Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Труш Олександр Вікторович

УДК 533.9.01

ДИСЕРТАЦІЯ
«ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОШИРЕННЯ ШВИДКОЇ МАГНІТОЗВУКОВОЇ ХВИЛІ ЗА ОСТАННЬОЮ ЗАМКНЕНОЮ МАГНІТНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ТОКАМАКА»

Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

Галузь знань 10 Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ О. В. Труш

Науковий керівник: Гірка Ігор Олександрович, доктор фізико-математичних наук, професор

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Труш О. В. Теоретичне дослідження поширення швидкої магнітозвукової хвилі за останньою поверхнею токамака. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 Прикладна фізика та наноматеріали (Галузь знань 10 Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертаційну роботу присвячено теоретичному дослідженню поширення швидкої магнітозвукової хвилі за останньою поверхнею токамака у наближенні холодної плазми без зіткнень, яка знаходиться у зовнішньому сталому магнітному полі. У роботі знайдено положення точок повороту (точок відсічки) для компонент електромагнітного поля хвилі; досліджено залежності розташування цих точок від параметрів плазми та від градієнтів цих параметрів; вивчено дисперсійні властивості власних електромагнітних сигналів, які можуть поширюватися в іонному циклотронному діапазоні частот в області локального Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

На першому етапі роботи було отримано явний вигляд диференціальних рівнянь для знаходження просторового розподілу компонент електромагнітного поля в іонному циклотронному діапазоні частот з урахуванням радіальної неоднорідності параметрів плазми. Для цього було застосовано загально відомі рівняння електродинаміки – рівняння Максвела у декартовій системі координат. Для компонент цих рівнянь було застосовано метод Фур'є аналізу та здобуто рівняння для знаходження амплітуд компонент H_z, E_y і E_x електромагнітного поля сигналу. Ці рівняння мають форму звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з присутністю в них доданків з першою похідною компонент поля. Такі рівняння у літературі досліджують лише з

математичної точки зору, як правило, з метою пошуку розв'язків рівнянь, тобто просторового розподілу компонент поля. Для цього підбирають заміну, яка зводить таке рівняння до рівняння без першої похідної, але ця методика не дає можливості правильно знайти координати точок повороту, адже нова функція має нові точки повороту. Точкою повороту в цій роботі називають точку, по різні боки від якої компоненти електромагнітного поля мають різний характер. Якщо по один бік компонент поля осцилює з координатою, то по інший бік – просторово загасає. Тому у цій роботі здобуті рівняння, які визначають положення точок повороту на основі аналізу змінних за координатою коефіцієнтів отриманих рівнянь, а не на основі спрощених, що дає можливість знайти координати точок повороту точно. Цей факт свідчить про новизну дослідження, адже традиційно точки повороту для задач електродинаміки плазми знаходять на основі рівнянь, які описують однорідну плазму. На теперішній час точки повороту (густину плазми в цих точках) знаходять традиційно з тієї самої умови, що й частоту відсічки. (Частотою відсічки називають таку частоту, що якщо хвиля поширюється (осцилює в просторі) в однорідній плазмі з частотою, що переважає частоту відсічки, то ця хвиля просторово загасає з частотою, що є меншою за частоту відсічки.)

У результаті першого етапу роботи було виведено умови для визначення точок повороту компонент електромагнітного поля хвиль в іонному циклотронному діапазоні частот для випадку неоднорідної плазми для хвиль з довільними значеннями тороїдного, k_z, і полоїдного, k_y, хвильового числа.

На другому етапі роботи було проведено числове дослідження отриманих рівнянь для знаходження координат точок повороту компонент електромагнітного поля хвиль в іонному циклотронному діапазоні частот. Для числового моделювання було застосовано наступні параметри плазми та хвилі: циклічна частота $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, зовнішнє стале магнітне поле $B_0 = 2.0$ *Тл*, малий радіус плазми $a = 0.5$ *м* і великий радіус плазми $R = 2.12$ *м*, довжина експоненціального зменшення густини частинок плазми $\Lambda = 0.01801$ *м*. Ці параметри є близькими до параметрів реальної установки – токамака середніх розмірів ASDEX Upgrade. Було розглянуто два випадки залежності густини частинок плазми від координати – лінійна залежність густини від координати та експоненціальна. Ця остання, звісно, є більш складною для числового аналізу, але більш адекватною з точки зору фізики – адже в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака густина частинок плазми спадає з координатою саме за експоненціальним законом.

Числові дослідження підтвердили, що у неоднорідній плазмі точки повороту мають різне положення для трьох наборів компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі: E_x і H_y, E_y і H_x, H_z. Умова, яка є загально відомою у літературі, як умова для визначення частоти відсічки швидкої магнітозвукової хвилі для заданих параметрів однорідної плазми, зовсім не підходить для застосування знаходження точок повороту в неоднорідній плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамаків. Взагалі, в неоднорідній плазмі така умова є застосовною лише для визначення точок повороту компонент поля E_y і H_x з $k_y = 0$.

Результати другого етапу дослідження підтверджують, що неоднорідність плазми викликає різний вплив на розташування положення точки повороту для хвиль з різними хвильовими числами. Майже для всіх досліджуваних значень номерів моди точки повороту хвильових полів E_y і H_x є найближчими до стінки токамака.

На третьому етапі роботи було досліджено просторовий розподіл полів електромагнітної хвилі з тороїдним показником заломлення, меншим одиниці, і ненульовим полоїдним хвильовим числом, яка локалізована в околі Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. На цьому етапі стартовими рівняннями також є рівняння Максвелла і до них застосовано Фур'є аналіз. Оскільки за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака густина плазми змінюється дуже швидко, то застосувати у цій частині простору метод ВКБ неможливо. Зокрема, для отримання просторового розподілу поля хвилі в околі Альфвенового резонансу застосовано так званий метод вузького шару. Для розв’язування диференціальних рівнянь і здобуття просторового розподілу полів хвилі область простору поблизу Альфвенового резонансу було розділено на чотири характерні зони. Для кожної з зон було здобуто асимптотичні розв’язки диференціальних рівнянь у кожній окремій зоні, які потім було зшито на межах поділу зон. У третій зоні, навколо Альфвенового резонансу, метод вузького шару було застосовано для розв’язання системи двох зв’язаних диференціальних рівнянь другого порядку, які описують зв’язані швидку та повільну хвилі. Це дало можливість відтворити просторовий розподіл полів хвилі.

Останнім етапом роботи був аналіз дисперсійних властивостей електромагнітного сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот, локалізованого в околі Альфвенового резонансу. Для цього для просторових залежностей компонент електромагнітного поля було застосовано крайові умови на краях зон, на які було поділено простір. У результаті отримано рівняння, у якому визначник матриці 10x10 дорівнює нулю, цей визначник було суттєво спрощено та зведено до визначника матриці 6x6. У результаті за отриманим рівнянням було чисельними методами розраховано власні значення частот сигналу для різних значень номерів моди. Параметри плазми та хвилі для цього етапу обирались такі самі, як і для другого етапу. Результати числового моделювання показали, що власні частоти є приблизно пропорційними тороїдному номеру моди, $\omega \propto |l|$. Така залежність також відома для альфвенових хвиль. Механізми збудження цих електромагнітних сигналів у даній роботі не розглядають. Натомість у роботі розглянуто проблему власних значень і власних функцій. Сигнали, що досліджуються у роботі, можуть збуджуватися антеною в іонному циклотронному діапазоні частот унаслідок параметричної розпадної нестійкості або високоенергетичними хвостами йонів. У той же час запропонований локалізований високочастотний сигнал все ще можна розглядати як один із механізмів, відповідальних за небажане поглинання потужності сигналу відповідної частоти в розрідженій плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. Передбачається, що сигнал є локалізованим поблизу локального Альфвенового резонансу.

Вивчення точок відсічки та поведінки електромагнітних сигналів у розрідженій плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака є предметом активних досліджень, оскільки покращення розуміння процесів у цьому просторі, знаходження положення точок відсічки та розуміння їх залежностей від параметрів плазми та їх градієнтів може допомогти підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок, а саме токамаків.

Ключові слова: холодна плазма без зіткнень, точки відсічки, власні хвилі, іонний циклотронний діапазон частот, Альфвенів резонанс, остання замкнена магнітна поверхня токамака, метод вузького шару, дисперсійне рівняння.

ABSTRACT

Trush O. V. Theoretical study of the propagation of a fast magnetosonic waves in a tokamak scrape-off layer. – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 105 Applied Physics and Nanomaterials (Field of Knowledge 10 Natural Sciences), V. N. Karazin Kharkiv National University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation work is devoted to the theoretical study of the propagation of a fast magnetoacoustic wave in a tokamak scrape-off layer in the approximation of a cold magnetoactive collisionless plasma. The work is devoted to finding the positions of the turning points (cutoff points) for the components of the electromagnetic field of the wave; studying the dependence of the location of these points on the plasma parameters and on the gradients of these parameters; studying the dispersion properties of electromagnetic signals located within Alfvén resonances in a tokamak scrape-off layer in ion cyclotron frequency range.

At the first stage of the work, an explicit form of differential equations is derived for the components of the electromagnetic field in ion cyclotron frequency range. For this, the well-known equations of electrodynamics are used – Maxwell's equations in the Cartesian coordinate system. For the components of this field, the Fourier analysis is applied and equations are obtained for finding the amplitudes of the components H_z, E_y and E_x of the electromagnetic field of the signal. These are ordinary second-order linear uniform differential equations with the presence of terms with the first derivatives of the wave field amplitudes in them. Such equations are studied in the literature only from the mathematical point of view with the goal to find the wave amplitude spatial distribution – a replacement of the desired function is selected that reduces such an equation to an equation without the first derivative. However, this technique does not allow correct finding the coordinates of the turning points, because the new function has new cut-off points. Therefore, in this work, equations for finding the turning points were obtained based on the derived equations rather than on the basis of simplified ones, which allows correct finding the coordinates of the cut-off points. This fact indicates the novelty of the research, because turning points for electrodynamics problems are practically not found in this way.

As a result of the first stage of work, conditions for determining the cut-off points of the electromagnetic wave field components in the ion cyclotron frequency range are derived for the waves with both poloidal wavenumbers $k_y \neq 0$ and $k_y = 0$ with account for plasma strong inhomogeneity.

At the second stage of work, a numerical study of the obtained equations is carried out to find the coordinates of the cut-off points of the electromagnetic wave field components in ion cyclotron frequency range. The following plasma and wave parameters are used for numerical modeling: generator angular frequency $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, external static magnetic field $B_0 = 2.0\ T$, minor plasma radius $a = 0.5\ m$ and major plasma radius $R = 2.12\ m$, the decay length of the plasma particle density $\Lambda = 0.01801\ m$. These parameters are consistent with the parameters of the real installation – the medium-sized tokamak ASDEX Upgrade. Two cases of the dependence of the density of plasma particles on the coordinate are considered – a linear dependence of the density on the coordinate and an exponential one. The latter is, of course, more complicated for numerical analysis, but more suitable from the point of view of physics – because in the region of a tokamak scrape-off layer, the density of plasma particles decreases with the coordinate just according to the exponential law.

Numerical studies have confirmed that in inhomogeneous plasma the cut-off points have different positions for three sets of components of the electromagnetic field of a fast magnetosonic wave: E_x and H_y, E_y and Hx, H_z. The condition, which is generally known in the literature as a condition for determining the cut-off frequency of a fast magnetosonic wave for given homogeneous plasma parameters, is not at all suitable for the application for finding cut-off points in inhomogeneous plasma, which is present in all fusion facilities. In general, in inhomogeneous plasma such a condition is applicable only for determining the cut-off points of the field components E_y and Hx with $k_y = 0$.

The results of the second stage of the study indicate that the non-uniformity of the plasma causes a different effect on the location of the cut-off points for waves with different wave numbers. For almost all studied values of the mode indices, the cut-off points of the wave fields E_y and Hx are closest to the tokamak wall.

At the third stage of the work, the spatial distribution of the eigen wave field with the toroidal refractive index smaller than a unit and the frequency higher than ion cyclotron frequency localized in the region of Alfven resonance in a tokamak scrape-off layer is considered. At this stage, the Maxwell's equations are also the starting equations, and Fourier analysis is applied to them. Since in the region of a tokamak scrape-off layer, the plasma density varies very quickly, it is impossible to apply the WKB method in this region. Therefore, the so-called narrow layer method is used to obtain the spatial distribution of the wave field in the close vicinity of Alfven resonance. To solve the differential equations, the space around the Alfven resonance is separated into four characteristic zones. For each of the zones, the spatial wave field variation is asymptotically derived and solutions of the differential equations are tuned at the boundaries of the zones. In the third zone, in the close vicinity of Alfven resonance (not far than plasma density decay length), the narrow layer method was applied. This made it possible to reproduce the spatial distribution of the localized wave field.

The analysis of the dispersion properties of electromagnetic signal in ion cyclotron frequency range in a tokamak scrape-off layer is the last stage of the work. For this, boundary conditions are applied to the spatial dependences of the electromagnetic field components at the edges of the zones within which the space was divided. As a result, the dispersion relation is obtained in which the determinant of the 10x10 matrix is equal to zero. This determinant is significantly simplified and reduced to the determinant of the 6x6 matrix. As a result, the eigen values of the signal frequencies for different values of the toroidal and poloidal wave indices are calculated using numerical methods to solve the dispersion relation. The plasma and wave parameters for this stage are chosen the same as for the second stage. The results of numerical modeling show that the eigen frequencies are approximately proportional to the toroidal wave index, $\omega \propto |n|$. This feature is also known for Alfvén waves. The mechanisms of excitation of radio frequency signals are not considered in this work. Instead, the paper addresses the problem of eigen values and eigen functions. The signals investigated in the paper can be excited by an antenna in the ion cyclotron frequency range either by parametric decay or by ion energetic tails. At the same time, the proposed localized radio frequency signal can still be considered as one of the mechanisms responsible for the unwanted absorption of signal power of the corresponding frequency in a tokamak scrape-off layer. It is assumed that the signal is localized in a local Alfvén resonance.

The study of cut-off points and the dispersion properties of electromagnetic signals localized in the vicinity of Alfven resonance in a tokamak scrape-off layer are the subject of active research, since improving the understanding of processes in the scrape-off layer, determining the position of cut-off points and understanding their dependences on plasma parameters and their gradients can help increase the efficiency and durability of fusion plants, in particular tokamaks.

Key words: cold collisionless plasma, cut-off points, eigen waves, ion cyclotron range of frequency, Alfvén resonance, tokamak scrape-off layer, narrow layer method, dispersion relation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці в наукових фахових виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science:

1. Girka I.O., **Trush O.V.,** Tierens W. Three different spatial positions of fast magnetosonic wave component turning points. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics"*. 2024. No 6. P. 86–91. DOI: 10.46813/2024-154-014
2. Girka I.O., **Trush O.V.,** Tierens W. Eigen radio frequency signals localized at Alfven resonances in a tokamak scrape-off layer. *East European Journal of Physics*. 2025. No.1. P. 79–90. DOI: 10.26565/2312-4334-2025-1-07

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. **Труш О. В.,** Гнатюк С. В., Павленко І. В., Гірка І. О. Аналітичне та числове моделювання передвісників Зоммерфельда в ізотропній плазмі. *Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу – 2021. 15–16 грудня 2021 р. Збірник анотацій: тези*. Київ, Україна, 2021. С. 50.
2. **Trush O. V.,** Girka I. O. Dynamic evolution of Sommerfeld precursors in an isotropic homogeneous plasma. *Academic and scientific challenges of diverse fields of knowledge in the 21st century. CLIL in action. 18 March 2022. Conference materials: article*. Kharkiv, Ukraine, 2022. Pp. 365–371.
3. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Просторові положення точок повороту компонент швидкої магнітозвукової хвилі в магнітоактивній плазмі. *3rd International Scientific and Practical Conference «Global Trends in the Development of Information Technology and Science». Секція: Фізико-математичні науки. 2–4 квітня 2025. Collection of Scientific Papers: тези*. Стокгольм, Швеція, 2025. Pp. 295–297. DOI: 10.70286/isu-02.04.2025
4. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Власні високочастотні сигнали, локалізовані в околі Альфвенових резонансів за останньою магнітною поверхнею токамака. *3rd*

International Scientific and Practical Conference «Modern Trends in the Development of Economy, Technology and Industry». Секція: Фізико-математичні науки. 9–11 квітня 2025. Collection of Scientific Papers: стаття. Торонто, Канада, 2025. Pp. 272–277. DOI: 10.70286/isu-09.04.2025

5. **Trush O. V.,** Girka I. O., Tierens W. The cutoff positions for the fast magnetosonic wave field components in a nonuniform magnetized plasma. *II International Scientific and Technical Conference Named After V. Voyevodin «Problems of Modern Nuclear Power». 16–18 April. Book of abstracts: abstract*. Kharkiv, Ukraine, 2025. P. 90.

6. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Власні високочастотні сигнали, локалізовані в околі Альфвенових резонансів за останньою магнітною поверхнею токамака. *XVIII Всеукраїнська науково-технічна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Фізика та тенденції сучасного світу». 1–3 травня. Збірка тез: тези*. Харків, Україна, 2025. С. 3.

7. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Комп'ютерне моделювання фізичних процесів за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. *XI Всеукраїнська конференція з міжнародною участю «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики та методики навчання фізики». 6–7 травня*. *Матеріали конференції: тези.* Суми, Україна, 2025. С. 102–103.

Наукові праці в наукових фахових виданнях України та світу, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science, які додатково відображають результати дисертації:

1. Pavlenko I., Girka I., **Trush O.,** Melnyk D., Velizhanina Ye. Plasma transient processes and plane wave formation in simulations by FDTD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2019. Vol. 67. No. 11. Pp. 6957–6964. DOI: 10.1109/TAP.2019.2925156

2. Pavlenko I., Melnyk D., Velizhanina Ye., **Trush O.,** Girka I. Electromagnetic surface wave excitation and energy transport along a plane plasma boundary. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2018. Vol. 118. Pp. 105–108. ISSN 1562-6016. ВАНТ

3. Pavlenko I., Girka I., **Trush O.,** Melnyk D. Exact analytical calculation and numerical modelling by finite-difference time-domain method of the transient transmission of electromagnetic waves through cold plasmas. *Journal of Plasma Physics*. 2020. Vol. 86. DOI: 10.1017/S0022377820000367.

4. Pavlenko I.V., Girka I.O., **Trush O.V.,** Hnatiuk S.V. Time-domain calculation of forerunners in Drude dispersive media without collisions. *Physical Review A*. 2021. Vol. 104. No. 1. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.013518

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

ТЕС	теплова електростанція
АЕС	атомна електростанція
ШМЗХ	швидка магнітозвукова хвиля
ІЦДЧ	іонно циклотронний діапазон частот.
ВКБ	метод Вентцеля-Крамерса-Бріллюена
ЕЦВ	електронне циклотронне випромінювання
АХ	Альфвенові хвилі
АХЕ	власні Альфвенові хвилі, викликані еліптичністю перерізів плазмового шнура
ТВА	власні Альфвенові моди, викликані тороїдністю плазми
ІНЧ	інжекція нейтральних частинок
КА	каскад Альфвена
ЛАР	локальний Альфвенів резонанс
ЕІП	електромагнітно індукована прозорість
JET	Joint European Torus
NIF	National Ignition Facility
ITER	International Thermonuclear Experimental Reactor
NSTX	National Spherical Torus Experiment
MAST	Mega Ampere Spherical Tokamak
TCABR	Tokamak Chauffage Alfven Bresilien
TCV	Tokamak a Configuration Variable
SOL	Scrape-Off Layer (простір за останньою замкненою магнітною поверхнею)
e	заряд електрона
ω	кутова частота хвилі
c	швидкість світла у вакуумі
k_0	вакуумне хвильове число
k_z	тороїдне хвильове число

k_y	полоїдне хвильове число
N_y	полоїдний показник заломлення
N_z	тороїдний показник заломлення
N_A	Альфвенів показник заломлення
ω_{ci}	кутова йонна циклотронна частота
ω_{ce}	кутова електронна циклотронна частота
ω_{pi}	кутова йонна плазмова частота
ω_{pe}	кутова електронна плазмова частота
n_e	густина електронів
n_i	густина йонів
ρ_{Li}	Ларморів радіус іона
$\hat{\varepsilon}$	тензор діелектричної проникності
t	час
$x_{uniform}$	координата точки повороту за класичною теорією
$x_{cut\text{-}off}$	координата точки повороту в неоднорідній плазмі
$\vec{E}$	вектор напруженості електричного поля
$\vec{H}$	вектор напруженості магнітного поля
$\vec{D}$	вектор індукції електричного поля
L	масштаб зміни густини плазми
B_0	зовнішнє стале магнітне поле
m	полоїдний номер моди
l	тороїдний номер моди
a	малий радіус плазми
R	великий радіус плазми
Λ	довжина експоненційного зменшення густини плазми
$n(x)$	густина частинок плазми
n_0	густина частинок у початку координат
T_i	температура йонів
$\overline{\nu_{ei}}$	частота електрон-іонних зіткнень

Δx	характерна ширина локального резонансу
$I_0(q)$	модифікована функція Бесселя нульового порядку
$K_0(q)$	функція Макдональда нульового порядку

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

На даний момент людство отримує енергію з багатьох різних ресурсів і багатьма різними методами, наприклад, завдяки спалюванню твердого палива на теплових електростанціях, завдяки ядерним реакціям на атомних електростанціях, перетворенню механічної енергії води на гідроелектростанціях тощо. Сучасні дані [1-2] демонструють, що приблизно 80% усієї електроенергії генерують на ТЕС та АЕС. Але природні ресурси є обмеженими, саме тому вчені активно займаються відновлювальними джерелами електроенергії та альтернативними джерелами електроенергії, які не будуть настільки активно вичерпувати природні ресурси і зможуть довший час задовольняти потреби людства в електроенергії. Серед усіх інших засобів отримання електроенергії можна виділити термоядерний синтез, над яким вчені працюють ще з минулого сторіччя.

Термоядерний синтез вважають доволі перспективним напрямом в енергетиці, оскільки він здатний забезпечити практично необмежене джерело відносно чистої енергії. Термоядерний синтез імітує реакції, що відбуваються у надрах зір, де легкі атомні ядра, такі як ізотопи водню (дейтерій та тритій), зливаються, виділяючи колосальну кількість енергії. Основними перевагами термоядерного синтезу є теоретично висока енерговіддача, мінімальна кількість радіоактивних відходів, відсутність ризику неконтрольованої реакції, а також велика кількість потрібного палива в природі. Успішна реалізація технологій синтезу може суттєво знизити залежність від викопного палива та допомогти впоратися з глобальними викликами у сфері зміни клімату.

У лютому 2024 року на токамаку JET було встановлено новий рекорд у напрямку керованих термоядерних реакцій – вироблено *69 МДж* енергії з *0,2 мг* палива, що є еквівалентним енергії, що виділяється при спалюванні двох кілограмів вугілля [3].

5 грудня 2022 року на NIF було досягнуто "запалювання", при якому було вироблено *3,15 МДж* енергії при витраті *2,05 МДж* лазерної енергії, що перевищило поріг запалювання [4], що є підтвердженням перспективних можливостей інерціального ядерного синтезу.

Ці експерименти та багато інших, які не було зазначено, підтверджують перспективи термоядерного синтезу. Але до комерційного використання вченим доведеться подолати деякі наукові, інженерні та економічні виклики, такі як тривала підтримка реакцій та зниження витрат на системи нагрівання та утримання плазми.

Міжнародний реактор ITER, що будують на півдні Франції, стане наймасштабнішим експериментальним проектом у цій галузі. Його мета – продемонструвати технологічну та економічну можливість використання термоядерного синтезу для комерційного виробництва електроенергії. Перші експерименти з термоядерною плазмою очікують у 2030-х роках. На ITER у якості термоядерного реактора використовуватимуть установку типу токамак, яка має свої недоліки та свої переваги. Утримання плазми у токамаках відбувається завдяки магнітному полю. Це підкреслює важливість вивчення швидких магнітозвукових хвиль у плазмі токамака, хвиль іонного циклотронного діапазону частот, локального Альфвенового резонансу, знати точки повороту для швидких магнітозвукових хвиль і розуміти процеси просторового розподілу електромагнітного поля різних частот за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

Вивчення вищезазначених напрямків є предметом активних досліджень, оскільки покращення розуміння процесів у просторі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака може допомогти підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок типу токамаків.

Вивчення точок повороту становить також фундаментальний фізичний і математичний інтерес, адже знаходження цих точок повороту для неоднорідної плазми досі відбувається не напряму, а з умови, що визначає частоту відсічки в однорідній плазмі. Існуючі методи дають неточні результати. Тому запропонована у роботі методика дає можливість покращити точність у знаходженні точок повороту для довгих хвиль і при цьому не є надто складною для розуміння. У багатьох експериментах використовують не довгі, а короткі хвилі, для яких можна нехтувати виразом з першою похідною у рівнянні, адже цей вираз набагато менший за інші, що входять у рівняння.

Таким чином, тематика даного дослідження та здобуті результати становлять інтерес і для фундаментальної науки – фізики термоядерної плазми та математики звичайних диференціальних рівнянь; а також є актуальними для розуміння процесів за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака, що може допомогти підвищити ефективність роботи токамаків і досягти кращої ефективності протікання термоядерних реакцій у плазмі, що знаходиться в магнітному полі, у принципі.

Мета роботи

Метою роботи є розвиток теорії поширення електромагнітних хвиль у йонному циклотронному діапазоні частот за останньою замкненою магнітною поверхнею у плазмі токамака у наближенні холодної неоднорідної плазми без зіткнень, а саме знаходження координат точок повороту для швидких магнітозвукових хвиль і дослідження власних електромагнітних сигналів, локалізованих поблизу Альфвенового резонансу.

Завдання дослідження

Для досягнення поставленої мети було необхідно виконати такі **основні завдання**:

1. Отримати на основі рівнянь Максвелла та методу Фур’є звичайні диференційні лінійні однорідні рівняння другого порядку для різних компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі у наближенні холодної неоднорідної плазми без зіткнень.

2. Проаналізувати ці рівняння на наявність відмінностей з відомим рівнянням для знаходження частоти відсічки в однорідній плазмі. Встановити відмінності між цими рівняннями та зрозуміти, від яких параметрів плазми дійсно залежить розташування точок повороту.
3. Для реальних параметрів плазми токамака провести числові розрахунки та знайти точки повороту для різних компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі у наближенні холодної неоднорідної плазми без зіткнень.
4. Отримати на основі рівнянь Максвелла та методу Фур'є звичайні диференційні лінійні зв'язані рівняння для полів електромагнітної хвилі в іонному циклотронному діапазоні частот у наближенні холодної неоднорідної плазми без зіткнень.
5. Розв'язати здобуті рівняння асимптотичними методами та знайти просторовий розподіл компонент електромагнітного поля. Провести числове моделювання цих залежностей для реальних параметрів плазми токамака.
6. Використовуючи крайові умови для електромагнітного сигналу, локалізованого поблизу Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака, здобути дисперсійне рівняння. Провести числовий аналіз отриманого дисперсійного рівняння для знаходження власних частот сигналу для реальних параметрів плазми токамака.

Об'єкт дослідження – холодна неоднорідна плазма без зіткнень у магнітному полі за останньою замкненою магнітною поверхнею в термоядерних установках типу токамак; швидкі магнітозвукові хвилі; електромагнітні хвилі в іонному циклотронному діапазоні частот.

Предмет дослідження – поширення електромагнітних полів у йонному циклотронному діапазоні частот і швидких магнітозвукових хвиль у холодній неоднорідній плазмі без зіткнень за останньою замкненою магнітною поверхнею;

зміна характеру хвиль від таких, що поширюються (просторово осцилюють), до таких, що просторово загасають (чия амплітуда експоненційно зменшується з координатою при віддаленні від певної точки) залежно від параметрів плазми та від градієнтів цих параметрів; поширення електромагнітних сигналів у йонному циклотронному діапазоні частот поблизу Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

Методи дослідження

Для отримання звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку для знаходження точок відсічки компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі було використано класичні рівняння Максвелла з тензором діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень та застосовано для них метод Фур’є аналізу.

Для отримання умов знаходження точок відсічки до отриманих рівнянь застосовано підхід із зануленням дискримінанту характеристичного рівняння для звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з ненульовим коефіцієнтом перед першою похідною від шуканої функції.

Для отримання рівнянь для знаходження просторового розподілу компонент електромагнітного поля в околі Альфвенового резонансу в іонному циклотронному діапазоні частот також було використано класичні рівняння Максвелла з тензором діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень та застосовано для них метод Фур’є аналізу. Для аналізу здобутих рівнянь і знаходження їх розв’язків простір за останньою замкненою магнітною поверхнею було розділено на чотири характерні зони згідно зі співвідношенням між величинами компонент тензора діелектричної проникності. Для кожної зони здобуто точний або асимптотичний аналітичний розв’язок, зокрема, для однієї з таких зон – зони безпосередньо навколо Альфвенового резонансу, де швидка та повільна хвилі є зв’язаними, застосовано метод вузького шару – протилежний за фізичним обґрунтуванням та застосуванням до методу ВКБ.

Для отримання дисперсійного рівняння до здобутих просторових залежностей амплітуд компонентів електромагнітного поля спочатку застосовано крайові умови, а потім для отриманої системи рівнянь на амплітуди полів застосовано методи лінійної алгебри.

Для числового аналізу отриманих рівнянь для точок повороту компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі, для отримання просторового розподілу електромагнітних сигналів з іонного циклотронного діапазону частот за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака та для аналізу дисперсійного рівняння таких сигналів було застосовано стандартну програму «Wolfram Mathematica 13.1».

Наукова новизна отриманих результатів

1. Уперше було отримано рівняння для знаходження точок повороту для швидкої магнітозвукової хвилі у наближенні холодної неоднорідної плазми без зіткнень у магнітному полі токамака на основі диференційного рівняння другого порядку з ненульовим коефіцієнтом при першій похідній. Ці рівняння точно описують розташування точок повороту на відміну від відомих рівнянь, які описують знаходження частоти відсічки в однорідній плазмі і тому дають неточні результати для неоднорідної плазми.
2. Уперше було застосовано метод вузького шару для знаходження просторового розподілу електромагнітних полів зв'язаних швидкої та повільної мод у йонному циклотронному діапазоні частот у неоднорідній холодній плазмі без зіткнень у магнітному полі токамака поблизу Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.
3. Уперше до отриманих рівнянь було застосовано чисельне обчислення з використанням реальних параметрів плазми токамака та отримано відповідні значення координат точок повороту компонент швидкої магнітозвукової хвилі, побудовано просторовий розподіл

електромагнітного поля сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот, локалізованого поблизу Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака, та знайдено власні частоти таких сигналів.

Особистий внесок здобувача

Дисертант активно займався пошуком та аналізом відповідної наукової літератури, яка стосувалась теми його дисертаційного дослідження. Конкретно, його робота спрямована на вивчення поширення електромагнітних хвиль у йонному циклотронному діапазоні частот у холодній неоднорідній плазмі без зіткнень за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. Окремо було проаналізовано методи знаходження точок відсічки та частот відсічки, розподіл густини плазми за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака та поширення електромагнітних сигналів у цьому просторі, асимптотичні методи розв’язання диференційних рівнянь для знаходження просторового розподілу електромагнітного поля, зокрема, метод вузького шару.

За співпраці з науковим керівником д. фіз.-мат. наук Гіркою І. О., а також доктором філософії В. Тіренсом дисертант провів широкий спектр досліджень, включаючи теоретичні аспекти та числове моделювання.

У наукових публікаціях, які були опубліковані спільно з іншими авторами, дисертанту належать наступні досягнення: виведення диференційних рівнянь для знаходження просторового розподілу компонент електромагнітного поля, знаходження умов знаходження точок повороту для отриманих компонент, участь у чисельних розрахунках та побудові графіків цих залежностей, розв’язання диференційних рівнянь для знаходження просторового розподілу компонент електромагнітного поля з використанням асимптотичних методів, зокрема, методу вузького шару, аналіз дисперсійного рівняння та його чисельне моделювання, аналіз та пояснення здобутих результатів, обробка отриманих даних, а також написання текстів статей [5, 6] та тез доповідей на основі цих досліджень.

Апробація матеріалів дисертації

Основні наукові й практичні результати дисертаційної роботи оприлюднені та обговорені на: «Українській конференції з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу - 2021» (Київ, Україна, 15-16 грудня, 2021 р.), «Academic and scientific challenges of diverse fields of knowledge in the 21st century. CLIL in action» (Харків, Україна, 18 березня, 2022 р.), 3rd International Scientific and Practical Conference «Global Trends in the Development of Information Technology and Science» (Стокгольм, Швеція, 2-4 квітня, 2025 р.), 3rd International Scientific and Practical Conference «Modern Trends in the Development of Economy, Technology and Industry» (Торонто, Канада, 9-11 квітня, 2025 р.), II International Scientific and Technical Conference Named After V. Voyevodin «Problems of Modern Nuclear Power» (Kharkiv, Ukraine, April 16-18, 2025), XVIII Всеукраїнській науково-технічній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Фізика та тенденції сучасного світу» (Харків, Україна, 1–3 травня, 2025), XI Всеукраїнській конференції з міжнародною участю «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики та методики навчання фізики» (Суми, Україна, 6–7 травня, 2025).

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

- 2020-2021 рр. НДР 19-13-19 МОН України «Фізичні механізми взаємодії електромагнітного випромінювання та потоків зарядженних частинок із компонентами плазмово-технологічних пристроїв». № ДР 0119U002526.
- 2022 р. НДР № 17-13-22 МОН України «Магнітні властивості мезоскопічних систем із внутрішніми ступенями вільності». № ДР 0122U001575.

Практичне значення одержаних результатів

Вивчення положення точок повороту становить фундаментальний фізичний і математичний інтерес. Запропонована у роботі методика дає можливість покращити точність у знаходженні точок повороту і при цьому не є надто складною для розуміння та впровадження в розрахунки на існуючих токамаках.

Це, а також і вивчення власних електромагнітних сигналів у діапазоні йонної циклотронної частоти, локалізованих поблизу Альфвенового резонансу за останньою магнітною поверхнею токамака, мають допомогти в аналізі процесів у розрідженій плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака та відповідно підвищити ефективність нагрівання плазми.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9 працях, у тому числі в 2 статтях у наукових журналах [5, 6], у 3 матеріалах міжнародних конференцій та у 4 матеріалах всеукраїнських конференцій. Додатково результати дисертації відображають 4 статті у наукових журналах [7, 8-10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел та одного додатку. Загальний обсяг дисертації складає 127 сторінок, з них 97 сторінок основного тексту. Дисертація містить 22 рисунки. Список використаних джерел містить 86 найменувань.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Частота відсічки

Як добре відомо, у фізиці та електротехніці гранична частота або частота відсічки — це межа частотної характеристики системи, на якій енергія, що протікає через систему, починає зменшуватися (послаблюватися або відбиватися), а не проходити крізь неї.

Стікс [11] згадував автора статті [12] як людину, яка першою застосувала термін «відсічка» до певних значень параметрів, для яких квадрат показника заломлення дорівнює нулю.

На даний момент існують два підходи до визначення відсічки. Один із підходів полягає в наступному. Дослідник фіксує задані параметри плазми і по ним шукає граничну частоту. У плазмі з заданими параметрами частота відсічки відокремлює частоти, на яких поширюється (просторово осцилює) відповідна мода, від частот, на яких вона просторово загасає [13]. У цьому підході частоту відсічки для швидкої магнітозвукової хвилі (ШМЗХ) можна знайти як розв'язок рівняння [11]:

$$N^2_x \equiv N^2_\perp - N^2_y = 0. \tag{1.1}$$

У рівнянні (1.1) $N_\perp^2 = (S + D - N_z^2)(S - D - N_z^2)/(S - N_z^2)$, $N_z = k_z/k_0$ – це тороїдний показник заломлення, а $N_y = k_y/k_0$ – це полоїдний показник заломлення, k_z і k_y – це тороїдні та полоїдні хвильові числа, $k_0 = \omega/c$ – вакуумне хвильове число, ω – кутова частота хвилі, c – швидкість поширення світла у вакуумі, S і D – компоненти тензора діелектричної проникності холодної плазми, який вводиться далі.

ШМЗХ – це один з різновидів магнітозвукових хвиль, що є поширенням збурень густини, тиску і магнітного поля в плазмі, що знаходиться в зовнішньому магнітному полі. Ці хвилі виникають у результаті спільної дії сил тиску та сил, пов'язаних із магнітним полем. Для ШМЗХ швидкість поширення є вищою, ніж в інших типів хвиль. Вона завжди є більшою або швидкості звуку в плазмі, або швидкості Альфвена, залежно від напрямку поширення хвилі відносно напрямку зовнішнього магнітного поля. ШМЗХ відіграють важливу роль у різних фізичних процесах у плазмі токамака. Наприклад, в установках типу токамак ШМЗХ використовують для йонного циклотронного резонансного нагрівання, коли частота хвилі збігається з частотою ларморового обертання йонів. ШМЗХ переносять енергію через області із сильним градієнтом густини та магнітного поля, що є важливим у сонячній короні та магнітосфері Землі.

Рівняння (1.1) легко зводиться до рівняння:

$$D^2 = T(S - N_z^2), \tag{1.2}$$

де $T = S - N_y^2 - N_z^2$.

Усі позначення вище взяті згідно з позначеннями Стікса, наведеними у підручнику [11]. Отже, S, D та P – це компоненти тензора діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень у йонному циклотронному діапазоні частот, $\omega_{ci} \le \omega << |\omega_{ce}|$. А саме:

$$S = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2},\ D = \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)},\ P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \tag{1.3}$$

У рівнянні (1.3) $\omega_{c\alpha}$ і $\omega_{p\alpha}$ – це циклотронна та плазмова частоти частинок плазми ґатунку α: $\alpha = i$ для іонів і $\alpha = e$ для електронів, відповідно.

Тензор діелектричної проникності відповідно до [11] задається наступним чином:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Оскільки в іонному циклотронному діапазоні частот $|P| \gg |S|, |D|$, тороїдною складовою електричного поля ШМЗХ можна знехтувати, $E_z = 0$. Відповідно з рівнянь Максвелла при розкладанні у ряд Фур'є компонент електромагнітного поля, наприклад $H_z(\vec{r}, t) = H_z(x)\exp[ik_z z + ik_y y - i\omega t]$ (тут k_z і k_y – це тороїдні та полоїдні хвильові числа, ω – кутова частота хвилі), це призводить до лінійної пропорційності двох пар компонент поля хвилі:

$$-N_z E_y(x) = H_x(x), \quad N_z E_x(x) = H_y(x), \tag{1.5}$$

Але зазначимо, що існують випадки, коли не можна нехтувати компонентом E_z, як, наприклад, при розгляданні нециклотронного загасання швидкої хвилі Ландау і пов'язаного з цим руху швидкої хвилі.

Кенро-Міямото у [14] визначає умову для знаходження частоти відсічки як рівність нулю квадрата показника заломлення згідно з міркувань квазікласичного наближення, відомого, як метод Вентцеля — Крамерса — Бріллюена, але для неоднорідної плазми це не підходить. Якщо ж ми говоримо про плазму у токамаках чи інших термоядерних установках, то розглядаємо саме неоднорідну плазму, тому таке визначення нам не підходить.

У статті [15] автори представили методику та результати вимірювання густини електронів у плазмі токамака TCABR з використанням явища правополяризованої відсічки електронного циклотронного випромінювання (ЕЦВ). У токамаках вимірювання густини електронів є ключовим для діагностики плазми. Одним із методів діагностики є використання електронного циклотронного випромінювання, яке генерується електронами в плазмі, що рухаються в магнітному полі. За певних умов відбувається явище відсічки електронного циклотронного випромінювання, що пов'язане з критичною густиною плазми, де хвиля перестає поширюватися. Це дозволяє вимірювати густину електронів у точці відсічки. В експериментах використовували токамак TCABR, який має модульну конструкцію для вивчення різних режимів роботи плазми. Авторський метод було засновано на правополяризованій компоненті електронного циклотронного випромінювання (О-мода), яка чутлива до густини електронів. Частота відсічки пов’язана з плазмовою частотою і, отже, із густиною електронів. Вимірювання проводили за допомогою спектрометра, що реєстрував частотні профілі випромінювання. Метод правополяризованої відсічки електронного циклотронного випромінювання продемонстрував високу точність та надійність для діагностики густини електронів у плазмі токамака. Результати відкривають можливість застосування цього методу для дослідження різних режимів роботи токамаків, включаючи режими з високою густиною та режими з нестабільностями.

1.2. Точки відсічки або точки повороту

Розглянемо інший підхід до знаходження точки відсічки. Він стосується ситуації, коли дослідник шукає граничну густину в неоднорідній плазмі для фіксованої частоти. Ця густина дозволяє знайти координату, яка відокремлює простір, в якому поширюється відповідна мода, від простору, в якому мода просторово загасає. Слідом за Федорюком [16] цю координату надалі називаємо точкою повороту. Умови визначення координат точки повороту залежать також від значень градієнтів параметрів плазми, а не тільки від самих параметрів. Умови істотно відрізняються від умови (1.1). Причому вони є різними для різних компонент хвильового поля: одна умова виводиться нижче для E_x і H_y, інша – для E_y і H_x, а третя – для H_z.

Автори статті [17] досліджували явища відсічки і резонансів у полоїдному перерізі плазми токамака для хвиль у йонному циклотронному діапазоні частот. Ці явища мають важливе значення для поширення електромагнітних хвиль у плазмі та пов'язані з діагностикою, нагріванням та керуванням плазмовими процесами у токамаках. У роботі використано аналітичне та чисельне моделювання розповсюдження електромагнітних хвиль у полоїдному перерізі плазми токамака. Автори визначили частоти відсічок для хвиль різної поляризації. Виявилося, що положення відсічок залежить від густини плазми та величини магнітного поля. Локальні відсічки були виявлені на межі магнітних поверхонь, де густина плазми наближається до критичних значень. Результати показали, що відсічки та резонанси сильно залежать від локальної геометрії магнітного поля, зокрема від кривизни та ухилу магнітних поверхонь. Було показано, що відсічка може обмежувати ефективне проникнення хвиль углиб плазми, що потребує врахування цих ефектів при розробці сценаріїв нагрівання та діагностики. Це підтверджує актуальність тематики дослідження відсічок для хвиль у йонному циклотронному діапазоні частот.

У статті [18] обговорено також точки відсічки та їх роль у нагріванні плазми за допомогою йонного циклотронного резонансу. Положення точок відсічки залежить від густини плазми, магнітного поля та складу плазми. Ці параметри ретельно контролюються задля забезпечення оптимального нагрівання. Розглядаються питання, пов'язані з багатокомпонентною плазмою, де наявність різних ґатунків іонів впливає на розташування точок відсічки і, отже, на поведінку електромагнітних хвиль у йонному циклотронному діапазоні частот (ІЦДЧ). У даній роботі не розглянуто залежність положення точок відсічки від градієнтів параметрів плазми, які також впливають на положення точок повороту.

Автор статті [19] дослідив поверхні резонансів і відсічки в іонному циклотронному діапазоні частот для багатокомпонентної плазми в аксіально-симетричній тороїдній геометрії. Запропоновано розширення поняття відсічки для застосування до диференціальних рівнянь, що дає можливість визначити категорії поверхонь відсічок, що характеризуються особливостями, що вважаються незалежними від градієнтів рівноважних величин. Показано, що задача знаходження резонансних поверхонь та поверхонь відсічок в аксіально-симетричній плазмі може бути зведена до розв'язку звичайних диференціальних рівнянь, що спрощує аналіз та моделювання цих явищ. Ці результати сприяють глибшому розумінню поведінки хвиль в діапазоні йонного циклотронного резонансу в багатокомпонентній плазмі, що має важливе значення для оптимізації процесів нагріву та стійкості плазми в тороїдних установках, таких як токамаки. Це підтверджує актуальність нашого дослідження.

Точки повороту розглядають у літературі нечасто через складність їх дослідження. У той час, як частоти відсічки можна знайти лише на основі параметрів плазми, то для знаходження точок повороту необхідно враховувати також і градієнти цих параметрів. Наприклад, у класичних роботах [11-14] немає жодної згадки про точки повороту. Але, як показав аналіз літератури, вивчення точок повороту є й фундаментальним завданням фізики плазми й може допомогти у розробці сценаріїв нагрівання та діагностики плазми та їх оптимізації в установках типу токамак.

1.3. Умови знаходження точок повороту

Загальний підхід до виведення цих умов є відомим з теорії звичайних диференціальних рівнянь [16]. Наведемо загальний метод. Звичайне лінійне диференціальне рівняння другого порядку можна представити у вигляді

$$a(x)f'' + b(x)f' + c(x)f = 0. \tag{1.6}$$

У (1.6) усі коефіцієнти: $a(x)$, $b(x)$ і $c(x)$ є дійсними у випадку, коли рівняння (1.6) описує поширення ШМЗХ без урахування дисипації. Роль дисипації є фізично зрозумілою, тому ми її не розглядатимемо. У точці повороту $x = x_0$ корені характеристичного рівняння

$$a(x)\Lambda^2 + b(x)\Lambda + c(x) = 0, \tag{1.7}$$

мають збігатися, аби обидва лінійно незалежні розв`язки рівняння разом міняли свою природу з таких, що поширюються, до таких, що просторово загасають. Умова визначення x_0 у такому випадку полягає в прирівняні до нуля дискримінанта $D(x) = b^2 - 4ac$ характеристичного рівняння (1.7). Дискримінант має протилежні знаки по різні боки від x_0. З одного боку $D(x) > 0$, і обидва корені рівняння (1.7) є дійсними. З цього боку хвиля просторово загасає, оскільки нескінченне («експоненціальне») збільшення амплітуди хвилі (наприклад, $H_z(x)$) із віддаленням від x_0 не має фізичного змісту. З протилежного боку $D(x) < 0$, і обидва корені рівняння (1.7) є комплексними. Це означає, що хвиля поширюється, а її амплітуда (наприклад, $H_z(x)$) коливається з координатою x.

У більшості підручників з теорії диференційних рівнянь рівняння (1.6) розглядають без доданку з першою похідною від шуканої функції [20, 21]. Відповідно, також видозмінюється й рівняння (1.7). Такий випадок є більш простим, але при цьому недостатньо інформативним.

Звісно, з математичної точки зору рівняння (1.6) можна заміною шуканої функції звести до рівняння без першої похідної від шуканої функції, що спричиняє відповідну зміну характеристичного рівнянні (1.7) [22]. Але така заміна призведе до того, що за спрощеним рівнянням буде отримано нові точки повороту, які відрізняються від точок повороту початкової функції. У класичному підручнику з теорії диференціальних рівнянь [23] цю проблему взагалі не розглядають. У іншій класичній роботі [24] також відсутній розгляд даної проблеми: розглянуті квазілінійні рівняння, нелінійні рівняння, диференційні рівняння в частинних похідних, але про точки повороту та їх пошук зовсім не йдеться.

У [25] про точку повороту згадано лише по відношенню до диференціального рівняння першого порядку з явно заданою залежністю правої частини, що також є спрощеною версією рівняння (1.6) і не підходить нам для точок відсічки для випадку ШМЗХ.

У [26] також не розглянуто рівняння (1.6) з усіма трьома доданками $a(x)f''$, $b(x)f'$ та $c(x)f$, відповідно не наводиться методика знаходження точок повороту для повного рівняння, яким є (1.6). У роботі, як і у більшості інших, розглядають найпростіший випадок – рівняння без першої похідної від шуканої функції ($b(x)f'$). Даний принцип підходить тільки тоді, коли необхідно знайти розв'язок рівняння, що можна зробити через метод заміни шуканої функції, але отримана нова функція має свою, іншу точку повороту. У фізичних задачах можна знайти випадки, коли можна знехтувати доданком з першою похідною і тоді користуватися спрощеною методикою з класичних робіт. Наприклад, у діагностиці плазми, як правило, використовують не швидку, а повільну моду в діапазоні електронної циклотронної частоти. В неї короткі хвилі, для яких доданок у диференційному рівнянні, що описує поширення цих хвиль, із другою похідною від шуканої функції є набагато більшим за доданок із першою похідною, тому такої проблеми, як для швидкої хвилі, там немає.

Ми у своєму дослідженні спираємося на підхід, наведений у [16]. У цій роботі дається визначення характеристичного рівняння (1.7), визначення точки повороту, а також застосування цих визначень до диференціального рівняння другого порядку (1.6) із першою похідною від шуканої функції ($b(x)f'$).

1.4. Локальний Альфвенів резонанс

Альфвенові хвилі (АХ) були передбачені Ганнесом Альфвеном вже більше вісімдесяти років тому [27]. Незабаром після того їх уже експериментально спостерігав Денісов, а згодом й Аллен зі співавторами [28]. Відтоді АХ широко досліджують завдяки своїм численним практичним застосуванням, зокрема, у термоядерній плазмі та астрофізиці.

Неоднорідність плазми як за лабораторних умов, так і в природі створює передумови для розповсюдження різних типів АХ. Наприклад, еліптична форма поперечного перерізу термоядерного пристрою, як було показано в [29], призводить до виникнення Альфвенових хвиль, викликаних еліптичністю, (АХЕ). АХЕ з нульовим тороїдним номером моди спостерігали, наприклад, в діапазоні частот альфвенових власних мод у токамаці JET [30]. Тороїдна періодична неоднорідність термоядерної плазми породжує тороїдні Альфвенові хвилі (ТАХ). В [31] було продемонстровано існування розширеного спектру ідеальних ТАХ у межах розриву Альфвена. Межі розриву Альфвена (Alfven gap boundaries) – це частотні границі так званого частотного розриву континууму Альфвенових хвиль (Alfven continuum gap), який виникає в спектрі Альфвенових хвиль у тороїдних плазмових системах, зокрема у токамаках. У тороїдних системах континуум частот може бути порушений, і тоді з’являються так звані частотні розриви. Це інтервали частот, де не існує континууму Альфвенових хвиль. Іншими словами, в цих розривах немає локально-резонансних хвиль [31].

Після експериментальних спостережень ТАХ при інжекції нейтральних частинок (ІНЧ) назустріч струму в плазмі в TCV у [32] було проведено поглиблений аналіз впливу таких хвиль на глобальне утримання плазми та продуктивність роботи термоядерних реакторів, зокрема токамаків.

Наявність так званих неосесиметричних резонансів взаємодії хвиля-частинка в стеллараторах, які пов'язані з відсутністю осьової симетрії магнітної конфігурації, як виявлено в [33], має сильний стабілізуючий вплив через механізм Ландау на ТАХ, дестабілізовані енергійними йонами. У [33] також повідомлялося про взаємодію теплових іонів із високочастотними Альфвеновими модами (власними Альфвеновими модами, спричиненими гвинтовою симетрією, та власними Альфвеновими модами, ініційованими дзеркальною симетрією), що призводить до значного загасання цих мод при високому тиску, який приписують, наприклад, Геліас реактору.

Фізику поперечного перенесення енергії Альфвеновими хвилями в тороїдній плазмі висвітлено в [34]. На відміну від класичних Альфвенових хвиль у нескінченній плазмі, було виявлено, що Альфвенові хвилі в тороїдних системах викликають стиснення плазми за рахунок зв'язку з швидкими магнітозвуковими хвилями, що забезпечує передачу енергії. Було розраховано радіальні групові швидкості біжучих хвиль, що становлять глобальні власні Альфвенові моди та ТАХ. Здобуті результати були застосовані, щоб пояснити, як власні Альфвенові моди можуть забезпечити просторове каналювання енергії – передачу енергії цими модами з нестабільної області плазми в область, де домінує загасання моди.

Нелінійна динаміка багатьох тороїдно індукованих власних Альфвенових мод — підмножини глобальних власних Альфвенових мод у плазмі токамака, де магнітне поле плазми змінюється плавно – була вивчена в [35]. Аналіз проводився для триплету мод з тороїдними номерами мод n = 1, 2, 3. Було виявлено, що часова еволюція амплітуд і фази (що відповідає за свистячі атмосферики) мод демонструє біфуркації Хопфа до стабільної межі циклів. Цей висновок було застосовано для пояснення синхронної циклічної дестабілізації багатьох мод в лавинах Альфвена (раптове зростання амплітуд кластера мод з різним n і приблизно рівним інтервалом частот) в NSTX і вибухових мод в MAST.

Детальний огляд досліджень АХ в Інституті фізики плазми в Харкові, включаючи дослідження, проведені у співпраці з дослідницькими центрами Швеції, Бельгії, Великої Британії та Німеччини, представлено в [36] та [37]. Зокрема, в [37] повідомлялося, що різні типи власних Альфвенових мод дестабілізуються швидкими йонами в широкому діапазоні частот у серії експериментів на JET у змішаній плазмі D–3He. Радіальну локалізацію різних типів власних Альфвенових мод визначали за допомогою рефлектометра X-mode, багатолінійного інтерферометра та м’якої рентгенової діагностики. Спостерігалися два різні типи власних мод каскаду Альфвена (КА), які походять від наявності локального мінімуму запасу міцності q (відношення кількості повних обертів, що здійснює певна магнітна лінія навколо тороїдного шляху до кількості обертів навколо полоїдного шляху). На додаток до КА з частотою нижче частоти ТАХ, КА з частотою вище частоти ТАХ були дестабілізовані енергійними йонами. Обидва КА були локалізовані в центральних областях плазми.

Іони дейтерію, прискорені до діапазону MeV у трийонному високочастотному сценарії ІНП, як було показано в [38, 39], утворюють альфа-частинки, що народжуються термоядерним синтезом, у результаті реакції D-3He. Повідомлялося, що ці альфа-частинки збуджують АХЕ з тороїдними індексами моди $n = -1$ і $n = 0$. Показано, що альфа-частинки, що народжуються в результаті синтезу, а не прискорені D-іони, взаємодіють з АХЕ з негативними тороїдними індексами моди. Було виявлено, що АХЕ з $n = 0$ збуджуються лише в тому випадку, якщо розподіл енергії популяції швидких іонів має так званий «хвостовий розподіл» (де $\partial f/\partial E > 0$).

Ідентифікація ТАХ в різних радіальних місцях у протиструмових сценаріях ІНП у TCV була представлена в [40]. Повідомлялося, що ці режими суттєво відрізняються від тих, що спостерігалися раніше в сценаріях із прямострумовою позаосьовою ІНП та електронним циклотронним нагріванням.

Фур'є-аналіз детектора втрат швидких іонів виявив когерентні втрати швидких іонів у діапазоні 1...2 МГц в MAST-U [41]. Було виявлено, що втрати корелюють з модами, ідентифікованими котушками Мирнова, як компресійні та глобальні власні моди Альфвена.

Локальний Альфвенів резонанс (ЛАР) як метод нагрівання плазми вперше було досліджено в [42]. Повний огляд теоретичних досліджень Альфвенового нагрівання плазми подано в [43]. ЛАР був ефективно застосований для нагрівання плазми в різних термоядерних пристроях (див., наприклад, [44, 45]). Відомо, що положення ЛАР зміщується до краю плазми зі збільшенням густини плазми, що знижує ефективність Альфвенового методу для нагрівання плазми та його застосування для цих цілей у сучасних експериментах. Вичерпний огляд нещодавніх досліджень ЛАР та Альфвенового нагріву плазми було надано, наприклад, у [46].

Збудження поверхневих хвиль з $|k_z| < k_0$ і $\omega > \omega_{ci}$ в резонансних областях Альфвена антеною ICRF було чисельно продемонстровано в [47] із зосередженням уваги на випадках DEMO та ITER (тут k_z — тороїдне хвильове число, k_0 — вакуумне хвильове число, $k_0 = \omega/c$, ω – кутова частота хвилі, ω_{ci} – іонна циклотронна частота, c – швидкість світла у вакуумі). Просторовий розподіл поля швидкої хвилі був отриманий напіваналітичним кодом ANTITER II у плоскій геометрії шляхом підсумовування рядів Фур’є за тороїдними та полоїдними номерами мод. Було чітко продемонстровано кілька добре радіально розділених стоячих (у тороїдному напрямку) хвильових мод в області розрідженої плазми. Це відрізняється від того, що обговорюється в цій роботі. Різниця пояснюється тим, що в даній роботі досліджується проблема власних функцій і власних значень, а не проблема вимушених коливань, як це було в [47].

Спектр локалізованих радіочастотних сигналів був виявлений зондом в SOL токамака ASDEX Upgrade під час дослідження повільних хвиль в іонному циклотронному діапазоні частот [15, 48, 49]. У розряді №40901 електростатичний зонд на маніпуляторі середньої площини AUG був підключений до аналізатора спектра та занурений на *0,1 м* радіально в SOL. Сигнал на частоті приблизно в *100 МГц* був навмисно введений у плазму для досліджень повільної хвилі ІЦДЧ від одного з обмежувачів, підключених до зонда вздовж ліній магнітного поля. Спектри близько *2,38 с* і *2,51 с* були виявлені зондом один раз на його шляху і один раз на його виході з SOL. Виявилося, що в ці моменти часу, коли зонд рухався крізь градієнт густини, сигнал, випущений на частоті *100 МГц*, взаємодіяв із власними модами плазми, і спостерігався складний спектр із кількома різними частотами.

У цій роботі розглядається можливість локалізації власного сигналу іонного циклотронного діапазону частот поблизу ЛАР. Для знаходження просторових залежностей компонент електромагнітного поля в області ЛАР у роботі застосовується метод вузького шару.

Метод вузького шару є одним із ключових інструментів для аналізу та розв'язання диференціальних рівнянь у задачах, де виникають області з різкими змінами коефіцієнтів у рівняннях. Такі явища виникають, наприклад, у гідродинаміці, теплообміні, електродинаміці та інших прикладних галузях фізики та техніки. Цей метод дає можливість виділити області – так звані приграничні шари, де поведінка розв'язку відрізняється від основної області, і побудувати асимптотичні розкладання для аналізу та наближеного розв'язку рівнянь.

У задачах з малими параметрами при старших похідних диференціальних рівнянь часто спостерігають області, де розв'язки (вирази для функцій, які відшукують) змінюються різко, та області, де зміна функції є плавною – так звана основна область. Основна ідея методу вузького шару полягає у поділі розв'язку задачі на два складники [50, 51]:

- зовнішній розв'язок, який описує поведінку в основній області, де вплив граничного шару є нехтовно малим;
- внутрішній розв'язок, що описує різкі зміни коефіцієнтів у рівняннях у межах вузької області – так званого граничного шару.

Після знаходження цих розв'язків проводиться їхня «зшивка» у перехідній області для отримання глобального наближення.

Метод вузького шару використовують у багатьох областях фізики, зокрема, у гідродинаміці, теплопровідності та електродинаміці (що нас найбільше цікавить). Цей метод застосовують у задачах, коли параметри плазми змінюються швидко. Наприклад, у зоні, де відбувається відсічка хвилі, густина плазми змінюються різко. Відповідно, у такому випадку доцільно застосувати метод вузького шару, який на відміну від методу ВКБ, застосовують у випадках, де зміна функції у розв'язку відбувається повільно. Аналіз таких задач із використанням методу вузького шару дає можливість отримувати наближені розв'язки, що зберігають ключові фізичні властивості процесу, який розглядається.

1.5. Замкнені магнітні поверхні та простір поза останньою замкненою поверхнею

Загально відомо, що замкнені магнітні поверхні є дуже важливим елементом для магнітного утримання плазми в термоядерних реакторах, до яких, зокрема, відносяться токамаки. Вони сприяють стабільності плазми у реакторі, оскільки перешкоджають «зриву» плазми на стінки реактора. Це дає можливість уникнути втрат енергії та забезпечити більш тривале утримання високотемпературної плазми.

Замкнені магнітні поверхні характеризуються певною топологією, де кожна силова лінія поля проходить по тороїдній траєкторії, не перетинаючись сама із собою. Це дає можливість плазмі залишатись у внутрішніх межах замкненої магнітної поверхні. Це, у свою чергу, дає можливість зменшити втрати енергії через теплопровідність та перешкоджає дифузії плазми [52].

У токамаках, як відомо, замкнені магнітні поверхні утворюються за рахунок тороїдного та полоїдного магнітних полів. Тороїдне поле створюється магнітними котушками, що охоплюють плазму, тоді як полоїдне поле генерується струмом, що протікає крізь плазму [53].

Простір поза останньою замкненою магнітною поверхнею (так званий «порожній простір») відіграє важливу роль у стабільності плазми та роботі термоядерних установок, зокрема, токамаків. Ця область характеризується відкритими магнітними силовими лініями, які можуть контактувати зі стінками реактора. У токамаках вона зазвичай називається «зовнішнім шаром» або «Scrape-Off Layer, SOL».

В області SOL та поблизу неї відбуваються значні взаємодії між плазмою та стінками реактора, що може призводити до ерозії стінок і потраплянню домішок у плазму. Контроль над цим процесом є критично важливим для зменшення забруднення плазми, що впливає на ефективність термоядерної реакції. Одним із способів зменшення впливу цього процесу на термоядерну плазму є використання диверторів, які спрямовують потік частинок із SOL у спеціальні зони збору, зменшуючи взаємодію з основними стінками реактора [54].

Температура та густина плазми у цій області значно нижчі, ніж у центральній частині плазмового стовпа, через взаємодію з матеріалами стінок та процесами охолодження. Ця область є предметом активних досліджень, оскільки покращення розуміння процесів у SOL може значно підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок, зокрема, токамаків.

1.6. Часова еволюція встановлення електромагнітних коливань при проходженні крізь межу поділу двох середовищ

Як було зазначено вище, точки відсічки розділяють область, де поширюється відповідна мода хвилі, від простору, в якому мода просторово загасає. Поширення електромагнітних сигналів у другій області є предметом окремих досліджень, пов’язаних із вивченням передвісників Зоммерфельда. Точки відсічки ніби розділяють середовище на дві області, між якими є межа поділу.

У статті [8] було досліджено проходження електромагнітної хвилі крізь ізотропну плазму при падінні хвилі на межу плазми під прямим кутом. У роботі наведені точні формули, що описують поширення електромагнітної хвилі у такому випадку для плазми з будь-якою діелектричною проникністю на будь-якій відстані та для будь-якого часу, також у роботі наведено наближені формули, за якими можна обчислити електричне та магнітне поля та густину потоку енергії у наближеннях, що відповідають перехідним процесам в ізотропній плазмі без зовнішнього магнітного поля.

У статті [9] розглянуто формування електромагнітних коливань у плазмі, коли джерело електромагнітного сигналу розташовано безпосередньо у плазмі. У роботі також наведені точні формули, що описують формування електромагнітних коливань у такому випадку для плазми з будь-якою діелектричною проникністю на будь-якій відстані та для будь-якого часу. Так само, як і роботі [8] досліджено формування електромагнітних коливань у наближеннях, що відповідають перехідним процесам у плазмі.

Явище поширення електромагнітних хвиль крізь плазму використовують, наприклад, для проведення діагностики плазми, в іоносферних та радарних дослідженнях, в технологічних процесах та у дослідженнях з керованого термоядерного синтезу [8-10, 55-57]. Вивчення безпосередньо передвісників Зоммерфельда може бути корисним для плазмонних хвилеводів [58], георадарів проникаючої дії [59], підводних комунікацій [60]. Також використання передвісників може бути корисним для визначення оптимального проникнення імпульсів у дистанційному зондуванні в медицині [61].

Зоммерфельд у своїй оригінальній роботі [62, 63] вивчав поширення хвилі в діелектриках у моделі Лоренца – моделі резонансної поляризації діелектриків. У свої роботі він дійшов висновку, що сигнал не може поширюватися у середовищі зі швидкістю, що більша за швидкість світла у вакуумі, але так само було встановлено, що фронт такого сигналу поширюватиметься зі швидкістю, що наближатиметься до швидкості світла.

У статті [64] Хаскель та Кейс розширили теорію для моделі Друде для діелектриків (частинний випадок моделі Лоренца, коли резонансна частота поляризації дорівнює нулю), що також було досліджено та описано у роботі [65].

Останні огляди розвитку теорії [65, 66] класифікували та узагальнили основні здобуті результати і дали уявлення, що деякі аспекти вивчення динаміки проходження імпульсів можна обчислити за допомогою сучасної аналітики.

У роботі [66] представлено сучасний асимптотичний опис теорії Зоммерфельда-Бріллюена, яка заснована на теорії рівномірних асимптотичних розкладів інтегралів. Ця робота завершила розгляд задачі передачі сигналу крізь диспергуюче середовище, яке насправді відрізняється від задачі, яку безпосередньо розв'язував Зоммерфельд, де джерело сигналу знаходиться ззовні середовища.

Зазвичай теорія частотної області передвісників розрізняє першого передвісника (передвісника Зоммерфельда) та другого передвісника (передвісника Бріллюена), які відповідають високочастотним та низькочастотним внескам із частотного спектра падаючих імпульсів відповідно. Прості асимптотичні форми для передвісників Зоммерфельда та Бріллюена були отримані авторами у статті [67]. Там розглядалися модульовані світлові імпульси, що поширюються в густому середовищі Лоренца. Середовище було непрозорим у широкій спектральній області, включаючи частоту сигналу. Були вивчені різні часові модуляції амплітуди імпульсу, включаючи канонічну ступінчасту модуляцію синусоїдального сигналу. Результати були отримані за допомогою стандартних процедур Лапласа-Фур'є, які були простішими, ніж уніфіковані методи сідлоподібних спадів, про які розповідається, наприклад, у роботі [68]. Але на коротких відстанях поширення сигналу ці два передвісники перекривались, а накладання цих передвісників створювало оптичний передвісник [69].

Оптичні передвісники та їх внесок в основний сигнал для малих оптичних глибин досліджені експериментально та чисельно в роботі [70]. Автори здійснили просту модифікацію теорії асимптотичних передвісників, щоб розрізнити передвісників Зоммерфельда та Бріллюена. Аналіз часової області поширення імпульсу за подібних умов не може відокремити ці два передвісники один від одного. Експериментально також не виходить відокремити ці два передвісники. Гібридно-асимптотичний метод був застосований у роботі [71] для ідентифікації основного сигналу та передвісників у разі поетапно-модульованої передачі імпульсу крізь середовище з електромагнітно індукованою прозорістю (носій ЕІП). Автори запропонували надійний контроль передач або затримок між передвісниками та основним сигналом. Останній є важливим для біомедичних зображень та оптичного зв'язку.

Труднощі експериментального спостереження передвісників обговорювались у роботі [72]. Як результат, для експериментів були запропоновані спеціальні середовища (системи уповільненого світла) з природним вікном прозорості або вікном ЕІП.

Детальне вивчення передвісників Зоммерфельда було виконано для ізотропної плазми без зіткнень, але без зовнішнього магнітного поля, у часовій області, а не в області частот [7]. У цій роботі пропонується нове уявлення про динаміку проходження передвісників Зоммерфельда у часовій області, де деякі результати можна отримати більш точно та простіше, ніж в існуючих теоріях. Результати, що отримані в роботі, є простими для інтерпретації та подальшого аналізу, бо не містять складних інтегралів, які важко, а іноді взагалі неможливо, обчислити.

Важливим зауваженням є те, що розвинені аналітичні теорії або є суто експериментальними, або містять дуже складні формули для подальшого аналізу і числових розрахунків. Прості для аналізу та числового моделювання теорії розглядають лише найпростіші випадки – перпендикулярне падіння сигналу на межу поділу двох середовищ, плазма без зовнішнього магнітного поля тощо.

1.7. Висновки до розділу 1

Підсумком огляду сучасної науково-технічної літератури з поширення швидкої магнітозвукової хвилі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака є наступне:

1. На теперішній час існують два підходи до визначення відсічки. Один підхід засновано на знаходженні частоти відсічки, але він є достатньо вивченим. Другий же підхід, який полягає у знаходженні точок відсічки, ні у фізичній, ні

у математичній літературі майже не вивчається, хоча може мати широке коло фізичного застосування у плануванні роботи токамаків.

2. Локальний Альфвенів резонанс широко вивчають у сучасній літературі у різноманітних плазмових структурах з різноманітними параметрами.

3. Вивчення SOL є предметом активних досліджень, оскільки покращення розуміння процесів у просторі SOL може допомогти підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок, зокрема, токамаків.

4. Розгляд теорії передвісників Зоммерфельда для вивчення поведінки сигналу за точками відсічки токамака є дуже складним і глобальним питанням, яке у даній роботі не розглядається.

Таким чином, мета й завдання даної роботи є актуальними та мають практичне значення.

РОЗДІЛ 2. ЯВНИЙ ВИГЛЯД ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА УМОВИ ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧОК ПОВОРОТУ

2.1. Застосування термінології Стікса та розкладання Фур'є до рівнянь Максвелла

Розпочнемо з двох рівнянь Максвелла:

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \tag{2.1}$$

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Як відомо, вектор напруженості електричного поля пов'язаний з вектором індукції електричного поля через тензор діелектричної проникності середовища:

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}. \tag{2.3}$$

Застосуємо тензор діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень у термінології Стікса [11]:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

У такому випадку рівняння (2.3) можна переписати з використанням (2.4) у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SE_x - iDE_y \\ iDE_x + SE_y \\ PE_z \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

З використанням (2.5) рівняння (2.1) та (2.2) у декартових координатах можна розписати наступним чином:

$$\left(rot\vec{E}\right)_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}. \tag{2.6}$$

$$\left(rot\vec{E}\right)_y = \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}. \tag{2.7}$$

$$\left(rot\vec{E}\right)_z = \left(\frac{\partial\left(E_y\right)}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}. \tag{2.8}$$

$$\left(rot\vec{B}\right)_x = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\left(SE_x - iDE_y\right)}{\partial t}. \tag{2.9}$$

$$\left(rot\vec{B}\right)_y = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\left(iDE_x + SE_y\right)}{\partial t}. \tag{2.10}$$

$$\left(rot\vec{B}\right)_z = \left(\frac{\partial\left(H_y\right)}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial(PE_z)}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Використовуючи Фур'є аналіз, подаємо усі компоненти електромагнітного поля у вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t) = f(x)\exp[i(k_z z + k_y y - \omega t)]. \tag{2.12}$$

Будемо вважати, що тензор $\hat{\varepsilon}$ залежить лише від x координати. Виходячи з цього факту, та використовуючи (2.12), рівняння (2.6)-(2.11) матимуть вигляд:

$$ik_y E_z - ik_z E_y = -\frac{-i\omega}{c}H_x. \tag{2.13}$$

$$ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{-i\omega}{c}H_y. \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial\left(E_y\right)}{\partial x} - ik_y E_x = -\frac{-i\omega}{c}H_z. \tag{2.15}$$

$$ik_y H_z - ik_z H_y = \frac{-i\omega}{c}(SE_x - iDE_y). \tag{2.16}$$

$$ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{-i\omega}{c}(iDE_x + SE_y). \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial\left(H_y\right)}{\partial x} - ik_y H_x = \frac{-i\omega}{c}(PE_z). \tag{2.18}$$

Оскільки $|P| \gg |S,D|$ у йонному циклотронному діапазоні частот, у рівнянні (2.18) можна знехтувати амплітудою E_z порівняно з іншими амплітудами. Враховуючи цей факт і виконуючи прості арифметичні спрощення, з рівнянь (2.13)-(2.18) приходимо до рівнянь:

$$|E_z| \to 0. \tag{2.19}$$

$$-N_z E_y = H_x. \tag{2.20}$$

$$N_z E_x = H_y. \tag{2.21}$$

$$i\frac{\partial(E_y)}{\partial x} - ik_y E_x = -\frac{-i\omega}{c} H_z. \tag{2.22}$$

$$-N_y H_z + N_z H_y = (SE_x - iDE_y). \tag{2.23}$$

$$-N_z H_x - \frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x} = (iDE_x + SE_y). \tag{2.24}$$

2.2. Виведення рівняння на тороїдне магнітне поле швидкої магнітозвукової хвилі H_z

Підставимо рівняння (2.20) та (2.21) до рівняння (2.23) та (2.24) відповідно, і отримаємо:

$$-N_y H_z + N_z(N_z E_x) = (SE_x - iDE_y). \tag{2.25}$$

$$-N_z(-N_z E_y) - \frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x} = (iDE_x + SE_y). \tag{2.26}$$

Рівняння (2.25) та (2.26) утворюють систему двох лінійних рівнянь для двох змінних E_x та E_y:

$$(S - N_z^2)E_x - iDE_y = -N_y H_z. \tag{2.27}$$

$$iDE_x + (S - N_z^2)E_y = -\frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \tag{2.28}$$

Розв’яжемо систему рівнянь (2.27) та (2.28) і отримаємо:

$$E_x = \frac{-N_y H_z(S - N_z^2) + (-\frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x})iD}{(S - N_z^2)^2 - D^2} = -\frac{N_y}{N_\perp^2} H_z - \frac{c}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\mu}{N_\perp^2}. \tag{2.29}$$

$$E_y = \frac{(S - N_z^2)(-\frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}) - (-N_y H_z)(iD)}{(S - N_z^2)^2 - D^2} = -\frac{i\mu N_y}{N_\perp^2} H_z - \frac{ic}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{1}{N_\perp^2}. \tag{2.30}$$

У виразах (2.29) та (2.30) введено наступні позначення:

$$\mu = -D/(S - N_z^2), N_\perp^2 = (S - N_z^2)(1 - \mu^2)\,. \qquad (2.31)$$

Підставимо рівняння (2.29) та (2.30) у рівняння (2.15) і після спрощень отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}H_z + \frac{c^2}{\omega^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{1}{N_\perp^2}\right) - N_y\left(\frac{N_y}{N_\perp^2}H_z + \frac{c}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\mu}{N_\perp^2}\right) = H_z. \qquad (2.32)$$

Перший доданок у лівій частині рівняння (2.32) можна розписати:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}H_z\right) = H_z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}\right) + \frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \qquad (2.33)$$

Тоді рівняння (2.32) зводиться до:

$$H_z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}\right) + \frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{\omega^2}\frac{1}{N_\perp^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - N_y\left(\frac{N_y}{N_\perp^2}H_z + \frac{c}{\omega}\frac{\partial H_z}{\partial x}\frac{\mu}{N_\perp^2}\right) = -H_z. \qquad (2.34)$$

У (2.34), другий та п’ятий доданки у лівій частині скорочуються і тоді отримаємо:

$$H_z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\omega}\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{\omega^2}\frac{1}{N_\perp^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) - N_y\left(\frac{N_y}{N_\perp^2}H_z\right) = -H_z. \qquad (2.35)$$

Тепер рівняння (2.35) перепишемо у наступного вигляді:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k_\perp^2}\frac{dH_z}{dx}\right) + \left[1 - \frac{k_y^2}{k_\perp^2} + k_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mu}{k_\perp^2}\right)\right]H_z = 0. \qquad (2.36)$$

У (2.36), введено позначення $k_\perp^2 = k_0^2(S - N_z^2)(1 - \mu^2)$, де $k_0 = \omega/c$ – це хвильове число у вакуумі, $\mu = -D/(S - N_z^2)$, $N_z = k_z/k_0$ – це тороїдний показник заломлення, c – це швидкість поширення світла у вакуумі.

2.3. Виведення рівняння на полоїдне електричне поле швидкої магнітозвукової хвилі E_y

Візьмемо *rot* від рівняння (2.2) і, використовуючи (2.1), отримаємо наступне рівняння:

$$rot(rot\vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{D}. \qquad (2.37)$$

Використовуючи (2.4), знайдемо два рівняння у декартових координатах для x та y координат рівняння (2.37):

$$rot_x(rot\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}(SE_x - iDE_y). \qquad (2.38)$$

$$rot_y(rot\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right) = \frac{\omega^2}{c^2}(iDE_x + SE_y). \qquad (2.39)$$

Застосуємо до (2.28) та (2.29) Фур'є аналіз у вигляді (2.12) та, враховуючи, як і у попередньому пункті, залежність тензора діелектричної проникності лише від x координати, отримаємо:

$$iN_y E'_y + N_y^2 E_x + N_z^2 E_x = SE_x - iDE_y. \qquad (2.40)$$

$$iN_y E'_x - E''_y + N_z^2 E_y = iDE_x + SE_y. \qquad (2.41)$$

У рівняннях (2.40) та (2.41) штрих позначає нормовану похідну $d/d(k_0x)$.

Розділимо по різним частинкам рівнянь (2.40) та (2.41) компоненти електричного поля і отримаємо:

$$iN_y E'_y + iDE_y = (S - N_y^2 - N_z^2)E_x. \qquad (2.42)$$

$$iN_y E'_x - iDE_x = E''_y + (S - N_z^2)E_y. \qquad (2.43)$$

Виразимо E_x з рівняння (2.42) та підставимо до рівняння (2.43). У результаті отримаємо:

$$\left(\frac{S-N_z^2}{T}E_y'\right)' + \left[S - N_z^2 - \frac{D^2}{T} + N_y\left(\frac{D}{T}\right)'\right]E_y = 0, \qquad (2.44)$$

де $T = S - N_y^2 - N_z^2$.

2.4. Виведення рівняння на радіальне електричне поле швидкої магнітозвукової хвилі E_x

Візьмемо нормовану похідну по x координаті ($d/d(k_0x)$) від рівняння (2.40):

$$iN_yE''_y + iD'E_y + iDE'_y = S'E_x + (S - N_y^2 - N_z^2)E'_x. \tag{2.45}$$

І помножимо рівняння (2.41) на iN_y:

$$-N_y^2E'_x + N_y^2DE_x = iN_yE''_y + iN_y(S - N_z^2)E_y. \tag{2.46}$$

Тепер виразимо з рівнянь (2.45) та (2.46) $iN_yE''_y$ і прирівняємо, у результаті отримаємо рівняння:

$$\begin{gathered} iN_yE''_y = -iD'E_y - iDE'_y + S'E_x + \left(S - N_y^2 - N_z^2\right)E'_x = \\ -N_y^2E'_x + N_y^2DE_x - iN_y(S - N_z^2)E_y. \end{gathered} \tag{2.47}$$

Зробимо елементарні спрощення рівняння (2.47):

$$\begin{gathered} -iD'E_y - iDE'_y + S'E_x + (S - N_z^2)E'_x = \\ N_y^2DE_x - iN_y(S - N_z^2)E_y. \end{gathered} \tag{2.48}$$

Щоб виразити E'_y, рівняння (2.48) потрібно помножити на N_y:

$$\begin{gathered} -iN_yD'E_y - iDN_yE'_y + N_yS'E_x + N_y(S - N_z^2)E'_x = \\ N_y^3DE_x - iN_y^2(S - N_z^2)E_y. \end{gathered} \tag{2.49}$$

Виразимо E'_y з рівняння (2.45) і підставимо до рівняння (2.49):

$$\begin{gathered} -iN_yD'E_y - D(-iDE_y + (S - N_y^2 - N_z^2)E_x) + N_yS'E_x + N_y(S - N_z^2)E'_x = \\ N_y^3DE_x - iN_y^2(S - N_z^2)E_y. \end{gathered} \tag{2.50}$$

Приводимо подібні доданки у рівнянні (2.50) та отримаємо:

$$\begin{gathered} iE_y\left[-N_yD' + D^2 + N_y^2(S - N_z^2)\right] = \\ -E_x\left[N_yS' - N_y^3D - DT\right] - E'_xN_y(S - N_z^2). \end{gathered} \tag{2.51}$$

Виражаємо E_y з рівняння (2.51) та підставимо у рівняння (2.45):

$$\begin{gathered} N_y\left(\frac{-E_x\left[N_yS' - N_y^3D - DT\right] - E'_xN_y(S - N_z^2)}{-N_yD' + D^2 + N_y^2(S - N_z^2)}\right)' \\ + D\left(\frac{-E_x\left[N_yS' - N_y^3D - DT\right] - E'_xN_y(S - N_z^2)}{-N_yD' + D^2 + N_y^2(S - N_z^2)}\right) = \\ (S - N_y^2 - N_z^2)E_x. \end{gathered} \tag{2.52}$$

Нарешті, рівняння (2.52) можна подати у вигляді:

$$-N_y^2(S-N_z^2)E''_x+\left[\frac{N_y^2(S-N_z^2)\left(2DD'-N_yD''+N_y^2S'\right)}{D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)}-2N_y^2S'\right]E'_x+$$
$$\left\{\begin{matrix}-N_yS'D+N_yTD'+N_y^2D^2-N_y^2(S-N_z^2)T-\\ \left[D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)\right]\left[\frac{N_y^2S'-N_yD(S-N_z^2)}{D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)}\right]'\end{matrix}\right\}E_x=0. \tag{2.53}$$

2.5. Умови знаходження точок повороту

Виходячи з попередніх пунктів розділу, маємо три наступні звичайні диференціальні рівняння другого порядку для амплітуд компонент ШМЗХ (2.36), (2.44) та (2.53).

Перепишемо рівняння (2.36) у тих самих термінах, що й (2.44) та (2.53). У результаті маємо:

$$\left(\frac{S-N_z^2}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)}H_z'\right)'$$
$$+\left[1-\frac{N_y^2(S-N_z^2)}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)}\right. \tag{2.54}$$
$$\left.-\left(\frac{N_yD}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)}\right)'\right]H_z=0.$$

У рівняннях (2.44), (2.53) та (2.54) штрих позначає нормовану похідну $d/d(k_0x)$.

Умови визначення точок повороту в неоднорідній плазмі для хвиль з $k_y\neq 0$:

$$0=N_y\left[\frac{(S-N_z^2)\left(2DD'-N_yD''+N_y^2S'\right)}{D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)}-2S'\right]^2+4(S-N_z^2)$$
$$\times\left(\begin{matrix}-S'D+TD'+N_yD^2-N_y(S-N_z^2)T-\\ \left[D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)\right]\left[\frac{N_yS'-D(S-N_z^2)}{D^2-N_yD'+N_y^2(S-N_z^2)}\right]'\end{matrix}\right), \tag{2.55}$$

для пари компонент хвильового поля E_x і H_y,

$$\left(\frac{N_y^2 S'}{T^2}\right)^2 - 4\left(\frac{S-N_z^2}{T}\right)\left[S - N_z^2 - \frac{D^2}{T} + N_y\left(\frac{D}{T}\right)'\right] = 0, \tag{2.56}$$

для пари компонент хвильового поля E_y і H_x.

І, нарешті, умова визначення точки повороту тороїдного магнітного поля ШМЗХ H_z має вигляд:

$$\left[\left(\frac{S-N_z^2}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)}\right)'\right]^2 - 4\frac{S-N_z^2}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)} \times \left[1 - \frac{N_y^2(S-N_z^2)}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)} - \left(\frac{N_y D}{(S-N_z^2-D)(S-N_z^2+D)}\right)'\right] = 0. \tag{2.57}$$

Умови (2.55)-(2.57) перетворюються на рівняння (1.1) у випадку однорідної плазми, тобто якщо дорівнює нулю $d/d(k_0x) = 0$. Рівняння (2.56) є менш громіздким серед умов (2.55)-(2.57), що робить його найбільш придатним для аналізу того, чи є неоднорідність плазми значною чи ні при визначенні точок повороту. Якщо припустити, що $N_y^2 \geq 2|(1 - N_z^2)(\omega/\omega_{ci} - 2)|$, і ввести L як масштаб довжини зміни параметрів плазми, $S' \sim S/(k_0L)$, то масштаб повинен бути достатньо великим, щоб можна було знехтувати неоднорідністю, так що:

$$L \gg \omega/(\omega_{ci}k_y). \tag{2.58}$$

Умови визначення точок повороту в неоднорідній плазмі для хвиль з $k_y = 0$ значно є простішими, ніж (2.55)-(2.57). Зокрема, умова для пари компонент хвильового поля E_x і H_y в цьому випадку виглядає так:

$$\frac{S-N_z^2}{D}\left(\frac{D}{S-N_z^2}\right)'' - \left(\frac{S-N_z^2}{D}\right)^2\left(\frac{D}{S-N_z^2}\right)'^2 - \frac{(S-N_z^2)^2 - D^2}{S-N_z^2} = 0. \tag{2.59}$$

Важливо підкреслити, що пара компонент хвильового поля E_y і H_x з $k_y = 0$ є єдиною, для якої умова визначення точки повороту не містить жодної просторової похідної від параметрів плазми. Іншими словами, вона єдина, яка не змінює своєї форми порівняно з умовою (1.1).

І, нарешті, умова визначення точки повороту тороїдного магнітного поля H_z хвилі з $k_y = 0$ має вигляд:

$$\left(\frac{(S-N_z^2)^2-D^2}{S-N_z^2}\right)'^2-4\left(\frac{(S-N_z^2)^2-D^2}{S-N_z^2}\right)^3=0. \tag{2.60}$$

2.6. Висновки до розділу 2

У другому розділі представлено детальне виведення умов на знаходження точок відсічки для різних компонент електромагнітного поля ШМЗХ. Отримання даних умов було виконано на основі класичних рівнянь – рівнянь Максвелла. До цих рівнянь було застосовано наближення холодної плазми без зіткнень у діапазоні йонної циклотронної частоти.

Після чого було застосовано Фур'є аналіз для усіх компонент електромагнітного поля. Далі було проведено спрощення отриманих рівнянь, що привело до отримання умов на знаходження точок відсічки.

Умови визначення точок повороту було отримано для випадку неоднорідної плазми для хвиль з $k_y \neq 0$ і для хвиль з $k_y = 0$.

РОЗДІЛ 3. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧОК ПОВОРОТУ

3.1. Лінійний профіль густини

На першому кроці розглянемо лінійну залежність густини частинок плазми $n_e(x) = n_0 x/\lambda$, а також однорідне зовнішнє стале магнітне поле. Далі просторовою зміною зовнішнього магнітного поля під час чисельного аналізу нехтуємо. У цьому випадку граничне положення $x_{uniform}$, розраховане з умови (1.1), відповідає фіксованому значенню густини частинок плазми і закономірно лінійно зростає зі зворотним градієнтом густини, як показано на рисунку 3.1 суцільною лінією. Точки повороту $x_{cut\text{-}off}$ для E_y і H_y представлені штриховою кривою, для E_y і H_x – пунктирною кривою, а для H_z – штрихпунктирною кривою. Точки повороту $x_{cut\text{-}off}$ для E_x і H_y розраховано як розв’язок рівняння (2.55), для E_y та H_x – рівняння (2.56), а для H_z – рівняння (2.57). Квадрат показника заломлення Альфвена, застосований на рисунках 3.1-3.5, обчислюється за означенням $N_A^2(x) \equiv \omega_{pi}^2 / \omega_{ci}^2$.

Вибрано наступні параметри плазми: $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, зовнішнє стале магнітне поле $B_0 = 2.0\ Тл$, полоїдний номер моди хвилі $m = +5$, тороїдний номер моди хвилі $l = 1$, малий радіус плазми $a = 0.5\ м$ і великий радіус плазми $R = 2.12\ м$. Розглянуто тільки один гатунок іонів, що є доцільним, якщо вивчається поширення хвилі на краю плазми, а не її поглинання (див., наприклад, [73]). Для цих параметрів плазми умова (2.58) говорить про те, що неоднорідністю плазми можна знехтувати при визначенні положення точок повороту компонентів електромагнітного поля, якщо масштаб довжини L зміни густини частинок плазми набагато більше за $0,3\ м$. Остання довжина має порядок малого радіуса плазми a і набагато більша за масштаб експоненційного зменшення густини плазми Λ в SOL у токамаці ASDEX Upgrade, $\Lambda = 0.01801\ м$ [74]. Ця оцінка свідчить про необхідність врахування неоднорідності плазми при визначенні точок повороту в токамаках середнього розміру.

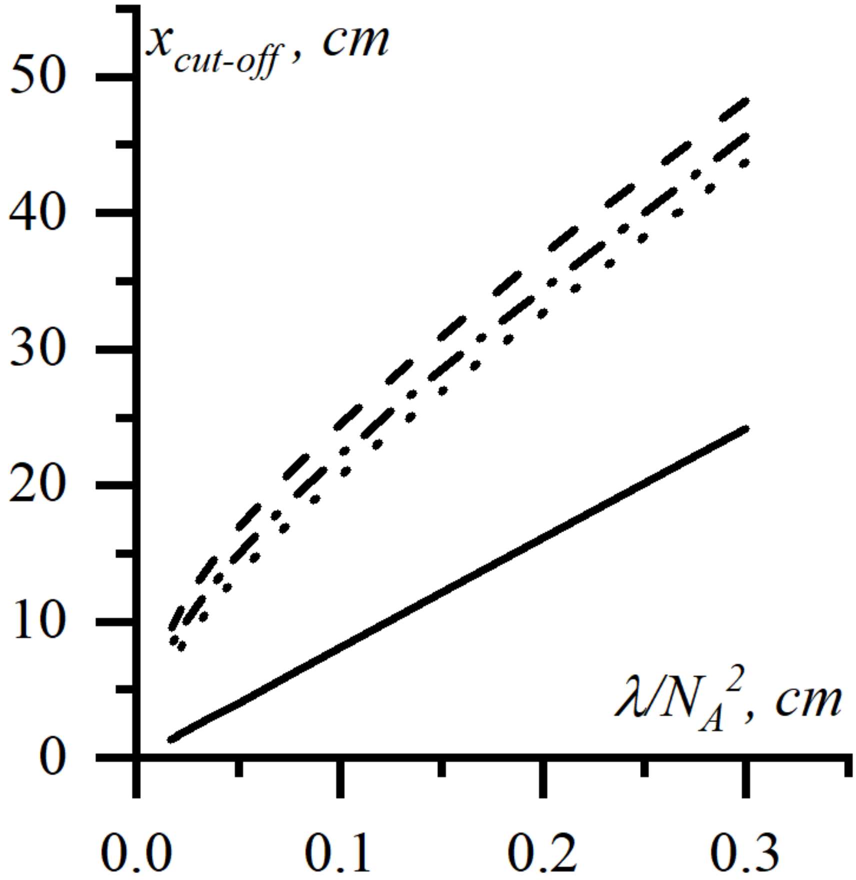

Рис. 3.1. Залежність точок повороту від оберненого градієнта густини плазми. Координати відсікання в граничному випадку класичної теорії (суцільна лінія) і точки повороту в разі лінійної зміни густини для E_x і H_y (штрихована крива), E_y і H_x (пунктирна крива) і H_z (штрихпунктирна крива). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = +5$, $l = 1$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Як видно з рисунку 3.1, координати точок повороту збільшуються зі зменшенням градієнта густини плазми. Для заданого набору параметрів координати точок повороту у випадку неоднорідної плазми для усіх компонент електромагнітного поля є більшими за координати точок повороту у випадку класичної теорії; при цьому різниця між координатами точок повороту для E_x і H_y, E_y і H_x та H_z – майже не суттєва.

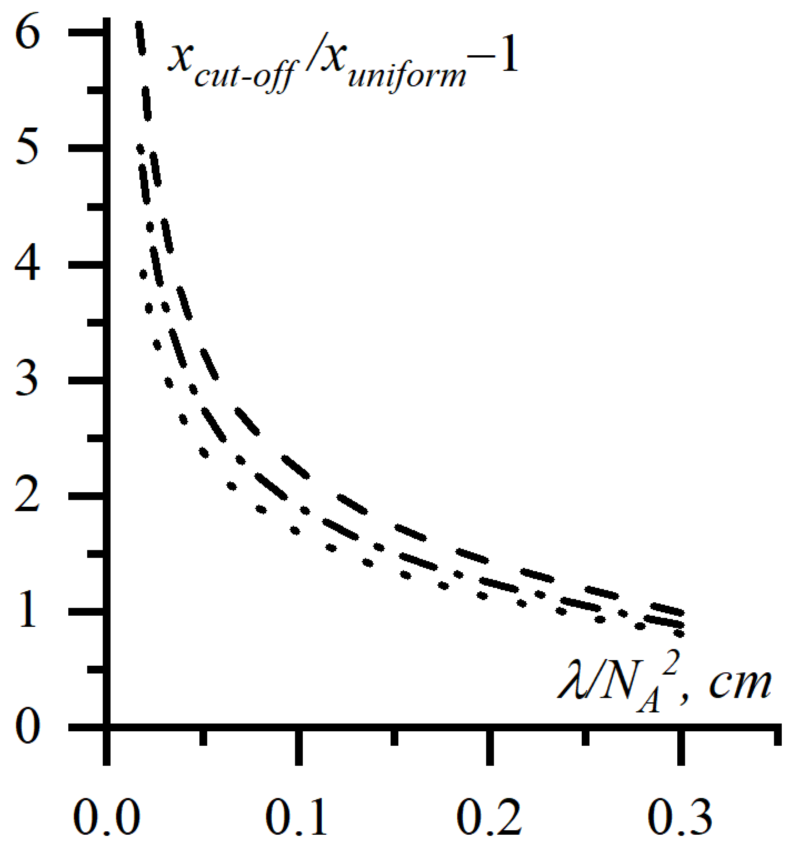

Рис. 3.2. Залежність відносної різниці між точками повороту та точками відсічки від зворотного градієнта густини плазми. Відносна різниця у випадку лінійної зміни густини представлена для E_x і H_y штрихованою кривою, для E_y і H_x – пунктирною кривою, а для H_z – штрихпунктирною кривою. $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = +5$, $l = 1$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Чим меншим є градієнт густини плазми, тим меншою має бути різниця між положеннями точки повороту для випадків неоднорідної плазми та клачисної теорії. Це неочевидно з рисунку 3.1. Тому на рисунку 3.2 представлені відносні різниці координат точок повороту ($x_{cut\text{-}off}/x_{uniform} - 1$), а не абсолютні значення координат точки повороту для ШМЗХ з позитивним полоїдним номером моди $m=+5$. На рисунку 3.2 відносні різниці для компонентів E_x і H_y представлені штрихованою кривою, для E_y і H_x – пунктирною кривою, а для H_z – штрихпунктирною крива, подібно до рисунку 3.1.

Побудуємо аналогічні залежності для наступних параметрів: $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = -5$, $l = 1$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

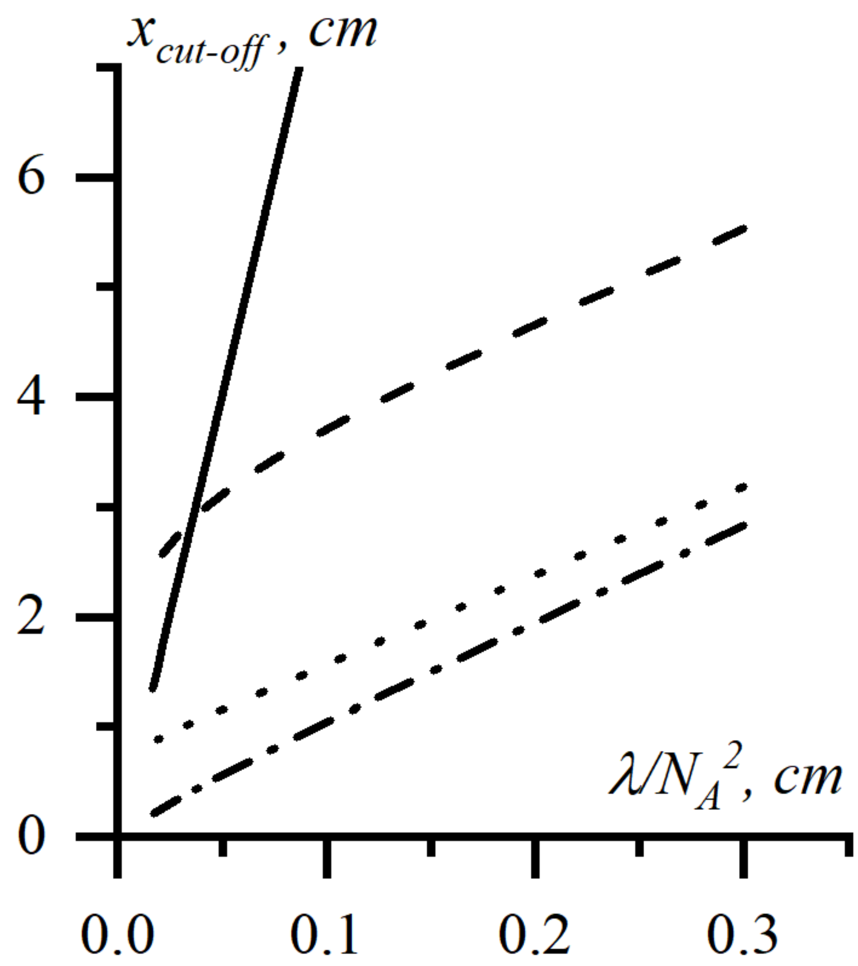

Рис. 3.3. Залежність точок повороту від оберненого градієнта густини плазми. Координати відсічки в граничному випадку клачисної теорії (суцільна лінія) і точки повороту в разі лінійної зміни густини для E_x і H_y (штрихована крива), E_y і H_x (пунктирна крива) і $\mathrm{H_z}$ (штрихпунктирна крива). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = -5$, $l = 1$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Як видно з рисунку 3.3, положення точок повороту для однорідної плазми знаходяться ближче до стінки, ніж для неоднорідної плазми, на відміну від випадку з $m = +5$, розглянутому на рисунку 3.1. Але, як і було на рисунку 3.1, координати точок повороту збільшуються зі зменшенням градієнта густини плазми. Тепер крива для однорідної плазми знаходиться вище, ніж криві для неоднорідної плазми майже для усіх значень градієнта густини плазми. Також у цьому випадку видно вже суттєвішу різницю між значеннями координат точок повороту для E_x і H_y, E_y і H_x та H_z.

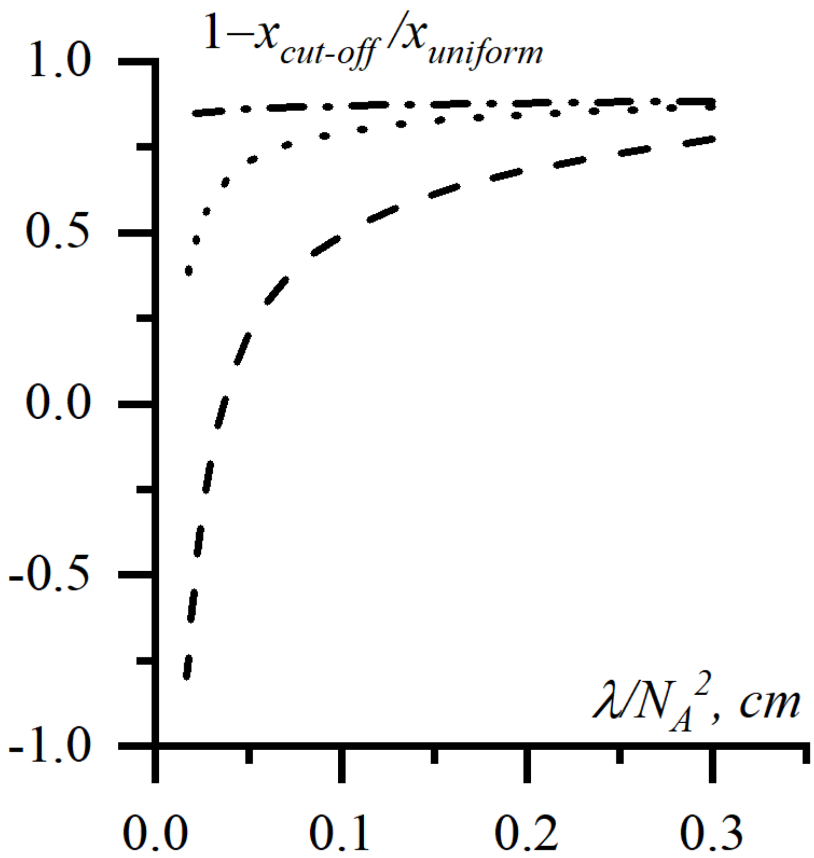

Рис. 3.4. Залежність відносної різниці між точками повороту та точками відсічки від зворотного градієнта густини плазми. Відносна різниця у випадку лінійної зміни густини представлена для E_x і H_y штрихованою кривою, для E_y і H_x – пунктирною кривою, а для H_z – штрихпунктирною кривою. $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = –5$, $l = 1$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Тороїдне хвильове число k_z присутнє в рівняннях поля ШМЗХ (7)-(9) у парних степенях. Тому точки повороту хвильових полів з протилежними значеннями тороїдних хвильових чисел знаходяться в однакових положеннях. На відміну від цього, умови (2.44), (2.53) та (2.54) сильно залежать від знаку полоїдних хвильових чисел k_y. Це наочно продемонстровано на рисунках 3.3 і 3.4 для ШМЗХ з негативним полоїдним номером моди $m = –5$. Точки повороту в цьому випадку розташовані значно ближче до стінки, ніж для ШМЗХ з позитивним полоїдним номером моди $m = +5$. Якщо йти від стінки, то спочатку виникає точка повороту для H_z, потім зустрічається точка повороту для хвильових компонент E_y і H_x, і, нарешті, E_x і H_y відчувають відсічку. Оскільки точки повороту на рисунку 3.3 лежать нижче суцільної кривої, яка відповідає розв’язку рівняння (1.1), тому на рисунку 3.4 представлено відносні різниці координато точок повороту у вигляді $(1 - x_{cut\text{-}off}/x_{uniform})$, а не $(x_{cut\text{-}off}/x_{uniform} - 1)$. Можна помітити, що для H_z значення $(1 - x_{cut\text{-}off} / x_{uniform})$ практично не залежить від зворотного градієнта густини плазми, тобто не залежить й від градієнта густини плазми. Для E_x і H_y, E_y і H_x бачимо, що значення $(1 - x_{cut\text{-}off} / x_{uniform})$ різко зростає при поступовому зменшенні значення градієнта густини плазми і поступово виходить майже на постійний рівень.

Розглянемо ще один набір параметрів плазми та електромагнітної хвилі: $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = 0$, $l = 15$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*. Побудуємо залежності аналогічно до рисунків 3.1 та 3.3.

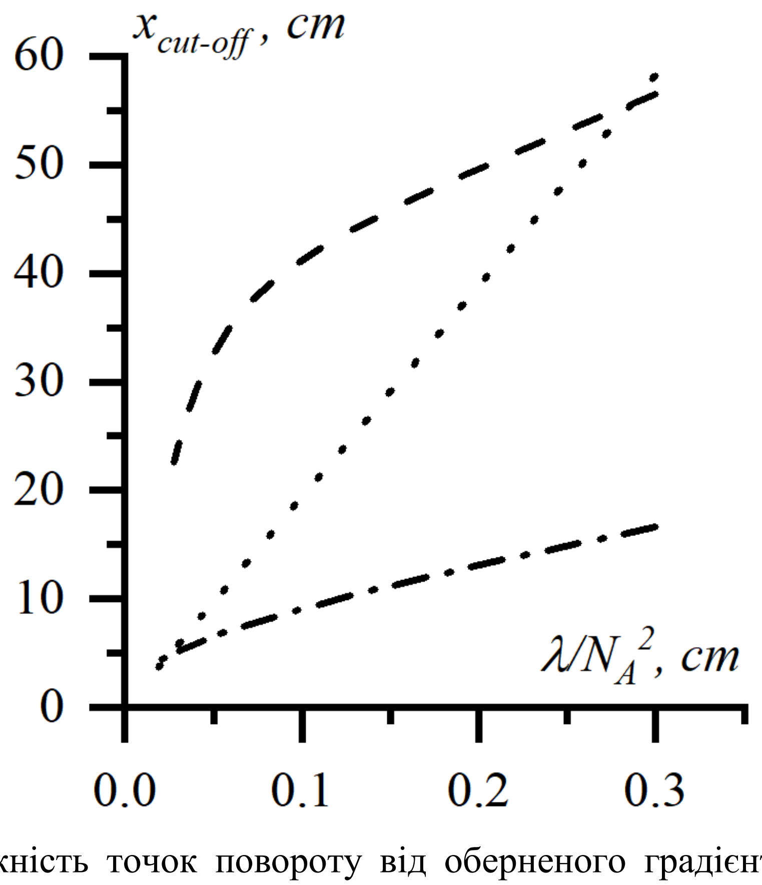

Рис. 3.5. Залежність точок повороту від оберненого градієнта густини плазми. Координати відсікання в граничному випадку класичної теорії (суцільна лінія) і точки повороту в разі лінійної зміни густини для E_x і H_y (штрихована крива), E_y і H_x (пунктирна крива) і H_z (штрихпунктирна крива). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = 0$, $l = 15$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Рисунок 3.5 не містить суцільної кривої, оскільки компоненти хвилі E_y і H_x з $k_y = 0$ мають точки повороту саме в місцях, визначених умовою (1.1), яка визначає як частоту відсічки для заданих параметрів плазми, так і точку повороту для фіксованої частоти хвилі. На відміну від хвильових компонент E_y і H_x з $k_y = 0$, точки повороту інших компонент хвильових полів E_x, H_y і H_z з $k_y = 0$ виявляються суттєво відмінними від положень, визначених умовою (1.1). Номер тороїдної моди хвилі вибрано для розрахунків на рисунку 3.5 як $l = 15$, щоб забезпечити поверхневий характер полів хвилі у розрідженій плазмі. На рисунку 3.5., як і на рисунках 3.1 і 3.3, спостерігається зростання координат точок повороту зі зменшенням значення градієнта густини плазми.

Рівняння (2.57) застосовано вище для визначення умови нехтування нерівномірністю плазми при розрахунку положення точки повороту. Точки повороту хвильових полів E_y і H_x (пунктирна крива) є найближчими до розрахованих за рівнянням (1.1) або іншими словами тих, що розраховуються лише з нехтуванням неоднорідності плазми. Це підтверджує правильність застосування саме рівняння (2.55) для отримання рівняння (2.57): якщо не можна знехтувати неоднорідністю для визначення положення точки повороту для цієї пари хвильових полів, то тим більше не можна знехтувати нерівномірністю при визначенні положення точки повороту для інших полів хвилі.

3.2. Експоненціальний профіль густини

Чисельний аналіз, представлений на рисунках 3.1-3.5 виконано для лінійної густини частинок плазми, тоді як густина плазми в області SOL токамаку зазвичай змінюється експоненціально [54]:

$$n(x) = n_0 \exp[-(x - x_0)/\Lambda]. \tag{2.61}$$

У (2.61) n_0 – густина частинок плазми при $x = x_0$, Λ – довжина експоненційного зменшення густини плазми. Для чисельних розрахунків застосуємо наступні параметри плазми: $n_0 = 1.32\times10^{18}$ *м*$^{-3}$, $x_0 = 2.12$ *м*,

$\Lambda = 0.01801\,м$ [74], $\omega = 3.34\omega_{ci}$, малий радіус плазми $a = 0.5\,м$, великий радіус плазми $R = 2.12\,м$. Для однорідного зовнішнього сталого магнітного поля $B_0 = 2$ *Тл* квадрат Альфвенового показника заломлення дорівнює $N^2_A(x{=}x_0) = 129$.

Положення точок повороту, розраховані для такого профілю густини частинок та інших заданих параметрів згідно з рівняннями (2.54)-(2.56), представлені в таблицях 1-3 для компонент хвильового поля E_x і H_y, E_y і H_x і H_z відповідно. У таблицях наведено найменші радіальні положення точок повороту в сантиметрах. Числа, наведені курсивом, відповідають малим значенням хвильових індексів, таким, що $k^2_y + k^2_z < k^2_0$.

Таблиця 3.1

Положення точок повороту (в см) для компонент хвильового поля E_x і H_y.

l \ m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	*214,81*	*214,35*	*213,62*	*212,61*	*211,8*	*211,68*	208,9	207,88	207,27	206,82	206,46
2	*217,37*	*216,85*	*215,89*	*213,88*	*212,37*	*213,00*	208,92	207,89	207,27	206,82	206,46
3	218,59	218,59	218,56	218,46	218,25	231,56	208,94	207,9	207,27	206,82	206,47
4	216,79	216,80	216,78	216,7	216,58	227,96	208,98	207,91	207,28	206,82	206,47
5	215,73	215,74	215,73	215,67	215,64	225,81	209,02	207,92	207,28	206,83	206,47
6	214,95	214,97	214,96	214,94	214,97	224,23	209,06	207,93	207,29	206,83	206,47
7	214,32	214,35	214,36	214,36	214,46	222,97	209,10	207,95	207,29	206,83	206,47
8	213,80	213,84	213,86	213,88	214,04	221,91	209,14	207,96	207,30	206,84	206,47
9	213,36	213,39	213,43	213,48	213,68	220,99	209,17	207,98	207,31	206,84	206,48
10	212,96	213,01	213,05	213,12	213,36	220,18	209,2	207,99	207,32	206,84	206,48

Числові розрахунки, наведені у таблиці 3.1, демонструють, що для значень тороїдного номера моди хвилі $m = 1, 2, 3, 4, 5$, при різних значеннях полоїдних номерів моди хвилі l, значення точок повороту практично однакові – різниця складає кілька сотих або кілька десятих *см*, що при значенні координати точки повороту більше 200 *см* дає відносну похибку менше 0,5%. При значенні полоїдного номера моди хвилі $m = 0$ спостерігається найбільша різниці між значеннями координати точки повороту при різних значеннях тороїдних номерів моди хвилі l. Також при від'ємних значеннях полоїдних номерів мод хвилі m спостерігається велика різниця між значеннями координат точок повороту при різних значеннях тороїдних номерів мод хвилі l. Також з таблиці 3.1 видно, що малі значення хвильових індексів, такі, що $k^2_y + k^2_z < k^2_0$, спостерігаються лише для недодатних полоїдних номерів моди m та тороїдних номерів моди $l = 1, 2$. Найбільше значення координати точки повороту для компонент хвильового поля E_y і H_x спостерігається при $m = 0$ та при $l = 3$, а найменше при $m = 5$ та при $l = 10$.

Таблиця 3.2

Положення точок повороту (в см) для компонент хвильового поля E_y і H_x

$l\backslash m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	*216,0*	*215,65*	*214,97*	*213,88*	*213,61*	*212,05*	212,17	210,45	209,462	208,77	208,24
2	*218,6*	*218,24*	*217,43*	*215,19*	*214,28*	*212,01*	212,12	210,43	209,456	208,77	208,24
3	222,01	222,43	222,95	223,64	224,64	211,95	212,04	210,41	209,445	208,76	208,23
4	220,18	220,58	221,07	221,68	222,33	211,86	211,92	210,38	209,428	208,75	208,22
5	219,07	219,45	219,9	220,41	220,75	211,75	211,77	210,33	209,406	208,74	208,21
6	218,24	218,59	219,0	219,41	219,48	211,62	211,60	210,27	209,379	208,72	208,20
7	217,56	217,89	218,24	218,55	218,39	211,46	211,43	210,21	209,345	208,7	208,19
8	216,97	217,27	217,57	217,78	217,44	211,27	211,26	210,13	209,305	208,68	208,17
9	216,44	216,72	216,97	217,08	216,58	211,06	211,09	210,05	209,26	208,65	208,15
10	215,97	216,21	216,41	216,44	215,81	210,83	210,93	209,96	209,209	208,62	208,13

Результати числових обчислень, представлених у таблиці 3.2 демонструють схожі результати, що й у таблиці 3.1. А саме: для значень полоїдного номера моди m = 1, 2, 3, 4, 5, при різних значеннях тороїдного номера моди хвилі l, значення точок повороту є практично однаковими. Але для компонент хвильового поля E_y і H_x, на відміну від E_x і H_y, найбільша різниця між значеннями координати точки повороту при різних значеннях тороїдних номерів мод хвилі l спостерігається при $l = -1$. Найбільше значення координати точки повороту для компонент хвильового поля E_x і H_y спостерігається при $m = -1$ та при $l = 3$, а найменше при

m = *5* та при $l = 10$. Як і у випадку компонент хвильового поля E_x і H_y, з таблиці 3.2 видно, що для компонент хвильового поля E_y і H_x малі значення хвильових індексів спостерігаються лише для недодатних полоїдних номерів моди m та тороїдних номерів моди $l = 1, 2$.

Таблиця 3.3

Положення точок повороту (в см) для компоненти хвильового поля H_z

$l \backslash m$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	*222,45*	*222,81*	*223,3*	*224,04*	210,44	209,02	208,27	207,73	207,32	206,97	206,68
2	219,24	*225,40*	*225,88*	*226,57*	210,17	208,96	208,24	207,72	207,30	206,96	206,67
3	215,03	214,41	213,37	211,57	209,88	208,87	208,19	207,69	207,29	206,95	206,66
4	213,29	212,72	211,9	210,75	209,61	208,76	208,14	207,65	207,26	206,93	206,65
5	212,28	211,78	211,09	210,23	209,36	208,64	208,07	207,61	207,23	206,91	206,63
6	211,57	211,11	210,53	209,84	209,13	208,51	207,99	207,56	207,2	206,88	206,61
7	211,01	210,6	210,1	209,52	208,93	208,38	207,91	207,50	207,16	206,85	206,59
8	210,55	210,18	209,74	209,25	208,74	208,25	207,82	207,44	207,11	206,82	206,56
9	210,17	209,83	209,44	209,05	208,56	208,13	207,73	207,38	207,06	206,78	206,53
10	209,84	209,53	209,18	208,79	208,39	208,00	207,64	207,31	207,01	206,74	206,5

Таблиця 3.3 демонструє схожі результати для точок повороту компоненти хвильового поля H_z, що й для компонент хвильових полів E_x і H_y і для компонент хвильових полів E_y і H_x. Найбільше значення координати точки повороту для компоненти хвильового поля H_z спостерігається при $m = -2$ та при $l = 2$, а найменше при m = *5* та при $l = 10$. Для компоненти хвильового поля H_z, з таблиці 3.3, видно, що малі значення хвильових індексів спостерігаються лише для полоїдних номерів моди $m \leq -2$ та тороїдних номерів моди $l = 1, 2$.

З аналізу даних, представлених у таблицях 3.1-3.3, випливають два висновки. По-перше, слід відзначити суттєву різницю в положеннях точок повороту для хвильових полів з протилежними значеннями m. По-друге, положення точок повороту також є різними для різних полів хвилі. Точки повороту розташовані в більш густій (порівняно з передбаченими рівнянням (1.1), що відповідає підходу ВКБ) плазмі для хвильових полів E_x і H_y з додатними полоїдними номерами мод, $m > 0$, і в більш розрідженій плазмі – для $m \leq 0$. Дуже схожа ситуація спостерігається для хвильових полів E_y і H_x: їх точки повороту виявляються розташованими в більш густій плазмі для $m \geq 0$, а в більш розрідженій – для хвиль з від'ємними полоїдними номерами мод, $m < 0$. Точки повороту хвильового поля H_z знаходяться в більш густій плазмі майже для всіх досліджуваних значень номерів мод; виняток становлять хвилі з негативними полоїдними номерами моди і малими тороїдними номерами моди. Якщо припустити, що густина частинок плазми на останній замкненій магнітній поверхні становить близько 10^{20} *м*$^{-3}$, то її координата ≈ 204.0 *см*. Іншими словами, усі точки повороту, представлені в таблицях 3.1-3.3, розташовані всередині SOL, де густина частинок плазми може бути описана рівнянням (2.61).

Дослідники часто застосовують лише підхід ВКБ для визначення положення відсічки (див., наприклад, [15]). Важливо порівняти положення точок повороту, представлені в таблицях 3.1-3.3, з положеннями відсічки, розрахованими в підході ВКБ.

Числові розрахунки для знаходження точок повороту згідно з методом ВКБ можна провести за рівнянням (1.1). Проведемо дані розрахунки для тих самих значень параметрів плазми і хвилі, що вище зазначені, аби порівняти доцільність використання методу ВКБ для знаходження точок повороту у неоднорідній плазмі. Також, як відомо з теорії для однорідної плазми, точки повороту для усіх компонент хвильового поля є однаковими. Дані числових розрахунків у підході ВКБ, тобто на основі рівняння (1.1) представлені в таблиці 3.4.

Оскільки рівняння (1.1) є симетричним по m, тому таблиця 3.4 не містить даних для від'ємних значень m. Як і для таблиць 3.1-3.3 у таблиці 3.4 цифри, наведені курсивом, відповідають малим значенням хвильових індексів, таким, що $k^2_y + k^2_z < k^2_0$.

Таблиця 3.4

Розташування точок повороту (в см), розраховане згідно з рівнянням (1.1)

$l\backslash m$	0	1	2	3	4	5
1	*220*				214	213
2	*222*		216	215	214	213
3	219	217	215	214	213	213
4	217	216	215	214	213	212
5	216	215	214	213	213	212
6	215	214	214	213	212	212
7	214	214	213	213	212	212
8	214	213	213	212	212	211
9	213	213	213	212	212	211
10	213	213	212	212	211	211

Позиції точки повороту, розраховані за рівняннями (2.54)-(2.56) (тобто з явних умов) суттєво відрізняються від розрахованих за рівнянням (1.1), що відповідає підходу ВКБ. Наприклад, різниця положень точок повороту, представлених у таблицях 3.3 і 3.4 для $l = 1$ і $m = 5$, становить 6.168 *см*, що більш ніж у три рази більше, ніж застосована довжина експоненційного зменшення густини плазми. Ці дві позиції відповідають густинам частинок плазми, які відрізняються на коефіцієнт ≈ 30.7, що не можна вважати незначним. Як і для таблиць 3.1-3.3, спостерігається, що найменше значення координати точки повороту досягається при $m = 5$ та при $l = 10$.

Для кращої наочності відмінностей між значеннями координат точок повороту, розрахованих за отриманими рівняннями, та значеннями координат точок повороту, розрахованих за рівнянням (1.1) побудуємо відповідні графіки.

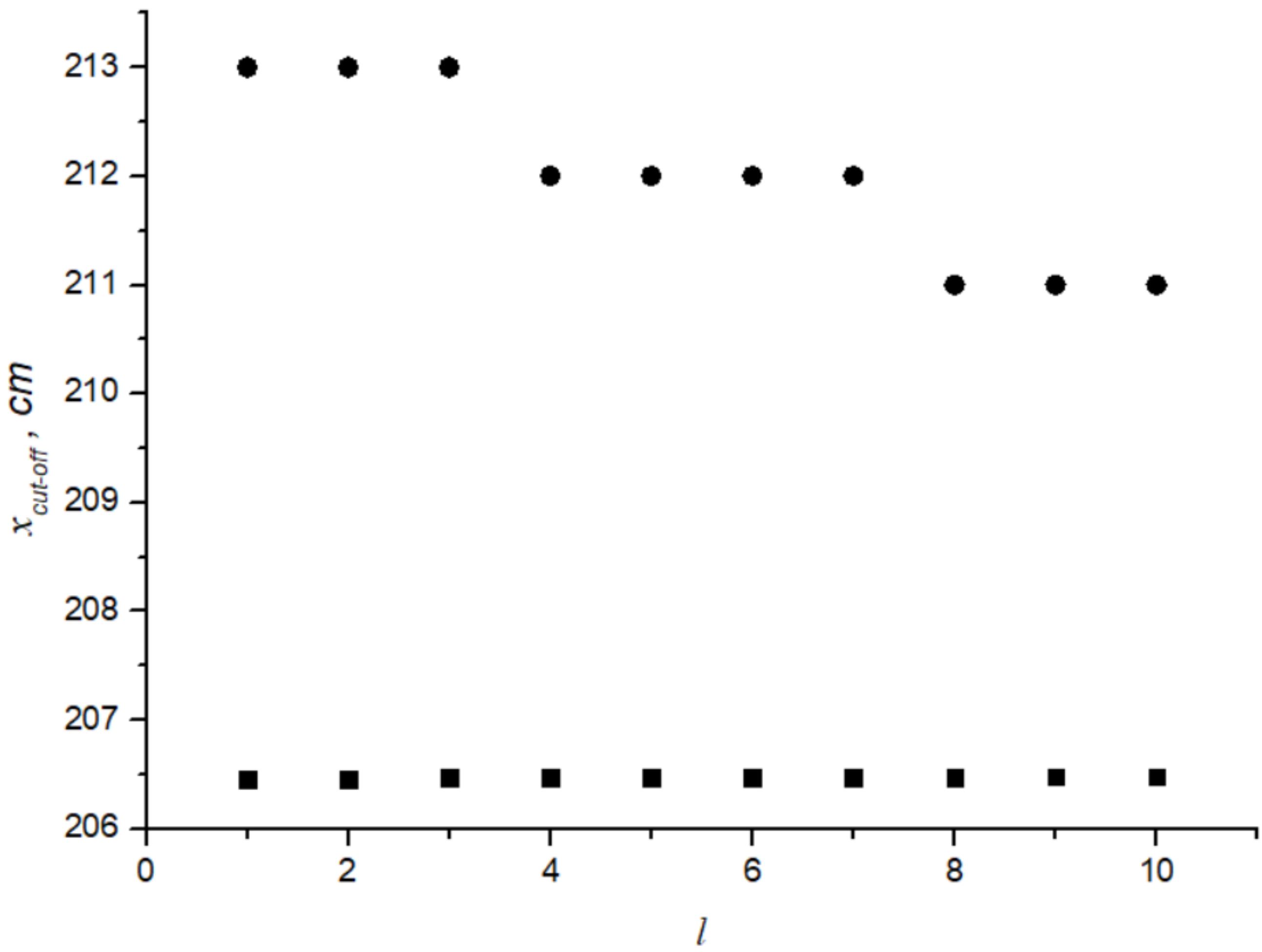

Рис. 3.6. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку класичної теорії (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для E_x і H_y (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = +5$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Як видно з рисунку 3.6, координати точок повороту для E_x і H_y у випадку неоднорідної плазми майже не залежать від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту для E_x і H_y у класичному підході зменшуються при збільшенні тороїдного номера хвилі хвилі. На рисунку спостерігається істотна різниця між значеннями координат точок повороту для E_x і H_y для неоднорідної плазми та значеннями точок повороту для E_x і H_y у класичному випадку, розрахованими за рівнянням (1.1). Для даних, наведених на рисунку, найменша різниця між значеннями координат складає *4,52 см*, а найбільша – *6,54 см*. У такому випадку відносна похибка у визначенні координат точок повороту для E_x і H_y складає приблизно від *2%* до *3%*, що може виявитися суттєвим при плануванні термоядерних реакцій у токамаках.

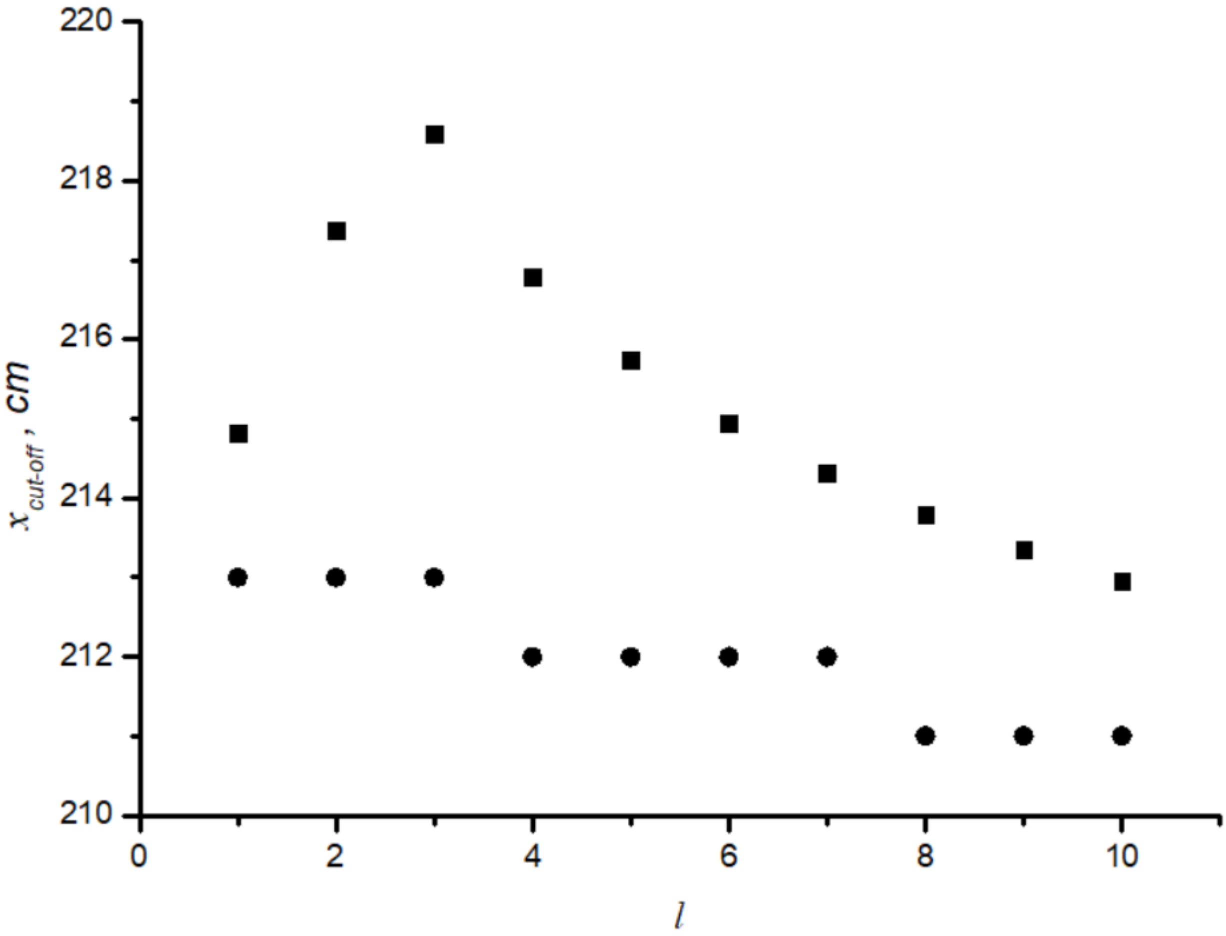

Рис. 3.7. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку класичної теорії (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для E_x і H_y (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = -5$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

На рисунку 3.7 показано, що у випадку від'ємного полоїдного номера моди хвилі ($m = -5$) значення координат точок повороту для E_x і H_y є більшими для неоднорідної плазми, на відміну від випадку з додатним значенням полоїдного номера моди хвилі ($m = +5$). У даному випадку, як видно, найбільше відхилення відбувається не при найменшому значенні тороїдного номера моди хвилі, а для значення $l = 3$. У такому випадку різниця між значеннями координат точок повороту складає *5,59 см*. Найменше відхилення відбувається при значенні $l = 1$ і складає *1,81 см*. У випадку m = –5 відносна похибка обчислення координат точок повороту за рівнянням (1.1) є меншою, ніж у випадку m = +5, і складає вже майже від *1%* до *2,6%*. Але значення відносної похибки у такому випадку змінюються при зміні тороїдного номера моди хвилі хаотично і не спостерігається зменшення чи збільшення відносної похибки. Цей факт підтверджує те, що для знаходження координат точок повороту варто застосовувати рівняння (2.55), а не рівняння (1.1) у наближенні однорідної плазми.

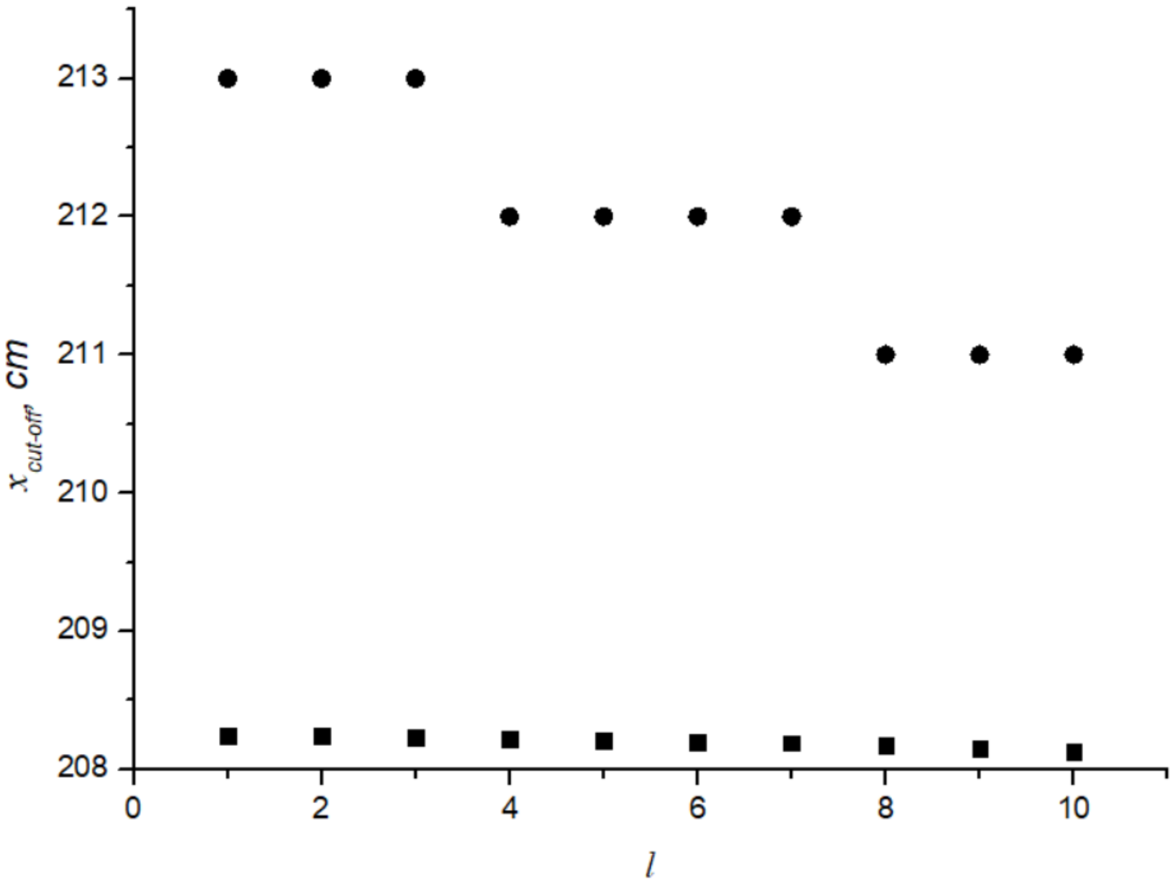

Рис. 3.8. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку однорідної плазми (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для E_y і H_x (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, m = +5, $a = 0,5$ *м*, $R = 2,12$ *м*.

Для пари компонент E_y і H_x електромагнітного поля хвилі при m = +5 спостерігається схожа динаміка різниці між значеннями координат точок повороту у випадку класичної теорії та у випадку неоднорідної плазми. На рисунку 3.8 спостерігається практично незалежність значення координати точок повороту для E_y і H_x від значення тороїдного номера моди хвилі у випадку неоднорідної плазми. Значення координат точок повороту у випадку класичної теорії поступово зменшується у разі збільшення тороїдного номера моди хвилі. Найбільше відхилення спостерігається при $l = 1, 2, 3$ і складає приблизно $4{,}77$ *см*, що відповідає *2,3%* відносної похибки, найменше відхилення спостерігається при $l = 8, 9, 10$ і складає приблизно *2,83 см*, що відповідає приблизно *1,4%* відносної похибки.

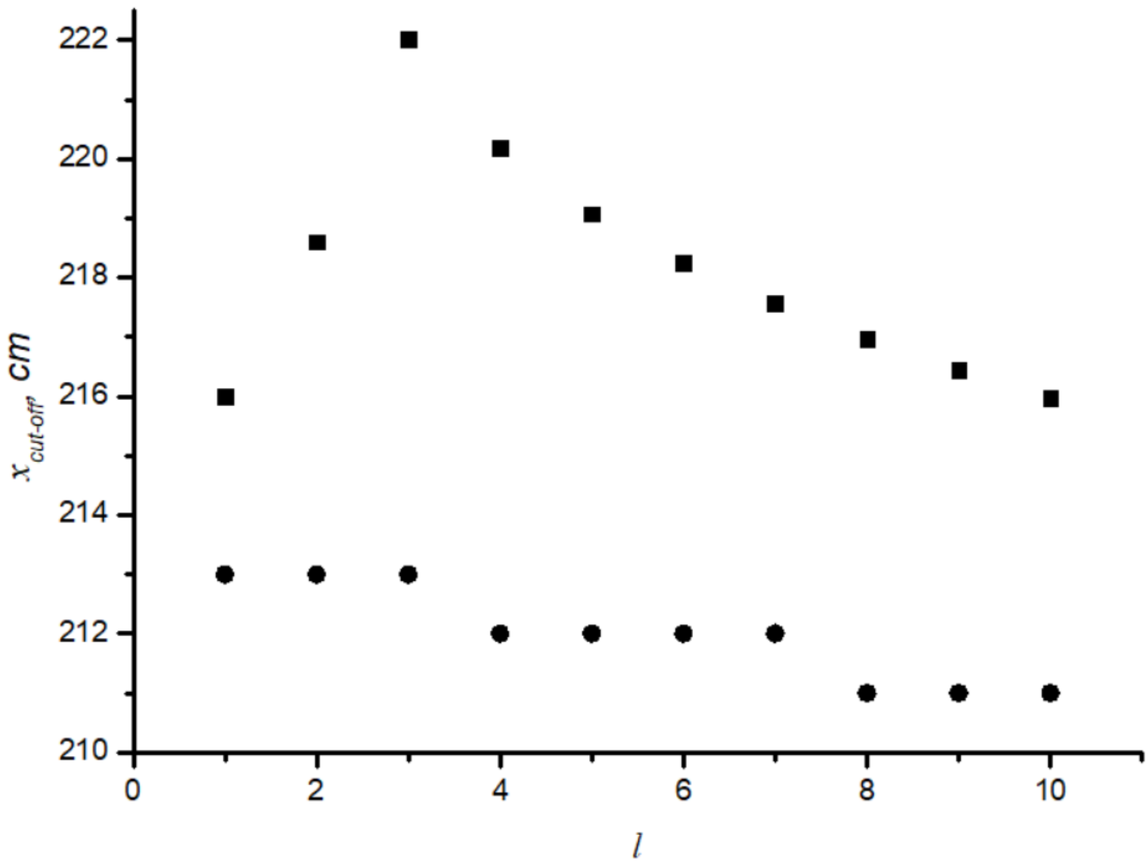

Рис. 3.9. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку класичної теорії (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для E_y і H_x (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = -5$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Динаміка поведінки значень координат точок повороту для E_y і H_x у випадку значення полоїдного номера моди хвилі $m = -5$ схожа на аналогічну у випадку E_x і H_y. У даному випадку, як видно, найбільше відхилення відбувається не при найменшому значенні тороїдного номера моди хвилі, а для значення l = *3*. У такому випадку різниця між значеннями координат точок повороту складає аж *9,01 см*. Таке відхилення відповідає значенню відносної похибки вже 4%. Найменше відхилення відбувається при значенні $l = 1$ і складає *3 см* – це відповідає значенню відносної похибки майже *1,4%*. Отримані результати також свідчать про необхідність застосовувати умови визначення координат точок повороту для E_y і H_x саме по рівнянням для неоднорідної плазми. Тобто для компонент E_y і H_x електромагнітного поля для визначення координат точок повороту у неоднорідній плазмі необхідно використовувати рівняння (2.56), а не рівняння (1.1) для визначення частоти відсічки у випадку однорідної плазми.

На рисунку 3.10 показано залежність значень координат точок повороту компоненти електромагнітного поля ШМЗХ H_z, обчислених за рівнянням (1.1), і випадку експоненціальної залежності густини неоднорідної плазми, обчислених за рівнянням (2.57). Як видно з рисунку 3.10, знову спостерігається схожа картина, що й для пари компонент хвильового поля E_x і H_y, і для пари компонент хвильового поля E_y і H_x. Значення координат точок повороту компоненти H_z для неоднорідної плазми практично не залежить від значення тороїдного номера моди хвилі, а значення координат точок повороту компоненти H_z, обчислених за рівнянням (1.1), поступово спадає зі збільшенням значення тороїдного номера моди.

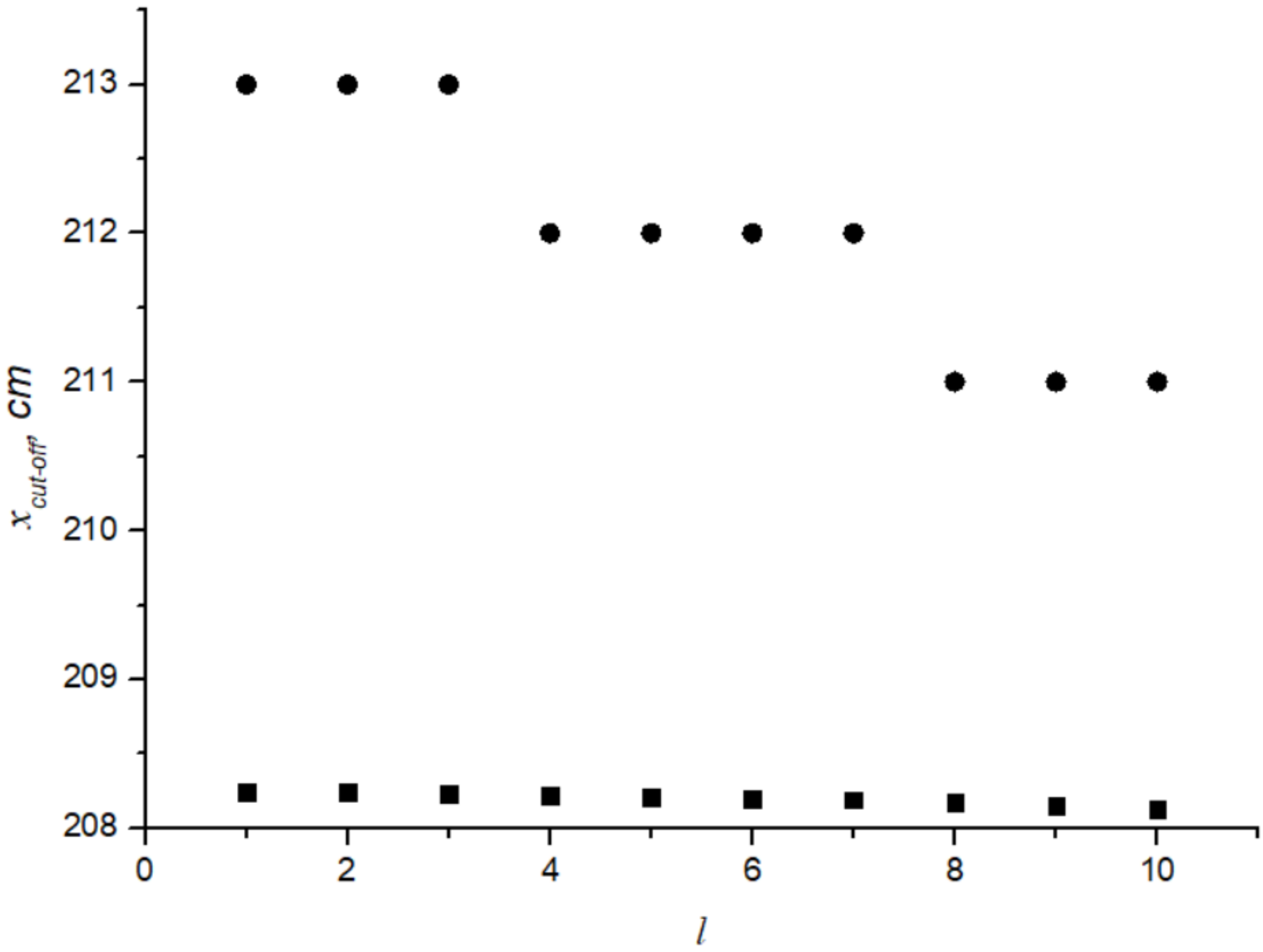

Рис. 3.10. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку класичної теорії (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для H_z (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = +5$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Найбільша різниця між координатами точок повороту у випадку клачисної теорії та у випадку неоднорідної плазми, як видно на рисунку 3.10, спостерігається для менших значень тороїдних номерів моди хвилі. А саме при значенні $l = 1, 2, 3$ різниця між значеннями координат, розрахованими за умовою (1.1) та умовою (2.57), складає приблизно *4,76 см*; при значеннях $l = 8, 9, 10$ різниця між значеннями координат, розрахованими за умовою (1.1) та умовою (2.57) складає приблизно *2,85 см*. Ці значення відповідають відносним похибкам від *1,4%* до *2,3%*.

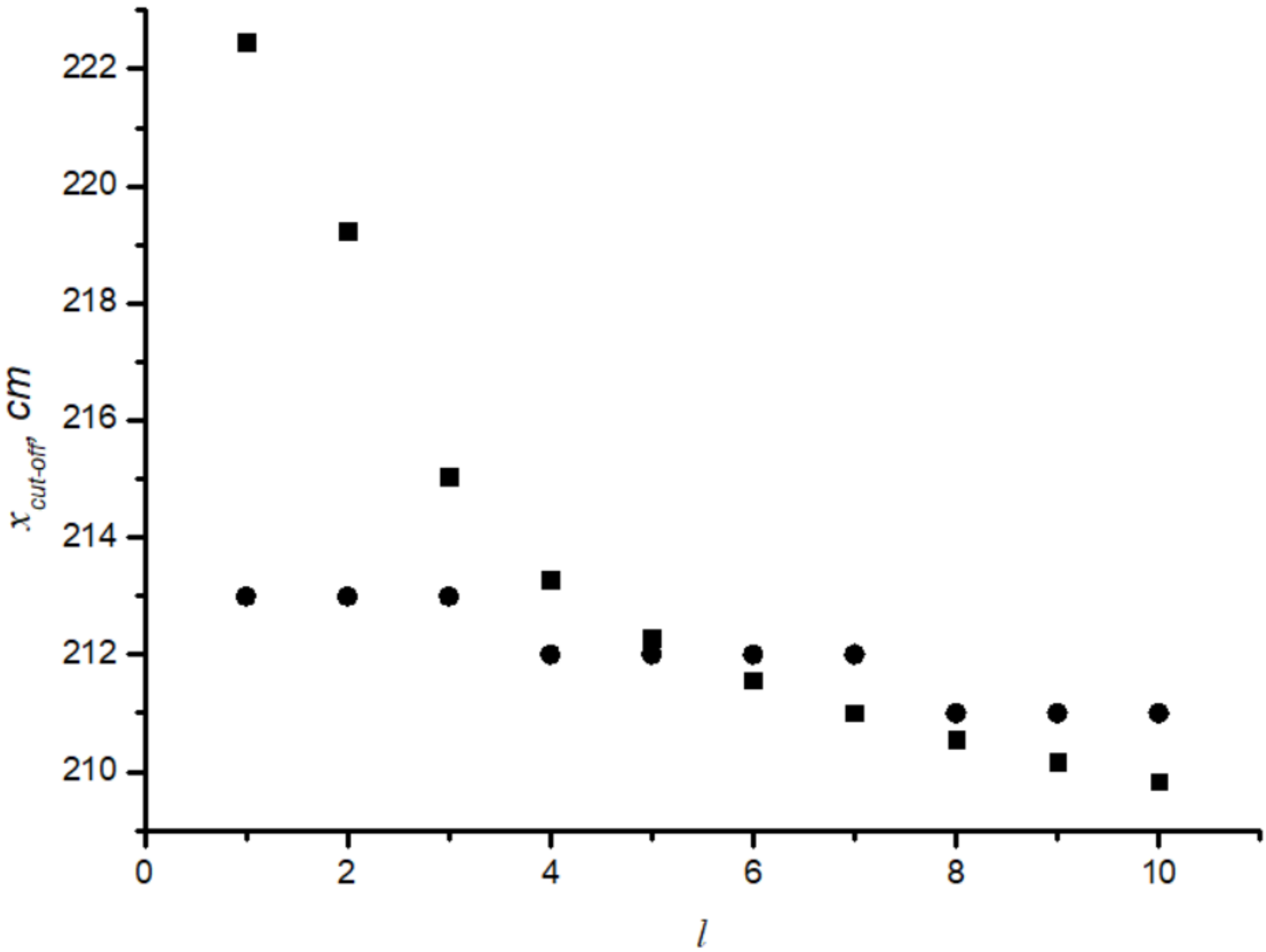

Рис. 3.11. Залежність точок повороту від значення тороїдного номера моди хвилі. Координати точок повороту в граничному випадку класичної теорії (кружки) і точки повороту в разі експоненціальної зміни густини для H_z (квадрати). $\omega = 3.34\ \omega_{ci}$, $m = -5$, $a = 0{,}5$ *м*, $R = 2{,}12$ *м*.

Найбільш цікавою є динаміка залежності координат точок повороту для компоненти електромагнітного поля ШМЗХ H_z. Як видно з рисунку 3.11, при $m = -5$ для деяких значень тороїдного номера моди хвилі значення координат точок повороту, розрахованих за рівнянням (1.1), та рівнянням (2.57) є доволі малою. При $l = 5$ різниця між значеннями координат точок повороту складає *0,28 см*. Таке відхилення складає усього приблизно *0,13%* відносної похибки. Найбільше відхилення між координатами точок повороту спостерігається при $l = 1$ і дорівнює *9,45 см* або приблизно *4,25%* відносної похибки. Цікавим також є той факт, що для значень тороїдного номера моди хвилі $l \leq 5$ координати точок повороту для неоднорідної плазми, розраховані за умовою (2.57), є більшими, ніж відповідні координати точок повороту, розраховані за умовою (1.1). А для більших значень тороїдного номера моди хвилі координати точок повороту для неоднорідної плазми, розраховані за умовою (2.57), є меншими, ніж відповідні координати точок повороту, розраховані за умовою (1.1). Але це усе не відміняє того факту, що значення точок повороту, розраховані для усіх компонент електромагнітного поля ШМЗХ у неоднорідній плазмі при будь-яких застосованих значеннях тороїдного номера моди хвилі та полоїдного номера моди хвилі, відрізняються від відповідних значень, розрахованих за умовою (1.1).

3.3. Висновки до розділу 3

У неоднорідній плазмі точки повороту мають різне положення для трьох наборів компонент поля ШМЗХ: перший набір складається з хвильових компонент E_x і H_y, другий – E_y і H_x, третій – H_z.

Умова (1.1) добре відома [11, 13] як умова для визначення частоти відсічки ШМЗХ для заданих параметрів плазми, таких як склад плазми, значення зовнішнього сталого магнітного поля та густина частинок плазми. Взагалі кажучи, в неоднорідній плазмі умова є застосовною лише для визначення точок повороту компонент поля ШМЗХ E_y і H_x з $k_y = 0$. Положення точок повороту для інших компонентів ШМЗХ не можна визначити з цієї умови в неоднорідній плазмі, особливо в області SOL токамаку, навіть у випадку мод з $k_y = 0$. Умову (2.59), а не (1.1) слід застосовувати для визначення положень точок повороту компонент ШМЗХ E_x і H_y, а умову (2.60) – для компоненти H_z з $k_y = 0$.

Умова (1.1) не може бути застосована для визначення точок повороту компонент ШМЗХ навіть для компонент поля E_y і H_x з $k_y \neq 0$. У цьому випадку замість рівняння (1.1) повинні застосовуватися умови (2.54)-(2.56).

Неоднорідність плазми викликає різний вплив на положення точки повороту для хвиль з різними хвильовими числами. Вплив є симетричним відносно тороїдного номера моди хвилі і не має симетрії відносно полоїдного номера моди хвилі. Для хвиль з додатними полоїдними хвильовими числами, $k_y > 0$, точки повороту розташовані глибше в плазмі, ніж це передбачено рівнянням (1.1) (у підході ВКБ).

Майже для всіх досліджуваних значень номерів моди точки повороту полів хвилі E_y і H_x є найближчими до стінки. Точки повороту хвиль з негативними полоїдними номерами моди та малими тороїдними номерами моди, для яких $k^2_y + k^2_z < k^2_0$, є винятком.

РОЗДІЛ 4. ПРОСТОРОВИЙ РОЗПОДІЛ ПОЛІВ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ В ОКОЛІ АЛЬФВЕНОВОГО РЕЗОНАНСУ ЗА ОСТАННЬОЮ ЗАМКНЕНОЮ МАГНІТНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

4.1. Опис моделі плазми за останньою замкненою магнітною поверхнею

SOL розглядається в декартовій геометрії з віссю x, яка є перпендикулярною до SOL і спрямована від плазми низької густини до плазми високої густини (протилежно радіальному напрямку). Зовнішнє стале однорідне магнітне поле $\vec{B}_0$ є паралельним SOL, вісь z спрямоваа вздовж вектора тороїдного магнітного поля, $\vec{B}_0||\vec{z}$. Припускається, що SOL є однорідним уздовж осі y, яка вибирається так, що осі x, y та z утворюють праву трійку векторів (рисунок 4.1). На рисунку 4.1 зображено вид зверху, на якому остання замкнена магнітна поверхня (вважаємо її площиною) представлена у вигляді сірої лінії, уздовж якої спрямована вісь z.

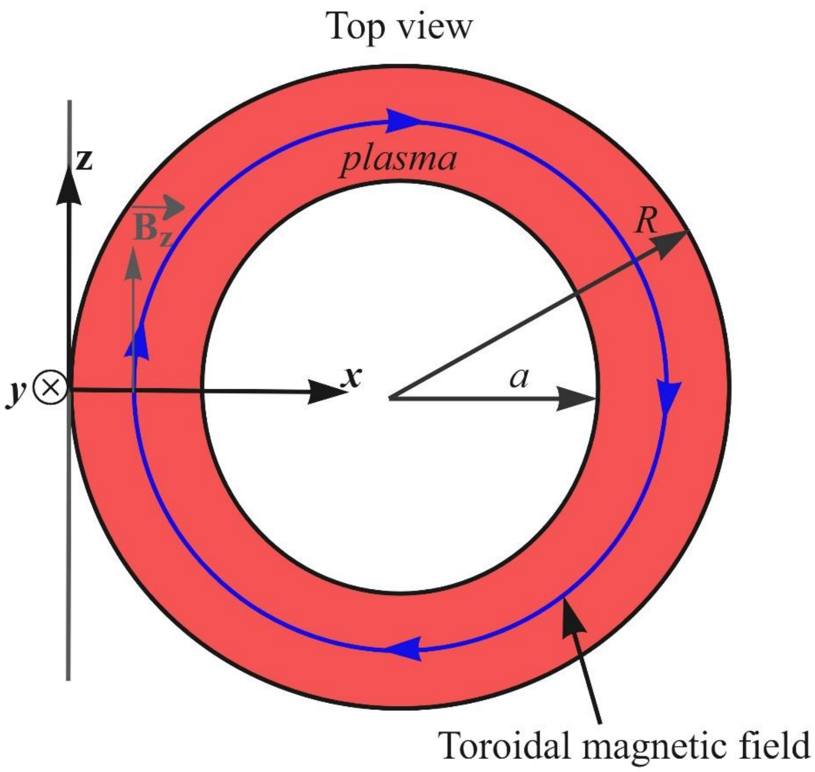

Рис. 4.1. Схематичне зображення геометрії задачі.

Електродинамічні властивості плазми описують в термінах тензора діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень (в позначеннях Стікса [11] згідно з 1.4).

У йонному циклотронному діапазоні частот, $\omega_{ci} < \omega \ll |\omega_{ce}|$, компоненти тензора діелектричної проникності холодної плазми без зіткнень приймають вигляд:

$$S = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2},\ D = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)},\ P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \tag{4.1}$$

Тут і далі ω_{ce} – це кутова електронна циклотронна частота, а ω_{pe} – це кутова електронна плазмова частота.

Просторовий розподіл хвильового поля будемо шукати у вигляді гармоніки Фур'є, наприклад, тороїдне магнітне поле хвилі шукаємо у вигляді:

$$H_z^{\sim}(\vec{r}, t) = H_z(x)\exp[i(k_z z + k_y y - \omega t)]. \tag{4.2}$$

У (4.2) k_y — полоїдне хвильове число, k_z — тороїдне хвильове число. Застосування (4.2) та аналогічного розподілу для інших компонент електромагнітного поля приводить до рівнянь (2.13)-(2.18).

Спочатку з системи (2.13)-(2.18) виключимо хвильові поперечні електричні поля E_x і E_y. З цією метою підставимо (2.14) до (2.16):

$$SE_x - iDE_y = -N_y H_z + N_z(N_z E_x + iE'_z). \tag{4.3}$$

Рівняння (4.3) зводиться до:

$$(S - N_z^2)E_x - iDE_y = -N_y H_z + iN_z E'_z. \tag{4.4}$$

Далі підставимо (2.13) до (2.17) та отримаємо:

$$-iDE_x - SE_y = iH'_z + N_z(N_y E_z - N_z E_y). \tag{4.5}$$

Рівняння (4.5) зводиться до:

$$-iDE_x - (S - N_z^2)E_y = iH'_z + N_z N_y E_z. \tag{4.6}$$

Рівняння (4.4) та (4.5) утворюють систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь для полів E_x і E_y. Знайдемо з цієї системи вирази для E_x і E_y:

$$E_x = \frac{-1}{N_\perp^2}\left(N_y H_z - iN_z E'_z\right) - \frac{\mu}{N_\perp^2}\left(H'_z - iN_z N_y E_z\right). \tag{4.7}$$

$$E_y = \frac{-1}{N_\perp^2}\left(iH'_z + N_z N_y E_z\right) - \frac{\mu}{N_\perp^2}\left(iN_y H_z + N_z E'_z\right). \tag{4.8}$$

Далі підставляємо (2.13) та (2.14) до (2.18) і отримуємо:

$$PE_z = N_y H_x + iH'_y = N_y\left(N_y E_z - N_z E_y\right) + i(N_z E_x + iE'_z)'. \tag{4.9}$$

Підставимо E_x і E_y з рівнянь (4.7) та (4.8) до рівняння (4.9) і отримаємо:

$$\begin{aligned} PE_z &= N_y\left(N_y E_z - N_z E_y\right) + i(N_z E_x + iE'_z)' \\ &= N_y^2 E_z + \frac{N_z N_y}{N_\perp^2}\left(iH'_z + N_z N_y E_z + i\mu N_y H_z + \mu N_z E'_z\right) - E''_z \\ &+ iN_z\left[\frac{-1}{N_\perp^2}(N_y H_z - iN_z E'_z + \mu H'_z - i\mu N_z N_y E_z)\right]'. \end{aligned} \tag{4.10}$$

До рівняння (4.10) застосуємо очевидні спрощення (4.11) та (4.12):

$$-\frac{\mu N_z^2 N_y}{N_\perp^2}E'_z + N_z^2 N_y\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}E'_z + E_z\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)'\right) = N_z^2 N_y\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)' E_z. \tag{4.11}$$

$$\frac{N_z N_y}{N_\perp^2} iH'_z - iN_z N_y\left[\frac{1}{N_\perp^2}H'_z + H_z\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)'\right] = -iN_z N_y\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)' H_z. \tag{4.12}$$

Тоді рівняння (4.10) спроститься до рівняння:

$$\begin{gathered} E''_z + N_z^2\left(\frac{1}{N_\perp^2}E'_z\right)' + N_z^2 N_y\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)' E_z + E_z\left(P - N_y^2 - \frac{N_z^2 N_y^2}{N_\perp^2}\right) = \\ -iN_z\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}H'_z\right)' - iN_z N_y H_z\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)' + i\frac{N_z N_y^2}{N_\perp^2}\mu H_z. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Виведемо інше диференціальне рівняння другого порядку для пов’язаних компонент хвильового поля $E_z(x)$ і $H_z(x)$. Виключимо E_x за рівнянням (4.7) і E_y за рівнянням (4.8) з рівняння (2.15) і отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&H_z + iE'_y + N_y E_x \\
&\quad = H_z - i\left(\frac{1}{N_\perp^2}\left(iH'_z + N_z N_y E_z\right) + \frac{\mu}{N_\perp^2}\left(iN_y H_z + N_z E'_z\right)\right)' \\
&\quad - N_y\left(\frac{1}{N_\perp^2}\left(N_y H_z - iN_z E'_z\right) + \frac{\mu}{N_\perp^2}\left(H'_z - iN_z N_y E_z\right)\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

До рівняння (4.14) застосуємо очевидні спрощення (4.15) та (4.16):

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\left(N_y H_z\right)\right)' - N_y\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\left(H'_z\right)\right) = \\
\frac{\mu N_y}{N_\perp^2}(H_z)' + N_y H_z\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)' - N_y\frac{\mu}{N_\perp^2}H'_z = N_y H_z\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)'.
\end{gathered}
\tag{4.15}
$$

$$
\begin{gathered}
i\left(\frac{1}{N_\perp^2}N_z N_y E_z\right)' - \frac{iN_z N_y}{N_\perp^2}E'_z = \\
iN_z N_y E_z\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)' + i\frac{1}{N_\perp^2}N_z N_y (E_z)' - \frac{iN_z N_y}{N_\perp^2}E'_z = iN_z N_y E_z\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)'.
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

Підстановка результатів (4.15) і (4.16) до рівняння (4.14) надає остаточну форму другого пов’язаного диференціального рівняння, яке слід розглядати з рівнянням (4.13) для пошуку розв’язку рівнянь Максвелла для просторового розподілу хвильового поля:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{H'_z}{N_\perp^2}\right)' + H_z\left(1 - \frac{N_y^2}{N_\perp^2} + N_y\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)'\right) \\
&\quad = i\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}N_z E'_z\right)' - i\frac{N_y^2}{N_\perp^2}\mu N_z E_z + iN_z N_y\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)' E_z.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Аналогічні рівняння зустрічаються в науковій літературі. Наприклад, у [78].

Розпишемо у (4.14) та (4.17) похідні у явному вигляді. Тоді просторовий розподіл амплітуд хвилі $E_z(x)$ і $H_z(x)$ визначається двома пов’язаними звичайними лінійними диференціальними рівняннями другого порядку:

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d^2E_z}{dx^2}+\frac{N_z^2}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\frac{dE_z}{dx}\right)+\frac{N_z^2N_y}{k_0}E_z\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)+E_z\left[P-N_y^2-\frac{N_z^2N_y^2}{N_\perp^2}\right]$$
$$=-\frac{iN_z}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\frac{dH_z}{dx}\right)-\frac{iN_zN_y}{k_0}H_z\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right)+\frac{iN_zN_y^2\mu}{N_\perp^2}H_z, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\frac{dH_z}{dx}\right)+H_z\left[1-\frac{N_y^2}{N_\perp^2}+\frac{N_y}{k_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)\right]$$
$$=\frac{i}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu N_z}{N_\perp^2}\frac{dE_z}{dx}\right)-\frac{iN_y^2}{N_\perp^2}\mu N_zE_z+\frac{iN_zN_y}{k_0}E_z\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right), \tag{4.19}$$

у (4.3) і (4.4) $N_y = k_y/k_0$ — полоїдний показник заломлення, $\mu = -D/(S - N_z^2)$, $N_\perp^2 = (R - N_z^2)(L - N_z^2)/(S - N_z^2)$, $R = S + D$, і $L = S - D$.

Застосування позначення $R = S + D$ можна легко виключити таким чином: $N_\perp^2 = (S - N_z^2)(1 - \mu^2)$. Це дає змогу використовувати R як позначення для великого радіуса плазми. Узагалі, рівняння Максвелла можна звести до шести диференціальних рівнянь четвертого порядку (для будь-якої з шести компонент хвильового поля) або до 15 систем двох диференціальних рівнянь другого порядку (для будь-яких двох компонент хвильового поля). Вибір пари $E_z(x)$ і $H_z(x)$ є випадковим, проте часто саме він зустрічається у науковій літературі (наприклад, у [79]), що дасть змогу порівнювати та аналізувати отримані результати. Рівняння (4.19) можна спростити, нехтуючи $E_z(x)$, що виправдано в ІЦДЧ поза Альфвеновим резонансом:

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\frac{dH_z}{dx}\right)+H_z\left[1-\frac{N_y^2}{N_\perp^2}+\frac{N_y}{k_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)\right]=0. \tag{4.20}$$

Це рівняння переходить у рівняння типу Бесселя в циліндричних координатах, що є його великою перевагою порівняно з рівняннями для інших компонент хвилі, наприклад, з (2.44) та (2.53).

Якщо знехтувати неоднорідністю плазми в рівняннях (4.20), (2.44) і (2.53), то вони набувають набагато простішої форми:

$$H''_z+\left[N_\perp^2-N_y^2\right]H_z=0. \tag{4.21}$$

$$E''_x + \left[N_\perp^2 - N_y^2\right]E_x = 0. \tag{4.22}$$

$$E''_y + \left[N_\perp^2 - N_y^2\right]E_y = 0. \tag{4.23}$$

Збіг рівнянь (4.21), (4.22) та (4.23) забезпечує збіг просторових розподілів компонент хвилі в однорідній плазмі. Однак в області SOL токамаку не можна нехтувати неоднорідністю густини плазми.

Для виведення дисперсійного співвідношення також потрібні вирази для y – компонент електричного та магнітного полів хвилі:

$$E_y = \frac{-1}{N_\perp^2}\{\frac{i}{k_0}\frac{dH_z}{dx} + N_z N_y E_z + \mu[iN_y H_z + \frac{N_z}{k_0}\frac{dE_z}{dx}]\}, \tag{4.24}$$

$$H_y = \frac{-N_z}{N_\perp^2}\left\{N_y H_z - \frac{iN_z}{k_0}\frac{dE_z}{dx} + \mu\left[-iN_y N_z E_z + \frac{1}{k_0}\frac{dH_z}{dx}\right]\right\} + \frac{i}{k_0}\frac{dE_z}{dx}. \tag{4.25}$$

Ці тангенціальні компоненти повинні бути неперервними на межах поділу між областями, зазначеними нижче.

Стандартна процедура виведення дисперсійного співвідношення в обмеженій плазмі полягає в наступному. Необхідно знайти просторовий розподіл хвильового поля та задовольнити граничним умовам. У даному випадку ми знаходимо просторовий розподіл хвильового поля в чотирьох областях навколо ЛАР, підбираємо розв’язки на межах областей так, щоб хвильові поля загасали з відстанню від ЛАР в обох напрямках: до плазми низької та високої густини.

Як і у [52], будемо вважати, що густина частинок плазми зростає експоненціально в межах SOL:

$$n(x) = n_0 \exp(x/\lambda), \tag{4.26}$$

де λ — це довжина експоненційного зменшення густини плазми, а n_0 — густина плазми при $x = 0$, яка надалі розглядається як положення ЛАР (4.27):

$$S \equiv 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} = N_z^2. \tag{4.27}$$

Саме малість λ порівняно з малим радіусом плазми токамаку a виправдовує застосування декартової геометрії для опису просторового розподілу полів хвилі SOL, оскільки досліджуваний сигнал в іонному циклотронному діапазоні частот, як показано далі, локалізований у шарі з шириною порядку λ.

У подальших числових розрахунках використано наступні параметри плазми та хвилі: однозарядні іони дейтерію, тороїдний номер моди n=3, відношення частоти хвилі до циклотронної частоти іонів $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, великий радіус плазми $R = 2.12$ м, малий радіус плазми $a = 0.5$ м, довжина експоненційного зменшення густини плазми $\lambda = 0.018$ м, зовнішнє стале однорідне магнітне поле $B_0 = 2.0$ Тл, густина плазми $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$ і температура йонів $T_i = 10.0$ eВ.

Частоту електрон-іонних зіткнень можна оцінити для цих параметрів плазми як $\overline{\nu_{ei}} = 114.0$ кГц, що набагато менше, ніж іонна циклотронна частота $f_{ci} \approx 14.6$ МГц [80-81]. Цей факт підтверджує справедливість наближення плазми без зіткнень, застосованого в цій роботі.

Компоненти S, D, P (4.1) тензора діелектричної проникності плазми, а також коефіцієнти в рівняннях (4.18)-(4.19) та (4.24)-(4.25) суттєво змінюються в SOL низької густини.

На рисунку 4.2 (на наступній сторінці) крива залежності $S(x)$ виглядає неперервною і на перший погляд поділ області SOL на чотири області виглядає нелогічним. Поділ SOL на чотири області відповідно до кореляції між компонентами S, D і P пояснюється нижче. Аналітичні асимптотичні розв’язки рівнянь (4.18)-(4.19) у цих чотирьох областях виведено в наступному розділі. Як видно з рисунку 4.2, $S(x)$ у перших двох областях є майже незмінним, у третій області починає плавно спадати, а у четвертій області спостерігається різке спадання.

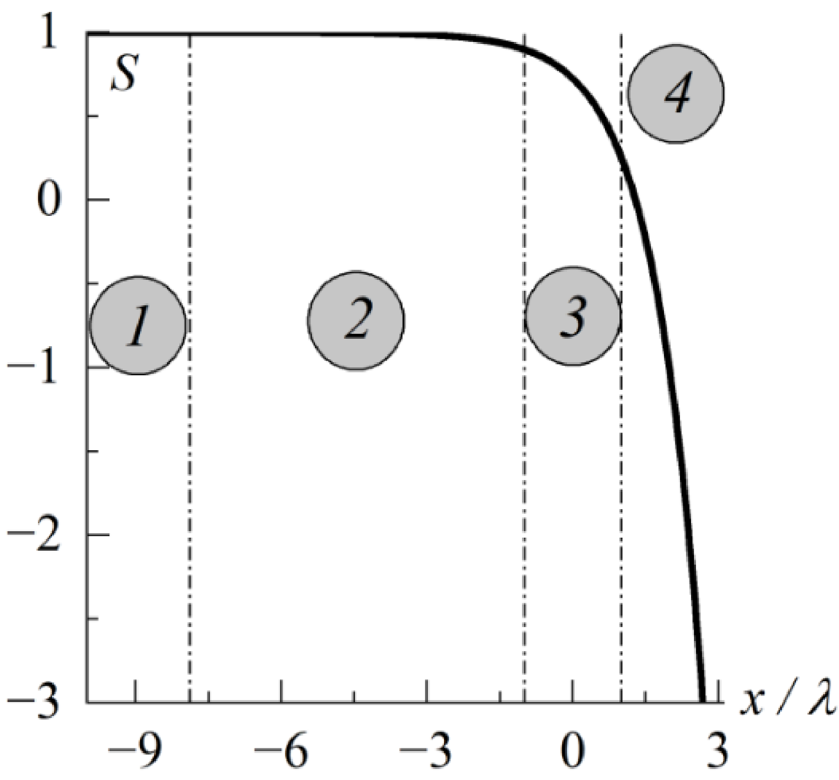

Рис. 4.2. Просторова зміна $S(x)$ (суцільна крива) в межах SOL низької густини. Цифри 1-4 у сірих кружках позначають чотири області, на які розділено SOL, щоб зробити рівняння (4.3)-(4.6) придатними для аналітичного розв’язання. Штрихпунктирні вертикальні лінії відокремлюють області. $n = 3$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12\,м$, $\lambda = 0.018\,м$, $B_0 = 2.0\,Тл$, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Перша область (рис. 4.3) визначається умовою, що густина плазми в ній є достатньо малою, щоби забезпечити так звані умови вакууму:

$$|S - 1| \ll 1, |D| \ll 1, |P - 1| \ll 1. \tag{4.28}$$

У цій області можна точно визначити просторовий розподіл полів хвилі. Припускається, що амплітуда хвилі експоненціально спадає з відстанню від ЛАР (4.27), $x \to -\infty$. Права межа x_1 першої області визначається наступним чином. Коефіцієнт $P_1 \equiv P - N_y^2 - N_z^2 N_y^2 / N_\perp^2$ у квадратних дужках у рівнянні (4.18) переходить в околі x_1 від значення $1 - N_y^2 - N_z^2 N_y^2/(1 - N_z^2)$, властивого вакууму, до $P - 1$, яке є асимптотикою для великої густини плазми, $|P - 1| \gg (N_y^2 + N_z^2 - 1)/(1 - N_z^2)$:

$$x_1 = \lambda \ln\left(\frac{m_e}{m_i}\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2}\frac{1}{N_A^2(0)}\right). \tag{4.29}$$

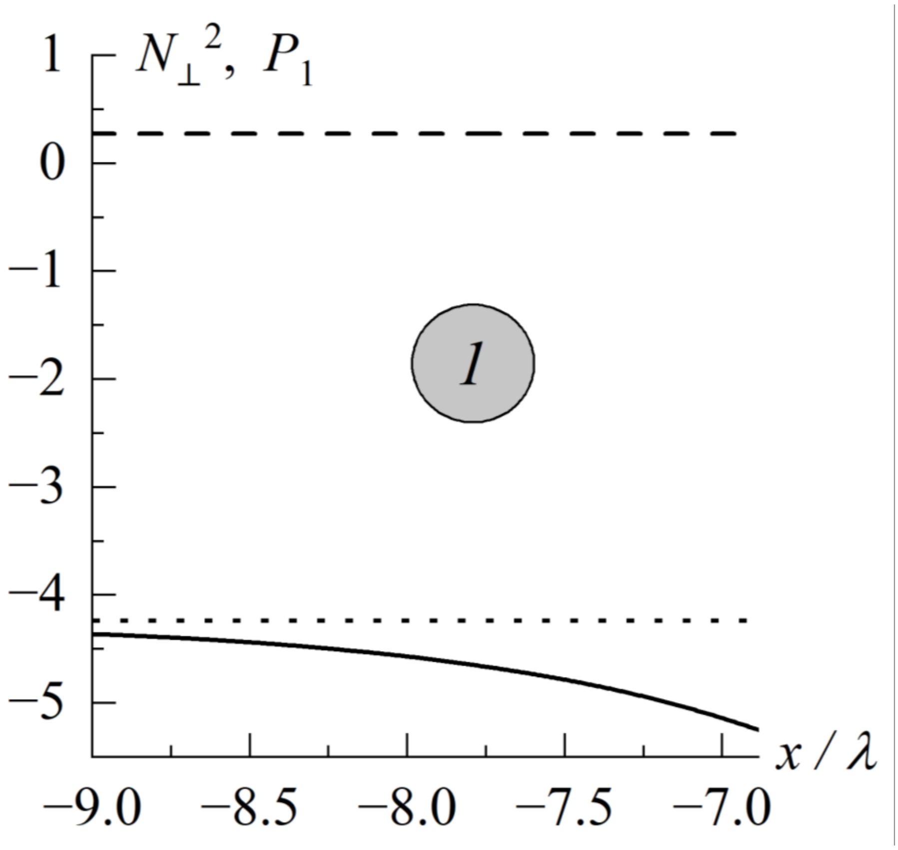

Рис. 4.3. Просторова зміна $N_\perp^2(x)$ (штрихова крива) і $P_1(x)$ (суцільна крива) у першій області. Точкова лінія відповідає вакуумному значенню P_1. $n = 3$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Графік залежності коефіцієнта P_1 показано на рисунку 4.3 суцільною кривою. Його максимальне відхилення від вакуумного значення $1 - N_y^2 - \frac{N_z^2 N_y^2}{1-N_z^2} \approx -4.237$, поданого на рис. 4.3 точковою лінією, спостерігається при $x = x_1$: $P_1(x_1) \approx -5.241$. У цілому для $P_1(x)$ спостерігається плавне зменшення зі збільшенням відстані x. Графік залежності $N_\perp^2(x)$ показано на рисунку 4.3 штриховою кривою. Його значення у цій області практично не залежать від відстані x. Значення $N_\perp^2(x)$ слабко відхиляється від свого вакуумного значення $N_\perp^2(x \to -\infty) = 1 - N_z^2 \approx 0.276$. Навіть на правій межі першої області відхилення від вакуумного значення є меншим, ніж 10^{-4}.

У другій області (рис. 4.4) можна знехтувати густиною частинок плазми у виразах для S і D, для них будемо вважати, що квадрат кутової йонної плазмової частоти у цій області прямує до нуля, $\omega_{pi}^2 \to 0$. Проте у цій області має бути враховано різницю між коефіцієнтом P та одиницею, тобто у цій області вважаємо $|P| \neq 1$.

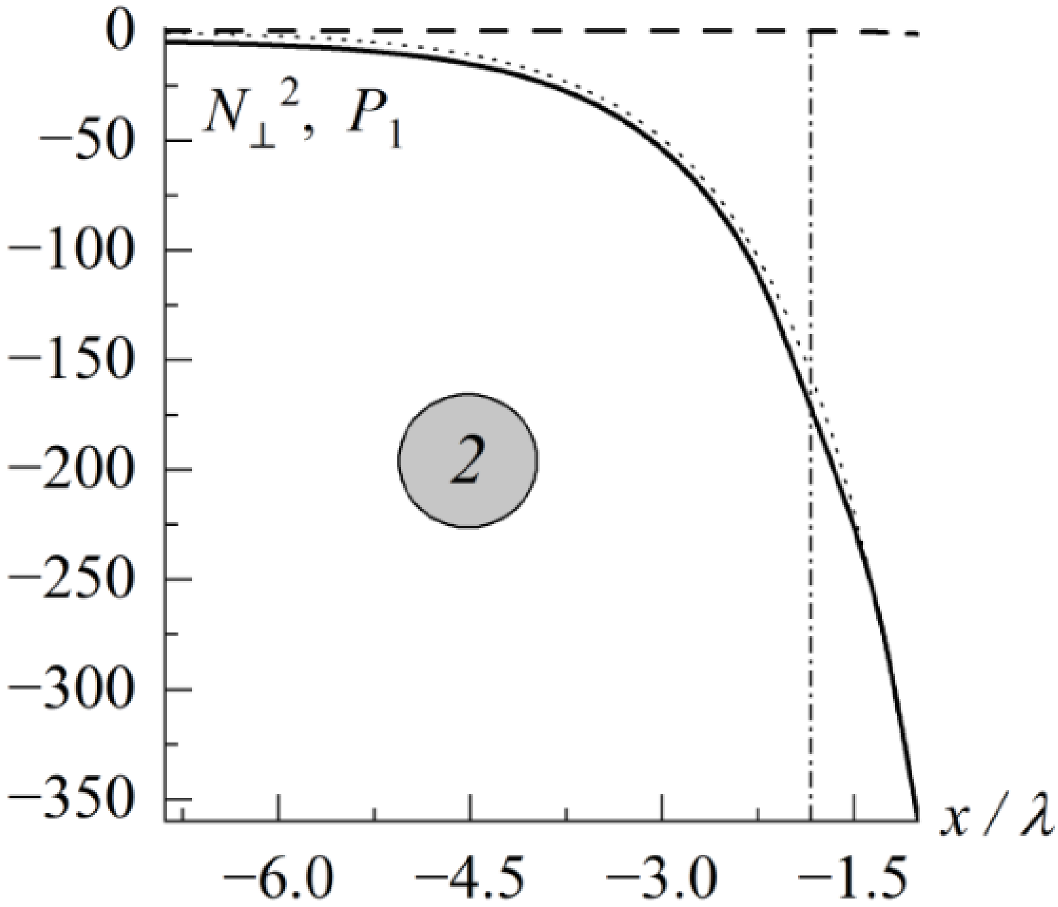

Рис. 4.4. Просторова зміна $N_\perp^2(x)$ (точкова крива) і $P_1(x)$ (суцільна крива) у другій області. Тонка точкова крива демонструє асимптоту $P(x) - 1$. Тонка вертикальна штрих-пунктирна лінія вказує на положення $N_\perp^2(x) = 0$. $n = 3$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12\, м$, $\lambda = 0.018\, м$, $B_0 = 2.0\, Тл$, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Ця область є дуже важливою для пошуку аналітичних розв’язків рівнянь (4.18) та (4.19). Нехтування існуванням цієї області блокувало б пошук розв'язку дисперсійного рівняння. Порівняння $P_1(x)$ (суцільна крива на рис. 4.4) з його асимптотикою $P(x) - 1$, представленою тонкою точковою кривою, обґрунтовує підхід до розв'язування рівняння (4.18). Вертикальна штрихпунктирна лінія вказує на координату, де значення коефіцієнта $N_\perp^2(x)$ тотожно дорівнює нулю і, отже, функція $P_1(x)$ є розбіжною. Ця розбіжність не показана на рисунку 4.4. Відомо, що хвильові поля слабо змінюються в околі цієї координати.

Як видно з рисунку 4.4, значення $N_\perp^2(x)$ практично не змінюється у залежності від x, у той час як $P_1(x)$ продовжує спадати зі зростанням x. Також спостерігається доволі точне наближення залежності $P_1(x)$ його асимптотою $P(x) - 1$.

Очікується, що сигнал у йонному циклотронному діапазоні частот є локалізованим у третій області, де $S \approx N_z^2$ (рис. 4.5). Її межі можна визначити так:

$$-\lambda < x < +\lambda. \tag{4.30}$$

На лівій межі третьої області густина частинок плазми є достатньо малою, щоби забезпечити наступні сильні нерівності:

$$|S(-\lambda) - 1| \ll 1, |D(-\lambda)| \ll 1. \tag{4.31}$$

Однак абсолютне значення P вже є великим, $|P(-\lambda)| \gg 1$. У окремому випадку, наведеному на рис. 4.5 (на наступній сторінці), ці величини дорівнюють: $S(-\lambda) - 1 \approx -0.102$, $D(-\lambda) \approx -0.539$, і $P(-\lambda) \approx -358.543$.

На правій межі третьої області густина плазми є достатньо високою, тому μ є майже однорідним, $\mu(\lambda) \approx \omega/\omega_{ci}$, і $N_\perp^2$ поводиться майже як квадрат Альфвенового показника заломлення, $N_\perp^2(\lambda) \approx N_A^2(\lambda)$, де $N_A \equiv \omega_{pi}/\omega_{ci}$. В окремому випадку, представленому на рис. 4.5, $\mu(\lambda) \approx 8.397$, $\omega/\omega_{ci} \approx 5.308$, $N_\perp^2(\lambda) \approx 32.978$, і $N_A^2(\lambda) \approx 20.395$.

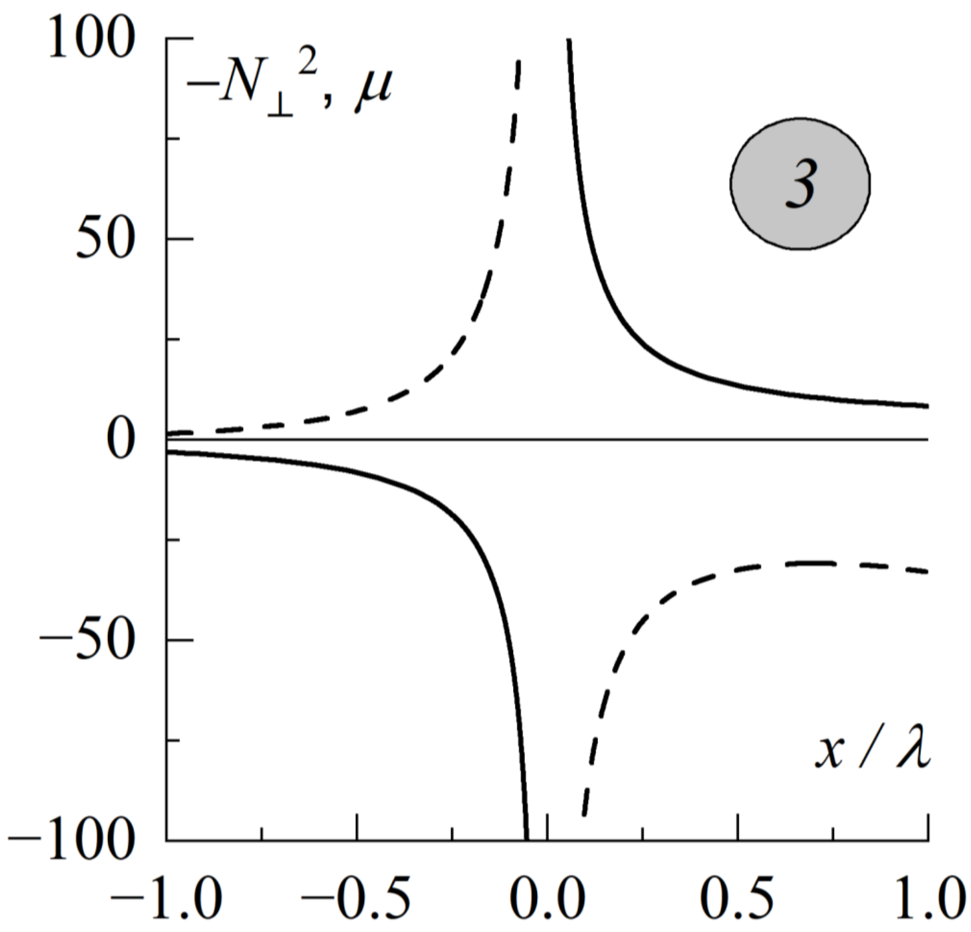

Рис. 4.5. Просторова зміна $\mu(x)$ (суцільна крива) і $-N_\perp^2(x)$ (штрихована крива) у третій області. $n = 3$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Рисунок 4.5 демонструє таку поведінку $\mu(x)$ і $N_\perp^2(x)$: обидва вирази асимптотично спадають від 0 до $-\infty$ при наближенні до координати $x = 0$ зліва та асимптотично спадають від +∞ до 0 при зростанні координати x від 0.

Четверта область (рис. 4.6) лежить праворуч від третьої області,

$$x > +\lambda. \tag{4.32}$$

Як видно з рисунку 4.6, значення $\mu(x)$ лишається майже незмінним при збільшенні координати x. Натомість $N_\perp^2(x)$ і $N_A^2(x)$ зростають зі збільшенням координати x і їхня поведінка у зростанні є доволі схожею.

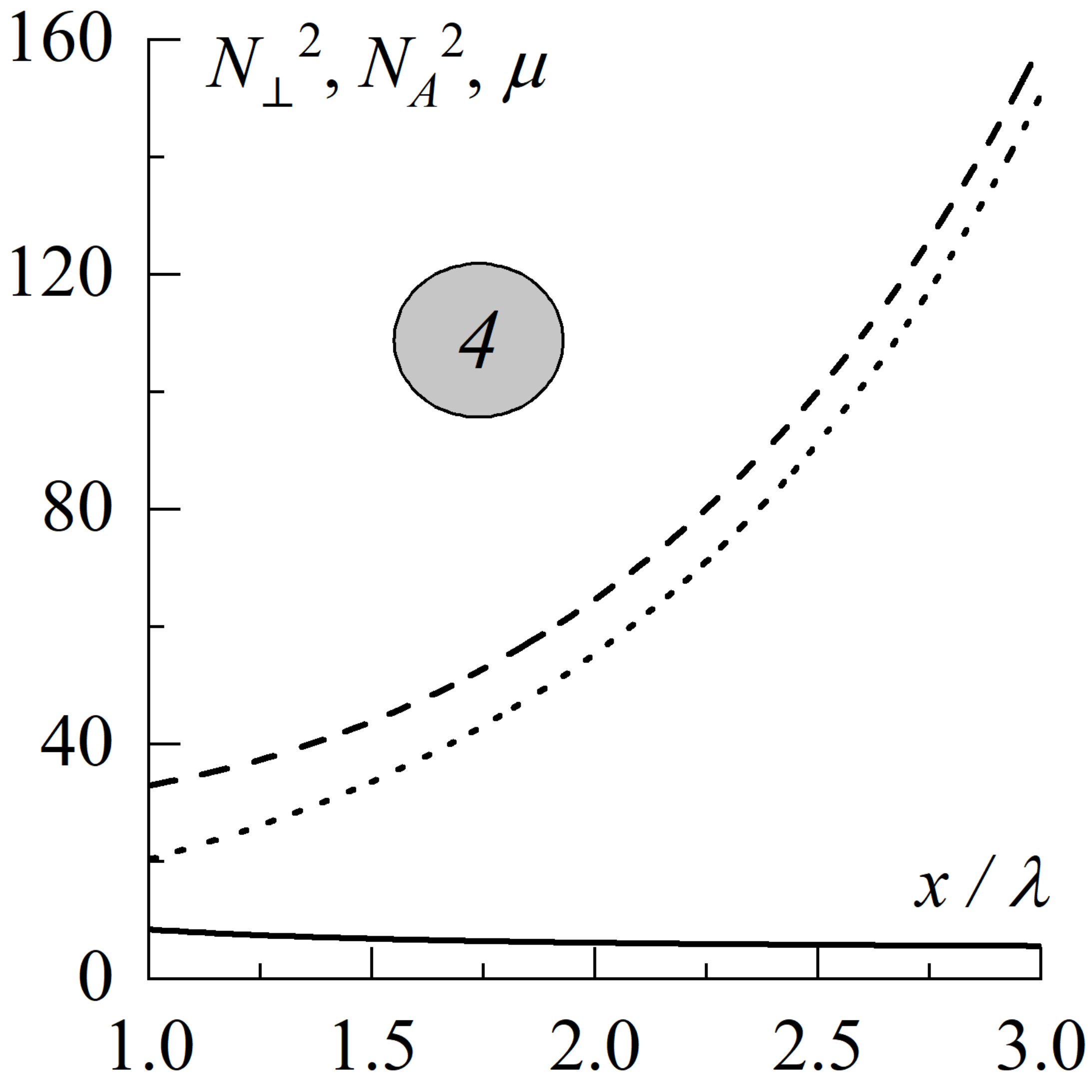

Рис. 4.6. Просторова зміна $\mu(x)$ (суцільна крива), $N_{\perp}^2(x)$ (штрихована крива) і $N_A^2(x)$ (точкова крива) в межах четвертої області. $n = 3$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Вважається, що в цій області хвиля загасає з віддаленням від резонансу (4.27), $x \to +\infty$. Остання гранична умова разом із умовою для $x \to -\infty$, згаданою вище, забезпечує локалізований характер сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот, який розглядається. Фізична суть математичної умови $x \to +\infty$ полягає в тому, що амплітуда поля хвилі спадає достатньо до того, як швидка хвиля досягне області свого поширення в плазмі високої густини. Підкреслимо, що зміна $N_{\perp}^2$ в четвертій області приблизно повторює зміну густини частинок плазми (4.26),

$$N_\perp^2 \approx N_A^2(0)\exp(x/\lambda). \quad (4.33)$$

Остання обставина значно спрощує пошук аналітичного (хоча і наближеного) розв'язку рівнянь Максвелла в цій області. Зауважимо також, що μ слабо змінюється в цій області, $\mu \approx \omega/\omega_{ci}$. Слабка різниця між $N_\perp^2$ і N_A^2 в межах четвертої області чітко спостерігається на рис. 4.6, де ці величини показані штрихованою та точковою кривими відповідно. Суцільна крива на рис. 4.6 підтверджує незначну зміну μ в межах четвертої області.

4.2. Просторовий розподіл поля хвилі

У першій області, $-\infty < x < x_1$, обидві амплітуди хвильового поля $E_z(x)$ і $H_z(x)$ розраховують з однакових однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{d^2H_z}{dx^2} + \left(k_0^2 - k_y^2 - k_z^2\right)H_z = 0, \qquad \frac{d^2E_z}{dx^2} + \left(k_0^2 - k_y^2 - k_z^2\right)E_z = 0\,. \quad (4.34)$$

Ці рівняння безпосередньо отримані з рівнянь (4.18) і (4.19) у випадку припущень про нехтовно малу густину плазми, тобто при $S, P \to 1.0$, $D \to 0.0$, $N_\perp^2 \to 1 - N_z^2$.

Їх розв'язки, які задовольняють крайовій умові, що поля хвилі обертаються в нуль при $x \to -\infty$, виглядають так:

$$H_z = A_1\exp(k_1 x),\, E_z = B_1\exp(k_1 x). \quad (4.35)$$

У (4.35) A_1 і B_1 є константами інтегрування, $k_1 = \sqrt{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2}$ вважають реальною величиною, фізичний зміст якої є наступним. Значення k_1^{-1} є просторовим масштабом, при якому амплітуда хвильового поля зменшується в e разів. Залежності $E_z(x)$ і $H_z(x)$ показані на рис. 4.7 штрихованою і суцільною кривими відповідно ліворуч від $x_1 \approx -6.885\lambda$. Для параметрів плазми, застосованих у розрахунках для рис. 4.7, $k_1 \approx 1.799$ м$^{-1}$ є досить малим, однак для хвилі з $m = 5$, $k_1 \approx 6.0$ м$^{-1}$.

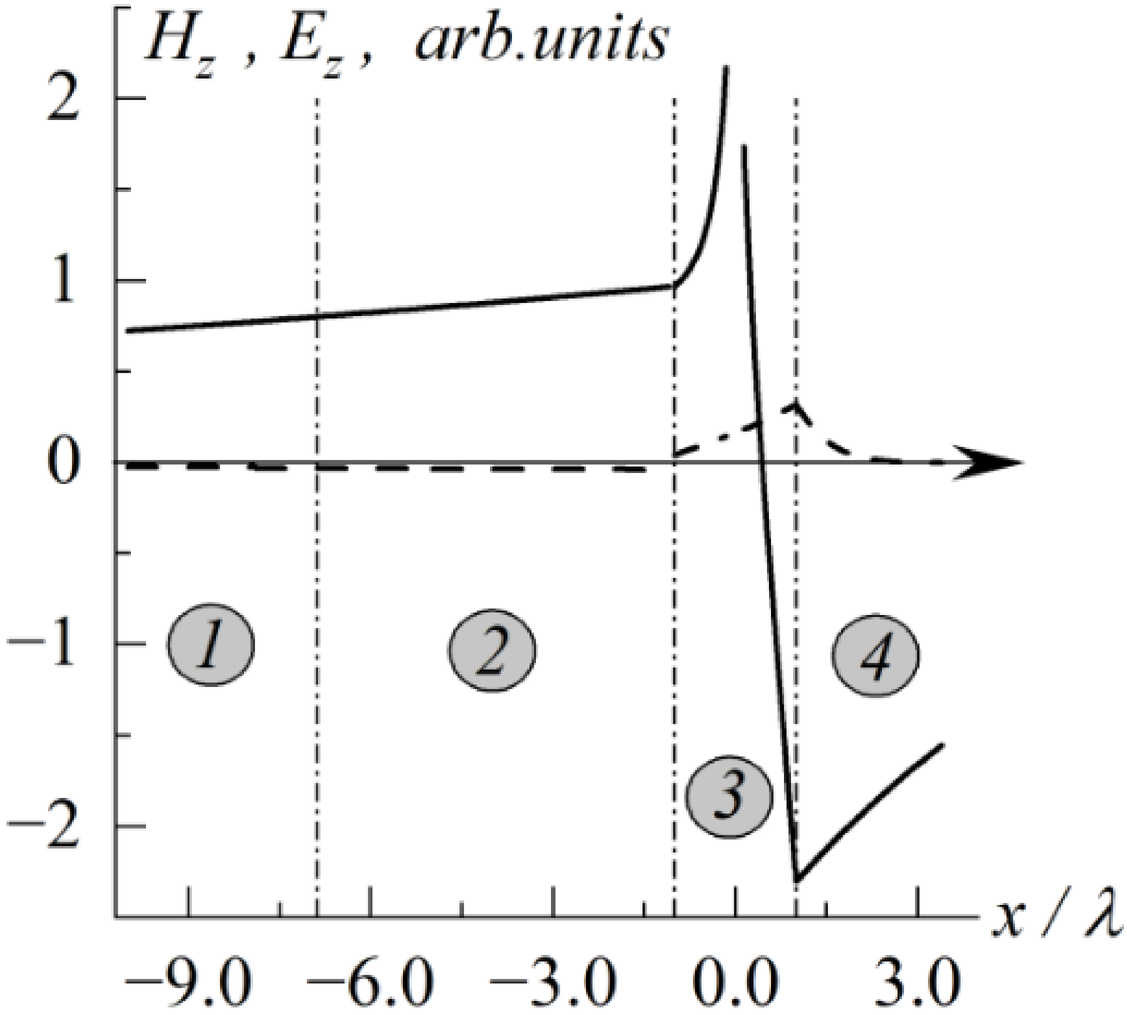

Рис. 4.7. Радіальний розподіл поля хвилі: $H_z(x)$ – суцільні криві, $E_z(x)$ – штриховані криві. Параметри плазми і хвилі: $n = 3$, $m = 1$, $\omega/\omega_{ci} = 5.308$, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$. Вертикальними штрихпунктирними лініями позначені межі між областями 1÷4.

У другій області, $x_1 < x < -\lambda$, просторовий розподіл тороїдного магнітного поля хвилі описується тим самим рівнянням (4.34), що й у першій області, на відміну від розподілу тороїдного електричного поля хвилі, яке розраховують з такого рівняння:

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d^2E_z}{dx^2} + (P-1)(1-N_z^2)E_z = 0. \tag{4.36}$$

Рівняння (4.36) отримано з рівняння (4.24) при умовах $N_\perp^2 \to 1 - N_z^2$, $\mu \to 0$, $(P-1)(1-N_z^2) \gg (1-N_z^2-N_y^2)$.

Використаємо експоненційну залежність густини плазми від x і тоді множник з рівняння (4.36) можна представити наступним чином:

$$P - 1 = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = -C_1 \exp(x/\lambda). \tag{4.37}$$

де C_1 – це константа. Тоді рівняння (4.36) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} - C_2 \exp(x/\lambda)\, E_z = 0, \tag{4.38}$$

де C_2 – це додатна константа. Перепишемо рівняння (4.38) наступним чином:

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right)} \frac{1}{\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right)} \frac{d}{dx}\left(\frac{\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right)}{\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right)} \frac{dE_z}{dx}\right) - C_2 E_z = 0. \tag{4.39}$$

Введемо заміну змінної:

$$\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right) dx = 2\lambda d\left(\exp\left(\frac{x}{2\lambda}\right)\right) = 2\lambda dq. \tag{4.40}$$

Тоді рівняння (4.39) набуває вигляду рівняння Бесселя:

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dq}\left(q \frac{dE_z}{dq}\right) - C_3 E_z = 0. \tag{4.41}$$

У (4.41) C_3 – це константа.

Розв’язок рівняння (4.41) можна записати в термінах модифікованої функції Бесселя $I_0(q)$ і функції Макдональда $K_0(q)$ нульового порядку:

$$E_z = B_{21} I_0\left(2k_0\lambda\sqrt{(P-1)(N_z^2-1)}\right) + B_{22} K_0\left(2k_0\lambda\sqrt{(P-1)(N_z^2-1)}\right). \tag{4.42}$$

Для параметрів плазми, застосованих у розрахунках для рис. 4.7, аргументи модифікованої функції Бесселя і функції Макдональда в рівнянні (4.42) спрощуються до $0.984\exp(0.5x/\lambda)$.

У третій області, $-\lambda < x < +\lambda$, можна застосувати метод вузького шару [82], який узагальнено у цій роботі для розв’язання набору двох пов’язаних диференціальних рівнянь другого порядку. Коротко кажучи, метод вузького шару доцільно застосовувати у випадках, протилежних тим, коли є застосовним метод ВКБ.

Замінимо H_z у перших трьох доданках у лівій частині рівняння (4.19) на його значення на лівій межі третьої області, $H_z(-\lambda) \equiv A_{31}$, і замінимо E_z в останніх двох доданках у правій частині рівняння (4.19) на значення на лівій межі третьої області, $E_z(-\lambda) \equiv B_{31}$. Тоді рівняння (4.19) набуває вигляду:

$$\begin{gathered} A_{31} - \frac{N_y^2}{N_\perp^2} A_{31} + A_{31} \frac{N_y}{k_0} \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right) + \frac{1}{k_0^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2} \frac{dH_z}{dx}\right) = \\ = \frac{i}{k_0^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu N_z}{N_\perp^2} \frac{dE_z}{dx}\right) - \frac{iN_y^2}{N_\perp^2} \mu N_z B_{31} + \frac{iN_z N_y}{k_0} B_{31} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\right). \end{gathered} \tag{4.43}$$

Проінтегруємо рівняння (4.43):

$$\begin{gathered} A_{31}(x+\lambda) - A_{31} N_y^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{dx}{N_\perp^2} + A_{31} \frac{N_y}{k_0}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2} - \frac{\mu(-\lambda)}{N_\perp^2(-\lambda)}\right) \\ + \frac{1}{k_0^2}\left(\frac{1}{N_\perp^2} \frac{dH_z}{dx} - \frac{1}{N_\perp^2(-\lambda)} \frac{dH_z}{dx}_{|x=-\lambda}\right) = \\ = \frac{i}{k_0^2}\left(\frac{\mu N_z}{N_\perp^2} \frac{dE_z}{dx} - N_z \frac{\mu(-\lambda)}{N_\perp^2(-\lambda)} \frac{dE_z}{dx}_{|x=-\lambda}\right) - \\ iN_y^2 N_z B_{31} \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} dx + \frac{iN_z N_y}{k_0} B_{31}\left(\frac{1}{N_\perp^2} - \frac{1}{N_\perp^2(-\lambda)}\right). \end{gathered} \tag{4.44}$$

Використаємо такі самі наближення, як було зазначено вище: $\mu(-\lambda) = 0$ та $N_\perp^2(-\lambda) = 1 - N_z^2$; також введемо позначення $A_{32} = \frac{dH_z}{dx}_{|x=-\lambda}$, $B_{32} = \frac{dE_z}{dx}_{|x=-\lambda}$:

$$\begin{gathered} A_{31}(x+\lambda) - A_{31} N_y^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{dx}{N_\perp^2} + A_{31} \frac{N_y}{k_0} \frac{\mu}{N_\perp^2} + \frac{1}{k_0^2}\left(\frac{1}{N_\perp^2} \frac{dH_z}{dx} - \frac{1}{1-N_z^2} A_{32}\right) = \\ = \frac{i}{k_0^2} \frac{\mu N_z}{N_\perp^2} \frac{dE_z}{dx} - iN_y^2 N_z B_{31} \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} dx + \frac{iN_z N_y}{k_0} B_{31}\left(\frac{1}{N_\perp^2} - \frac{1}{1-N_z^2}\right). \end{gathered} \tag{4.44}$$

Помножимо рівняння (4.44) на $k_0^2 N_\perp^2 \equiv k_\perp^2$:

$$A_{31}(x+\lambda)k_\perp^2 - A_{31} N_y^2 k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{dx}{N_\perp^2} + A_{31} k_y \mu + \frac{dH_z}{dx} - \frac{N_\perp^2}{1-N_z^2} A_{32} = \tag{4.45}$$

$$= i\mu N_z \frac{dE_z}{dx} - iN_y^2 N_z B_{31} k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} dx + iN_z k_y B_{31} - iN_z k_y B_{31} \frac{N_\perp^2}{1 - N_z^2}.$$

Проінтегруємо рівняння (4.45):

$$\begin{gathered} A_{31} \int_{-\lambda}^{x} (x+\lambda) k_\perp^2 dx - A_{31} N_y^2 \int_{-\lambda}^{x} \left(k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{dx}{N_\perp^2} \right) dx + A_{31} k_y \int_{-\lambda}^{x} \mu dx + H_z \\ - A_{31} - \frac{A_{32}}{1 - N_z^2} \int_{-\lambda}^{x} N_\perp^2 dx = iN_z B_{32} \int_{-\lambda}^{x} \mu dx \\ -iN_y^2 N_z B_{31} \int_{-\lambda}^{x} (k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} dx) dx + iN_z k_y B_{31} (x+\lambda) \\ - iB_{31} \frac{N_z k_y}{1 - N_z^2} \int_{-\lambda}^{x} N_\perp^2 dx. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Тепер $H_z(x)$ залишимо у лівій частині рівняння, а інші вирази перенесемо у праву частину. Тоді просторовий розподіл хвильового поля $H_z(x)$ в третій області визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{gathered} H_z = A_{31} \left\{ 1 - \int_{-\lambda}^{x} [(x+\lambda) k_\perp^2] dx + N_y^2 \int_{-\lambda}^{x} \left[k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{dx}{N_\perp^2} \right] dx \right. \\ \left. - k_y \int_{-\lambda}^{x} \mu dx \right\} - A_{32} \frac{1}{1 - N_z^2} \int_{-\lambda}^{x} N_\perp^2 dx \\ +iB_{31} \left\{ k_z N_y (x+\lambda) - N_y^2 N_z \int_{-\lambda}^{x} \left[k_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu dx}{N_\perp^2} \right] dx - \frac{N_z k_y}{1 - N_z^2} \int_{-\lambda}^{x} N_\perp^2 dx \right\} \\ + iB_{32} N_z \int_{-\lambda}^{x} \mu dx, \end{gathered} \tag{4.47}$$

Для отримання просторового розподілу хвильового поля $E_z(x)$ в третій області необхідно провести аналогічні дії з рівнянням (4.18). Використаємо ті самі наближення та позначення і отримаємо:

$$E_z = iA_{31}\left\{N_z k_y^2 \int_{-\lambda}^{x}\left[\frac{1}{Q}\int_{-\lambda}^{x}\frac{\mu dx}{N_\perp^2}\right]dx - k_z N_y \int_{-\lambda}^{x}\frac{dx}{QN_\perp^2}\right.$$
$$\left.+\frac{k_z N_y}{1-N_z^2}\int_{-\lambda}^{x}\frac{dx}{Q}\right\} - iA_{32}N_z\int_{-\lambda}^{x}\frac{\mu dx}{QN_\perp^2} \tag{4.48}$$
$$+B_{31}\left\{1 - N_z^2 k_y \int_{-\lambda}^{x}\frac{\mu dx}{QN_\perp^2} - k_0^2\int_{-\lambda}^{x}\left[\frac{1}{Q}\int_{-\lambda}^{x}\left(P - N_y^2 - \frac{N_z^2 N_y^2}{N_\perp^2}\right)dx\right]dx\right\}$$
$$+ B_{32}\frac{1}{1-N_z^2}\int_{-\lambda}^{x}\frac{dx}{Q}.$$

У (4.47) і (4.48) константи інтегрування A_{31}, A_{32}, B_{31} і B_{32} мають чіткий фізичний зміст. Вони являють собою амплітуди хвильового поля та їх похідні на лівій межі області, $x = -\lambda$:

$$A_{31} = H_z(-\lambda),\, A_{32} = \frac{dH_z}{dx}_{|x=-\lambda},\, B_{31} = E_z(-\lambda),\, B_{32} = \frac{dE_z}{dx}_{|x=-\lambda}. \tag{4.49}$$

У (4.47) і (4.48) застосовано таке позначення:

$$Q = \frac{D^2 - S(S - N_z^2)}{D^2 - (S - N_z^2)^2}. \tag{4.50}$$

Найважливішою перевагою застосування рівнянь (4.47) і (4.48) полягає в тому, що вони пов’язують значення полів хвилі по різні сторони від резонансу (4.27).

Проблема поглинання електромагнітної енергії в околі резонансу (4.27) виходить за межі цієї роботи. Отже, розподіл хвильового поля, показаний на рис. 4.7 у третій області, є розривним: для $-0.147\lambda < x < 0.147\lambda$ дані не представлені. Цифра 0.147 відповідає характерній ширині локального резонансу $\Delta x \sim \left(\rho_{Li}^2 \lambda\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.3 \times 10^{-3}$ м [83, 84] (тут ρ_{Li} — Ларморів радіус іонів). Виключення цього інтервалу координат з розгляду призводить до відсутності явно спостережуваної резонансної поведінки хвильового електричного поля E_z на відміну від хвильового магнітного поля H_z, яке демонструє резонансне зростання з наближенням до координати $x = 0$. Відсутність резонансної поведінки E_z на рис.

4.7 можна пояснити різним типом сингулярності поля хвилі в наближенні холодної плазми, в якому $H_z \propto \ln|S - N_z^2|$ і $E_z \propto (S - N_z^2)^{-2}$, що означає, що резонанс E_z є вужчим, ніж резонанс H_z.

Відзначимо різний характер залежності $H_z(x)$ з протилежних сторін від резонансної точки $x = 0$, представленої на рис. 4.7. Поле $H_z(x)$ хвилі спадає з відстанню від $x = 0$ вліво ($x < 0$) і перетинає вісь x праворуч від резонансної координати (при $x \approx 0.44\lambda$). Це узгоджується з поведінкою $N_\perp^2$, представленою на рис. 4.5. Оскільки $N_\perp^2 \to +\infty$ для $x \to +0$, швидка хвиля має вузьку область поширення праворуч від резонансної точки. Саме ця область (у поєднанні зі областю просторового загасання в четвертій області) створює можливість існування локалізованого сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот, дослідженого в цій роботі. Для $x < 0$ амплітуда хвильового поля $H_z(x)$ зменшується з відстанню від точки резонансу, але ніколи не обертається в нуль. У межах області поширення поле $H_z(x)$ має просторово коливатися, що означає періодичне обертання $H_z(x)$ в нуль. Оскільки область поширення є вузькою, то спостерігається тільки один нуль поля $H_z(x)$.

У четвертій області, $x > \lambda$, зв'язком між швидкою та повільною модами можна знехтувати. Для визначення просторового розподілу тороїдного магнітного поля хвилі можна застосувати рівняння (4.19), але у спрощеному вигляді. У цій області, де плазма досить густа, величиною поля E_z можна знехтувати, оскільки $|P| \gg |S, D|$:

$$E_z = \frac{N_y H_x + iH'_y}{P}. \tag{4.51}$$

Порівняємо три перші доданки в лівій частині рівняння (4.19) за порядком величини. Роблячи це, оцінюємо похідну $\frac{d}{dx}$, коли її застосовано до параметрів плазми, як $1/\lambda$:

$$\frac{N_y}{k_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right) \sim \frac{k_y}{k_0^2\lambda}\left(\frac{\omega}{\omega_{ci}N_A^2}\right) \gg 1. \tag{4.52}$$

Значення виразу $\frac{k_y}{k_0^2\lambda}\left(\frac{\omega}{\omega_{ci}}\right)$ при параметрах $f = 50$ МГц, $\mu = 3$, $\lambda = 2$ см можна оцінити як ~ 300. Це має бути набагато більше за N_A^2, що для Альфвенового резонансу складає $N_A^2 = (\frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} - 1)(1 - N_z^2) \approx 2$. Тому доданок «$H_z \frac{N_y}{k_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)$» у лівій частині рівняння (4.19) виявляється на порядок більшим, ніж «H_z» і «$-N_y^2 H_z / N_\perp^2$» через сильну зміну густини плазми (4.26). Це також підтверджено чисельними розрахунками. Тоді рівняння (4.19) перейде у рівняння (4.53):

$$\frac{1}{k_0^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_\perp^2}\frac{dH_z}{dx}\right) + \frac{N_y}{k_0}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right)H_z = 0. \tag{4.53}$$

Вважаємо $N_\perp^2 \approx N_A^2 = N_A^2(0)\exp(x/\lambda)$, $\mu = \frac{\omega}{\omega_{ci}} = Const$, тоді рівняння (4.53) переходить у таке:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\frac{dH_z}{dx}\right) + k_y\mu\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\right)H_z = 0. \tag{4.54}$$

Розпишемо похідну в лівій частині рівняння (4.54):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\frac{dH_z}{dx}\right) = \frac{1}{\exp(x/\lambda)}\frac{d^2H_z}{dx^2} + \frac{dH_z}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\right), \tag{4.55}$$

та останню похідну у виразі (4.55):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\right) = -\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\exp(x/\lambda)}. \tag{4.56}$$

Тоді рівняння (4.54) набуває наступного вигляду:

$$\frac{1}{\exp(x/\lambda)}\frac{d^2H_z}{dx^2} + \frac{dH_z}{dx}(-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)}) + k_y\mu(-\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\exp(x/\lambda)})H_z = 0. \tag{4.57}$$

Як видно, всі вирази у рівнянні (4.57) є пропорційними до $\frac{1}{exp(x/\lambda)}$, тому помножимо рівняння (4.57) на $\exp(x/\lambda)$:

$$\frac{d^2H_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{dH_z}{dx} - \frac{1}{\lambda}k_y\mu H_z = 0. \tag{4.58}$$

Розв'язок рівняння (4.58), який задовольняє крайовій умові наближення до нуля при $x \to \infty$, виглядає наступним чином:

$$H_z = A_4 \exp(-k_4 x). \tag{4.59}$$

У виразі (4.59) k_4 визначається, як розв'язок квадратичного рівняння:

$$k_4^2 + \frac{k_4}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} k_y \mu = 0. \tag{4.60}$$

З-поміж двох коренів рівняння (4.60) вибирають тільки позитивний, щоб забезпечити локалізацію сигналу ІЦДЧ. Тому $k_4 = \frac{(\sqrt{1+4\lambda k_y \omega/\omega_{ci}}-1)}{2\lambda} \approx \frac{k_y \omega}{\omega_{ci}} > 0$, де k_4^{-1} є просторовим масштабом, на якому амплітуда хвилі зменшується у e разів. Для параметрів плазми, застосованих у розрахунках для рис. 4.7, $k_4 \approx 9.17$ м$^{-1}$. Для хвиль з $m = 5$ він є ще більшим: $k_4 \approx 34.03$ м$^{-1}$, тобто амплітуда хвилі зменшується у e разів на відстані 0.024 м. Чотири інші компоненти поля хвилі: E_x, E_y, H_x, і H_y, – загасають у четвертій області ще сильніше: E_x, E_y, H_x, $H_y \propto \exp(-(k_4 + \lambda^{-1})x)$.

На перший погляд, E_z пов'язано з іншими компонентами електромагнітного поля:

$$E_z = (N_y H_x + iH'_y)/P, \tag{4.61}$$

та можна вважати, що $E_z \to 0$. Однак такий підхід суперечить наступним міркуванням. Якщо піти таким шляхом, то маємо чотири області з чотирма константами інтегрування в трьох областях і двома константами в четвертій області. У той же час існує 12 граничних умов на межах між чотирма областями та додатково дві граничні умови загасання сигналу ІЦДЧ в першій області, одну граничну умову загасання сигналу ІЦДЧ в четвертій області. Тобто усього існує 14 констант інтегрування та 15 граничних умов. Якщо піти іншим шляхом, то кількість констант збільшується на дві, а кількість граничних умов – на одну. Тоді маємо 16 констант і 16 граничних умов. Але для цього потрібно знайти явний вираз для E_z.

Просторовий розподіл тороїдного електричного поля хвилі можна знайти з рівняння (4.18). Рівняння (4.18) складається з двох частин. Одна частина пов'язана з правою частиною рівняння, що ініціюється компонентом поля H_z. Цей зв'язок був описаний вище. Друга частина пов'язана з лівою частиною рівняння. У ній другий доданок є набагато меншим за перший, тому що $\frac{N_z^2}{N_\perp^2} \ll 1$, а третій вираз є набагато меншим за PE_z:

$$\frac{N_z^2 N_y}{k_0} \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{N_\perp^2}\right) \ll P. \tag{4.62}$$

Попри наявність малого λ у знаменнику ($\frac{d}{dx} \sim \frac{1}{\lambda}$) нерівність все одно виконується у четвертій області як $10^{-2} \ll 1$ навіть для густин Альфвенового резонансу, тоді як густина зростає в четвертій області порівняно з третьою.

Тоді рівняння (4.18) можна спростити в четвертій області таким чином:

$$\frac{1}{k_0^2} \frac{d^2 E_z}{dx^2} + PE_z = 0. \tag{4.63}$$

Розв'язок рівняння (4.63), який задовольняє крайовій умові наближення до нуля при вході всередину плазми, виглядає наступним чином:

$$E_z = B_4 K_0\left(2\lambda\omega_{pe}/c\right). \tag{4.64}$$

Для параметрів плазми, застосованих у розрахунках для рис. 4.7, аргумент функції Макдональда в рівнянні (4.64) спрощуються до $1.872\exp(0.5x/\lambda)$.

4.3. Висновки до розділу 4

У даному розділі розглянуто геометрію SOL та обґрунтовано застосування декартової системи координат, а не використання тороїдальної системи координат, яка є більш логічною для токамаків.

Наведено параметри плазми і хвилі, і розраховано для них характерні масштаби величин, які пояснюють використання наближення плазми без зіткнень.

SOL поділено на чотири області (див. рисунок 4.2). Для кожної з цих областей розглянуто залежності компонент тензора діелектричної проникності плазми без зіткнень і коефіцієнтів з рівнянь (4.3-4.6), по яким можна знайти просторовий розподіл компонент електромагнітного поля сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот.

Для кожної з чотирьох областей SOL зроблені відповідні спрощення рівнянь для знаходження компонент електромагнітного поля $H_z(x)$ та $E_z(x)$ та знайдені функціональні залежності для цих компонент для кожної області окремо. За отриманими виразами побудовано відповідні графіки.

РОЗДІЛ 5. ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ

5.1. Аналітичний вигляд дисперсійного рівняння

У Розділі 4 просторовий розподіл поля хвилі отримано за допомогою десяти констант інтегрування. Це означає, що застосування граничних умов може привести до дисперсійного рівняння у вигляді визначника десятого порядку. Такий підхід не викликає чисельних проблем. Проте, з одного боку, визначник десятого порядку містить багато нульових компонент. З іншого боку, константи інтегрування A_{31}, A_{32}, B_{31}, і B_{32} можна легко виразити через A_1, B_1, B_{21} і B_{22}, що дає можливість звести дисперсійне рівняння до форми з визначником шостого порядку, рівного нулю, $|a_{ij}| = 0$. Це перетворення не викликає жодних технічних (математичних) проблем. Більше того, навіть цей визначник шостого порядку містить чотирнадцять нульових компонент. Компоненти визначника шостого порядку, що представляє дисперсійне рівняння, наведемо нижче.

Компоненти визначника a_{ij}, які утворюють дисперсійне рівняння досліджуваних хвиль, мають вигляд:

$$a_{11} = a_{12} = 0, a_{13} = N_4 \equiv k_4/k_0, a_{14} = 1.0, a_{15} = N_z\omega/\omega_{ci},$$
$$a_{16} = -\omega_{pe}(0)N_z qK_1(q)/\omega_{ci}, q = 2\lambda\sqrt{e(1-N_z^2)(\omega^2-\omega_{ci}^2)}/c, \quad (5.1)$$

$$a_{21} = a_{22} = 0, a_{23} = N_4 N_z\omega/\omega_{ci}, a_{24} = a_{15}, a_{25} = N_A^2(0)e,$$
$$a_{26} = -\omega_{pe}(0)a_{25}qK_1(q)/\omega, \quad (5.2)$$

$$a_{31} = \frac{N_z N_y}{1-N_z^2} - k_0\lambda N_y^2 N_z I_1, a_{32} = \frac{\sigma_1}{N_z^2-1} + \frac{N_z^2 N_y}{a_{25}}\frac{\omega}{\omega_{ci}}\sigma_2 + k_0\lambda\sigma_2 I_2,$$
$$a_{33} = 0, a_{34} = -\frac{N_z}{a_{25}}\frac{\omega}{\omega_{ci}}, a_{35} = -1.0,\ a_{36} = 0, \quad (5.3)$$

$$a_{41} = -k_0^2\lambda^2 N_z I_3 + \frac{k_z\lambda N_y}{1-N_z^2}I_4 + k_0\lambda N_y N_z I_5 + k_1\lambda N_z I_6,$$
$$a_{42} = \frac{k_0\lambda\sigma_1}{N_z^2-1}I_4 - \sigma_2 - N_z^2 N_y\sigma_2 k_0\lambda I_6 + k_0^2\lambda^2\sigma_2 I_7, a_{43} = a_{44} = a_{45} = 0, \quad (5.4)$$
$$a_{46} = K_0(q),$$

$$a_{51} = 2k_0\lambda + k_0\lambda N_y^2 I_8 + \tfrac{N_1}{N_z^2-1},\ a_{52} = \tfrac{N_z N_y \sigma_2}{1-N_z^2} - N_y^2 N_z \sigma_2 k_0 \lambda I_1,$$

$$a_{53} = a_{55} = 0,\ a_{54} = 1/a_{25},\ a_{56} = \omega_{pe}(0) N_z K_1(q)\sqrt{e}/(\omega_{ci} a_{25}), \tag{5.5}$$

$$a_{61} = 1 + k_0^2\lambda^2 I_9 + k_0^2\lambda^2 N_y^2 I_{11} - k_y\lambda I_{12} + \tfrac{k_1\lambda}{N_z^2-1} I_{13},$$

$$a_{62} = 2N_y\sigma_2 k_z\lambda + N_z\sigma_1 k_0\lambda I_{12} + \tfrac{N_z k_y \lambda \sigma_2}{1-N_z^2} I_{13} - N_y^2 N_z \sigma_2 k_0^2 \lambda^2 I_{14}, \tag{5.6}$$

$$a_{64} = a_{65} = a_{66} = 0,\ a_{63} = -1.$$

Вирази для a_{32}, a_{42}, a_{52}, a_{62} містять позначення $\sigma_{1,2}$:

$$\sigma_1 = \frac{\xi_2}{k_0\lambda}\begin{Bmatrix} 0.5\xi_1[I_1(\xi_2)K_1(\xi_1) - I_1(\xi_1)K_1(\xi_2)] \\ +k_1\lambda[I_1(\xi_2)K_0(\xi_1) + I_0(\xi_1)K_1(\xi_2)] \end{Bmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\sigma_2 = \xi_1[I_1(\xi_1)K_0(\xi_2) + I_0(\xi_2)K_1(\xi_1)] + 2k_1\lambda[I_0(\xi_2)K_0(\xi_1) - I_0(\xi_1)K_0(\xi_2)], \tag{5.8}$$

де аргументами функцій Бесселя слугують наступні вирази:

$$\xi_1 = 2k_0\lambda\sqrt{\tfrac{1-N_z^2}{e}},\ \xi_2 = \tfrac{2\lambda\omega_{ci}}{c}\sqrt{N_A^2(0)\tfrac{m_i}{m_e}\tfrac{1-N_z^2}{e}}. \tag{5.9}$$

У деяких коефіцієнтах (5.3)-(5.6) записані визначені інтеграли I_i:

$$I_1 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\mu}{N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.10}$$

$$I_2 = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(P - N_y^2 - \frac{N_z^2 N_y^2}{N_\perp^2}\right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.11}$$

$$I_3 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\frac{1}{Q}\int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.12}$$

$$I_4 = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{Q} d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.13}$$

$$I_5 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{Q N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.14}$$

$$I_6 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\mu}{Q N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.15}$$

$$I_7 = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\frac{1}{Q} \int_{-\lambda}^{x} \left(P - N_y^2 - \frac{N_z^2 N_y^2}{N_\perp^2} \right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right) d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.16}$$

$$I_8 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.17}$$

$$I_9 = -\int_{-\lambda}^{\lambda} N_\perp^2 (1 + \frac{x}{\lambda}) d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.18}$$

$$I_{11} = \int_{-\lambda}^{\lambda} (N_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{1}{N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right)) d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.19}$$

$$I_{12} = \int_{-\lambda}^{\lambda} \mu d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.20}$$

$$I_{13} = -\int_{-\lambda}^{\lambda} N_\perp^2 d\left(\frac{x}{\lambda}\right), \tag{5.21}$$

$$I_{14} = \int_{-\lambda}^{\lambda} (N_\perp^2 \int_{-\lambda}^{x} \frac{\mu}{N_\perp^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right)) d\left(\frac{x}{\lambda}\right). \tag{5.22}$$

Усі ці інтеграли є безрозмірними величинами. Деякі з підінтегральних виразів, як от у (5.18)-(5.22), є сингулярними. Для цих інтегралів значення слід приймати у сенсі головного значення Коші. Уявні частини цих інтегралів відносяться до поглинання та загасання хвилі, які виходять за межі цієї роботи, як згадувалося вище.

Важливо відзначити наступну суттєву різницю між випадком експоненціальної зміни (4.7) густини плазми, що використовується в цій роботі, та лінійним, $n_{lin} = n_0(1 + x/\lambda)$. Якщо знехтувати змінами чисельників підінтегральних функцій вздовж x, відомо, що головне значення Коші інтегралів із лінійною зміною резонансних знаменників у симетричних межах дорівнює нулю, чого не можна сказати про експоненціальну зміну резонансу знаменників. Зазначена відмінність пояснює відсутність симетрії просторового розподілу хвильового поля в межах третьої області і, відповідно, впливає на дисперсійне співвідношення.

5.2. Результати чисельного моделювання дисперсійного рівняння

Дисперсійне співвідношення проаналізовано чисельно за допомогою стандартного пакету «Wolfram Mathematica», версія 13.1 [85]. Деякі результати представлені в таблиці 5.1. Вхід коду включає хвильові тороїдні та полоїдні номери мод, малий і великий радіуси плазми, а також довжину експоненційного зменшення густини плазми. Нормовану частоту сигналу іонно циклотронного діапазону частот ω/ω_{ci} маємо на виході коду. У таблиці 5.1 наведено власні частоти, квадрат Альфвенового показника заломлення в резонансі (4.27), $N_A^2(0)$, коефіцієнт пропорційності між $N_A^2(0)$ і $(\omega/\omega_{ci})^2$.

Таблиця 5.1

Результати чисельного розв'яз ання дисперсійного рівняння

Тороїдний номер моди	Власна кутова частота, ω/ω_{ci}	Власна частота, $\omega/(2\pi)$, МГц	$\frac{\omega_{pi}^2(0)}{\omega_{ci}^2}$	$\frac{N_A^2(0)}{(\omega/\omega_{ci})^2}$
1	1.855	27.063	0.83	0.241
2	3.562	51.959	3.34	0.263
3	5.308	77.437	7.50	0.266
4	7.062	103.026	13.34	0.267
5	8.819	128.653	20.84	0.268
6	10.577	154.301	30.02	0.268

Наведемо також графіки залежностей згідно даних, отриманих чисельними розрахунками.

На рисунку 5.1 наведено залежність власної кутової частоти сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот від тороїдного номера моди хвилі.

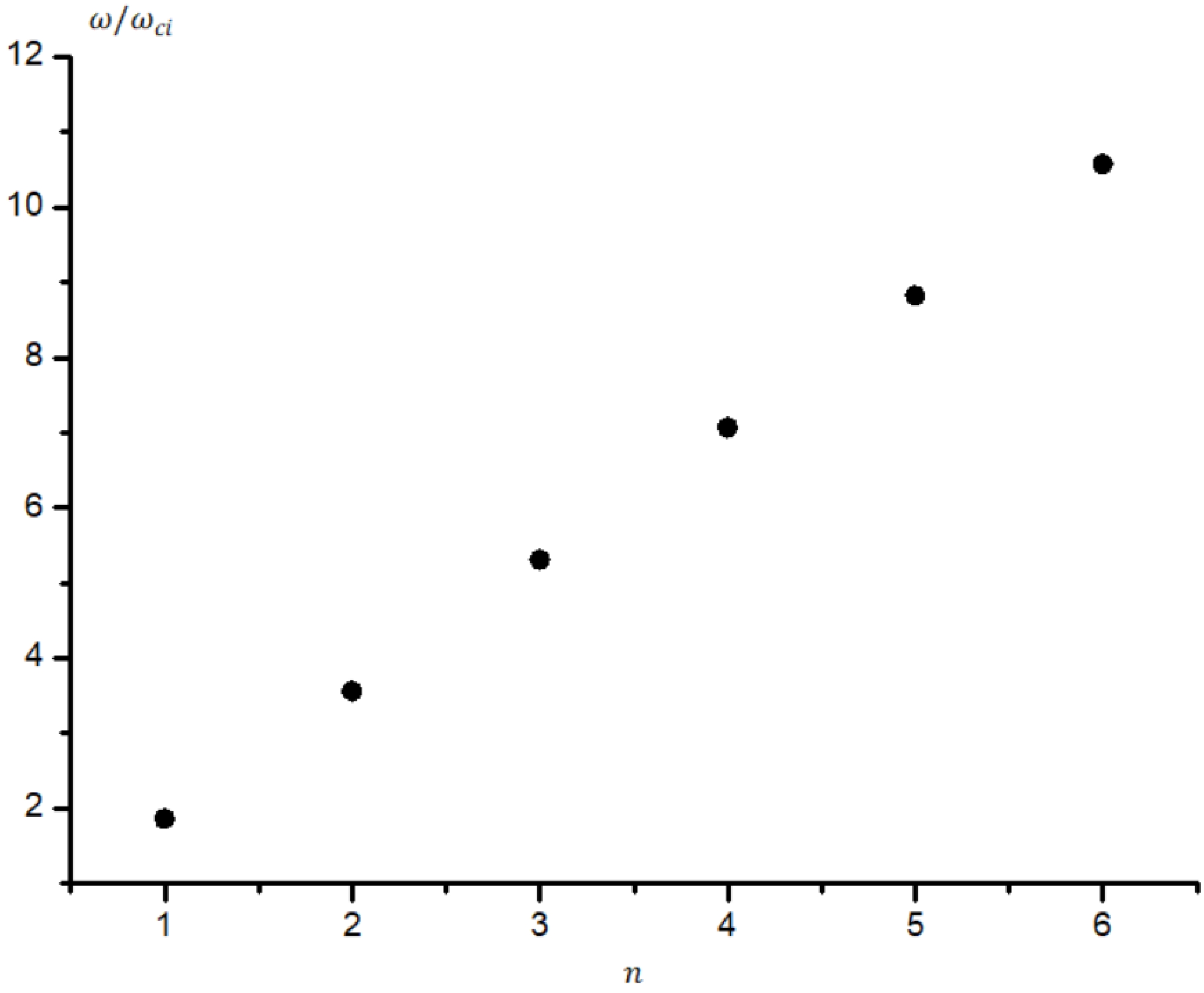

Рис. 5.1. Залежність власної кутової частоти сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот від тороїдного номера моди хвилі. Параметри плазми і хвилі $m = 1$, ω, $R = 2.12\,м$, $\lambda = 0.018\,м$, $B_0 = 2.0\,Тл$, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Як видно, зі збільшенням тороїдного номера моди хвилі збільшується значення власної кутової частоти електромагнітного сигналу. Спостерігається практично лінійна залежність. При значенні $n = 1$ власна кутова частота сигналу приблизно у *1.855* разів більша за значення кутової йонної циклотронної частоти. При $n = 6$ таке відношення складає приблизно *10.577*.

На рисунку 5.1 побудовано залежність нормованої на йонну циклотронну частоту власної кутової частоти. Якщо у отримані відношення підставити значення йонної циклотронної частоти, то можна також отримати значення вже власної частоти сигналу у *МГц*.

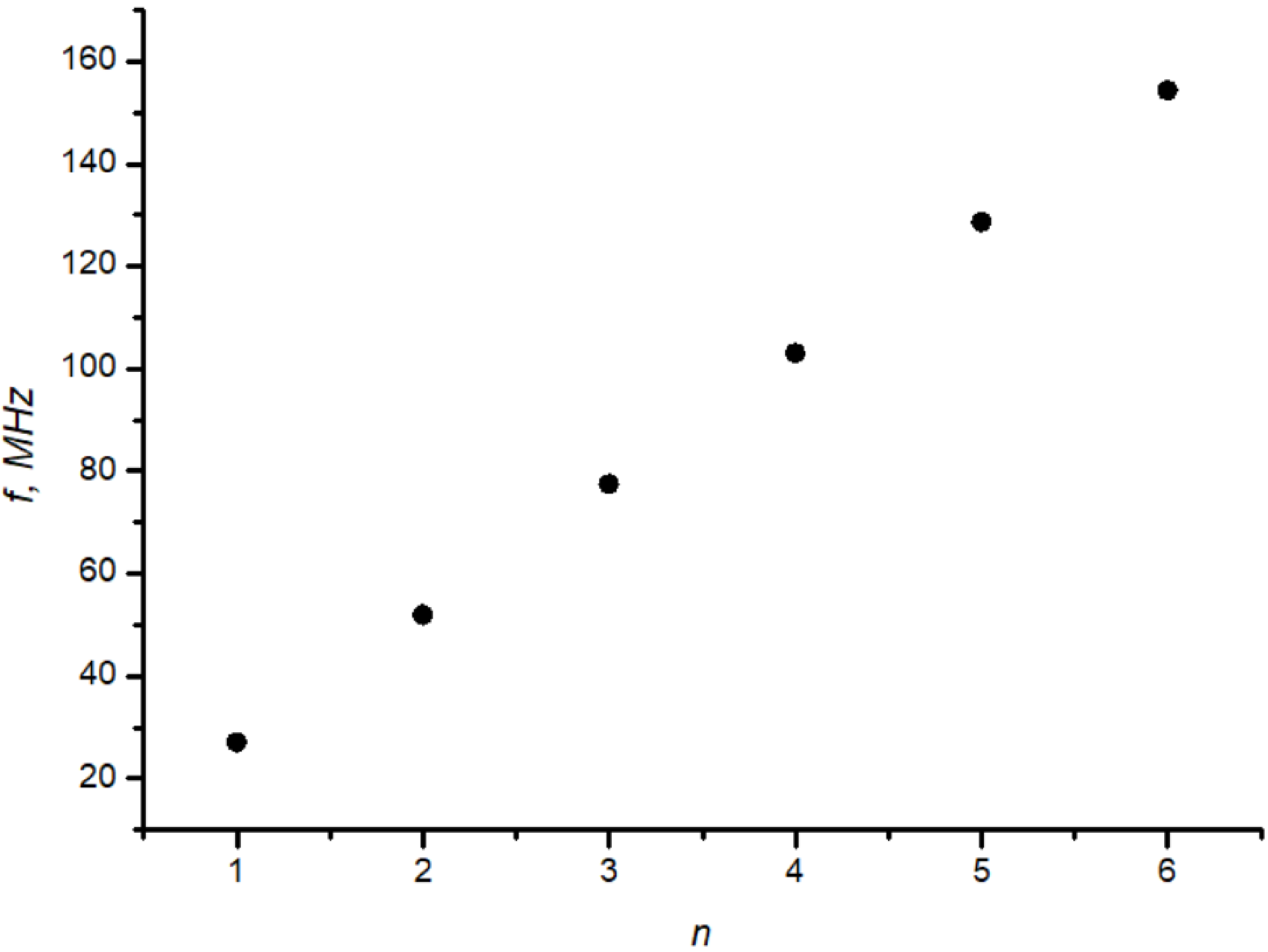

Рис. 5.2. Залежність власної частоти сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот від тороїдного номера моди хвилі. Параметри плазми і хвилі $m = 1$, ω, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

На рисунку 5.2 побудована залежність, аналогічна до залежності на рисунку 5.1, тільки тут позначені значення власної частоти сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот у *МГц*, тобто абсолютні, а не відносні значення.

Чисельний розв'язок дисперсійного співвідношення є практично нечутливим до значення полоїдного номера моди хвилі. Дані для $n = 5, 6$ наведені в таблиці 5.1. Проте точність розв’язків (4.47)-(4.48) є незадовільною (44%) для $n = 5$, а ще гіршою (76%) для $n = 6$. Припущення про існування досить великої зони непрозорості (четвертої області) праворуч від резонансу (4.27), де швидка хвиля загасає з відстанню від резонансу до плазми високої густини, не виконується для більших тороїдних номерів моди хвилі.

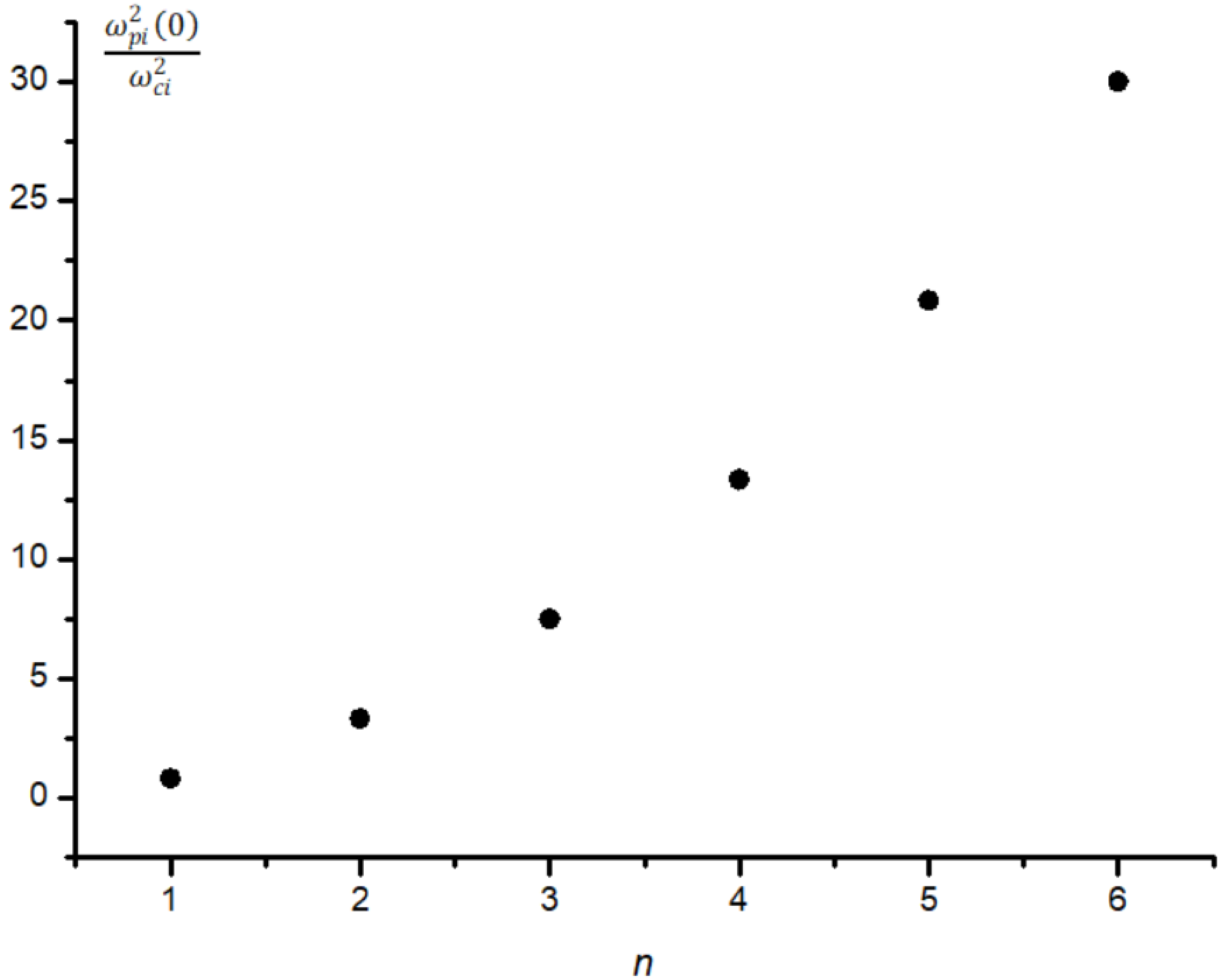

Рис. 5.3. Залежність кутової плазмової частоти йонів від тороїдного номера моди хвилі. Параметри плазми і хвилі $m = 1$, ω, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

На рисунку 5.3 зображено залежність кутової плазмової частоти йонів, нормованої на йонну циклотронну частоту, від тороїдного номера моди хвилі. Залежність нагадує квадратичну. Зі збільшенням тороїдного номера моди хвилі збільшення квадрату кутової плазмової частоти йонів стає все суттєвішим.

Як показують результати числових розрахунків, зазначених у таблиці 5.1, зі збільшенням тороїдного номера моди хвилі спостерігається збільшення власної частоти сигналу, цей факт демонструють другий та третій стовпці таблиці. Найменша частота, яка спостерігається, складає 27.063 МГц, а найбільша частота – 154.301 МГц. Збільшення власної частоти хвилі корелює зі збільшенням значення тороїдного номера моди хвилі. Також спостерігається той факт, що коефіцієнт пропорційності між $N_A^2(0)$ і $(\omega/\omega_{ci})^2$ практично не залежить від тороїдного номера моди хвилі, в особливості при значеннях n, починаючи з n = 3, що також продемонстровано на рисунку 5.4.

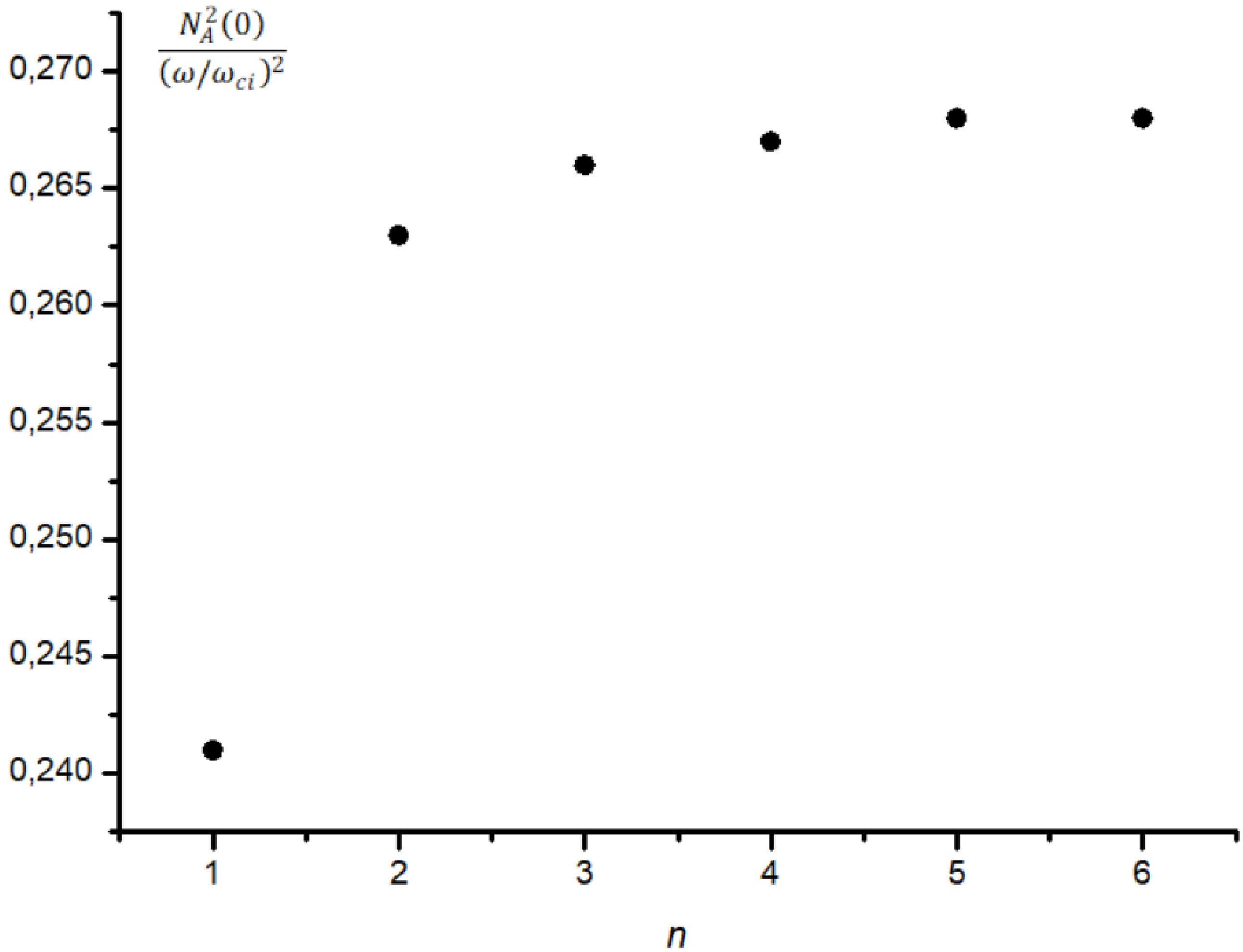

Рис. 5.4. Залежність коефіцієнта пропорційності між $N_A^2(0)$ і $(\omega/\omega_{ci})^2$ від тороїдного номера моди хвилі. Параметри плазми і хвилі $m = 1$, ω, $R = 2.12$ *м*, $\lambda = 0.018$ *м*, $B_0 = 2.0$ *Тл*, $n(0) = 8.287 \times 10^{16}$ м$^{-3}$.

Як видно з рисунку 5.4, спочатку відбувається суттєве зростання коефіцієнта пропорційності між $N_A^2(0)$ і $(\omega/\omega_{ci})^2$ при зростанні тороїдного номера моди хвилі, а потім значення коефіцієнту пропорційності між $N_A^2(0)$ і $(\omega/\omega_{ci})^2$ зі збільшенням тороїдного номера моди хвилі практично не змінюється.

5.3. Висновки до розділу 5

У розділі розглянуто дисперсійне рівняння для хвиль, які можуть поширюватися в області розрідженої плазми за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. По отриманому дисперсійному рівнянню було проведено числове моделювання та обчислено характерні значення власної частоти хвилі для різних значень тороїдного номера моди хвилі. По отриманим числовим значенням побудовано відповідні графіки залежності та проведено аналіз цих залежностей.

З представленого аналізу можна зробити наступні висновки.

По-перше, власні частоти приблизно пропорційні тороїдному номеру моди хвилі, $\omega \propto |n|$. Ця особливість також відома для Альфвенових хвиль. Це може свідчити про те, що сигнал, який локалізований в області локального Альфвенового резонансу, має природу Альфвенових хвиль. Отже, частоти є майже рівновіддаленими. Власні частоти в таблиці 5.1 збільшуються приблизно на $\Delta\omega \approx 1.76\ \omega_{ci}$ зі збільшенням тороїдного номера моди хвилі на одиницю.

По-друге, при уважному розгляді чисел таблиці 5.1 закономірно виникає таке питання: чому в таблиці немає даних щодо вищих тороїдних номерів моди хвилі $n > 6$. Відповідь полягає в тому, що, по-перше, при більших значеннях n (вищих частотах) умови застосовності розглянутого підходу погіршуються. Дійсно, зміна аргументу експоненціальної функції в рівнянні (4.59), $k_4\Delta x$, в межах області непрозорості має бути великою. Локальний резонанс (4.27) зміщується в більш густу плазму зі збільшенням n, а зміна $k_4\Delta x$ зменшується. Зокрема, для обраних параметрів плазми цей зсув від положення резонансу, пов'язаного з $n = 6$, до положення, пов'язаного з $n = 3$, становить 2.47 см, тоді як відстань між положенням відсічки H_z [5] і положенням резонансу скорочується з 7.48 см у разі $n = 3$ до 2.71 см у випадку $n = 6$. І другий, третій доданки у лівій частині рівняння (4.19) мають бути нехтовно малими, щоби забезпечити застосовність спрощеного рівняння (4.53) у четвертій області. З останньої умови можна вивести наступне обмеження:

$$\omega^3 \ll c^2\omega_{ci}/(a\lambda). \tag{5.23}$$

У (5.23) враховано, що $1 - N_z^2 \approx 0.27$ за даними табл. 5.1 для всіх наведених значень тороїдного номера моди хвилі. Для вибраних параметрів плазми праву частину нерівності (5.23) можна оцінити як $\omega^3 \ll c^2\omega_{ci}/(a\lambda) \approx 1.7 \times 10^3\omega_{ci}^3$ або $\omega \ll 12.0\omega_{ci}$.

По-третє, передбачається, що радіочастотний сигнал зосереджений у резонансі (4.27), де

$$N_A^2(0) = (1 - N_z^2)(\omega^2/\omega_{ci}^2 - 1). \tag{5.24}$$

З урахуванням того, що $\omega \propto |n|$ і, отже, $N_z^2 \approx Const = 0.72$, а також $\omega^2 \gg \omega_{ci}^2$ можна зробити висновок з рівняння (5.24), що густина частинок плазми в координаті, навколо якої локалізовано радіочастотний сигнал, має бути майже пропорційною квадрату частоти, $n(0) \propto \omega^2$ (див. правий стовпець у таблиці 5.1). З одного боку, у цьому відношенні числові результати узгоджуються з теоретичним передбаченням. З іншого боку, це означає, що координата, де передбачено центр радіочастотного сигналу, змінюється з тороїдним номером моди хвилі n. Якщо ця варіація є більшою за характерну ширину локального резонансу, $\Delta x \sim \left(\rho_{Li}^2\lambda\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.3 \times 10^{-3}$ м [83, 84], слід очікувати серії сигналів в іонному циклотронному діапазоні частот в SOL токамаку, як повідомлялося в [47]. У протилежному випадку сигнали в іонному циклотронному діапазоні частот просторово перекриваються, і кілька частот повинні бути зареєстровані приблизно в одній позиції з ненульовою шириною.

По-четверте, хвилі з негативними полоїдними номерами моди хвилі $m < 0$ не сприяють досліджуваному явищу. Це пояснюється тим, що плазма є прозорою для ШМЗХ з негативними полоїдними номерами моди хвилі $m < 0$ в четвертій області. З математичної точки зору цей висновок випливає з того факту, що обидва члени в рівнянні (4.53) у цьому випадку мають однаковий знак. Цей збіг знаків забезпечує осциляторний характер розв'язку рівняння (4.53), що суперечить початковому припущенню про локалізовану природу досліджуваного радіочастотного сигналу.

Чисельні результати були пояснені в [47] на основі рис. 3 наступним чином. Було висловлено припущення, що поверхневі хвилі виникають у зоні непрозорості, яка межує з двома областями прозорості. Така структура добре відома з квантової механіки (див., наприклад, [86]). У квантовій механіці цю структуру називають «одновимірним потенційним бар'єром». Відомо, що хвильова функція падає з лівої області поширення, відбивається від бар'єру та експоненціально загасає в межах області непрозорості, а потім хвильова функція поширюється далі в праву область прозорості. Щоб отримати локалізоване збільшення амплітуди хвилі (яке добре видно на рис. 13 в [47]), необхідна протилежна структура: область поширення має бути обмежена двома областями непрозорості. І саме ця структура розглядалася в [47]. Просторовий розподіл поля швидкої хвилі був отриманий підсумовуванням гармонік хвилі за членами з усіма можливими k_z і k_y. Для хвильових гармонік з $k_y^2 + k_z^2 > k_0^2$ ліва область (вакуум) є областю непрозорості. Потім біля Альфвенового резонансу виникає невелика область прозорості. Крім того, праворуч від Альфвенового резонансу є незначна область непрозорості перед тим, як густина плазми стане достатньо високою.

Механізми збудження радіочастотних сигналів у даній роботі не розглядаються. Розглядається лише проблема власних значень і власних функцій. Такі сигнали можуть збуджуватися антеною у йонному циклотронному діапазоні частот за рахунок параметричної розпадної нестійкості або хвостами енергетичних іонів. У той же час запропонований локалізований радіочастотний сигнал все ще можна розглядати як один із механізмів, відповідальних за небажане поглинання потужності в іонному циклотронному діапазоні частот в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставлених мети та завдань у дисертаційній роботі було теоретично досліджено поширення швидкої магнітозвукової хвилі у холодній неоднорідній плазмі без зіткнень, що знаходиться у магнітному полі токамака. Теоретично знайдено рівняння для знаходження точок повороту для усіх компонент електромагнітного поля даної хвилі. Було аналітично проаналізовано здобуті рівняння та проведено їх числовий аналіз для реальних параметрів плазми термоядерної установки типу токамак.

Було теоретично виведено диференційні рівняння, які визначають просторовий розподіл полів електромагнітного сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот в області плазми за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. Для аналітичного розв’язання цих рівнянь область навколо локального Альфвенового резонансу було розділено на чотири окремі області, в кожній з яких знайдено асимптотичний розв’язок, зокрема в одній з них застосовано метод вузького шару. У результаті чисельно побудовано розподіл хвильового поля сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот для реальних параметрів плазми токамака.

У наближенні неоднорідної холодної плазми без зіткнень точки повороту мають різне положення для трьох наборів компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі: перший набір складається з хвильових компонент E_x і H_y, другий – E_y і H_x, третій – H_z.

Загально відома умова (1.1) для визначення частоти відсічки швидкої магнітозвукової хвилі визначається параметрами плазми, такими як склад плазми, значення зовнішнього сталого магнітного поля та густина частинок плазми. Взагалі кажучи, в неоднорідній плазмі ця умова може бути застосована лише для визначення точок повороту компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі E_y і H_x, і тільки з $k_y = 0$. Положення точок повороту для інших компонентів швидкої магнітозвукової хвилі не можна визначити з цієї умови в неоднорідній плазмі, особливо в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамаку, навіть у випадку мод з $k_y = 0$. Для знаходження точок повороту компонент швидкої магнітозвукової хвилі E_x і H_y слід використовувати умову (2.59), а не (1.1), а для знаходження точок повороту компонент для компоненти H_z з $k_y = 0$ – треба використовувати умову (2.60).

Умова (1.1) не може бути застосована для визначення точок повороту компонент швидкої магнітозвукової хвилі з $k_y \neq 0$ навіть для компонент поля E_y і H_x. У цьому випадку (коли $k_y \neq 0$) замість рівняння (1.1) повинні застосовуватися умови (2.54)-(2.56).

Неоднорідність плазми викликає різний вплив на положення точки повороту для хвиль з різними хвильовими числами. Вплив є симетричним відносно тороїдного номера моди хвилі і не має симетрії відносно полоїдного номера моди хвилі. Для хвиль з додатними полоїдними хвильовими числами, $k_y > 0$, точки повороту розташовані глибше в плазмі, ніж це передбачено рівнянням (1.1).

Майже для всіх досліджуваних значень хвильових індексів точки повороту хвильових полів E_y і H_x є найближчими до стінки токамака. Точки повороту хвиль з негативними полоїдними хвильовими числами та малими тороїдними хвильовими числами, для яких $k^2_y + k^2_z < k^2_0$, є винятком.

Власні частоти сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот приблизно пропорційні тороїдному номеру моди хвилі, $\omega \propto |n|$. Ця особливість також відома для Альфвенових хвиль. Отже, частоти є майже рівновіддаленими.

При більших значеннях n (вищих частотах) умови застосовності розглянутого підходу погіршуються. Застосований підхід буде давати точні результати за умови, коли $\omega^3 \ll c^2\omega_{ci}/(a\lambda)$.

Передбачається, що радіочастотний сигнал зосереджений у резонансі, де $N_A^2(0) = (1 - N_z^2)(\omega^2/\omega_{ci}^2 - 1)$. З урахуванням того, що $\omega \propto |n|$ і, отже, $N_z^2 \approx$

$Const = 0.72$, а також $\omega^2 \gg \omega_{ci}^2$ можна зробити висновок з рівняння (5.24), що густина частинок плазми в координаті, де зосереджено сигнал в іонному циклотронному діапазоні частот, має бути майже пропорційною квадрату частоти, $n(0) \propto \omega^2$. З одного боку, у цьому відношенні числові результати узгоджуються з теоретичним передбаченням. З іншого боку, це означає, що координата, де передбачено зосередження радіочастотного сигналу, змінюється з тороїдним номером моди n. Якщо ця варіація є більшою за характерну ширину локального Альфвенового резонансу, $\Delta x \sim \left(\rho_{Li}^2 \lambda\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.3 \times 10^{-3}$ м, слід очікувати серії сигналів в іонному циклотронному діапазоні частот в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамаку. У протилежному випадку сигнали в іонному циклотронному діапазоні частот просторово перекриваються, і кілька частот повинні бути зареєстровані приблизно в одній позиції з ненульовою шириною.

Хвилі з негативними полоїдними номерами моди хвилі $m < 0$ не сприяють досліджуваному явищу. Це пояснюється тим, що плазма є прозорою для ШМЗХ з негативними полоїдними номерами моди хвилі, $m < 0$, в четвертій області. З математичної точки зору цей висновок випливає з того факту, що обидва члени в рівнянні (4.53) у цьому випадку мають однаковий знак. Цей збіг знаків забезпечує осциляторний характер розв'язку рівняння (4.53), що суперечить початковому припущенню про локалізовану природу досліджуваного радіочастотного сигналу.

Механізми збудження сигналів в іонному циклотронному діапазоні частот у даній роботі не розглядаються. Розглядається лише знаходження власних значень і власних функцій. Зазначимо, однак, що такі сигнали можуть збуджуватися антеною у іонно циклотронному діапазоні частот за рахунок параметричної розпадної нестійкості або хвостами енергетичних іонів. У той же час запропонований локалізований сигнал в іонному циклотронному діапазоні частот все ще можна розглядати як один із механізмів, відповідальних за небажане поглинання потужності в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

Вивчення точок повороту становить фундаментальний фізичний і математичний інтерес. Запропонована у роботі методика дає можливість покращити точність у знаходженні точок повороту і при цьому не є надто складною для розуміння.

Отримані результати дозволять покращити розуміння процесів у просторі навколо останньої замкненої магнітної поверхні токамака, більш точно знаходити координати точок повороту для різних компонент електромагнітного поля сигналів. Це може допомогти підвищити ефективність, наприклад, нагріву плазми; підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок типу токамаків тощо.

Здобуті результати становлять інтерес не тільки з практичної точки зору, але й з фундаментальної – питання, які розглянуті у роботі, мають фундаментальний характер досліджень фізики термоядерної плазми та теорії звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з ненульовим коефіцієнтом при першій похідній.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. International Energy Agency. *Electricity Information: Overview – Electricity Production by Fuel*. 2022.
   URL: https://www.iea.org/reports/electricity-information-overview/electricity-production
2. Visual Capitalist. *Electricity Generation by Source: Fuel Shares in 2022*. 2022.
   URL: https://www.visualcapitalist.com/electricity-sources-by-fuel-in-2022
3. Max Planck Society. *JET Sets a New Record in Fusion Energy Output*. 2024.
   URL: https://www.mpg.de/21522737/0208-plas-jet-rekord-2024-151590-x
4. Lawrence Livermore National Laboratory. *Achieving Fusion Ignition at NIF*. 2022.
   URL: https://lasers.llnl.gov/science/achieving-fusion-ignition
5. Girka I.O., Trush O.V., Tierens W. Three Different Spatial Positions of Fast Magnetosonic Wave Component Turning Points. *Problems of Atomic Science and Technology. Series “Plasma Physics”*. 2024. No. 6. Pp. 86–91.
6. Girka I.O., Trush O.V., Tierens W. Eigen Radio Frequency Signals Localized at Alfven Resonances in a Tokamak Scrape-Off Layer. *East European Journal of Physics*. 2025. No. 1. Pp. 79–90.
7. Pavlenko I., Girka I., Trush O., Hnatiuk S. Time-Domain Calculation of Forerunners in Drude Dispersive Media Without Collisions. *Physical Review A*. 2021. Vol. 104. No. 1.
8. Pavlenko I., Girka I., Trush O., Melnyk D. Exact Analytical Calculation and Numerical Modelling by Finite-Difference Time-Domain Method of the Transient Transmission of Electromagnetic Waves Through Cold Plasmas. *Journal of Plasma Physics*. 2020. Vol. 86.
9. Pavlenko I., Girka I., Trush O., Melnyk D., Velizhanina Ye. Plasma Transient Processes and Plane Wave Formation in Simulations by FDTD Method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2019. Vol. 67. No. 11.

10. Pavlenko I., Melnyk D., Velizhanina Ye., Trush O., Girka I. Electromagnetic Surface Wave Excitation and Energy Transport Along a Plane Plasma Boundary. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2018. Vol. 118.
11. Stix T.H. Waves in Plasmas. New York: American Institute of Physics, 1992. 585 p.
12. Allis W.P. Waves in Plasma. *Sherwood Conf. Contr. Fusion*. 1959. Vol. TID-7582. P. 32.
13. Brambilla M. Kinetic Theory of Plasma Waves: Homogeneous Plasmas. Oxford: Clarendon Press, 1998. 350 p.
14. Miyamoto K. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. Tokyo: University of Tokyo Press, 2004. 457 p.
15. Tierens W., Paulus F., Bilato R. Resonance Cones in Cold Plasma: Origin, Singularities, and Power Flow. *Physics of Plasmas*. 2023. Vol. 30. Pp. 102102.
16. Fedoryuk M.V. Asymptotic Analysis. Linear Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 330 p.
17. Ram A.K., Schultz S.D. Wave Cut-Offs and Resonances in a Poloidal Cross Section of a Tokamak Plasma. *Physics of Plasmas*. 1996. Vol. 3. Pp. 1976–1982.
18. Wilson J.R., Bonoli P.T. Progress on Ion Cyclotron Range of Frequencies Heating Physics and Technology in Support of the International Tokamak Experimental Reactor. *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22. Pp. 021801.
19. Brambilla M. Toroidal Resonance and Cut-Off Surfaces in the Ion Cyclotron Range of Frequencies in a Multicomponent Plasma. *Nuclear Fusion*. 1980. Vol. 20. Pp. 1063–1078.
20. Ludwig D. Uniform Asymptotic Expansions at a Caustic. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1966. Vol. 19. P. 215–250.
21. Bender C. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory. New York: Springer, 1999. 1st ed. 593 p.
22. Lee R. Turning Point Problems of Almost Diagonal Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968. Vol. 24. P. 509–526.

23. Hille E. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York: Wiley, 1976. (Zbl. 343.34007). 372 p.
24. Kamke E. Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Vol. II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1950. 243 S.
25. Kamke E. Differential Equations. Methods of Solutions and Solutions. Vol. 1: Ordinary Differential Equations. 4th ed. Leipzig: Akad. Verlag. Geest and Portig, 1951. (Zbl. 145.100).
26. Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. New York: Courier Dover Publications, 2018. 364 p.
27. Alfven H. Existence of Electromagnetic–Hydrodynamic Waves. *Nature*. 1942. Vol. 150, no. 3805. Pp. 405–406.
28. Allen T.K., Baker W.R., Pyle R.V., Wilcox J.M. Experimental Generation of Plasma Alfven Waves. *Phys. Rev. Letters*. 1959. Vol. 2, no. 9. Pp. 383–384.
29. Betti R., Freidberg J.P. Ellipticity Induced Alfven Eigenmodes. *Phys. Fluids B*. 1991. Vol. 3, no. 8. Pp. 1865–1870.
30. Oliver H.J.C., Sharapov S.E., Breizman B.N., Zheng L.-J., JET Contributors. Axisymmetric Global Alfvén Eigenmodes within the Ellipticity-Induced Frequency Gap in the Joint European Torus. *Phys. Plasmas*. 2017. Vol. 24. Pp. 122505.
31. Candy J., Breizman B.N., Van Dam J.W., Ozeki T. Multiplicity of Low-Shear Toroidal Alfvén Eigenmodes. *Physics Letters A*. 1996. Vol. 215, Issues 5–6. Pp. 299–304.
32. Mazzi S., Vallar M., Kumar U., Krutkin O., Poley-Sanjuan J., Simons L., Ball J., Brunner S., Coda S., Garcia J., Iantchenko A., Kazakov Ye.O., Lin W.H., Ongena J., Rofman B., Villard L., the TCV team. Study of Fast-Ion-Driven Toroidal Alfvén Eigenmodes Impacting on the Global Confinement in TCV L-Mode Plasmas. *Front. Phys.* 2023. Sec. Fusion Plasma Physics. Vol. 1. Pp. 01–19.

33. Kolesnichenko Y.I., Tykhyy A.V. Landau Damping of Alfvénic Modes in Stellarators. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2018. Vol. 60, no. 12. Pp. 125004.
34. Kolesnichenko Ya.I., Yakovenko Yu.V., Tyshchenko M.H. Mechanisms of the Energy Transfer Across the Magnetic Field by Alfvén Waves in Toroidal Plasmas. *Physics of Plasmas*. 2018. Vol. 25, no. 12. Pp. 122508.
35. Marchenko V.S., Reznik S.N., Kolesnichenko Y.I. Nonlinear Dynamics of Multiple Alfvén Modes Driven by Trapped Energetic Ions in Tokamaks: A Triplet Paradigm. *Physics of Plasmas*. 2024. Vol. 31, no. 2. Pp. 022507.
36. Moiseenko V.E., Dreval M.B., Kovtun Yu.V., Kulyk Yu.S., Glazunov G.P., Kazakov Ye.O., Ongena J., Sharapov S.E., Thomsen H., Garkusha I.E. Fusion Research in Stellarator Department of IPP NSC KIPT. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2022. No. 6. Pp. 3–8.
37. Dreval M., Sharapov S.E., Kazakov Ye.O., Ongena J., Nocente M., Calado R., Coelho R., Ferreira J., Figueiredo A., Fitzgerald M., Garcia J., Giroud C., Hawkes N.C., Kiptily V.G., Nabais F., Nave M.F.F., Weisen H., Craciunescu T., Salewski M., Štancar Ž., JET Contributors. Alfvén Cascade Eigenmodes Above the TAE-Frequency and Localization of Alfvén Modes in D-3He Plasmas on JET. *Nuclear Fusion*. 2022. Vol. 62. Pp. 056001.
38. Kiptily V.G., Fitzgerald M., Kazakov Ye.O., Ongena J., Nocente M., Sharapov S.E., Dreval M., Štancar Ž., Craciunescu T., Garcia J., Giacomelli L., Goloborodko V., Oliver H.J.C., Weisen H., JET Contributors. Evidence for Alfvén Eigenmodes Driven by Alpha Particles in D-3He Fusion Experiments on JET. *Nuclear Fusion*. 2021. Vol. 61. Pp. 114006.
39. Kiptily V., Kazakov Ye.O., Nocente M., Ongena J., Belli F., Dreval M., Craciunescu T., Eriksson J., Fitzgerald M., Giacomelli L., Goloborodko V., Iliasova M.V., Khilkevitch E.M., Rigamonti D., Sahlberg A., Salewski M., Shevelev A.E., Garcia J., Oliver H.J.C., Sharapov S.E., Stancar Z., Weisen H., JET Contributors. Excitation of Alfvén Eigenmodes by Fusion-Born Alpha-

Particles in D-3He Plasmas on JET. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2022. Vol. 64. Pp. 064001.

40. Vallar M., Dreval M., Duval B., Garcia-Munoz M., Sharapov S., Poley-Sanjuan J., Karpushov A., Lauber P., TCV team. Energetic Particle Modes in TCV with Two Neutral Beam Injectors. *Proc. 48th EPS Conference on Plasma Physics*. June 27 – July 1, 2022. O4.110 online.
41. Rivero-Rodriguez F., García-Muñoz M., Sharapov S., McClements K., Crocker N., Cecconello M., Dreval M., Dunai D., Fitzgerald M., Galdon-Quiroga J., Gibson S., Michael C., Oliver J., Rhodes T., Ryan D., Velarde L., Viezzer E., MAST-U Team. Experimental Observations of Fast-Ion Losses Correlated with Global and Compressional Alfvén Eigenmodes in MAST-U. *Proc. 48th EPS Conference on Plasma Physics*. June 27 – July 1, 2022. O4.109 online.
42. Dolgopolov V.V., Stepanov K.N. Cerenkov Absorption of Alfvén Waves and of Fast Magneto-Acoustic Waves in an Inhomogeneous Plasma. *Nuclear Fusion*. 1965. Vol. 5. Pp. 276–278.
43. Vaclavik J., Appert K. Theory of Plasma Heating by Low Frequency Waves: Magnetic Pumping and Alfven Resonance Heating. *Nuclear Fusion*. 1991. Vol. 31, no. 10. Pp. 1945–1997.
44. Elfimov A.G., Lerche E.A., Galvão R.M.O., Ruchko L.F., Fonseca A.M.M., da Silva R.P., Bellintani V. Results of Localized Alfvén Wave Heating in TCABR. *Brazilian Journal of Physics*. 2004. Vol. 34, no. 4B. Pp. 1707–1714.
45. Moiseenko V.E., Volkov Ye.D., Tereshin V.I., Stadnik Yu.S. Alfvén Resonance Heating in Uragan-2M Torsatron. *Plasma Physics Reports*. 2009. Vol. 35, no. 10. Pp. 828–833.
46. Girka I.O. Fine Structure of the Local Alfven Resonances in Cylindrical Plasmas with Axial Periodic Inhomogeneity. *Problems of Theoretical Physics. Scientific Works*. Issue 5 / ed. V.O. Buts. Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2023. Pp. 367–437.

47. Messiaen A., Maquet V. Coaxial and Surface Mode Excitation by an ICRF Antenna in Large Machines like DEMO and ITER. *Nuclear Fusion*. 2020. Vol. 60. Pp. 076014.
48. Paulus F. *Studies of Propagating Slow Waves in the Ion Cyclotron Range of Frequencies*. Ph.D. Thesis. Munich: Ludwig-Maximilians-Universität, 2023. P. 155.
49. Bobkov V., Bilato R., Calarco F., ... Urbanczyk G., Usoltseva M. ICRF-Specific W Sources: Advances in Minimization in ASDEX Upgrade and Near-Field Based Extrapolations to ITER with W-Wall. *Nuclear Materials and Energy*. 2024. Vol. 41. Pp. 101742.
50. Stepanov K.N. The effect of plasma resonance on the propagation of surface waves in a nonuniform plasma. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*. 1965. Vol. 35, No. 6. Pp. 1002–1007.
51. Kevorkian J., Cole J.D. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. New York: Springer, 1996. 638 p.
52. Freidberg J. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 708 p.
53. Wesson J. Tokamaks. Oxford: Oxford University Press, 2011. 4th ed. 824 p.
54. Stangeby P.C. The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2000. 744 p.
55. Simpson J. ELF Radar System Proposed for Localized D-Region Ionospheric Anomalies. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. 2006. Vol. 3, no. 4 (Oct). Pp. 500–503.
56. Simpson J. Global FDTD Maxwell’s Equations Modeling of Electromagnetic Propagation from Currents in the Lithosphere. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2008. Vol. 56, no. 1 (Jan). Pp. 199–203.
57. Aleynikov P., Marushchenko N. 3D Full-Wave Computation of RF Modes in Magnetised Plasmas. *Computer Physics Communications*. 2019. Vol. 241 (Aug). Pp. 40–47.

58. Compaijen P., Malyshev V., Knoester J. Time-Dependent Transport of a Localized Surface Plasmon Through a Linear Array of Metal Nanoparticles: Precursor and Normal Mode Contributions. *Physical Review B*. 2018. Vol. 97. Pp. 085428.
59. Arcone S., Liu L. Spatial Attenuation Rates of Interfacial Waves: Field and Numerical Tests of Sommerfeld Theory Using Ground-Penetrating Radar Pulses. *Journal of Applied Geophysics*. 2012. Vol. 81. Pp. 122–129.
60. Choi S.-H., Osterberg U. Observation of Optical Precursors in Water. *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92. Pp. 193903.
61. Oughstun K. Optimal Pulse Penetration in Lorentz-Model Dielectrics Using the Sommerfeld and Brillouin Precursors. *Optics Express*. 2015. Vol. 23. Pp. 26604–26619.
62. Sommerfeld A. Über die Fortpflanzung des Lichtes in disperdierenden Medien. *Annalen der Physik*. 1914. Vol. 349. Pp. 177–202.
63. Brillouin L. Wave Propagation and Group Velocity. New York: Academic Press, 1960. 154 p.
64. Haskell R., Case C. Transient Signal Propagation in Lossless, Isotropic Plasmas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1967. Vol. 15. Pp. 458–464.
65. Cartwright N., Oughstun K. Precursors and Dispersive Pulse Dynamics, A Century after the Sommerfeld-Brillouin Theory: Part I. The Original Theory. *Progress in Optics*. 2014. Vol. 59. Pp. 209–265. Elsevier.
66. Cartwright N., Oughstun K. Precursors and Dispersive Pulse Dynamics, A Century after the Sommerfeld-Brillouin Theory: Part II. The Modern Asymptotic Theory. *Progress in Optics*. 2015. Vol. 60. Pp. 263–344. Elsevier.
67. Macke B., Segard B. Simple Asymptotic Forms for Sommerfeld and Brillouin Precursors. *Physical Review A*. 2012. Vol. 86. Pp. 013837.
68. Oughstun K. *Electromagnetic and Optical Pulse Propagation. Volume 2: Temporal Pulse Dynamics in Dispersive Attenuative Media*. Springer Series in Optical Sciences. Vol. 225. Springer International Publishing, 2019. 407 p.

69. Macke B., Segard B. From Sommerfeld and Brillouin Forerunners to Optical Precursors. *Physical Review A*. 2013. Vol. 87. Pp. 043830.
70. Jeong H., Dawes A., Gauthier D. Carrier-Frequency Dependence of a Step-Modulated Pulse Propagating Through a Weakly Dispersive Single Narrow-Resonance Absorber. *Journal of Modern Optics*. 2011. Vol. 58. Pp. 865–872.
71. Jeong H., Du S. Two-Way Transparency in the Light–Matter Interaction: Optical Precursors with Electromagnetically Induced Transparency. *Physical Review A*. 2009. Vol. 79. Pp. 011802(R).
72. Macke B., Segard B. Optical Precursors in Transparent Media. *Physical Review A*. 2009. Vol. 80. Pp. 011803(R).
73. Kazakov Y.O., Van Eester D., Dumont R., Ongena J. On Resonant ICRF Absorption in Three-Ion Component Plasmas: A New Promising Tool for Fast Ion Generation. *Nuclear Fusion*. 2015. Vol. 55. Pp. 032001.
74. Paulus F. *Studies of Propagating Slow Waves in the Ion Cyclotron Range of Frequencies*. Ph.D. Thesis. Munich: Ludwig-Maximilians-Universität, 2023. 155 p.
75. Zhang J.H., Zhang X.J., Cheng Y., Qin C.M., Zhao Y.P., Mao Y.Z., Yuan S., Wang L., Ju S.Q., Chen G., Wan B.N., Gong X.Z., Qian J.P., Zhang T., Li J.G., Song Y.T., Yang Y.Q., Chen Z., Wang J.H., Lin Y., Taylor G., Wukitch S., Noterdaeme J.M., Hosea J.C., Kumazawa R., Seki T., Saito K., Kasahara H. Experimental Analysis of the ICRF Waves Coupling in EAST. *Nuclear Fusion*. 2017. Vol. 57. Pp. 066030.
76. Bilato R., Brambilla M., Hartmann D.A., Parisot A. Influence of an Evanescence Layer in Front of the Antenna on the Coupling Efficiency of Ion Cyclotron Waves. *Nuclear Fusion*. 2005. Vol. 45. Pp. L5.
77. Messiaen A., Maquet V. Coaxial and Surface Mode Excitation by an ICRF Antenna in Large Machines like DEMO and ITER. *Nuclear Fusion*. 2020. Vol. 60. Pp. 076014.
78. Allis W.P., Buchsbaum S.J., Bers A. *Waves in Anisotropic Plasmas*. Cambridge, MA: MIT Press, 1963. 374 p.

79. Girka I.O., Thumm M. Long-Wavelength Electromagnetic Waves of Surface Type in Circular Metal Waveguides Partially Filled by Plasma in Presence of an Axial Static Magnetic Field. *Physics of Plasmas*. 2023. Vol. 30, no. 1. Pp. 012101.
80. Krall N.A., Trivelpiece A.W. *Principles of Plasma Physics*. New York: McGraw-Hill, 1973. 523 p.
81. Chen F.F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. 3rd ed. New York: Springer, 2016. 860 p.
82. Girka I.O., Tierens W. Surface Wave Propagation Along a Narrow Transition Layer in a Slab Voigt Geometry. *Physics of Plasmas*. 2024. Vol. 31. Pp. 022106.
83. Girka I.A., Stepanov K.N. Absorption and Conversion of Long-Wavelength Fast Magnetosonic Waves in the Region of Local Resonance in Peripheral Plasma. *Ukrainian Journal of Physics*. 1990. Vol. 35. Pp. 1680–1688. (In Russian)
84. Girka I.A., Lapshin V.I., Stepanov K.N. Plasma Heating Near Satellite Alfven Resonances in Stellarators. *Plasma Physics Reports*. 1997. Vol. 23. Pp. 19–27.
85. *Wolfram Mathematica. Launching-Version-13.1*. URL: https://writings.stephenwolfram.com/2022/06/launching-version-13-1-of-wolfram-language-mathematica/
86. Messiah A. *Quantum Mechanics*. Vol. 1. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1964. 520 p.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці в наукових фахових виданнях України, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science:

1. Girka I.O., **Trush O.V.,** Tierens W. Three different spatial positions of fast magnetosonic wave component turning points. *Problems of Atomic Science and Technology. Series "Plasma Physics"*. 2024. No. 6. P. 86–91. DOI: 10.46813/2024-154-014 (Scopus, Web of Science, Q3)

2. Girka I.O., **Trush O.V.,** Tierens W. Eigen radio frequency signals localized at Alfven resonances in a tokamak scrape-off layer. *East European Journal of Physics*. 2025. No.1. P. 79–90. DOI: 10.26565/2312-4334-2025-1-07 (Scopus, Web of Science, Q4)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. **Труш О. В.,** Гнатюк С. В., Павленко І. В., Гірка І. О. Аналітичне та числове моделювання передвісників Зоммерфельда в ізотропній плазмі. *Українська конференція з фізики плазми та керованого термоядерного синтезу – 2021. 15–16 грудня 2021 р. Збірник анотацій: тези*. Київ, Україна, 2021. С. 50.

2. **Trush O. V.,** Girka I. O. Dynamic evolution of Sommerfeld precursors in an isotropic homogeneous plasma. *Academic and scientific challenges of diverse fields of knowledge in the 21st century. CLIL in action. 18 March 2022. Conference materials: article*. Kharkiv, Ukraine, 2022. Pp. 365–371.

3. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Просторові положення точок повороту компонент швидкої магнітозвукової хвилі в магнітоактивній плазмі. *3rd International Scientific and Practical Conference «Global Trends in the Development of Information Technology and Science». Секція: Фізико-математичні науки. 2–4 квітня 2025. Collection of Scientific Papers: тези*. Стокгольм, Швеція, 2025. Pp. 295–297. DOI: 10.70286/isu-02.04.2025

4. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Власні високочастотні сигнали, локалізовані в околі Альфвенових резонансів за останньою магнітною поверхнею токамака. *3rd International Scientific and Practical Conference «Modern Trends in the Development of Economy, Technology and Industry». Секція: Фізико-математичні науки. 9–11 квітня 2025. Collection of Scientific Papers: стаття*. Торонто, Канада, 2025. Pp. 272–277. DOI: 10.70286/isu-09.04.2025

5. **Trush O. V.,** Girka I. O., Tierens W. The cutoff positions for the fast magnetosonic wave field components in a nonuniform magnetized plasma. *II International Scientific and Technical Conference Named After V. Voyevodin «Problems of Modern Nuclear Power». 16–18 April. Book of abstracts: abstract*. Kharkiv, Ukraine, 2025. P. 90.

6. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Власні високочастотні сигнали, локалізовані в околі Альфвенових резонансів за останньою магнітною поверхнею токамака. *XVIII Всеукраїнська науково-технічна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Фізика та тенденції сучасного світу». 1–3 травня. Збірка тез: тези*. Харків, Україна, 2025. С. 3.

7. **Труш О. В.,** Гірка І. О., Тіренс В. Комп’ютерне моделювання фізичних процесів за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. *XI Всеукраїнська конференція з міжнародною участю «Сучасні проблеми експериментальної та теоретичної фізики та методики навчання фізики». 6–7 травня. Матеріали конференції: тези.* Суми, Україна, 2025. С. 102–103.

Наукові праці в наукових фахових виданнях України та світу, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus та Web of Science, які додатково відображають результати дисертації:

1. Pavlenko I., Girka I., **Trush O.,** Melnyk D., Velizhanina Ye. Plasma transient processes and plane wave formation in simulations by FDTD method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2019. Vol. 67. No. 11. P. 6957–6964. DOI: 10.1109/TAP.2019.2925156 (Scopus, Web of Science, Q1)

2. Pavlenko I., Melnyk D., Velizhanina Ye., **Trush O.,** Girka I. Electromagnetic surface wave excitation and energy transport along a plane plasma boundary. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2018. Vol. 118. P. 105–108. ISSN 1562-6016. ВАНТ (Scopus, Web of Science, Q3)

3. Pavlenko I., Girka I., **Trush O.,** Melnyk D. Exact analytical calculation and numerical modelling by finite-difference time-domain method of the transient transmission of electromagnetic waves through cold plasmas. *Journal of Plasma Physics*. 2020. Vol. 86. DOI: 10.1017/S0022377820000367 (Scopus, Web of Science, Q1).

4. Pavlenko I.V., Girka I.O., **Trush O.V.,** Hnatiuk S.V. Time-domain calculation of forerunners in Drude dispersive media without collisions. *Physical Review A*. 2021. Vol. 104. No. 1. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.013518 (Scopus, Web of Science, Q1).

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 12:08:40 13.06.2025

Назва файлу з підписом: Trush_diss.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 2.0 МБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Trush_diss.pdf
Розмір файлу без підпису: 2.2 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Труш Олександр Вікторович
П.І.Б.: Труш Олександр Вікторович
Країна: Україна
РНОКПП: 3586801612
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 12:08:37 13.06.2025
Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг
Серійний номер: 382367105294AF9704000000E5A00A00CFF8C003
Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Кваліфікований
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAdES-X Long)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.02.05 13:00