозволяє знаходити розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді згортки фундаментального розв'язку, що залежить тільки від лівої частини рівняння, з неоднорідністю.

Метою дисертації є дослідження диференціальних та різницевих рівнянь над кільцями, встановлення умов існування та єдиності їх розв'язків та знаходження розв'язків.

Для досягнення поставленої мети сформульовано наступні ключові завдання:

- 1) знайти достатні умови для існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального та різницевого лінійного рівнянь над кільцями для якомога ширшого класу кілець;
- 2) побудувати конструкцію, що є аналогом фундаментального розв'язку диференціального оператора, для лінійного диференціального рівняння над кільцями;
- 3) описати методи для знаходження розв'язку деяких типів різницевих рівнянь першого порядку над кільцем поліномів;
- 4) у випадку кільця цілих чисел дослідити операторне рівняння першого порядку, що є узагальненням різницевого і диференціального рівняння;
- 5) дослідити лінійні диференціальні і різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами як нескінченні лінійні системи, застосувати до них метод Крамера.

Об'єктом дослідження є лінійні диференціальні і різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами над кільцями.

Предметом дослідження є існування та єдиність розв'язків лінійних диференціальних та різницевих рівнянь над кільцями, формули для знаходження цих розв'язків.

Методи дослідження. Використовувались загальні методи комутативної алгебри, лінійної алгебри і загальної топології. Крім того, був застосований неархімедов, зокрема p -адичний, аналіз.

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках проекту Національного фонду досліджень України "Підтримка досліджень провідних та молодих вчених" "Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок геометрії, алгебри і топології". (Реєстраційний номер Проєкту: 2020.02/0096.)

4. Особистий внесок дисертанта в отриманні наукових результатів та їх новизна.

Особистий внесок дисертанта в отриманні наукових результатів та їх новизна полягають у наступному:

Дістало подальший розвиток дослідження лінійного диференціального та неявного ліній-

ного різницевого рівняння над кільцями. Зокрема вперше розглянуті рівняння вищих порядків.

Вперше:

1) знайдені достатні умови існування та єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m -того порядку зі сталими коефіцієнтами над кільцем дискретного нормування з неархімедовою топологією, знайдений загальний вид розв'язку у вигляді ряду, збіжного в топології покоефіцієнтної збіжності.

2) введено поняття згортки ряду Лорана з від'ємними степенями і формального степеневого ряду з коефіцієнтами з цього кільця, і показано, що розв'язок розглянутого диференціального рівняння можна представити як згортку деякого ряду Лорана, що залежить тільки від лівої частини рівняння, з неоднорідністю

3) знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку різницевого рівняння m -того порядку в повному комутативному кільці з неархімедовою метрикою та знайдений розв'язок у вигляді збіжного ряду.

4) розглянуто лінійне різницеве рівняння першого порядку над кільцем поліномів. Сформульовані теореми про властивості поліноміального розв'язку.

5) розглянуто операторне рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел, що об'єднує обидва часткові випадки – диференціального і різницевого рівняння. Для нього знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку в кільці a -адичних цілих чисел, що є поповненням кільця цілих чисел.

6) показано, що всі ці рівняння можуть розглядатися як нескінченні лінійні системи і розв'язуватись за допомогою правила Крамера.

5. Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій, які захищаються.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень і результатів дисертації Гончарук Анни підтверджується

– повним викладенням доведень теорем;

– наявністю посилань на попередні дослідження і відомі факти, що використовуються в доведеннях.

Основні результати дисертації опубліковані в фахових журналах і доповідалися на міжнародних наукових конференціях.

6. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Робота носить теоретичний характер. Отримані результати встановлюють зв'язки між теорією різницевих і диференціальних рівнянь, теорією кілець і теорією чисел. Ці результати можуть бути використані в теорії лінійних диференціальних і різницевих рівнянь, та розширюють наші уявлення про лінійні диференціальні та різницеві рівняння. Результати досліджень дисертації можуть бути використані при викладанні вибіркових курсів в магістратурі за спеціальністю 111 – Математика.

7. Повнота викладення матеріалів дисертації в роботах, опублікованих автором.

За матеріалами дисертації опубліковано 6 наукових праць, зокрема 3 статті у фахових виданнях України, одна стаття, що входить до наукометричної бази Scopus і дві статті в

збірниках праць міжнародних конференцій. Крім того, результати доповідались і були опубліковані в тезах 10 вітчизняних і зарубіжних конференцій.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Публікації у фахових виданнях України і виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Гефтер С.Л., Гончарук А.Б., Півень О.Л.: Цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння. Доповіді НАН України **11**, 11–18 (2018) DOI: 10.15407/dopovidi2018.11.011
2. Goncharuk, A.: Implicit linear difference equation over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **93**, 18–33 (2021) DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03
3. Goncharuk, A.: Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **95**, 39–48 (2022) DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04
4. Hefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Linear Differential Equation with Inhomogeneity in the Form of a Formal Power Series Over a Ring with Non-Archimedean Valuation. Ukr Math J **74**, 1463–1477 (2022) DOI: 10.1007/s11253-023-02163-0

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

5. Gefter, S., Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formula for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of Abstracts of V International Conference "Analysis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine (2017) 10.13140/RG.2.2.24135.80805
6. Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formulas for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of abstracts of The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, pp. 57-58 (2017)
7. Goncharuk A.: Implicit linear differential equation over the ring of polynomials. Збірник тез доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, с. 5 (2020)
8. Goncharuk A., Gefter S.: Non-homogeneous implicit linear differential equation over the ring of formal power series. Збірник тез доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, с. 50 (2021)
9. Goncharuk A.: Implicit difference equation over the ring of polynomials. In: Book of abstracts of Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, p. 29 (2021)
10. Gonmcharuk, A., Gefter, S., Piven', A.: Implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, p. 154 (2021)
11. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series over a topological ring. Збірник тез Міжнародної конференції з комплексного і функціонального аналізу, присвяченої пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, с. 19 (2021)

12. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series. In: Book of Abstracts of The 5-th International Conference “Differential Equations and Control Theory” (DECT 2021), Kharkiv, p. 19 (2021)
13. Gefter, S.L., Goncharuk, A.B., Piven', A.L.: Quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over a local commutative ring. In: Book of Abstracts of The International online conference “Current trends in abstract and applied analysis”, Ivano-Frankivsk, p. 32 (2022)
14. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Periodic and quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 27th International Conference on Difference Equations and Applications, Paris, p. 137 (2022)

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації (опубліковані праці конференцій):

15. Gefter, S., Goncharuk, A.: Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: Böttcher, A., Potts, D., Stollmann, P., Wenzel, D. (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Birkhäuser, Cham. pp. 247–259 (2018) DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13
16. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenović, M.R.S., Kalabušić, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham. pp. 199–216 (2023) DOI: 10.1007/978-3-031-25225-9_10

Результати дисертаційної роботи повністю відображено в публікаціях.

8. Апробація матеріалів дисертації.

Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних конференціях та семінарах:

1. The V International Conference “Analysis and mathematical physics” dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine, June 19–24, 2017
2. The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, 14-18 August, 2017
3. The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18 - 23 September, 2017
4. XV Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, Україна, 13–14 березня, 2020
5. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3–5, 2021
6. Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, July 19 - 24, 2021
7. The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, July 26-30, 2021
8. Міжнародна конференція з комплексного і функціонального аналізу, присвячена пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, Україна, 13-16 вересня, 2021

9. The 5-th International Conference “Differential Equations and Control Theory” (DECT 2021), Kharkiv, Ukraine, September 27-29, 2021
10. The International online conference “Current trends in abstract and applied analysis”, Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12-15, 2022
11. Семінар кафедри прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, 8 червня, 2022
12. The 27th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2022), Paris, France, July 18–22, 2022
13. Семінар з функціонального аналізу університету Мурсії, Іспанія, 1 грудня, 2022
14. Засідання Харківського математичного товариства, Харків, 28 лютого, 2023
15. Семінар з теорії чисел Інституту математики Польської академії наук, 8 травня, 2023
16. Міжнародна конференція Numbers in Universe, Київ, Україна, 7–11 серпня, 2023

9. Дотримання академічної доброчесності.

На підставі вивчення тексту дисертації здобувача, наукових праць здобувача та Протоколу контролю оригінальності (перевірку наявності текстових запозичень виконано в антиплагіатній інтернет системі Strikeplagiarism.com) встановлено, що дисертаційна робота виконана самостійно, текст дисертації не містить плагіату, а дисертація відповідає вимогам академічної доброчесності. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

10. Оцінка мови та стилю дисертації.

Матеріал дисертації викладено в логічній послідовності та доступній для сприйняття формі. Дисертація написана науковим стилем мовлення, з використанням коректної термінології, структура дисертації відповідає алгоритму здійсненого автором дослідження.

Зміст, структура оформлення дисертації відповідає вимогам відповідно постанови Кабінету Міністрів України «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44, зі змінами, внесеними згідно з постановою Кабінету Міністрів України від 21.03.2022 року № 341), Наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. №40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки України від 31.05.2019 року № 759.

11. Відповідність змісту дисертації спеціальності з відповідної галузі знань, з якої вона подається до захисту.

За своїм фаховим спрямуванням і науковою новизною робота Гончарук Анни Борисівни “Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь” відповідає спеціальності спеціальністю 111 Математика.

12. Рекомендація дисертації до захисту.

Дисертаційна робота Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь» відповідає передбаченим «Порядком присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 року № 44, зі змінами, внесеними згідно з постановою Кабінету Міністрів України від 21.03.2022 року № 341).

Результати дослідження були представлені на розширеному засіданні кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна щодо попередньої експертизи дисертації (протокол №2 розширеного засідання кафедри фундаментальної математики від 7 вересня 2023 року) у формі презентації та наукової дискусії після її завершення. На розширеному засіданні кафедри було одностайно (20 голосів) ухвалено рішення рекомендувати дисертацію Гончарук Анни Борисівни на тему «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь» до захисту у разовій спеціалізованій вченій раді для здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика.

Старший викладач кафедри
фундаментальної математики
факультету математики і інформатики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна,
кандидат фізико-математичних наук



Олена ШУГАЙЛО