

АНОТАЦІЯ

Труш О. В. Теоретичне дослідження поширення швидкої магнітозвукової хвилі за останньою поверхнею токамака. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 – Прикладна фізика та наноматеріали (Галузь знань 10 – Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертаційну роботу присвячено теоретичному дослідженню поширення швидкої магнітозвукової хвилі за останньою поверхнею токамака у наближенні холодної плазми без зіткнень, яка знаходиться у зовнішньому сталому магнітному полі. У роботі знайдено положення точок повороту (точок відсічки) для компонент електромагнітного поля хвилі; досліджено залежності розташування цих точок від параметрів плазми та від градієнтів цих параметрів; вивчено дисперсійні властивості власних електромагнітних сигналів, які можуть поширюватися в іонному циклотронному діапазоні частот в області локального Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака.

На першому етапі роботи було отримано явний вигляд диференціальних рівнянь для знаходження просторового розподілу компонент електромагнітного поля в іонному циклотронному діапазоні частот з урахуванням радіальної неоднорідності параметрів плазми. Для цього було застосовано загально відомі рівняння електродинаміки – рівняння Максвела у декартовій системі координат. Для компонент цих рівнянь було застосовано метод Фур'є аналізу та здобуто рівняння для знаходження амплітуд компонент H_z , E_y і E_x електромагнітного поля сигналу. Ці рівняння мають форму звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з присутністю в них доданків з першою похідною компонент поля. Такі рівняння у літературі досліджують лише з математичної точки зору, як правило, з метою пошуку розв'язків рівнянь, тобто просторового розподілу компонент поля. Для цього підбирають заміну, яка зводить

таке рівняння до рівняння без першої похідної, але ця методика не дає можливості правильно знайти координати точок повороту, адже нова функція має нові точки повороту. Точкою повороту в цій роботі називають точку, по різні боки від якої компоненти електромагнітного поля мають різний характер. Якщо по один бік компонент поля осцилює з координатою, то по інший бік – просторово загасає. Тому у цій роботі здобуті рівняння, які визначають положення точок повороту на основі аналізу змінних за координатою коефіцієнтів отриманих рівнянь, а не на основі спрощених, що дає можливість знайти координати точок повороту точно. Цей факт свідчить про новизну дослідження, адже традиційно точки повороту для задач електродинаміки плазми знаходять на основі рівнянь, які описують однорідну плазму. На теперішній час точки повороту (густину плазми в цих точках) знаходять традиційно з тієї самої умови, що й частоту відсічки. (Частотою відсічки називають таку частоту, що якщо хвиля поширюється (осцилює в просторі) в однорідній плазмі з частотою, що переважає частоту відсічки, то ця хвиля просторово загасає з частотою, що є меншою за частоту відсічки.)

У результаті першого етапу роботи було виведено умови для визначення точок повороту компонент електромагнітного поля хвиль в іонному циклотронному діапазоні частот для випадку неоднорідної плазми для хвиль з довільними значеннями тороїдного, k_z , і полоїдного, k_y , хвильового числа.

На другому етапі роботи було проведено числове дослідження отриманих рівнянь для знаходження координат точок повороту компонент електромагнітного поля хвиль в іонному циклотронному діапазоні частот. Для числового моделювання було застосовано наступні параметри плазми та хвилі: циклічна частота $\omega = 3.34 \omega_{ci}$, зовнішнє стале магнітне поле $B_0 = 2.0 \text{ Тл}$, малий радіус плазми $a = 0.5 \text{ м}$ і великий радіус плазми $R = 2.12 \text{ м}$, довжина експоненціального зменшення густини частинок плазми $L = 0.01801 \text{ м}$. Ці параметри є близькими до параметрів реальної установки – токамака середніх розмірів ASDEX Upgrade. Було розглянуто два випадки залежності густини частинок плазми від координати – лінійна залежність густини від координати та експоненціальна. Ця остання, звісно, є більш складною для числового аналізу, але більш адекватною з точки зору фізики

– адже в області за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака густина частинок плазми спадає з координатою саме за експоненціальним законом.

Числові дослідження підтвердили, що у неоднорідній плазмі точки повороту мають різне положення для трьох наборів компонент електромагнітного поля швидкої магнітозвукової хвилі: E_x і H_y , E_y і H_x , H_z . Умова, яка є загально відомою у літературі, як умова для визначення частоти відсічки швидкої магнітозвукової хвилі для заданих параметрів однорідної плазми, зовсім не підходить для застосування знаходження точок повороту в неоднорідній плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамаків. Взагалі, в неоднорідній плазмі така умова є застосовною лише для визначення точок повороту компонент поля E_y і H_x з $k_y = 0$.

Результати другого етапу дослідження підтверджують, що неоднорідність плазми викликає різний вплив на розташування положення точки повороту для хвиль з різними хвильовими числами. Майже для всіх досліджуваних значень номерів моди точки повороту хвильових полів E_y і H_x є найближчими до стінки токамака.

На третьому етапі роботи було досліджено просторовий розподіл полів електромагнітної хвилі з тороїдним показником заломлення, меншим одиниці, і ненульовим поперечним хвильовим числом, яка локалізована в околі Альфвенового резонансу за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. На цьому етапі стартовими рівняннями також є рівняння Максвелла і до них застосовано Фур'є аналіз. Оскільки за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака густина плазми змінюється дуже швидко, то застосувати у цій частині простору метод ВКБ неможливо. Зокрема, для отримання просторового розподілу поля хвилі в околі Альфвенового резонансу застосовано так званий метод вузького шару. Для розв'язування диференціальних рівнянь і здобуття просторового розподілу полів хвилі область простору поблизу Альфвенового резонансу було розділено на чотири характерні зони. Для кожної з зон було здобуто асимптотичні розв'язки диференціальних рівнянь у кожній окремій зоні, які потім було зшито на межах поділу зон. У третій зоні, навколо Альфвенового резонансу, метод вузького шару

було застосовано для розв'язання системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку, які описують зв'язані швидко та повільну хвилі. Це дало можливість відтворити просторовий розподіл полів хвилі.

Останнім етапом роботи був аналіз дисперсійних властивостей електромагнітного сигналу в іонному циклотронному діапазоні частот, локалізованого в околі Альфвенового резонансу. Для цього для просторових залежностей компонент електромагнітного поля було застосовано крайові умови на краях зон, на які було поділено простір. У результаті отримано рівняння, у якому визначник матриці 10×10 дорівнює нулю, цей визначник було суттєво спрощено та зведено до визначника матриці 6×6 . У результаті за отриманим рівнянням було чисельними методами розраховано власні значення частот сигналу для різних значень номерів моди. Параметри плазми та хвилі для цього етапу обирались такі самі, як і для другого етапу. Результати числового моделювання показали, що власні частоти є приблизно пропорційними тороїдному номеру моди, $\omega \propto |l|$. Така залежність також відома для альфвенових хвиль. Механізми збудження цих електромагнітних сигналів у даній роботі не розглядають. Натомість у роботі розглянуто проблему власних значень і власних функцій. Сигнали, що досліджуються у роботі, можуть збуджуватися антеною в іонному циклотронному діапазоні частот унаслідок параметричної розпадної нестійкості або високоенергетичними хвостами йонів. У той же час запропонований локалізований високочастотний сигнал все ще можна розглядати як один із механізмів, відповідальних за небажане поглинання потужності сигналу відповідної частоти в розрідженій плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака. Передбачається, що сигнал є локалізованим поблизу локального Альфвенового резонансу.

Вивчення точок відсічки та поведінки електромагнітних сигналів у розрідженій плазмі за останньою замкненою магнітною поверхнею токамака є предметом активних досліджень, оскільки покращення розуміння процесів у цьому просторі, знаходження положення точок відсічки та розуміння їх залежностей від

параметрів плазми та їх градієнтів може допомогти підвищити ефективність та довговічність роботи термоядерних установок, а саме токамаків.

Ключові слова: холодна плазма без зіткнень, точки відсічки, власні хвилі, іонний циклотронний діапазон частот, Альфвенів резонанс, остання замкнена магнітна поверхня токамака, метод вузького шару, дисперсійне рівняння.

ABSTRACT

Trush O. V. Theoretical study of the propagation of a fast magnetosonic waves in a tokamak scrape-off layer. – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 105 – Applied Physics and Nanomaterials (Field of Knowledge 10 – Natural Sciences), V. N. Karazin Kharkiv National University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation work is devoted to the theoretical study of the propagation of a fast magnetoacoustic wave in a tokamak scrape-off layer in the approximation of a cold magnetoactive collisionless plasma. The work is devoted to finding the positions of the turning points (cutoff points) for the components of the electromagnetic field of the wave; studying the dependence of the location of these points on the plasma parameters and on the gradients of these parameters; studying the dispersion properties of electromagnetic signals located within Alfvén resonances in a tokamak scrape-off layer in ion cyclotron frequency range.

At the first stage of the work, an explicit form of differential equations is derived for the components of the electromagnetic field in ion cyclotron frequency range. For this, the well-known equations of electrodynamics are used – Maxwell's equations in the Cartesian coordinate system. For the components of this field, the Fourier analysis is applied and equations are obtained for finding the amplitudes of the components H_z , E_y and E_x of the electromagnetic field of the signal. These are ordinary second-order linear uniform differential equations with the presence of terms with the first derivatives of the wave field amplitudes in them. Such equations are studied in the literature only from the

mathematical point of view with the goal to find the wave amplitude spatial distribution – a replacement of the desired function is selected that reduces such an equation to an equation without the first derivative. However, this technique does not allow correct finding the coordinates of the turning points, because the new function has new cut-off points. Therefore, in this work, equations for finding the turning points were obtained based on the derived equations rather than on the basis of simplified ones, which allows correct finding the coordinates of the cut-off points. This fact indicates the novelty of the research, because turning points for electrodynamics problems are practically not found in this way.

As a result of the first stage of work, conditions for determining the cut-off points of the electromagnetic wave field components in the ion cyclotron frequency range are derived for the waves with both poloidal wavenumbers $k_y \neq 0$ and $k_y = 0$ with account for plasma strong inhomogeneity.

At the second stage of work, a numerical study of the obtained equations is carried out to find the coordinates of the cut-off points of the electromagnetic wave field components in ion cyclotron frequency range. The following plasma and wave parameters are used for numerical modeling: generator angular frequency $\omega = 3.34 \omega_{ci}$, external static magnetic field $B_0 = 2.0 \text{ T}$, minor plasma radius $a = 0.5 \text{ m}$ and major plasma radius $R = 2.12 \text{ m}$, the decay length of the plasma particle density $\Lambda = 0.01801 \text{ m}$. These parameters are consistent with the parameters of the real installation – the medium-sized tokamak ASDEX Upgrade. Two cases of the dependence of the density of plasma particles on the coordinate are considered – a linear dependence of the density on the coordinate and an exponential one. The latter is, of course, more complicated for numerical analysis, but more suitable from the point of view of physics – because in the region of a tokamak scrape-off layer, the density of plasma particles decreases with the coordinate just according to the exponential law.

Numerical studies have confirmed that in inhomogeneous plasma the cut-off points have different positions for three sets of components of the electromagnetic field of a fast magnetosonic wave: E_x and H_y , E_y and H_x , H_z . The condition, which is generally known

in the literature as a condition for determining the cut-off frequency of a fast magnetosonic wave for given homogeneous plasma parameters, is not at all suitable for the application for finding cut-off points in inhomogeneous plasma, which is present in all fusion facilities. In general, in inhomogeneous plasma such a condition is applicable only for determining the cut-off points of the field components E_y and H_x with $k_y = 0$.

The results of the second stage of the study indicate that the non-uniformity of the plasma causes a different effect on the location of the cut-off points for waves with different wave numbers. For almost all studied values of the mode indices, the cut-off points of the wave fields E_y and H_x are closest to the tokamak wall.

At the third stage of the work, the spatial distribution of the eigen wave field with the toroidal refractive index smaller than a unit and the frequency higher than ion cyclotron frequency localized in the region of Alfvén resonance in a tokamak scrape-off layer is considered. At this stage, the Maxwell's equations are also the starting equations, and Fourier analysis is applied to them. Since in the region of a tokamak scrape-off layer, the plasma density varies very quickly, it is impossible to apply the WKB method in this region. Therefore, the so-called narrow layer method is used to obtain the spatial distribution of the wave field in the close vicinity of Alfvén resonance. To solve the differential equations, the space around the Alfvén resonance is **separated** into four characteristic zones. For each of the zones, the spatial wave field variation is asymptotically derived and solutions of the differential equations are tuned at the boundaries of the zones. In the third zone, in the close vicinity of Alfvén resonance (not far than plasma density decay length), the narrow layer method was applied. This made it possible to reproduce the spatial distribution of the localized wave field.

The analysis of the dispersion properties of electromagnetic signal in ion cyclotron frequency range in a tokamak scrape-off layer is the last stage of the work. For this, boundary conditions are applied to the spatial dependences of the electromagnetic field components at the edges of the zones within which the space was divided. As a result, the dispersion relation is obtained in which the determinant of the 10x10 matrix is equal to zero. This determinant is significantly simplified and reduced to the determinant of the 6x6 matrix. As a result, the eigen values of the signal frequencies for different values of

the toroidal and poloidal wave indices are calculated using numerical methods to solve the dispersion relation. The plasma and wave parameters for this stage are chosen the same as for the second stage. The results of numerical modeling show that the eigen frequencies are approximately proportional to the toroidal wave index, $\omega \propto |n|$. This feature is also known for Alfvén waves. The mechanisms of excitation of radio frequency signals are not considered in this work. Instead, the paper addresses the problem of eigen values and eigen functions. The signals investigated in the paper can be excited by an antenna in the ion cyclotron frequency range either by parametric decay or by ion energetic tails. At the same time, the proposed localized radio frequency signal can still be considered as one of the mechanisms responsible for the unwanted absorption of signal power of the corresponding frequency in a tokamak scrape-off layer. It is assumed that the signal is localized in a local Alfvén resonance.

The study of cut-off points and the dispersion properties of electromagnetic signals localized in the vicinity of Alfvén resonance in a tokamak scrape-off layer are the subject of active research, since improving the understanding of processes in the scrape-off layer, determining the position of cut-off points and understanding their dependences on plasma parameters and their gradients can help increase the efficiency and durability of fusion plants, in particular tokamaks.

Key words: cold collisionless plasma, cut-off points, eigen waves, ion cyclotron range of frequency, Alfvén resonance, tokamak scrape-off layer, narrow layer method, dispersion relation.