Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Селютін Дмитро Дмитрович

УДК: 517.5, 515.122

ДИСЕРТАЦІЯ

ФІЛЬТРИ, УЗАГАЛЬНЕНІ ВИДИ ЗБІЖНОСТІ ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність 111 – Математика
(Галузь знань 11 – Математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії з математики.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
____________ Д. Д. Селютін

Науковий керівник: Фаворов Сергій Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2024

АНОТАЦІЯ

Селютін Д.Д. Фільтри, узагальнені види збіжностей та їхні застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2024.

Дисертацію присвячено дослідженню фільтрів, їхніх властивостей, та їх застосувань до різноманітних розділів математики, зокрема теорії топологічних векторних просторів, загальної топології, теорії інтегрування.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено історії вивчення питань, розглянутих в дисертації, та огляду літератури. Описано основні конструкції, про які йтиме мова протягом всієї дисертації. Також сформульовано основні відомі результати, які буде використано в наступних розділах.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню властивостей фільтрів та ультрафільтрів на множині натуральних чисел.

Нагадаємо, що фільтр $\mathfrak{F}$ на множині Ω – це сім'я підмножин така, що:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$, то $D \in \mathfrak{F}$

Ідеал $\mathfrak{I}$ на множині Ω – це сім'я підмножин така, що:

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$;

2. якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cup B \in \mathfrak{F}$;

3. якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{F}$

Ультрафільтром на множині Ω називають максимальний за включенням фільтр.

Через $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ будемо позначати ідеал, породжений фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{A \subset \Omega : \ \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}\}.$$

Статистичною мірою на сім'ї множин $2^{\mathbb{N}}$ називають скінченно-адитивну міру, таку, що $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і $\mu(\{k\}) = 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Кажуть, що фільтр $\mathfrak{F}$ на множині $\mathbb{N}$ задано однією статистичною мірою μ, якщо

$$\mathfrak{F} = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

Для фільтра $\mathfrak{F}$ його *коідеалом* називають

$$\mathfrak{F}^{+} = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{B \in 2^{\mathbb{N}} : \forall A \in \mathfrak{F} \ \ B \cap A \neq \emptyset\}$$

В розділі було введено декілька корисних технічних понять.

Для заданого фільтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ говоримо, що $A, B \in \mathfrak{F}^{+}$ $\mathfrak{F}$*-майже не перетинаються* (є $\mathfrak{F}$-майже неперетинними), якщо $A \cap B \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$.

Означення. Будемо називати фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ *бідним*, якщо довільна попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинна сім'я $A = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{F}^{+}$ є не більш, ніж зліченною.

Означення. Будемо говорити, що фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ є *конгломерованим*, якщо існує неперетинна послідовність $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ така, що для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$ маємо $\bigcup\limits_{n\in M} D_n \in \mathfrak{F}^+$.

Одним з основних результатів розділу є теорема, яка надає широкий клас фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою.

Теорема. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ є конгломерованим, то він не є бідним, а отже його не можна задати однією статистичною мірою.*

З цієї теореми ми одразу отримуємо, що такі фільтри, як фільтр Фреше, статистичний фільтр, фільтр Ердеша-Улама, фільтр підсумовування тощо є фільтрами, які не можна задати однією статистичною мірою.

Також в розділі отримано ряд результатів, пов'язаних із властивостями перетинів сімейств фільтрів та ультрафільтрів. Відомим є той факт, що будь-який фільтр є перетином всіх ультрафільтрів, які його містять. Нам вдалося отримати ряд уточнень даної теореми, зокрема такий результат.

Теорема. *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді існує сім'я ультрафільтрів W на $\mathbb{N}$, потужності не більше, ніж континуум і така, що*

$$\mathfrak{F} = \cap W,$$

де $\cap W = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \in U \ \forall U \in W\}$.

Далі було розглянуто питання єдиності представлення фільтра у вигляді перетину скінченного та нескінченного сімейств ультрафільтрів. Докладніше: представлення фільтра у вигляді перетину скінченної множини ультрафільтрів є єдиним, а якщо фільтр є перетином зліченного числа ультрафільтрів, то таке представлення не єдине.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи ми вивчаємо ідеали на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Докладніше: нехай $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині $\mathbb{N}$, тобто, $\emptyset \in \mathfrak{I}$, якщо $A, B \in \mathfrak{I}$, то $A \cup B \in \mathfrak{I}$, і якщо $A \in \mathfrak{I}$, $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{I}$. Для топологічного векторного простору X і послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ розглянемо множину $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \{y \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I},\ \forall U \in \mathcal{O}(y)\},$$

де $\mathcal{O}(y)$ – система околів точки y.

P. Leonetti в роботі [25] ввів поняття ядра відносно до ідеалу $\mathfrak{I}$ послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathrm{core}_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E\in\mathfrak{F}(\mathfrak{I})} \overline{\mathrm{co}}\{x_n : n \in E\},$$

де $\overline{\mathrm{co}}$ – замикання опуклої оболонки, а $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ – фільтр, породжений ідеалом $\mathfrak{I}$. Центральним результатом роботи [25] є наступна теорема.

Теорема. *Нехай X – локально опуклий топологічний векторний простір, який задовольняє першій аксіомі зліченності, $(x_n) \subset X$ – послідовність. Нехай існує такий елемент $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, що $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ – компакт. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}). \tag{1}$$

В розділі було введено технічне визначення.

Означення. Нехай X – топологічний векторний простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{F}$ – фільтр на множині $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Назвемо послідовність x *$\mathfrak{F}$-асимптотично K-контрольовною*, якщо для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(0)$ існує елемент $E = E(K,U) \in \mathfrak{F}$ такий, що $x(E) \subset K + U$. Будемо позначати цю умову

$$x \prec_{\mathfrak{F}} K.$$

Одна із основних задач, розв'язаних у даному розділі, полягає в тому, що результат Leonetti було поширено для просторів, які не задовольняють першій аксіомі зліченності, тобто ця теорема має місце для більш широкого класу просторів. Цей результат є наслідком наступної теореми.

Теорема. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Тоді*

$$\overline{co}\,\Gamma_x(I) = core_x(\mathfrak{I}).$$

Наслідок. *(Посилення теореми Leonetti) Нехай $x = (x_n)$ – послідовність елементів у локально опукло топологічному векторному просторі X така, що $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого елемента фільтра $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Тоді $core_x(I) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

Також в розділі досліджено питання застосування отриманих результатів до компактних множин у слабкій топології, а саме доведено наступну теорему.

Наслідок. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт у слабкій топології, $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині натуральних чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Позначимо $\Gamma_x^w(\mathfrak{I})$ – множину $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності у слабкій топології. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\, \Gamma_x^w(\mathfrak{I}).$$

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню одного, проте досить широкого класу ідеалів, а саме ідеалів, породжених модульними функціями. Нагадаємо, що статистичним ідеалом $\mathfrak{I}_s$, або ідеалом статистичної збіжності називають наступну непорожню сім'ю множин:

$$\mathfrak{I}_s = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\},$$

де $d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap [1,n]|}{n}$ – щільність підмножини $A \subset \mathbb{N}$.

Функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ називають модульною функцією, якщо вона задовольняє наступним аксіомам:

1. $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
2. $f(x + y) \le f(x) + f(y)$, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^+$;
3. $f(x) \le f(y)$, якщо $x \le y$;
4. f – неперервна справа в нулі;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Модульна функція f породжує ідеал $\mathfrak{I}_f$ на множині натуральних чисел, який називають f-ідеалом:

$$\mathfrak{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : d_f(A) = 0\},$$

де $d_f(A) = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(|A \cap [1,n]|)}{f(n)}$ – f-щільність множини A.

Ясно, що якщо f – тотожна функція, то $d_f(A) = d(A)$.

В роботі [1] A. Aizpuru, M. C. Listán-Garcíа, F. Rambla-Barreno показали, що $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$, для довільної модульної функції f. Головним результатом даного розділу дисертації було дати повний опис таких модульних функцій f, для яких $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$.

Нехай f – модульна функція, $t \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Для зручності будемо використовувати такі позначення:

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)},\ g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

Було доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай f – модульна функція. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$;
3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$.

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи ми вивчаємо застосування теорії фільтрів до теорії топологічних векторних просторів. Повнота простору є одним із найважливіших понять не тільки в теорії топологічних векторних просторів, а й взагалі в математиці. Саме тому природною є задача узагальнення цього поняття для просторів, які не мають метричної структури, в яких ми не можемо користуватися мовою збіжностей послідовностей у стандартному сенсі цього слова. Тому в даному розділі ми вводимо цілу низку узагальнень поняття повноти простору мовою фільтрів, аналізуємо зв'язок введених понять з раніше відомими, та досліджуємо властивості нових видів повноти простору.

Нагадаємо стандартне визначення повного топологічного векторного простору.

Означення. Фільтр $\mathfrak{F}$ топологічного векторного простору X називають фільтром Коші, якщо для довільного $U \in \mathcal{O}(0)$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $A - A \subset U$.

Означення. Топологічний векторний простір X називають повним, якщо довільний фільтр Коші на X має границю.

Нами запропоновано такі узагальнення повноти топологічного векторного простору:

Означення. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, X – топологічний векторний простір. Будемо називати простір X *повним відносно фільтру* $\mathfrak{F}$, якщо кожна послідовність Коші відносно фільтру $\mathfrak{F}$ на X має границю відносно $\mathfrak{F}$.

Означення. Назвемо топологічний векторний простір X *зліченно-повним*, якщо X є повним для всіх фільтрів $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

Означення. Топологічний векторний простір X назвемо *асимптотично зліченний*, якщо для будь-якого фільтру Коші $\mathfrak{F}$ на X існує зліченна підмножина $A \subset X$ така, що для будь-яких $U \in \mathcal{O}(0)$ і $B \in \mathfrak{F}$ виконано: $A \cap (B + U) \neq \emptyset$.

Одним із найцікавіших результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема. *За умови виконання аксіоми Мартіна існують вільні ультрафільтри $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ на $\mathbb{N}$ та існує такий топологічний векторний простір X, що X є повним відносно $\mathfrak{U}_1$, але X не є повним відносно $\mathfrak{U}_2$.*

Шостий розділ дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтегрування. Ми розглядаємо звичайну одновимірну, дійснозначну функцію $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Нами побудовано конструкцію, яку ми назвали інтегралом функції f по фільтру на множині відмічених розбиттів $\mathfrak{F}$ відрізка $[0,1]$:

$$\int\limits_0^1 f d\,\mathfrak{F}\ .$$

Ми показали, що звичайний інтеграл Рімана функції на відрізку є частковим випадком описаного вище поняття. Досліджено властивості інтеграла функції по фільтру, зокрема такий інтеграл задовольняє властивості лінійності та однорідності, має місце аналог результату про те, що якщо

функція інтегровна за Ріманом, то вона обмежена. Вивчено можливість інтегрування функції відносно фільтра по підвідрізку фіксованого відрізка. Описано цікаві результати, присвячені інтегралу по фільтру від необмежених функцій.

Ключові слова: фільтри, ідеали, загальна топологія, функції, інтеграл, збіжність, повнота, топологічні векторні простори, локально-опуклі простори, міра, банахові простори, властивість Бера, гільбертові простори, послідовність, компактність.

ABSTRACT

Dmytro D. Seliutin. Filters, generalized types of convergence and its applications. – Qualification scientific work is as a manuscript. A thesis on the degree of Doctor of Philosophy: Speciality 111 – Mathematics (Mathematics and statistics). – V.N.Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2024.

The thesis is devoted to the study of filters, their properties, and their applications in different branches of mathematics, in particular, in the theory of general topological vector spaces, general topology, theory of integration.

The first section of the thesis is devoted to the history of the studied problems and the literature review. The main constructions, which will be discussed throughout the dissertation, are described. The main known results, which will be used in the following sections, are also formulated.

The second section of the thesis is devoted to the study of the properties of filters and ultrafilters on the set of positive integers.

Recall that the filter $\mathfrak{F}$ on the set Ω is a nonempty family of subsets such that

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. if $A, B \in \mathfrak{F}$ then $A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. if $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$ then $D \in \mathfrak{F}$

An ultrafilter on the set Ω is called a maximal filter by inclusion.

By $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ we denote an ideal, generated by filter $\mathfrak{F}$, i.e.,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{A \subset \Omega : \ \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}\}.$$

Statistical measure on $2^{\mathbb{N}}$ is a non-negative finitely additive measure μ such that $\mu(\mathbb{N}) = 1$ and $\mu(\{k\}) = 0$ for every $k \in \mathbb{N}$. Filter $\mathfrak{F}$ on $\mathbb{N}$ is said to be generated by a single statistical measure μ if

$$\mathfrak{F} = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

For the filter $\mathfrak{F}$ its coideal is

$$\mathfrak{F}^+ = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{B \in 2^{\mathbb{N}} : \forall A \in \mathfrak{F} \ \ B \cap A \neq \emptyset\}$$

Several useful technical concepts were introduced in the section.

For a given free filter $\mathfrak{F}$ the sets $A, B \in \mathfrak{F}^+$ are said to be $\mathfrak{F}$-almost disjoint, if $A \cap B \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$.

Definition. A free filter $\mathfrak{F}$ on $\mathbb{N}$ is called *poor* if every pairwise $\mathfrak{F}$-almost disjoint collection $A = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{F}^+$ of subsets is at most countable.

Definition. We call the filter $\mathfrak{F}$ on $\mathbb{N}$ is *conglomerated* if there is a disjoint sequence of sets $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ such that for each infinite subset $M \subset \mathbb{N}$ we have $\bigcup\limits_{n \in M} D_n \in \mathfrak{F}^*$.

One of the main results of the section is a theorem that presents the class of filters that cannot be generated ed by a single statistical measure.

Theorem. *If the filter $\mathfrak{F}$ is conglomerated then $\mathfrak{F}$ is not poor, so it is not generated ed by a single statistical measure.*

Using this theorem we obtain that such filters as the Fréchet filter, the statistical filter, Erdös-Ulam filter, summable filter cannot be generated ed by a single statistical measure.

Also, in the section, we obtained results related to the properties of intersections of families of filters and ultrafilters. It is a well-known fact that any filter can be represented as the intersection of all ultrafilters that contain it. We obtained some clarifications of this theorem, in particular

Theorem. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a free filter* $\mathbb{N}$*. Then there exists the family of ultrafilters* W *on* $\mathbb{N}$*,with cardinality of at most continuum such that*

$$\mathfrak{F} = \cap W,$$

where $\cap W = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \in U \ \forall U \in W\}$.

Next, the question of the uniqueness of the representation of the filter as the intersection of finite and infinite families of ultrafilters was considered. More details: the representation of a filter as the intersection of a finite set of ultrafilters is unique, and if the filter is the intersection of a countable number of ultrafilters, then such representation is not unique.

In **the third section** of the thesis we study ideal on the set of positive integers $\mathbb{N}$. More detailed: let $\mathfrak{I}$ be an ideal on $\mathbb{N}$, i.e. $\emptyset \in \mathfrak{I}$, if $A, B \in \mathfrak{I}$, then $A \cup B \in \mathfrak{I}$, and if $A \in \mathfrak{I}$, $D \subset A$, we also have $D \in \mathfrak{I}$. For topological vector space X and a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ we consider the set of $\mathfrak{I}$-cluster points of x

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \{y \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I}, \ \forall U \in \mathcal{O}(y)\},$$

where $\mathcal{O}(y)$ stands for all neighbourhoods of y.

Paolo Leonetti in [25] introduced the follow concept of ideal core of ideal $\mathfrak{I}$ and $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\operatorname{core}_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E\in\mathfrak{F}(\mathfrak{I})} \overline{\operatorname{co}}\{x_n : n \in E\},$$

where $\overline{\operatorname{co}}$ stands for the closed convex hull, and $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ is the filter generated by the $\mathfrak{I}$. The main result of [25] is the next theorem.

Theorem. *Let X be a first countable locally convex topological vector space, and $(x_n) \subset X$ be a sequence of its elements. Let there exist $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ such that $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ is a compact. Then*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}). \tag{2}$$

In the section we've introduced one technical definition

Definition. Let X be a topological vector space, $K \subset X$ be a compact, $\mathfrak{F}$ be a filter on $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ be a sequence of elements in X. We call the sequence x $\mathfrak{F}$*-asymptotically* K*-controlled*, if for each neighbourhood $U \in \mathcal{O}(0)$ there exists $E = E(K, U) \in \mathfrak{F}$ such that $x(E) \subset K + U$. We denote this condition

$$x \prec_{\mathfrak{F}} K.$$

One of the main problems solved in this section is that Leonetti's result can be spread to spaces that do not satisfy the first countability axiom, that is, this theorem holds for a wider class of spaces. This result is a consequence of the following theorem.

Theorem. *Let X be a locally convex topological vector space, $K \subset X$ be a compact, $\mathfrak{I}$ be ab ideal on $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ be a sequence in X such that $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Then*

$$\overline{co}\,\Gamma_x(I) = core_x(\mathfrak{I}).$$

Consequence. *(Strengthening of Leonetti's theorem) Let $x = (x_n)$ be a sequence of elements in locally convex topological vector space X such that $\overline{x(E)}$ is a compact for some $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Then $core_x(I) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

Also, in the section we use the obtained results for compact sets in weak topology, in particular, the following theorem is proved.

Consequence. *Let X locally convex topological vector space, $K \subset X$ be a compact in weak topology, $\mathfrak{I}$ be an ideal on $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ be a sequence in X such that $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Denote $\Gamma_x^w(\mathfrak{I})$ the set of $\mathfrak{I}$-cluster points of x in the weak topology. Then*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x^w(\mathfrak{I}).$$

The fourth section of the thesis is devoted to the study of one, but wide class of ideals, namely, ideals generated by modulus functions. Recall that the statistical ideal $\mathfrak{I}_s$ or the ideal of statistical convergence in defined as follows:

$$\mathfrak{I}_s = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\},$$

where $d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap [1, n]|}{n}$ is the density of $A \subset \mathbb{N}$.

A function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ is called an unbounded modulus function, if

1. $f(x) = 0$ if and only if $x = 0$;

2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$;

3. $f(x) \leq f(y)$ if $x \leq y$;

4. f is continuous from the left at 0;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

The modulus function f generates the ideal $\mathfrak{I}_f$ on $\mathbb{N}$, which is called the f-ideal:

$$\mathfrak{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : d_f(A) = 0\},$$

where $d_f(A) = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(|A \cap [1, n]|)}{f(n)}$ – f-density of A. Clearly that if f is the id function then $d_f(A) = d(A)$.

In [1] A. Aizpuru, M. C. Listán-García, F. Rambla-Barreno demonstrated that $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$for each modulus function f. The main result of this section is completely describing of such modulus f for which $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$.

Let f be a modulus function, $t \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. For convenience we use such notation:

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)},\ g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

We proved the next result

Theorem. *Let f be a modulus function. The next assertion are equivalent:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$*;*

2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$;

3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$.

In the **fifth chapter** of the thesis, we study the application of filter theory in the theory of topological vector spaces. Completeness of space is one of the most important concepts not only in the theory of topological vector spaces, but also in mathematics in general. That's why it is natural to generalize this concept for spaces that do not have a metric structure, in which we cannot use the language of convergence of sequences in the standard sense of the word. Therefore, in this section, we introduce several generalizations of the concept of completeness of space in the language of filters, analyse the connection between the introduced concepts and previously known ones, and study the properties of new types of completeness.

Let us recall the standard definition of a complete topological vector space.

Означення. The filter $\mathfrak{F}$ on topological vector space X is called the Cauchy filter, if for all $U \in \mathcal{O}(0)$ there is $A \in \mathfrak{F}$ such that $A - A \subset U$.

Definition. Topological vector space X is said to be complete if each Cauchy filter on $\mathbb{N}$ has a limit.

We formulated the following generalizations of the completeness of the topological vector space:

Definition. Let $\mathfrak{F}$ be a filter on $\mathbb{N}$, X be a topological vector space. X is called to be *complete over* $\mathfrak{F}$ if each Cauchy sequence over $\mathfrak{F}$ in X has a limit over $\mathfrak{F}$.

Definition. A topological vector space X is called *countable complete* if X is complete over all filters $\mathfrak{F}$ on X.

Definition. A topological vector space X is called *asymptotically complete*,if for each Cauchy filter $\mathfrak{F}$ on X there is a countable $A \subset X$ such that for each $U \in \mathcal{O}(0)$ i $B \in \mathfrak{F}$ we have $A \cap (B + U) \neq \emptyset$.

One of the most interesting results of this section is the following theorem.

Теорема. *If Martin's axiom holds, there exist free ultrafilters $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ on $\mathbb{N}$ and there exists a topological vector space X such that X is complete over $\mathfrak{U}_1$, but X is not complete over $\mathfrak{U}_2$.*

The sixth section of the thesis is devoted to the application of the theory of filters to the theory of integration. We consider the usual one-dimensional, real-valued function $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. We built a construction that we called the integral of the function f over the filter $\mathfrak{F}$ on the set of tagged partitions $\mathfrak{F}$ of the segment $[0, 1]$:

$$\int_0^1 f d\mathfrak{F} .$$

We demonstrated that the ordinary Riemann integral of a function on a segment is a partial case of the concept described above. The properties of the integral of the function over the filter have been studied, in particular such integral satisfies the properties of linearity and homogeneity, there is an analogue of the result that if a function is Riemann integrable, then it is bounded. The possibility of integrating the function with respect to the filter over a subsegment

of a fixed segment is studied. Interesting results devoted to the filter integral of unbounded functions are obtained.

Key words: filters, ideals, general topology, functions, integral, convergence, completeness, topological vector spaces, locally convex spaces, measure, Banach spaces, Behr property, Hilbert spaces, sequence, compactness.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

1. D. Seliutin. On relation between statistical ideal and ideal generated by a modulus function. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2022. Vol. 95. P. 23-30.

   DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95

   Key words: ideal, statistical ideal, modulus function.

2. D. Seliutin. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2023. Vol. 98. P. 25-35.

   DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02

   Key words: filter, ideal, filter base, integral.

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin. 2022. Vol. 28. №. 4. P. 531-545.

   DOI: 10.36045/j.bbms.210512. (Scopus Q3)

   Key words: topological vector scape, completeness, filter, ideal, f-statistical convergence.

(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить теореми 3.3, 3.4 про зв'язок різних типів повноти в загальних топологічних векторних просторах; теорема 4.15 про секвенціальну, але не обмежену повноту простору ℓ_1 зі слабкою топологією. Особистий внесок співавтора: співавтору належить постановка задачі, теорема 4.6 про існування неповного топологічного векторного простору із потужністю континуум, який є зліченно повним, теорема 4.8 про обмежену зліченну повноту, теореми 4.10, 4.12 про локально опуклі простоти, розділ 5).

4. V. Kadets, D. Seliutin, J. Tryba, Conglomerated filters and statistical measures. J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 509. №. 1. Article number 125955.

   DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125955.(Scopus Q1)

   Key words: filter convergence, statistical convergence, statistical measure, ideal of sets, ultrafilter.

   (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить теорема 2.5 — достатня умова того, що фільтр не можна задати однією статистичною мірою; здобувачем було перевірено, що фільтр Фреше, фільтр підсумовування, фільтр Ердеша-Улама не можна задати однією статистичною мірою; здобувачеві належить також теорема 3.4, леми 3.5, 3.6, теорема 3.7. Особистий внесок співавторів: співавтору V. Kadets належить загальна постановка задачі, теорема 3.9, лема 3.10, теорема 3.11, означення тіп-представлення та всі тео-

реми, пов'язані із цим поняттям; співавтору J. Tryba належить твердження 2.11, теорема 2.12, розділ 4).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

5. Seliutin D. On some properties of filters. XVI International *Scientific Conference of Students and Young Scientists "Modern Problems of Mathematics and its Application in Natural Sciences and Information Technologies"*. 2021 March, 13-14.

6. Seliutin D. Relations between the ideal core and the ideal cluster point. *nternational Scientific Internet Conference of Young Researchers "Innovation in Science: Modern Dimension"*I. April 22, 2021. P. 25-26.

7. Seliutin D. A generalization of completeness of topological vector spaces. *International conference on complex and functional analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytsky*. September 13-16, 2021, Drohobych, Ukraine.

8. Seliutin D. On relations between statistical ideal and ideal generated by a modulus function. *The International Online Conference "Current trends in abstract and applied analysis"*. May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine.

9. Селютін Д. Про застосування фільтрів в теорії інтегрування. *XVIII Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях"*. 2023. Харків.

10. Селютін Д. Про перетин сімейств ультрафільтрів, *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики — 2023"*. 2023. Львів.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертаційної роботи:

11. V. Kadets, D. Seliutin. On relation between the ideal core and ideal cluster points. J. Math. Anal. Appl. 2020. V.492. №1. Article number 124430. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124430.(Scopus Q1)

    Key words: ideal, filter, ideal core, statistical convergence.

    (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать леми 2.2, 2.3 — результати, в яких показано зв'язок між ядром відносно до ідеалу та множиною граничних точок відносно ідеалу для у випадку довільних топологічних векторних просторів Особистий внесок співавтора: співавтору належить загальна постановка задачі, лема 3.1, означення 3.2, лема 3.3, теорема 3.4, розділ 4).

Зміст

1 Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження. В математичному аналізі і в тій частині функціонального аналізу, що стосується метризовних просторів, основні поняття (замкненість, неперервність, компактність, тощо) можна описати мовою збіжних послідовностей. Коли ми виходимо в неметризовні простори, цієї мови вже недостатньо. Зручним аналогом мови збіжних послідовностей, що адекватно описує неметризовний випадок, є мова збіжності за фільтром.

Якщо Ω – непорожня множина, то *фільтром на множини* Ω називають непорожню сім'ю підмножин множини Ω, яка є стійкою відносно скінченного перетину своїх елементів на взяття надмножин.

Теорія фільтрів є відносно молодою наукою. Поняття фільтра у 1937 році запропонував знаменитий французький математик, член групи Бурбакі, Анрі Картан в роботі [6]. В термінах теорії фільтрів ми можемо описувати, наприклад, компактність простору: топологічний векторний просторів X є компактним тоді і тільки тоді, коли кожен фільтр на X має граничну точку, тоді і тільки тоді, коли кожен ультрафільтр на X має границю. Тому мова фільтрів наразі є дуже поширеною в теорії топологічних векторних просторів. Використання мови фільтрів в задачах математичного та функціонального аналізу призводить природним чином до багатьох цікавих питань, на деякі з яких нам вдалося дати відповідь в даному дисертаційному дослідженні.

Мета і завдання дослідження.

- *Мета* – розширення теоретичних відомостей про фільтри та їх застосування до дослідження загальних топологічних векторних просторів.
- *Об'єкт дослідження* – фільтри, ультрафільтри, ідеали, топологічні векторні простори.
- *Предмет дослідження* – будова сімей фільтрів, ультрафільтрів, та ідеалів на заданій непорожній множині, питання повноти топологічних векторних просторів.
- *Завдання дослідження:*

  1. Встановити зв'язок між ядром послідовності відносно до ідеалу та множиною граничних точок послідовності відносно ідеалу.
  2. Описати сім'ю модульних функцій таких, що ідеали, породжені цими функціями співпадають зі статистичним ідеалом.
  3. Дати характеризацію сім'ї фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою.
  4. Дослідити питання єдиності представлення фільтрів як перетину нескінченної кількості ультрафільтрів.
  5. Дати означення різних типів повноти топологічних векторних просторів в термінах фільтрів.
  6. Дослідити взаємозв'язки між топологічними векторними просторами, повними за фільтрами.

7. Дослідити зв'язки між ультрафільтрами та просторами, повними за цими ультрафільтрами.
8. Дати означення інтеграла функції відносно фільтра та дослідити його властивості.

- *Методи дослідження.* В дисертаційні роботи використано методи функціонального на математичного аналізів, загальної топології, теорії множин, теорії загальних топологічних векторних просторів, та теорії фільтрів.

Наукова новизна одержаних результатів. В даній дисертацій роботі вперше описано зв'язок між ядром відносно до ідеалу та множиною граничних точок послідовності відносно ідеалу у загальних локально опуклих топологічних векторних просторах. Також в роботі вперше описано необхідні і достатні умови для функцій f таких, що ідеали, породжені цими функціями, співпадають зі статистичним ідеалом. Вперше нам вдалось виділити широкий клас фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою. Це зроблено завдяки введенню нових понять бідного фільтра і конгломерованого фільтра. Також в роботі ми повністю розглянули питання представлення фільтрів у вигляді перетину нескінченного сімейства ультрафільтрів і з'ясували, чи є воно єдиним.

У дисертаційній роботі введено поняття повного відносно фільтра топологічного векторного простору, в тому числі зліченна повнота, асимптотична повнота і досліджено властивості нових типів просторів.

В роботі введено нове поняття інтеграла функції відносно фільтра та досліджено його властивості.

Зв'зок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках державної науково-дослідницької роботи за темою "Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок між геометрією, алгеброю, та топологією" (номер проєкту: 2020.02/0096).

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані результати розширюють наші уявленні про фільтри, ультрафільтри, топологічні векторні простори та можуть бути застосовані в топології, теорії банахових просторів та інших розділах математики.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі належить професору Кадецю В. М. Статті [28], [29] написано здобувачем самостійно. Статті [24],[22], [23] написано у співавторстві з професором Кадецем В. М.. Розділ 4.3 статті [23] написано J. Tryba. Також ми вдячні йому за цінні коментарі до даної статті. Усі результати, включені до дисертації, було отримано автором особисто, проте постійно обговорювались із науковим керівником. Результати, що належать співавторам та іншим математикам, згадуються за необхідності для повноти викладу та супроводжуються необхідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на наступних конференціях:

1. Міжнародна науково-практична інтернет-конференція для молодих дослідників ”Інновації в науці і техніці: сучасний вимір”, Суми, 2021 рік. (Форма участі – очна, дистанційна).

2. XVI Міжнародна конференція студентів та молодих вчених ”Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях”, Харків, 2021 рік. (Форма участі – очна, дистанційна).

3. Міжнародна конференція з комплексного та функціонального аналізу, присвячена пам’яті Богдана Винницького, Дрогобич, 2021 рік. (Форма участі – очна, дистанційна).

4. The international online conference ”Current trends in abstract and applied analysis”, Івано-Франківськ, 2022. (Форма участі – очна, дистанційна).

5. XVIII Міжнародна конференція студентів та молодих вчених ”Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях”, Харків, 2023 рік. (Форма участі – очна, дистанційна).

6. Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики — 2023», Львів, 2023.

7. Семінар кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, 05.12.2023.

8. Семінар математичних товариств України, 13.04.2024.

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковано у фахових журналах, пройшов апробацію на наукових конференціях. Результати дисертації містяться у 11 наукових публікаціях, а саме, в 5 статтях [22], [23], [24], [28], [29] у спеціалізованих журналах, з яких дві написано без співавторів, і в тезах доповідей [32], [35], [37], [34], [33], [36] на 6 конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, шести розділів, висновків до дисертації, переліку використаних джерел, який містить 37 пунктів, та додатків. Повний обсяг дисертації – 148 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 113 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 15 сторінок.

2 Огляд літератури та вибір теми

2.1 Фільтри, ідеали, та їхні властивості

Банахові простори є частковим випадком більш загальних топологічних векторних просторів. У теорії банахових просторів (тобто повних нормованих просторів) ми можемо вільно користуватися мовою куль для опису "близьких елементів", тобто якщо послідовність елементів $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ банахового простору X збігається до $x_0 \in X$, це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх номерів $n > \mathbb{N}$ $||x_n - x_0|| < \varepsilon$, або $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$, де $B(x_0, \varepsilon)$ – відкрита куля з центром в точці x_0 і радіуса ε. За допомогою послідовностей та куль ми можемо описати багато властивостей підмножин банахових просторів, таких, як замкненість, компактність, сепарабельність тощо.

Якщо ж ми маємо намір досліджувати неметризовні топологічні векторні простори, то ми вже не можемо користуватися мовою послідовностей та околів у звичному сенсі, як було у випадку, наприклад, банахових просторів. У цьому випадку потужним апаратом виступає мова теорії фільтрів.

Нехай Ω – непорожня множина. Непорожню сім'ю $\mathfrak{F} \subset 2^{\Omega}$ називають фільтром на Ω, якщо $\mathfrak{F}$ задовольняє наступні аксіоми:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

2. якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$;

3. якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $D \supset A$, то $D \in \mathfrak{F}$.

Двоїстим поняттям до фільтра є ідеал. Отож сім'ю $\mathfrak{I}$ на Ω називають ідеалом на Ω, якщо

1. $\emptyset \in \mathfrak{I}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{I}$, то $A \cup B \in \mathfrak{I}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{I}$ і $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{I}$.

Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на Ω, то ідеалом $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, породженим $\mathfrak{F}$ називають

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{A \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{F}\}.$$

Не менш важливим об'єктом є база фільтра. Наведемо означення цього поняття.

Непорожню сім'ю підмножин $\mathfrak{B} \subset 2^{\Omega}$ називають базою фільтра, якщо

1. $\emptyset \notin \mathfrak{B}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{B}$, то знайдеться такий $C \in \mathfrak{B}$, що $C \subset A \cap B$.

Говоримо, що $\mathfrak{B}$ є базою фільтра $\mathfrak{F}$ (або фільтр $\mathfrak{F}$ породжено базою фільтра $\mathfrak{B}$), якщо для довільного $A \in \mathfrak{F}$ існує $B \in \mathfrak{B}$ такий, що $A \supset B$.

Нагадавши необхідні визначення, наведемо тепер кілька прикладів фільтрів та їхніх баз.

Приклад 2.1. 1. Фільтр Фреше $\mathfrak{FR}$ – фільтр підмножин множини натуральних чисел зі скінченним доповненням:

$$\mathfrak{FR} = \{A \subset \mathbb{N} : |\mathbb{N} \setminus A| < \infty\},$$

де $|M|$ – кількість елементів множини $M \subset \mathbb{N}$. Базою фільтра Фреше є наступна система підмножин $B_n \subset \mathbb{N}$, $n = 1, 2, ...$:

$$B_1 = \{1, 2, 3, 4, ...\},\ B_n = \{2, 3, 4, 5, ...\},\ ...,\ B_n = \{n, n+1, n+2, ...\}.$$

Простіше кажучи, база фільтра Фреше – це "хвости" натурального ряду.

2. Фільтр околів $+\infty$. Базою цього фільтра є множини $B_a = (a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

3. Статистичний фільтр $\mathfrak{F}_s = \left\{A \subset \mathbb{N} : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap [1,n]|}{n} = 1\right\}$. Будемо позначати

$$d(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}.$$

Величину $d(A)$ називають щільністю підмножини $A \subset \mathbb{N}$.

4. Фільтр підсумовування $\mathfrak{F}^s$. Нехай $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – послідовність невід'ємних дійсних чисел $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} s_k = \infty$. Тоді

$$\mathfrak{F}^s = \left\{A \subset \mathbb{N} : \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A} s_k < \infty\right\}$$

5. Фільтр Ердеша-Улама $\mathcal{EU}_s$. Нехай $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – послідовність невід'ємних дійсних чисел $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} s_k = \infty$. Тоді

$$\mathcal{EU}_s = \left\{A \subset \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k\in A\cap[1,n]} s_k}{\sum_{k=1}^n s_k} = 1\right\}.$$

Поняття фільтра запропонував у 1937 році Анрі Картан в роботах [6] і [7]. Використовуючи техніку фільтрів, можна ввести поняття збіжності послідовності за фільтром, яке є узагальненням звичайної збіжності у послідовності. А саме, якщо $\mathfrak{F}$ – деякий фільтр на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, ми говоримо, що послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ топологічного простору X збігається до x_0 за фільтром $\mathfrak{F}$, якщо для довільного околу U точки x_0 знайдеться елемент фільтра $A \in \mathfrak{F}$ такий, що для довільного $n \in A$ виконано $x_n \in U$. Якщо за фільтр $\mathfrak{F}$ взяти фільтр Фреше $\mathfrak{FR}$, ми отримаємо добре відоме визначення збіжності числової послідовності.

На множині всіх фільтрів існує природне відношення порядку. А саме, фільтр $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$. Максимальний за цим включенням елемент називають ультрафільтром. Перелічимо тепер деякі властивості ультрафільтрів та їхню роль у дослідженні компактності.

Теорема 2.1. *(Критерій ультрафільтра.) Фільтр $\mathfrak{U}$ на множині Ω буде ультрафільтром тоді і тільки тоді, коли для довільної $A \subset \Omega$ виконано одну з двох умов: $A \in \mathfrak{U}$ або $\Omega \setminus A \in \mathfrak{U}$.*

Нехай $\mathfrak{F}$ – деякий фільтр на топологічному векторному просторі X. Елемент $x_0 \in X$ називають границею фільтра $\mathfrak{F}$ (позначають $x_0 = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x_0.

Теорема 2.2. *(Критерій компактності в термінах фільтрів) Нехай X – гаусдорфів топологічний векторний простір. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. *X – компакт;*

2. кожен ультрафільтр на X має границю.

Теорема 2.3. *Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на X, то існує ультрафільтр $\mathfrak{U}$, який мажорує фільтр $\mathfrak{F}$.*

Теорема 2.4. *Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на X, то $\mathfrak{F}$ є перетином всіх ультрафільтрів, які його містять.*

Перелічені результати є добре відомими, класичними результатами теорії фільтрів, і чудово описані в підручнику[20].

В роботах [2], [8] було введено поняття статистичної міри. Невід'ємну скінченно-адитивну міру μ на $2^{\mathbb{N}}$ називають статистичною мірою, якщо $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\mu(\{k\}) = 1$. Очевидним прикладом статистичної міри є характеристична функція ультрафільтра $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{1}_{\mathfrak{U}}(A) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } A \in \mathfrak{U} \\ 0, \text{ якщо } A \notin \mathfrak{U} \end{cases}.$$

Говорять, що фільтр $\mathfrak{F}$ задано однією статистичною мірою μ, якщо

$$\mathfrak{F} = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

У статті [9] автори показали, що фільтр Фреше не можна задати однією статистичною мірою. В роботі [21] В. М. Кадець отримав аналогічний результат для фільтру статистичної збіжності. Природною є наступна

Задача 1. Описати сім'ю фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою.

В цьому напрямку нам вдалося виділити зручну достатню умову, яка дозволяє надати відповідь для багатьох відомих фільтрів.

Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді коідеалом фільтра $\mathfrak{F}$ називають

$$\mathfrak{F}^+ = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{B \in 2^{\mathbb{N}} : \forall A \in \mathfrak{F} \;\; B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Для заданого фільтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ говоримо, що $A, B \in \mathfrak{F}^+$ $\mathfrak{F}$-*майже не перетинаються* (є $\mathfrak{F}$-майже неперетинними), якщо $A \cap B \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$.

Для зручності нами введемо наступні технічні означення.

Означення 2.1. Будемо називати фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ *бідним*, якщо всяка попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинна сім'я $A = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{F}^+$ є не більш, ніж злічённою.

Означення 2.2. Будемо говорити, що вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ є *конгломерованим*, якщо існує неперетинна послідовність $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ така, що для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$ маємо $\bigcup\limits_{n \in M} D_n \in \mathfrak{F}^+$.

В статті [21] автор отримав наступну лему для множин, які майже не перетинаються (говорять, що $A, B \subset \mathbb{N}$ майже не перетинаються, якщо $|A \cap B| < \infty$). Ми отримали аналогічний результат для $\mathfrak{F}$-майже неперетинних множин.

Лема 2.1. *Нехай μ – статистична міра. Тоді фільтр, який задано цією мірою $\mathfrak{F}_\mu =: \mathfrak{F}$ є бідним.*

Наступна теорема є згаданою вище достатньою умовою, що стосується Задачі 1.

Теорема 2.5. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ є конгломерованим, то він не є бідним, а значить, його не можна задати однією статистичною мірою.*

З цієї теореми ми відразу отримуємо, що ані фільтр Фреше, ні фільтр статистичної збіжності, ні фільтр підсумовування не можна задати однією статистичною мірою.

Задача 2. Уточнити Теорему 2.4. Точніше, якою має бути сім'я ультрафільтрів, перетин елементів якої породжує фільтр?

Розв'язком Задачі 2 є наступна теорема.

Теорема 2.6. *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді існує сім'я ультрафільтрів W на $\mathbb{N}$, потужності не більше, ніж континуум і така, що*

$$\mathfrak{F} = \cap W,$$

де $\cap W = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \in U \ \forall U \in W\}$.

Задача 3. Дослідити питання представлення фільтра як перетину сім'ї ультрафільтрів на єдиність.

Розв'язок Задачі 3 складається з наступних теорем.

Теорема 2.7. *Нехай W_1, W_2 – скінченні сім'ї ультрафільтрів на $\mathbb{N}$ такі, що $\cap W_1 = \cap W_2$. Тоді $W_1 = W_2$.*

Тобто, якщо фільтр $\mathfrak{F}$ є перетином скінченної сім'їультрафільтрів, то таке представлення єдине.

Означення 2.3. Сім'ю W вільних ультрафільтрів, яка складається принаймні з двох елементів, будемо називати *мінімальною*, якщо для довільного $\mathfrak{U} \in W$

$$\cap W \neq \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\}).$$

Теорема 2.8. *Нехай $W = \{\mathfrak{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – злічення, мінімальна сім'я вільних ультрафільтрів, $\mathfrak{F} = \cap W$. Тоді існує вільний ультрафільтр $\mathfrak{U}_0$ такий, що $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{F}$, але $\mathfrak{U}_0 \notin W$. Зокрема, представлення фільтру $\mathfrak{F}$ у вигляді перетину зліченного числа ультрафільтрів не єдине: $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_k$ і $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{U}_k$.*

Тобто представлення фільтра у вигляді перетину нескінченного числа ультрафільтрів не є єдиним.

Статистичний фільтр $\mathfrak{F}_s$ породжує статистичний ідеал

$$\mathfrak{I}_s = \{A \subset \mathbb{N} :\ d(A) = 0\}.$$

В роботі [1] автори запропонували узагальнення щільності підмножини $A \subset \mathbb{N}$, яке назвали f-щільністю, де f – модульна функція.

Функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ називають модульною функцією, якщо вона задовольняє наступні аксіоми:

1. $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;

2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^+$;

3. $f(x) \leq f(y)$, якщо $x \leq y$;

4. f – неперервна справа в нулі;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Для заданої модульної функції f f-щільністю множини $A \subset \mathbb{N}$ називають наступну границю

$$d_f(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)}.$$

Якщо f – модульна функція, то f-ідеалом $\mathfrak{I}_f$ називають

$$\mathfrak{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : \ d_f(A) = 0\}.$$

Поняття f-ідеалу вивчають автори роботи [1]. Очевидно, що якщо f – це тотожна функція, то $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$. В статті [1] показано, що для довільної модульної функції f і $A \subset \mathbb{N}$

$$d_f(A) = 0 \Rightarrow d(A) = 0,$$

тобто

$$\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s\,.$$

Ці результати мотивують наступну задачу, поставлену в дисертаційній роботі.

Задача 4. Для яких модульних функцій f має місце рівність $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$?

Нехай f – модульна функція, $t \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Будемо використовувати такі позначення:

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)}, \ g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

Наступна теорема є повним розв'язком Задачі 4.

Теорема 2.9. *Нехай f – модульна функція. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$;
3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$;

Наступна теорема є частковим випадком Теореми 5.1.

Теорема 2.10. *Нехай f – модульна функція. Припустимо, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)}$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} < 1$.

Можна помітити, що описані вище результати пов'язані із властивостями фільтрів та ідеалів. Наступні результати цього підрозділу пов'язані із різними топологічними векторними просторами та використовують їхні особливості.

Нехай X – топологічний векторний простір, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність елементів простору X, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$. Множиною $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності x_n називають

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \{y \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I},\ \forall U \in \mathcal{O}(y)\},$$

де $\mathcal{O}(y)$ – система околів точки y.

У праці [25] автор запропонував наступне означення. Для заданих ідеалу $\mathfrak{I}$ на $\mathbb{N}$, топологічного векторного простору X та послідовності його елементів (x_n) ядром послідовності відносно до ідеалу називають

$$\mathrm{core}_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})} \overline{\mathrm{co}}\{x_n : n \in E\},$$

де $\overline{\mathrm{co}}$ означає замикання опуклої оболонки.

Основним результатом статті [25] є наступна

Теорема 2.11. *Нехай X – локально опуклий топологічний векторний простір, який задовольняє першу аксіому зліченності, $(x_n) \subset X$ – послідовність. Нехай існує такий елемент $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, що $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ – компакт. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}). \tag{3}$$

Задача 5. Узагальнити Теорему 4.1 для просторів, які не обов'язково задовольняють першу аксіому зліченності, тобто не обов'язково можуть бути метризовними.

В Задачі 5 прекрасно видно роль фільтрів при дослідженні неметризовних топологічних векторних просторів.

Першою аксіомою зліченності автор статті [25] користується лише в одній лемі.

Лема 2.2. *Нехай X – топологічний векторний простір зі зліченною базою околів нуля, $x = (x_n) \subset X$ – послідовність елементів. Тоді $\overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}) \subset core_x(\mathfrak{I})$.*

В статті [26] було отримано наступну формулу:

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{\{x(n) : \ n \in A\}}. \tag{4}$$

Проте в умові цього твердження автори використали зайву умову про те, що простір X обов'язково має задовольняти першу аксіому зліченності. Нам вдалося отримати більша загальний результат.

Лема 2.3. *Нехай X – топологічний векторний простір, $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині натуральних чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Тоді*

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{\{x(n) : \ n \in A\}}.$$

Нами було введено наступне поняття.

Означення 2.4. Нехай X – топологічний векторний простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{F}$ – фільтр на множині $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Назвемо послідовність x $\mathfrak{F}$*-асимптотично* K*-контрольовною*, якщо для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(0)$ існує елемент $E = E(K, U) \in \mathfrak{F}$, який залежить від U та K такий, що $x(E) \subset K + U$. Будемо позначати цю умову

$$x \prec_{\mathfrak{F}} K.$$

Наступна теорема є головним результатом статті [22].

Теорема 2.12. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Тоді*

$$\overline{co}\,\Gamma_x(I) = core_x(\mathfrak{I}).$$

Застосовуючи Теорему 4.2 ми отримуємо розв'язок Задачі 5.

Теорема 2.13. *Нехай $x = (x_n)$ – послідовність елементів у локально опукло топологічному векторному просторі X така, що $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого елемента фільтра $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Тоді $core_x(I) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

2.2 Застосування теорії фільтрів до питань функціонального та математичного аналізів

Одним із найважливіших понять функціонального аналізу є поняття повноти топологічного векторного простору.

Нехай X – топологічний векторний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Кажуть, що фільтр $\mathfrak{F}$ є фільтром Коші, якщо для довільного околу нуля U знайдеться такий $A \in \mathfrak{F}$, що $A - A \subset U$, де $A - A$ – різниця Мінковського:

$$A - A = \{a - b : \ a, b \in A\}.$$

Говорять, що топологічний векторний простір X є повним, якщо будь-який фільтр Коші на X має границю (позначаємо $X \in \mathrm{Compl}$). Можна помітити, що означення фільтра Коші дуже схоже за своєю структурою на означення послідовності Коші у метричному просторі.

В статті [1] автори вивчають нормовані простори і розглядають питання зв'язку звичайної повноти простору з повнотою, породженою f-ідеалом $\mathfrak{I}_f$. Для метризовних топологічних векторних просторів всі означення повноти еквівалентні. У неметризовному випадку ситуація суттєво ускладнюється, що є мотивацією наших досліджень в цьому підрозділі.

Задача 6. Дослідити різні типи повноти в загальних топологічних векторних просторах.

Всі наступні результати є розв'язком Задачі 6.

Послідовність $x = (x_n)$ елементів простору X називають послідовністю Коші відносно фільтра $\mathfrak{F}$ на множині натуральних чисел, якщо $x[\mathfrak{F}]$ – фільтр Коші на просторі X, де $x[\mathfrak{F}]$ – фільтр на X, базою якого є сім'я $x(\mathfrak{F}) = \{x(A) : \ A \in \mathfrak{F}\}$.

Нагадаємо, що простір X називають секвенціально повним, якщо якщо кожна послідовність Коші на X має границю.

В роботі [24] було запропоновано наступні визначення поняття повноти топологічних векторних просторів, які використовують специфіку фільтрів.

Означення 2.5. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, X – топологічний векторний простір. Будемо називати простір X *повним відносно фільтру* $\mathfrak{F}$, якщо кожна послідовність Коші відносно фільтру $\mathfrak{F}$ на X має границю відносно $\mathfrak{F}$.

Позначення: $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F})$

Означення 6.1 чудово узгоджується з визначенням повного метричного простору. Достатньо в якості фільтра $\mathfrak{F}$ взяти фільтр Фреше $\mathfrak{FR}$.

Наступна теорема характеризує повноту просторів відносно різних фільтрів.

Теорема 2.14. *(1) Якщо $X \in Compl$, то $X \in Compl(\mathfrak{F})$ для будь-якого фільтру $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.*

(2) Повний топологічний векторний простір є секвенційно повним.

(3) Аби перевірити, що $X \in Compl(\mathfrak{F})$, достатньо перевірити, що кожна послідовність Коші відносно $\mathfrak{F}$ в X має граничну точку відносно $\mathfrak{F}$.

(4) Якщо $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ – фільтри на $\mathbb{N}$ і $X \in Compl(\mathfrak{F}_2)$, то $X \in Compl(\mathfrak{F}_1)$.

(5) Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – функція, і $X \in Compl(\mathfrak{F})$, то $X \in Compl(f[\mathfrak{F}])$.

(6) Якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – ін'єктивна функція, і $X \in Compl(f[\mathfrak{F}])$, то $f \in Compl(\mathfrak{F})$.

Якщо X – нормований простір, f – модульна функція, то говорять, що X є f-повним, якщо кожна f-послідовність Коші є f-збіжною. В статті [27] отримано наступний результат:

Теорема 2.15. *[27] Нехай X – нормований простір. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) X – повний.

(2) X є f-повним, для будь-якої необмеженої модульної функції f.

(3) Існує необмежена модульна функція f така, що X є f-повним.

Нам вдалося поширити цей результат для повноти відносно довільних фільтрів.

Теорема 2.16. *Нехай X – топологічний векторний простір зі зліченною базою нуля. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) X – повний.

(2) $X \in Compl(\mathfrak{F})$ для будь-якого фільтру $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

(3) Існує вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ такий, що $X \in Compl(\mathfrak{F})$.

(4) X є секвенційно повним.

Абсолютно природнім є ще одне визначення повноти простору.

Означення 2.6. Назвемо топологічний векторний простір X *зліченно-повним*, якщо $X \in \mathrm{Compl}$, для всіх фільтрів $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

Означення 2.7. Топологічний векторний простір X назвемо *асимптотично повним*, якщо для будь-якого фільтру Коші $\mathfrak{F}$ на X існує зліченна підмножина $A \subset X$ така, що для будь-яких $U \in \mathcal{O}(0)$ і $B \in \mathfrak{F}$ виконано: $A \cap (B + U) \neq \emptyset$.

Було отримано наступний зв'язок між зліченною повнотою та асимптотичною повнотою.

Теорема 2.17. *Якщо X є асимптотично повним топологічним векторним простором, то його повнота еквівалента його зліченній повноті.*

Теорема 2.18. *Використовуючи аксіому Мартіна, існують вільні ультрафільтри $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ на $\mathbb{N}$ та існує такий топологічний векторний простір X, що $X \in Compl(\mathfrak{U}_1)$, але $X \notin Compl(\mathfrak{U}_2)$,*

Попередні результати є застосуванням теорії фільтрів до задач функціонального аналізу. Наступні результати пов'язані з застосуванням фільтрів до математичного аналізу, а саме, у теорії інтеграла Рімана.

Задача 7. Узагальнити інтеграл Рімана, використовуючи мову фільтрів. Дослідити властивості отриманого об'єкта.

Об'єктом дослідження виступає функція $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ та її інтеграл на цьому відрізку.

Нехай $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ – функція. Позначимо $\Pi = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n = b\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$, тобто,$[a, b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Розглянемо множину точок $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ таких, що для довільного $k \in \{1, ..., n\}$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для $k \in \{1, ..., n\}$ позначимо

$$\Delta_k := |\xi_k - \xi_{k-1}|.$$

Через $\mathrm{TP}\,[0, 1]$ позначимо множину всіх відмічених розбиттів відрізку $[0, 1]$. Для розбиття $(\Pi, T) \in \mathrm{TP}\,[0, 1]$ позначимо

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k.$$

Означення 2.8. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – функція, $\mathfrak{F}$ –фільтр на $\mathrm{TP}\,[0,1]$. Будемо називати функцію f *інтегровною відносно фільтра* $\mathfrak{F}$ (коротше: $\mathfrak{F}$-інтегровною), якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, що

$$I = \lim_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T).$$

Число I при цьому будемо називати *інтегралом функції f відносно фільтра* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-інтегралом функції f). Позначення:

$$I = \int\limits_0^1 f d\mathfrak{F}\;.$$

Якщо функція f є інтегровною відносно фільтра $\mathfrak{F}$, пишемо це $f \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{F})$.

Використовуючи Означення 7.1, можна побудувати інтеграл Рімана таким чином. Нехай $\delta > 0$. Позначимо

$$P_{<\delta} = \{(\Pi, T) \in \mathrm{TP}\,[0,1] : \; d(\Pi) < \delta\}.$$

Розглянемо тепер

$$\mathfrak{B}_{<\delta} = \{P_{<\delta} : \; \delta > 0\}.$$

Нескладно побачити, що $\mathfrak{B}_{<\delta}$ є базою фільтра. Позначимо $\mathfrak{F}_{<\delta}$ фільтр з базою $\mathfrak{B}_{<\delta}$. Нехай тепер $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Ця функція буде інтегровною за Ріманом, якщо $f \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{F}_{<\delta})$, або якщо існує границя $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{<\delta}} S(f, \Pi, T)$.

Тобто, запропоноване Визначення 7.1 є узагальненням раніше відомого інтеграла Рімана.

Наступна теорема показує, що інтегрування функції по фільтру є лінійною операцією.

Теорема 2.19. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* $TP[0,1]$*,* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– функції,* $f, g \in Int(\mathfrak{F})$*,* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$*. Тоді* $(\alpha f + \beta g) \in Int(\mathfrak{F})$*.*

Нами було введено наступну величину. Нехай (Π_1, T_1), (Π_2, T_2) – відмічені розбиття відрізка $[0,1]$. Розглянемо

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = \sum_{t \in T_1 \cap T_2} |\Delta_1(t) - \Delta_2(t)| + \sum_{T_1 \setminus T_2} \Delta_1(t) + \sum_{T_2 \setminus T_1} \Delta_2(t). \quad (5)$$

Твердження 1. ρ *задовольняє всім аксіомам метрики.*

Простіше кажучи, ρ, введене вище – це відстань між відміченими розбиттями.

Означення 2.9. Нехай $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – фільтри на $TP[0,1]$. Будемо говорити, що фільтр $\mathfrak{F}_2$ *ρ-домінує* фільтр $\mathfrak{F}_1$ (позначаємо: $\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і для кожного $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ існує $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ такий, що для всіх $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ існує $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ такий, що $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$.

Теорема 2.20. *Нехай* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ *– фільтри на* $TP[0,1]$*. Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– обмежена функція. Нехай* $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_1} S(f, \Pi, T)$ *і* $\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$*. Тоді* $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_2} S(f, \Pi, T)$

Нам вдалося отримати цікаві результати, пов'язані із інтегруванням необмежених функцій.

Означення 2.10. Нехай $\mathfrak{B}$ – база фільтра на ТР $[0,1]$. Будемо говорити, що база $\mathfrak{B}$ є *точно відміченою*, якщо існує підмножина $A \subset [0,1]$ – строго зростаюча послідовність чисел така, що для довільного $B \in \mathfrak{B}$ і для довільного $(\Pi, T) \in \mathfrak{B}$ виконано $T \cap A = \emptyset$.

Означення 2.11. Говоримо, що фільтр $\mathfrak{F}$ на ТР$[0,1]$ є *точно відміченим*, якщо існує точно відмічена база фільтра $\mathfrak{B}$ для $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.21. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ на ТР$[0,1]$ є точно відміченим, то існує необмежена функція $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ така, що $f \in Int(\mathfrak{F})$.*

Підсумовуючи все вищеописане, ми бачимо що теорія фільтрів – це наука, яка містить велику кількість дуже цікавих, проте відкритих питань. Дослідженню деяких із цих питань присвячено цю дисертаційну роботу

3 Конгломеровані фільтри та статистичні міри

Даний розділ дисертаційної роботи присвячено опису та дослідженню спеціальних класів фільтрів та ультрафільтрів і суміжним питанням, пов'язаним з можливістю задання фільтрів однією статистичною мірою та деяким іншим питанням.

3.1 Введення

Як і всюди в роботі для позначення фільтрів та ультрафільтрів ми використовуємо готичні літери $\mathfrak{F}$ та $\mathfrak{U}$. Нагадаємо, що якщо $\mathfrak{F}$ – це фільтр на множині натуральних чисел, то послідовність $x = (x_n)$ елементів топологічного простору X збігається до елемента $x \in X$, якщо $\{n : \ x_n \in U\} \in \mathfrak{F}$ для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(x)$. Зокрема, для фільтра Фреше $\mathfrak{FR}$ описане означення еквівалентне класичній збіжності послідовності. Фільтр на множині натуральних чисел називають вільним, якщо він містить фільтр Фреше. Далі ми будемо розглядати тільки вільні фільтри та ультрафільтри, якщо не зазначено протилежне.

Нагадаємо одне важливе означення. Невід'ємну скінченно-адитивну міру μ на сім'ї множин $2^{\mathbb{N}}$ називають *статистичною мірою*, якщо $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і $\mu(\{k\}) = 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Ясно, що статистична міра не може бути зліченно-адитивною. Поняття статистичної міри було введено в роботах [2], [8]. *Фільтром, який задано однією статистичною мірою* μ називають сім'ю множин

$$\mathfrak{F}_\mu = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

Найпростішим прикладом статистичної міри є характеристична функція $\mathbb{1}_{\mathfrak{U}}$ деякого вільного ультрафільтра $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$, а саме

$$\mathbb{1}_{\mathfrak{U}}(A) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } A \in \mathfrak{U} \\ 0, \text{ якщо } A \notin \mathfrak{U} \end{cases}.$$

Нескладно перевірити, що така формула дійсно описує статистичну міру. Навпаки, ясно, що будь-який вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$ можна задати однією статистичною мірою.

Зауваження 3.1. Нехай $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність статистичних мір, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність невід'ємних дійсних чисел таких, що $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$. Тоді $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\mu_n$ є статистичною мірою. Зокрема, якщо $\{\mathfrak{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність вільних ультрафільтрів на $\mathbb{N}$, то фільтр

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{U}_n = \{A \subset \mathbb{N} : \ A \in \mathfrak{U}_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

задано статистичною мірою $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{\mathfrak{U}_n}$.

Варто зауважити, що якщо статистична міра μ задовольняє умові

$$\mu(A) \in \{0, 1\}$$

для довільної підмножини $A \subset \mathbb{N}$, то ясно, що $\mu = \mathbb{1}_{\mathfrak{U}}$ для ультрафільтру

$$\mathfrak{U} = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

Окрім наведених вище прикладів, є багато статистичних мір, які можна отримати з теореми Гана-Банаха. Найцікавішим з них є узагальнена банахова границя (див. [20]). Для деяких із цих мір відповідні фільтри не можна задати у вигляді зліченного перетину ультрафільтрів. Дослідженню цього питання присвячено один з підрозділів цієї частини дисертації.

У статті [9] показано, що фільтр Фреше не можна задати однією статистичною мірою. У [21] аналогічний результат отримано для фільтру статистичної збіжності $\mathfrak{F}_{st}$ підмножин натурального ряду з одиничною щільністю.

Стандартним чином, будемо ототожнювати сім'ю $2^{\mathbb{N}}$ натурального ряду з декартовим степенем $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. На $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ будемо розглядати стандартну топологію декартового добутку. У роботі [31], без використання слів "статистична міра" показано, що якщо розглядати фільтр $\mathfrak{F}$, який задано однією статистичною мірою, як підмножину топологічного простору $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, то він не має властивості Бера, тобто, зокрема, не є борелівською підмножиною у $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Оскільки такі фільтри, як $\mathfrak{FR}$, $\mathfrak{F}_{st}$, фільтр Ердеша-Улама, та фільтр підсумовування (про них – нижче докладніше) є борелівськими підмножинами, то їх не можна задати однією статистичною мірою.

Нехай $\mathfrak{F}$ – деякий фільтр на $\mathbb{N}$. *Ідеал*, який відповідає фільтру $\mathfrak{F}$, будемо позначати через $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Докладніше,

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{\mathbb{N} \setminus A : \ A \in \mathfrak{F}\}.$$

Коідеалом $\mathfrak{F}^+$ відповідного фільтра $\mathfrak{F}$ називають сім'ю тих підмножин множини натурального ряду, які не лежать в ідеалі $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, а саме

$$\mathfrak{F}^+ = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{B \in 2^{\mathbb{N}} : \forall A \in \mathfrak{F} \;\; B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, що $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^+$. Наведемо кілька прикладів коідеалів.

1. Для фільтра Фреше $\mathfrak{FR}$ його ідеал $\mathfrak{I}(\mathfrak{FR})$ складається зі скінченних підмножин множини натуральних чисел, а $\mathfrak{FR}^+$ – це множина всіх нескінченних множин.

2. Якщо $\mathfrak{F}_\mu$ – фільтр, який задано однією статистичною мірою μ, то $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}_\mu) = \{A \subset \mathbb{N} : \; \mu(A) = 0\}$, і $\mathfrak{F}_\mu^+ = \{A \subset \mathbb{N} : \; \mu(A) > 0\}$.

Нагадаємо ще кілька понять, необхідних для нас в подальшому. Для $A \in \mathfrak{F}^+$ *слідом* $\mathfrak{F}|_A$ фільтра $\mathfrak{F}$ на A називаємо сім'ю підмножин виду $A \cap B$, де $B \in \mathfrak{F}$. Ця множина є фільтром на A.

Сім'ю підмножин W множини Ω називають *центрованою*, якщо перетин будь-якої скінченної сім'є елементів W не є порожнім. Сім'я W є центрованою тоді і тільки тоді, коли W міститься в деякому фільтрі. Непорожню сім'ю підмножин $\mathfrak{B}$ множини Ω називають *базою фільтра*, якщо $\mathfrak{B}$ не містить порожньої множини і для довільних $A, B \in \mathfrak{B}$ існує $C \in \mathfrak{B}$ такий, що $C \subset A \cap B$. Для заданої бази $\mathfrak{B}$, сім'я множин $\mathfrak{F}$, яка складається з усіх множин, які містять принаймні один елемент бази фільтра $\mathfrak{B}$, називають *фільтр, який задано базою фільтра.*

Будемо позначати через $\overline{n, m}$ множину цілих чисел $\{n, n+1, ..., m\}$. Через $|E|$ позначатимемо кількість елементів множини E. Ми використовуємо символ $\sqcup$ для позначення диз'юнктного об'єднання, тобто коли ми пишемо $D = A \sqcup B$, ми маємо на увазі, що $D = A \cup B$ і $A \cap B = \emptyset$.

Через $P_i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$ ми позначаємо природне відображення проєкції, тобто $P_1(n, m) = n$, $P_2(n, m) = m$.

Ми говоримо, що фільтр $\mathfrak{F}$ є *P-фільтром*, якщо для будь-якої зліченної послідовності $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ елементів фільтра $\mathfrak{F}$ існує елемент $A \in \mathfrak{F}$ такий, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ множина $A \setminus A_n$ є скінченною. Ультрафільтр, який є P-фільтром, називають *P-точкою*.

Ми називаємо фільтр $\mathfrak{F}_1$ *нижчим за фільтр* $\mathfrak{F}_2$ *у сенсі Рудіна-Кейслера* (позначення $\mathfrak{F}_1 \leq_{RK} \mathfrak{F}_2$), якщо існує функція $f : \cup\mathfrak{F}_2 \to \cup\mathfrak{F}_2$ така, що $A \in \mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_2$, де $A \subset \mathbb{N}$.

Ми називаємо фільтр $\mathfrak{F}_1$ *нижчим за фільтр* $\mathfrak{F}_2$ *у сенсі Рудіна-Бласса* (позначення $\mathfrak{F}_1 \leq_{RB} \mathfrak{F}_2$), якщо існує взаємно-однозначна функція $f : \cup\mathfrak{F}_1 \to \cup\mathfrak{F}_2$ така, що $A \in \mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_2$, де $A \subset \mathbb{N}$.

Ми говоримо, що фільтр $\mathfrak{F}_1$ ізоморфний фільтру $\mathfrak{F}_2$ (позначення $\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F}_2$), якщо існує бієкція $f : \cup\mathfrak{F}_2 \to \cup\mathfrak{F}_2$ така, що $A \in \mathfrak{F}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_2$, де $A \subset \mathbb{N}$.

3.2 Бідні фільтри та конгломеровані фільтри

Говорять, що дві множини $A, B \subset \mathbb{N}$ *майже не перетинаються*, якщо

$$|A \cap B| < \infty.$$

Для заданого фільтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ говоримо, що $A, B \in \mathfrak{F}^+$ $\mathfrak{F}$*-майже не перетинаються* (є $\mathfrak{F}$-майже неперетинними), якщо $A \cap B \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Зауважимо, для вільного фільтру $\mathfrak{F}$, якщо множини майже не перетинаються, то вони $\mathfrak{F}$-майже не перетинаються.

Введемо тепер одно з центральних понять даного розділу дисертації.

Означення 3.1. Будемо називати фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ *бідним*, якщо всяка попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинна сім'я $A = \{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathfrak{F}^+$ є не більш, ніж зліченною.

Доведення наступної леми було отримано в роботі [21] для множин, які майже не перетинаються. Далі ми наводимо доведення для множин, які майже $\mathfrak{F}$-перетинаються.

Лема 3.1. *Нехай μ – статистична міра. Тоді фільтр, який задано цією мірою $\mathfrak{F}_\mu =: \mathfrak{F}$ є бідним.*

Доведення. Нехай $A_\gamma \subset \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$ – сім'я $\mathfrak{F}$-майже неперетинних підмножин така, що для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ $A_\gamma \in \mathfrak{F}^+$, тобто $\mu(A_\gamma) > 0$. Зауважимо, що оскільки $\mu(A) = 0$ для всіх $A \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, то має формула скінченної адитивності $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(D_k)$ для довільної сім'ї попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинних множин. Тепер, для всякого $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\Gamma_n = \left\{ \gamma \in \Gamma : \ \mu(A_\gamma) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Тоді, для кожної скінченної підмножини $E \subset \Gamma_n$ маємо наступний ланцюжок нерівностей

$$|E| < n \sum_{\gamma\in E} \mu(A_\gamma) = n\mu(\bigcup_{\gamma\in E} A_\gamma) \le n\mu(\mathbb{N}) = n$$

отже, $|\Gamma_n| < n$. Оскільки $\Gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$, маємо, що Γ є не більш, ніж зліченною.

$\square$

Означення 3.2. Будемо говорити, що вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ є *конгломерованим*, якщо існує неперетинна послідовність $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ така, що для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$ маємо $\bigcup\limits_{n\in M} D_n \in \mathfrak{F}^+$.

Тепер ми готові сформулювати і довести дуже важливу теорему, яка дозволяє відносно просто перевірити, чи можна фіксований фільтр задати однією статистичною мірою.

Теорема 3.1. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ є конгломерованим, то він не є бідним, а отже його не можна задати однією статистичною мірою.*

Доведення. Добре відомо, що множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ містить незліченну сім'ю нескінченних підмножин Γ, які майже не перетинаються. Для кожного $\gamma \in \Gamma$ означимо

$$A_\gamma = \bigcup_{n\in\gamma} D_n,$$

де D_n – множини з означення конгломерованого фільтра. Тоді сім'я $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ є незліченною, попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинною, і $A_\gamma \in \mathfrak{F}^+$ для довільного $\gamma \in \Gamma$. $\square$

Маючи попередню теорему, ми можемо отримати характеризації багатьох фільтрів в термінах статистичних мір.

Наслідок 3.1. *Фільтр Фреше не можна задати однією статистичною мірою.*

Доведення. Достатньо взяти $D_n = \{n\}$. $\square$

Далі ми будемо досліджувати зв'язки між поняттями, які ми ввели вище, з уже відомими класами фільтрів. Почнемо з доведення факту, що всі фільтри, які задовольняють властивості Бера, є конгломерованими.

Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору X має *властивість Бера*, якщо існує відкрита підмножина $B \subset X$ така, що їхня симетрична різниця $A \Delta B$ є множиною першої категорії. Далі, коли ми говоримо про топологічні властивості фільтра $\mathfrak{F}$, ми розглядаємо $\mathfrak{F}$ як підмножину $2^{\mathbb{N}}$ з топологією добутку, де стандартною базою околів множини $A \subset \mathbb{N}$ вважають наступну сім'ю множин

$$U_n(A) = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \cap \overline{1, n} = A \cap \overline{1, n}\}.$$

Далі ми будемо користуватися характеризацією Талагранда.

Теорема 3.2. *[30] Нехай $\mathfrak{F}$ є вільним фільтром на $\mathbb{N}$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. *$\mathfrak{F}$ має властивість Бера;*
2. *існує зростаюча послідовність чисел $k_1 < k_2 < \dots$ така, що $\bigcup\limits_{n \in M} \overline{k_n + 1, k_{n+1}} \in \mathfrak{F}^+$ для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$;*
3. *існують неперетинні скінченні множини $F_1, F_2, \dots$ такі, що $\bigcup\limits_{n \in M} F_n \in \mathfrak{F}^+$ для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$;*
4. *$\mathfrak{F}\mathfrak{R} \leq_{RB} \mathfrak{F}$.*

Теорема 3.3. *Якщо $\mathfrak{F}$ має властивість Бера, то $\mathfrak{F}$ є конгломерованим.*

Доведення. Достатньо взяти означення конгломерованого фільтра і Теорему 3.2. $\square$

Фільтром підсумовування $\mathfrak{F}^s$ називають фільтр, який визначається фіксованою послідовністю невід'ємних дійсних чисел $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} s_k = \infty$, таким чином

$$\mathfrak{F}^s = \{A \subset \mathbb{N} : \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A} s_k < \infty\}.$$

Фільтром Ердеша-Улама $\mathcal{EU}_s$ називають фільтр, який визначається фіксованою послідовністю невід'ємних дійсних чисел $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} s_k = \infty$, таким чином

$$\mathcal{EU}_s = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k\in A\cap[1,n]} s_k}{\sum_{k=1}^{n} s_k} \right\}.$$

Нагадаємо, що сім'я підмножин даного топологічного простору X, які мають властивість Бера, утворюють σ-алгебру, яка містить всі відкриті множини. Отже, всі борелівські множини мають властивість Бера. Всі фільтри, які задано явно нерівностями, скінченною кількістю кванторів зі зліченною кількістю умов, є борелівськими підмножинами в $2^{\mathbb{N}}$. Таким чином, ми отримуємо наступний

Наслідок 3.2. *Стандартні фільтри, такі як фільтр статистичної збіжності $\mathfrak{F}_{st}$, фільтр Ердеша-Улама $\mathcal{EU}_s$, фільтр підсумовування $\mathfrak{F}^s$ є конгломерованими.*

Наслідок 3.3. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ має властивість Бера, то він не може бути заданим однією статистичною мірою.*

3.3 Перетини сімей ультрафільтрів

Для сім'ї $W \subset 2^{\mathbb{N}}$ будемо позначати перетин всіх елементів цієї сім'ї через $\cap W$. Докладніше,

$$\cap W = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \in U \ \forall U \in W\}.$$

Означення 3.3. Сім'я W вільних ультрафільтрів *представляє* фільтр $\mathfrak{F}$, якщо $\mathfrak{F} = \cap W$.

Почнемо цей підрозділ з двох простих лем.

Лема 3.2. *Нехай $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – вільні фільтри на $\mathbb{N}$ такі, що $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді $\mathfrak{F}_2^+ \subset \mathfrak{F}^+$, зокрема, $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}^+$.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{I}(\mathfrak{F}_1) \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F}_2)$, то $\mathfrak{F}_2^+ = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}_2)$ міститься у $2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}_1) = \mathfrak{F}_1^+$. Також ми знаємо, що $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_2^+$. $\square$

Лема 3.3. *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді $A \notin \mathfrak{F}$ тоді і тільки тоді, коли $(\mathbb{N} \setminus A) \in \mathfrak{F}^+$.*

Доведення. Якщо $A \notin \mathfrak{F}$, тоді $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, а отже $(\mathbb{N} \setminus A) \in \mathfrak{F}^+$. Навпаки, якщо $(\mathbb{N} \setminus A) \in \mathfrak{F}^+$, то $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, отже $A \notin \mathfrak{F}$. $\square$

Наступна теорема доповнює добре відомий факт про те, що довільний фільтр є перетином усіх ультрафільтрів, які його містять.

Теорема 3.4. *Нехай* $\mathfrak{F}$ *– вільний фільтр на* $\mathbb{N}$. *Тоді існує сім'я ультрафільтрів* W *на* $\mathbb{N}$, *потужності не більше, ніж континуум і така, що*

$$\mathfrak{F} = \cap W.$$

Доведення. За лемою 3.3, для довільного $A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{F}$ сім'я множин $\{\mathbb{N} \setminus A\} \cup \mathfrak{F}$ є центрованою, а отже існує фільтр $\mathfrak{F}$, який містить $\{\mathbb{N} \setminus A\} \cup \mathfrak{F}$, і, як наслідок, ми можемо вибрати ультрафільтр $\mathfrak{U}_A$ такий, що $(\{\mathbb{N} \setminus A\} \cup \mathfrak{F}) \subset \mathfrak{U}_A$. З іншого боку, $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{U}_A$, і $A \notin \mathfrak{U}_A$. Тоді

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{A \in (2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{F})} \mathfrak{U}_A,$$

значить шукана сім'я W має вид

$$W = \{\mathfrak{U}_A\}_{A \in (2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{F})}.$$

□

Наступна лема уточнює структуру перетину сім'ї фільтрів.

Лема 3.4. *Нехай* $W = \{\mathfrak{F}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *– сім'я вільних фільтрів на* $\mathbb{N}$. *Тоді для довільного* $\gamma \in \Gamma$ *обираючи* $B_\gamma \in \mathfrak{F}_y$, *множина* $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ *є елементом* $\cap W$.

Доведення. Для довільного $j \in \Gamma$ маємо $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \supset B_j$, і $B_j \in \mathfrak{F}_j$, значить, за аксіомою фільтра, $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \in \mathfrak{F}_j$.

□

Наша наступна мета полягає в тому, аби показати, що представлення фільтра у вигляді скінченного перетину ультрафільтрів, якщо існує, є єдиним.

Лема 3.5. *Нехай* $W = \{\mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_n\}$ *– скінченна множина вільних ультрафільтрів на* $\mathbb{N}$*,* $\mathfrak{U}$ *– вільний ультрафільтр такий, що* $\cap W \subset \mathfrak{U}$*. Тоді* $\mathfrak{U} \in W$*.*

Доведення. Нам потрібно знайти такий $k \in \{1, ..., n\}$, що $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_k$. Припустимо, що для жодного $k \in \{1, ..., n\}$ маємо $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}_k$. Це означає, що для довільного $k \in \{1, ..., n\}$ існує $B_k \in \mathfrak{U}_k$ такий, що $B_k \notin \mathfrak{U}$. Оскільки $\mathfrak{U}$ є ультрафільтром, то $(\mathbb{N} \setminus B_k) \in \mathfrak{U}$, для всіх $k \in \{1, ..., n\}$, і, як наслідок,

$$\mathbb{N} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N} \setminus B_k) \in \mathfrak{U}\,.$$

Це значить, що $\bigcup_{k=1}^{n} B_k \notin \mathfrak{U}$. Але, згідно з Лемою 3.4, $\bigcup_{k=1}^{n} B_k \in \cap W \subset \mathfrak{U}$, і ми прийшли до протиріччя. □

Теорема 3.5. *Нехай* W_1, W_2 *– скінченні сім'ї ультрафільтрів на* $\mathbb{N}$ *такі, що* $\cap W_1 = \cap W_2$*. Тоді* $W_1 = W_2$*.*

Доведення. Для довільного $\mathfrak{U} \in W_1$ ми знаємо, що $\mathfrak{U} \supset \cap W_1 = \cap W_2$. За Лемою 3.5 це означає, що $\mathfrak{U} \in W_2$. Отже $W_1 \subset W_2$. Аналогічно можна показати, що $W_2 \subset W_1$. □

Наведемо ще одне корисне поняття.

Означення 3.4. Сім'ю W вільних ультрафільтрів, яка складається принаймні з двох елементів, будемо називати *мінімальною*, якщо для довільного $\mathfrak{U} \in W$

$$\cap W \neq \cap (W \setminus \{\mathfrak{U}\}).$$

Вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ будемо називати min-*представним*, якщо $\mathfrak{F}$ є або ультрафільтром, або для $\mathfrak{F}$ існує мінімальна сім'я ультрафільтрів.

Теорема 3.6. *Для сім'ї W вільних ультрафільтрів наступні умови є еквівалентними:*

1. *W є мінімальною;*
2. *для довільного $\mathfrak{U} \in W$ існує множина $A \in \mathfrak{U}$ така, що для кожного $\mathfrak{V} \in W \setminus \{\mathfrak{U}\}$ маємо $A \notin \mathfrak{V}$.*

Доведення. (2) $\Rightarrow$ (1): ясно, що для довільного $\mathfrak{U} \in W$, якщо існує множина A, яка належить $\mathfrak{U}$ і не належить іншим елементам W, то $\cap W \neq \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\})$, оскільки $\mathbb{N} \setminus A$ належить $\cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\})$, але не $\cap W$.

(1) $\Rightarrow$ (2): якщо деякий $\mathfrak{U} \in W$ не містить елементів, які не належать жодному іншому ультрафільтру з W, тоді $\mathfrak{U} \supset \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\})$. Дійсно, для довільного $A \notin \mathfrak{U}$ маємо $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{U}$, тобто існує $\mathfrak{V} \in W \setminus \{\mathfrak{U}\}$ такий, що $\mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{V}$, тобто $A \notin \mathfrak{V}$, а отже $A \notin \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\})$. □

Теорема 3.5 говорить нам, що будь-яка скінченна сім'я ультрафільтрів є мінімальною, а значить перетин скінченної кількості ультрафільтрів є min-представним. Далі ми докладніше досліджуємо це питання.

Спершу ми покажемо, що не всі фільтри є min-представним.

Лема 3.6. *Нехай $\mathfrak{F}_0$ – вільний фільтр, $\mathfrak{U}$ – вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$ такі, що $\mathfrak{F}_0 \not\subset \mathfrak{U}$. Позначимо $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{U}$. Тоді, для довільного $D \in \mathfrak{F}$ існує $A \in \mathfrak{U}$ і $B \in \mathfrak{F}_0$ такі, що $D = A \sqcup B$. більше того, слід $\mathfrak{F}|_A$ фільтра $\mathfrak{F}$ на A такий самий, як і $\mathfrak{U}|_A$.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{F}_0 \not\subset \mathfrak{U}$, існує $K \in (\mathfrak{F}_0 \setminus \mathfrak{U})$. Позначимо $B := K \cap D$. Ми знаємо, що K і D є елементами $\mathfrak{F}_0$, а отже $B \in \mathfrak{F}_0$. Далі, $K \notin \mathfrak{U}$, значить, за критерієм ультрафільтра, $(\mathbb{N} \setminus K) \in \mathfrak{U}$. Тобто, $D \setminus B = D \setminus K = D \cap (\mathbb{N} \setminus K) \in \mathfrak{U}$, що означає, що $A := D \setminus B$ – це необхідна нам множина.

Для довільного $C \in \mathfrak{U}|_A$ маємо, що $C \sqcup B \in \mathfrak{F}_0 \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, отже $C = A \cap (C \sqcup B) \in \mathfrak{F}|_A$. Таким чином, ми показали, що фільтр $\mathfrak{F}|_A$ мажорує ультрафільтр $\mathfrak{U}|_A$, а значить $\mathfrak{F}|_A = \mathfrak{U}|_A$. □

Теорема 3.7. *Якщо для вільного фільтра $\mathfrak{F}$ існує мінімальне представлення W, то для довільного $\mathfrak{U} \in W$ існує $A \in \mathfrak{U}$ такий, що $\mathfrak{F}|_A = \mathfrak{U}|_A$.*

Доведення. Позначимо $\mathfrak{F}_0 := \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\})$. За мінімальністю W, маємо, що $\mathfrak{F}_0 \not\subset \mathfrak{U}$. Також $\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{U}$. Тоді застосовуємо Лему 3.6 для $D = \mathbb{N}$ і отримуємо, що $A \in \mathfrak{U}$ і $B \in \mathfrak{F}_0$ такі, що $\mathbb{N} = A \sqcup B$ і $\mathfrak{F}|_A = \mathfrak{U}|_A$. □

Остання теорема мотивує введення наступного означення.

Означення 3.5. Будемо називати фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ *екстремально* min-*представимим*, якщо для довільного $A \in \mathfrak{F}^+$ слід $\mathfrak{F}|_A$ не є ультрафільтром.

Зауважимо, що для екстремально min-представимих фільтрів $\mathfrak{F}$ кожне його представлення W має більш ніж один елемент, який є "екстремально не-мінімальним" у наступному сенсі:

$$\mathfrak{F} = \cap(W \setminus \{\mathfrak{U}\}).$$

Теорема 3.8. *Всі борелівські фільтри є екстремально не* min-*представним.*

Доведення. Припустимо, що існує $A \in \mathfrak{F}^+$ такий, що $\mathfrak{F}\,|_A$ є ультрафільтром. Якщо $\mathfrak{F}\,|_A$ є борелівським фільтром, то ми отримаємо протиріччя з тим, що $\mathfrak{F}\,|_A$ є ультрафільтром. Аби побачити, що $\mathfrak{F}\,|_A$ є борелівським, розглянемо неперервну функцію $f : 2^A \to 2^{\mathbb{N}}$, яка діє за правилом $f(B) = B \cup (\mathbb{N} \setminus A)$, для довільної $B \subset A$. Нескладно бачити, що $f^{-1}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}\,|_A$, тобто $\mathfrak{F}\,|_A$ є борелівським, як прообраз борелівської множини під неперервною функцією. □

Наслідок 3.4. *Фільтри* $\mathfrak{F}\mathfrak{R}, \mathcal{EU}_{\int}, \mathfrak{F}^s$ *є екстремально не* min-*представним.*

Твердження 2. *Існує фільтр з властивістю Бера, який не є екстремально не* min-*представним.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{U}$ – ультрафільтр, $\mathfrak{F}$ – фільтр, ідеал якого має вид

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{U}) \times \emptyset = \{B \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ P_1(B) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{U})\}.$$

Такий фільтр не є екстремально min-представимим, оскільки для $A = \mathbb{N} \times \{1\} \in \mathfrak{F}^+$ ми можемо бачити, що $\mathfrak{F}\,|_A$ ізоморфний ультрафільтру $\mathfrak{U}$, тому $\mathfrak{F}\,|_A$ є ультрафільтром на A.

З іншого боку, $\mathfrak{F}$ має властивість Бера. Дійсно, для довільного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$A_n = \overline{1, n} \times \{n\}.$$

Тоді $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – скінченні, неперетинні множини. Нам залишилися помітити, що для кожного нескінченного $M \subset \mathbb{N}$ маємо $\bigcup\limits_{n\in M} A_n \in \mathfrak{F}^+$, оскільки $P_1(\bigcup\limits_{n\in M} A_n \cap (\{n\} \times \mathbb{N})) = \mathbb{N} \notin \mathfrak{I}(\mathfrak{U})$. □

Теорема 3.9. *Для довільного кардинального числа α, яке не перевищує континууму, існує вільний фільтр, який має мінімальне представлення тої самої потужності.*

Доведення. Нехай $\Gamma \subset 2^{\mathbb{N}}$ – сім'я, потужності α, яка складається з попарно майже-неперетинних нескінченних множин. Для довільного $A \in \Gamma$ виберемо ультрафільтр $\mathfrak{U}_A$ такий, що $A \in \mathfrak{U}_A$. Покажемо, що $W = \{\mathfrak{U}_A\}_{A\in\Gamma}$ – мінімальна сім'я ультрафільтрів (яка представляє фільтр $\mathfrak{F} = \cap W$). Дійсно, для кожного $B \in \Gamma$ і для довільного $A \in (\Gamma \setminus \{B\})$, $B \in \mathfrak{U}_B$ і $B \notin \mathfrak{U}_A$. За Теоремою 3.6, W є мінімальним представленням $\mathfrak{F}$. □

Теорема 3.10. *Нехай $W = \{\mathfrak{U}_k\}_{k=1}^n$ – скінченна або зліченна мінімальна сім'я вільних ультрафільтрів, де $n \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$, $n \geq 2$, $\mathfrak{F} = \cap W$. Тоді*

1. *існує розбиття множини $\mathbb{N}$ у сім'ю неперетинних множин $\{N_k\}_{k=1}^n$ так, що для всіх k $N_k \in \mathfrak{U}_k$.*
2. *Множина $A \subset \mathbb{N}$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$ тоді і тільки тоді, коли існує сім'я $\{A_k\}_{k=1}^n$ така, що $A_k \in \mathfrak{U}_k$, $A_k \subset N_k$ і $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.*

Доведення. Для доведення пункту (1) спершу застосуємо Теорему 3.6 і для кожного k знайдемо множини $B_k \in \mathfrak{U}_k$ такі, що $B_k \notin \mathfrak{U}_j$, якщо $j \neq k$. В разі необхідності, замінюючи B_1 на $B_1 \cup (\mathbb{N} \setminus \bigcup\limits_{k=2}^{n} B_k)$ можемо припустити, що $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \mathbb{N}$. Потрібні множини $\{N_k\}_{k=1}^n$ беремо у вигляді $N_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{j<k} B_j$.

Перейдемо до пункту (2). Аби отримати імплікацію в один бік, ми будемо застосовувати Лему 3.4. Імплікацію в інший бік можна отримати, обираючи $A \in \mathfrak{F}$, і визначаючи $A_k \in \mathfrak{U}_k$ таким чином: $A_k = A \cap N_k$. $\square$

Наступний наслідок доповнює Лему 3.4 у випадку перетину скінченного сімей ультрафільтрів.

Наслідок 3.5. *Нехай $W = \{\mathfrak{U}_k\}_{k=1}^n$, $n \geq 2$ – скінченна множина вільних ультрафільтрів, $\mathfrak{F} = \cap W$. Тоді існує неперетинне розбиття $\{N_k\}_{k=1}^n$ множини натуральних чисел таке, що $N_k \in \mathfrak{U}_k$ для всіх $k \in \{1, ..., n\}$, і яке задовольняє умові: множина $A \subset \mathbb{N}$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$ тоді і тільки тоді, коли $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, для деяких $A_k \in \mathfrak{U}_k$, де $A_k \subset N_k$, $k = 1, ..., n$.*

Доведення. Кожна скінченна сім'я ультрафільтрів є мінімальною за Теоремою 3.5, отже можемо застосувати Теорему 3.10. $\square$

Конструкції, описані в Теоремі3.10 для скінченного n та $n = \infty$ виглядають схожим чином. Тим не менше, нескінченний випадок втрачає деякі хороші властивості, в порівнянні зі скінченним випадком, що відображено у наступній теоремі.

Теорема 3.11. *Нехай $W = \{\mathfrak{U}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ – зліченна, мінімальна сім'я вільних ультрафільтрів, $\mathfrak{F} = \cap W$. Тоді існує вільний ультрафільтр $\mathfrak{U}_0$ такий, що $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{F}$, але $\mathfrak{U}_0 \notin W$. Зокрема, представлення фільтру $\mathfrak{F}$ у вигляді перетину зліченного числа ультрафільтрів не єдине: $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_k$ і $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{U}_k$.*

Доведення. Виберемо множини N_k, як в Теоремі 3.10, і розглянемо таку сім'ю множин

$$G = \{A \subset \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N} \ \ \forall k > j \ A \cap N_k \in \mathfrak{U}_k\}.$$

Ясно, що $G \supset \mathfrak{F}$. Покажемо, що

1. сім'я G є фільтром;

2. $\mathfrak{U}_k \not\supset G$, для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Доведемо пункт (1), перевіряючи аксіоми фільтра:

- $\emptyset \notin G$, оскільки для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\emptyset \notin \mathfrak{U}_k$;

- нехай $A, B \in G$. Нам треба показати, що $A \cap B \in G$. Оскільки $A, B \in G$, то існує $j_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $A \cap N_k \in \mathfrak{U}_k$ для всіх $k > j_1$, і існує $j_2 \in \mathbb{N}$ такий, що $B \cap N_k \in \mathfrak{U}_k$ для всіх $k > j_2$. Позначимо $j := \min\{j_1, j_2\}$. Використовуючи j очевидно, що $A \cap B \in G$;

- нехай $A \in G$, $A \subset D$. Покажемо, що $D \in G$. Ми знаємо, що $A \in G$, значить існує $j_1 \in \mathbb{N}$ такий, що $A \cap N_k \in \mathfrak{U}_k$ для всіх $k > j_1$. Оскільки $D \supset A \supset A \cap N_k$, $A \cap N_k \in \mathfrak{U}_k$, і $\mathfrak{U}_k$ – ультрафільтр, то ми маємо, що $D \in \mathfrak{U}_k$, для всіх $k > j_1$. Тобто $D \in G$. Перевірку закінчено, G дійсно є фільтром.

Аби перевірити твердження (2), достатньо зауважити, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ відповідний $A_k = \bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty} N_j \in G$, але $A_k \notin \mathfrak{U}_k$, оскільки A_k не перетинається з $N_k \in \mathfrak{U}_k$.

В якості $\mathfrak{U}_0$ виберемо довільний ультрафільтр, який мажорує G. Тоді $\mathfrak{U}_0 \supset G \supset \mathfrak{F}$ і $\mathfrak{U}_k \neq \mathfrak{U}_0$, для довільного $k \in \mathbb{N}$, оскільки для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{U}_k \not\supset G$ і $\mathfrak{U}_0 \supset G$. $\square$

Не зважаючи на те, що нескінченне представлення не є єдиним, МІНІМАЛЬНЕ представлення, якщо існує, має бути єдиним. Ми це покажемо в одній з наступних теорем.

Означення 3.6. Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр і $\mathfrak{U}$ – вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Будемо називати $\mathfrak{U}$ *невідворотним* для $\mathfrak{F}$, якщо довільне представлення W фільтра $\mathfrak{F}$ містить $\mathfrak{U}$ як елемент.

З Леми 3.6 ми отримуємо, що якщо $\mathfrak{U}$ є невідворотним для $\mathfrak{F}$, то тоді існує $A \in \mathfrak{U}$ такий, що слід $\mathfrak{F}\,|_A$ такий самий, як і слід $\mathfrak{U}\,|_A$. Обернене твердження також вірне.

Лема 3.7. *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр і $\mathfrak{U}$ – вільний ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Припустимо, що існує $A \in \mathfrak{U}$ такий, що $\mathfrak{F}\,|_A = \mathfrak{U}\,|_A$. Тоді $\mathfrak{U}$ – невідворотний для $\mathfrak{F}$.*

Доведення. Нехай $\cap W$ – довільне представлення для $\mathfrak{F}$, і A – як в умові леми. Тоді $\mathbb{N} \setminus A \notin A$ (інакше $\emptyset \in \mathfrak{F}\,|_A = \mathfrak{U}\,|_A$), отже існує $\tilde{\mathfrak{U}} \in W$ такий, що $\mathbb{N} \setminus A \notin \tilde{\mathfrak{U}}$. Оскільки $\tilde{\mathfrak{U}}$ – ультрафільтр, то $A \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Тобто $\tilde{\mathfrak{U}}|_A \subset \mathfrak{F}\,|_A = \mathfrak{U}\,|_A$. Отже $\mathfrak{U}\,|_A$ є базою для $\mathfrak{U}$ і для $\tilde{\mathfrak{U}}$ одночасно, отже $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}$. $\square$

Теорема 3.12. *1. Якщо W є мінімальною сім'єю вільних фільтрі і $\mathfrak{F} = \cap W$, то довільний $\mathfrak{U} \in W$ є невідворотним для $\mathfrak{F}$.*

2. $\mathfrak{F}$ не має жодного мінімального представлення, окрім W.

Доведення. Пункт (1) випливає з Теореми 3.7 і Леми 3.7.

Пункт (2) очевидно випливає з пункту (1). □

3.4 Висновки до розділу

Розділ присвячено вивченню деяких властивостей фільтрів та ультрафільтрів. А саме

- Нами досліджено клас фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою. Статистичною мірою називають невід'ємну скінченно-адитивну міру на сім'ї всіх підмножин натурального ряду таку, що $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і $\mu(\{k\}) = 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Кажуть, що фільтр можна задати однією статистичною мірою μ, якщо його елементами є такі множини $A \subset \mathbb{N}$, що $\mu(A) = 1$.

- Введено поняття бідного фільтра та конгломерованого фільтра, які дозволяють отримати просту достатньою умову того, що фільтр не можна задати однією статистичною мірою.

- На основі отриманого результату було показано, що такі фільтри, як фільтр Фреше, фільтр статистичної збіжності, фільтр Ердеша-Улама, фільтр підсумовування – є фільтрами, які не можна задати однією статистичною мірою.

- Було уточнено відомий факт про те, що будь-який фільтр може бути представлено у вигляді перетину всіх ультрафільтрів, які його містять.

Точніше, було доведено, що фільтр на множини натуральних чисел можна записати як перетин сім'ї ультрафільтрів, яка має потужність не більше, ніж континуум.

- Розв'язано питання єдиності представлення фільтра у вигляді перетину сім'ї ультрафільтрів. Показано, що якщо фільтр є перетином скінченного числа ультрафільтрів, то таке представлення єдине. Якщо ж фільтр є перетином нескінченного числа ультрафільтрів, то таке представлення не унікальне.

Результати розділу висвітлено в роботі [23].

4 Ідеали, ядра відносно до ідеалів, граничні точки ідеалів

4.1 Базові означення та попередні результати

Нагадаємо, що ідеалом на множині $\mathbb{N}$ називають сім'ю підмножин $\mathfrak{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, яка задовольняє наступним аксіомам:

1. $\emptyset \in \mathfrak{I}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{I}$, то $A \cup B \in \mathfrak{I}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{I}$ і $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{I}$.

Якщо $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині $\mathbb{N}$, то *фільтром, який задано ідеалом* $\mathfrak{I}$ називають таку сім'ю множин:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{I}) = \{A \subset \mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{I}\}.$$

Нехай X – топологічний простір, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ – послідовність елементів простору X. Для будь якого $y \in X$ позначимо через $\mathcal{O}(y)$ систему околів точки y. *Множиною* $\mathfrak{I}$*-граничних точок послідовності* x називають

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \{y \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I},\ \forall U \in \mathcal{O}(y)\}.$$

Зауваження 4.1. Для простоти, аби позначити нескінченну послідовність елементів $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ будемо писати просто (x_n).

P. Leonetti у роботі [25] ввів наступне поняття. Нехай задано X – топологічний векторний простір, послідовність $x = (x_n) \subset X$ і ідеал $\mathfrak{I}$ на множині $\mathbb{N}$. Тоді *ядром послідовності відносно до ідеалу* називають наступну множину:

$$\operatorname{core}_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})} \overline{\operatorname{co}}\{x_n : n \in E\},$$

де $\overline{\operatorname{co}}$ означає замикання опуклої оболонки.

Сформулюємо тепер основний результат статі [25].

Теорема 4.1. *Нехай X – локально опуклий топологічний векторний простір, який задовольняє першій аксіомі зліченності, $(x_n) \subset X$ – послідовність. Нехай існує такий елемент $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, що $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ – компакт. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}). \tag{6}$$

Головною метою цього розділу є узагальнення результату P. Leonetti для просторів, які не обов'язково задовольняють першій аксіомі зліченності. У розділі 4.2 ми покажемо, що поняття множини $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності x дуже добре узгоджується із відомим поняттям множини граничних точок відображення відносно фільтра $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$. Використовуючи цей факт, ми покажемо, що у довільному топологічний векторний простір правильною є наступна формула

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{\{x(n) :\ n \in A\}}. \tag{7}$$

Цей результат було встановлено в [[26], Теорема 4.2], але із використанням надлишкової умови про те, що простір має задовольняти перший аксіомі зліченності.

Для доведення Теореми 4.1 умову про задоволення першої аксіоми зліченності використано тільки в наступній лемі.

Лема 4.1. *Нехай X – топологічний векторний простір зі зліченною базою околів нуля, $x = (x_n) \subset X$ – послідовність елементів. Тоді $\overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}) \subset core_x(\mathfrak{I})$.*

4.2 $\mathfrak{I}$-граничні точки та граничні точки фільтра $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$

Наведемо доведення однієї простої леми, яка є добре відомим фактом у теорії фільтрів.

Лема 4.2. *Нехай $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині $\mathbb{N}$. Тоді*

$$2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I} = \{B \subset \mathbb{N} : \forall A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\ B \cap A \neq \emptyset\}.$$

Доведення. Переходячи до доповнення в умові теореми, будемо доводити наступну рівність:

$$\mathfrak{I} = \{B \subset \mathbb{N} : \exists A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I}) : B \cap A = \emptyset\}.$$

Справді, нехай $B \in \mathfrak{I}$. Тоді позначимо $A := \mathbb{N} \setminus B$. Очевидно, що $A \in \mathfrak{F}$ і $A \cap B = \emptyset$. Отже ми довели включення $\mathfrak{I} \subset \{B \subset \mathbb{N} : \exists A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I}) : B \cap A = \emptyset\}$. Далі розглянемо довільну множину $B \in 2^{\mathbb{N}}$ таку, що існує $A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ для якого $A \cap B = \emptyset$. Це означає, що $B \subset \mathbb{N} \setminus A \in \mathfrak{I}$.

$\square$

Нехай $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, X – топологічний векторний простір, $x = (x_n) \subset X$ – послідовність елементів простору X. Ми можемо розглядати послідовність x як функцію, яка діє на просторі X у множину $\mathbb{N}$. Далі для зручності будемо використовувати такі позначення. Нехай $E \subset X$. Тоді $x(E) := \{x_n : n \in E\}$. Сім'я множин $x(\mathfrak{F}) = \{x(A) : A \in \mathfrak{F}\}$ не утворює фільтру, проте утворює базу фільтра, тому позначимо $x[\mathfrak{F}]$ – фільтр, який своєю базою має сім'ю множин $x(\mathfrak{F})$, тобто

$$x[\mathfrak{F}] = \{B \subset X : \exists E \in \mathfrak{F} : B \supset x(E)\}.$$

Точку $y \in X$ називають *граничною точкою відображення x відносно фільтра $\mathfrak{F}$*, якщо для будь-якого $U \in \mathcal{O}(y)$ і для будь-якого $A \in \mathfrak{F}$ маємо $U \cap x(A) \neq \emptyset$, тобто якщо будь-який окіл точки y перетинає всі образи елементів фільтра $\mathfrak{F}$ під дією відображення x. Множину усіх граничних точок фільтра $x[\mathfrak{F}]$ позначають $\mathrm{LIM}(x[\mathfrak{F}])$. Відомо, що

$$\mathrm{LIM}(x[\mathfrak{F}]) = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{x(A)}. \tag{8}$$

Ця рівність є досить очевидною, бо той факт, що будь-яка множина виду $x(E)$ з $E \in \mathfrak{F}$ перетинає всі околи заданої точки $x \in X$ є еквівалентним тому, що x належить замиканню будь-якої множини $x(E)$, де $E \in \mathfrak{F}$.

Наступна лема є обіцяним посиленням Теореми 4.2 статті [26].

Лема 4.3. *Нехай X – топологічний векторний простір, $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині натуральних чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів* *простору X. Тоді* $\Gamma_x(\mathfrak{I}) = LIM(x[\mathfrak{F}])$. *Зокрема це означає, що*

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} \overline{x(A)}.$$

Доведення. За означенням множини $\mathfrak{I}$-граничних точок, точка $x \in \Gamma_x(\mathfrak{I})$ тоді і тільки тоді, коли $\{n : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I}$ для будь-якого околу U точки x. Це еквівалентно тому, що для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(x)$ прообраз $x^{-1}(U) \notin \mathfrak{I}$. Згідно до Леми 4.2 ця умова еквівалента тому, що для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(x)$ і для будь-якого елемента фільтра $A \in \mathfrak{F}$ перетин $x^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset$. Використовуючи формулу $x(x^{-1}(U) \cap A) = U \cap x(A)$, остання формула еквівалента тому, що $U \cap x(A) \neq \emptyset$ для будь-яких $A \in \mathfrak{F}$ і $U \in \mathcal{O}(x)$. □

Лема 4.4. *Нехай X – топологічний векторний простір, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Тоді* $\overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}) \subset core_x(\mathfrak{I})$.

Доведення. Об'єднуючи результат Леми 4.3 і означення $\mathrm{core}_x(\mathfrak{I})$, отримуємо

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} \overline{x(A)} \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} \overline{\mathrm{co}}\, x(A) = \mathrm{core}_x(\mathfrak{I}).$$

Оскільки права частина отриманого включення є замкненою та опуклою множиною, ми отримуємо обіцяну формулу. □

4.3 Використання умови компактності

Почнемо даний розділ з однієї простої леми.

Лема 4.5. *Нехай X – топологічний векторний простір, $D \subset X$ – підмножина, $\overline{D}$ – замикання множини X. Тоді для будь-якого елементу*

$V \in \mathcal{O}(0)$ *правильним є наступне:*

$$\overline{D} \subset D + V, \tag{9}$$

$$\bigcap_{U \in \mathcal{O}(0)} (D + U + U) = \overline{D}. \tag{10}$$

Доведення. Почнемо з першого включення. Для будь-якого $x \in \overline{D}$ множина $(x - V)$ є околом x, тому існує $d \in D \cap (x - V)$. Тоді $x - d \in V$, звідки випливає, що $x = d + (x - d) \in D + V$. Включення (9) доведено. Перейдемо тепер до доведення рівності (10). Зауважимо, що включення $\bigcap_{U \in \mathcal{O}(0)} (D + U + U) \supset \overline{D}$ можна отримати з (9), взявши $V := U + U$. Тому нам залишається довести $\bigcap_{U \in \mathcal{O}(0)} (D + U + U) \subset \overline{D}$. Перейшовши до доповнення, ми будемо доводити, що для кожного $x \in X \setminus \overline{D}$ маємо наступне: $x \notin \bigcap_{U \in \mathcal{O}(0)} (D + U + U)$.

Дійсно, множина $X \setminus \overline{D}$ є околом вектора x, тому $(x - (X \setminus \overline{D})) \in \mathcal{O}(0)$. Тобто існує $W \in \mathcal{O}(0)$ такий, що $W + W \subset (x - (X \setminus \overline{D}))$. Тоді

$$\bigcap_{U \in \mathcal{O}(0)} (D + U + U) \subset D + W + W \subset D + (x - (X \setminus \overline{D})).$$

нам залишилось помітити, що x не може бути записаним у виді $x = d + (x - y)$, де $d \in D$ і $y \notin D$. $\square$

Введемо тепер одне важливе поняття.

Означення 4.1. Нехай X – топологічний векторний простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{F}$ – фільтр на множині $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Назвемо послідовність x $\mathfrak{F}$*-асимптотично* K*-контрольовною*, якщо для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(0)$ існує елемент $E = E(K,U) \in \mathfrak{F}$, який залежить від U та K такий, що $x(E) \subset K+U$. Будемо позначати цю умову

$$x \prec_{\mathfrak{F}} K.$$

Лема 4.6. *Нехай X – топологічний векторний простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Тоді $\Gamma_x(\mathfrak{I}) \neq \emptyset$ і $\overline{K} \supset \Gamma_x(\mathfrak{I})$. Зазначимо, що у випадку гаусдорфового простору $\overline{K} = K$, то останнє включення має вид $K \supset \Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

Доведення. Для початку помітимо, що згідно до включення (9), $\overline{x(E(K,U))} \subset \overline{K+U} \subset K+U+U$ для кожного $U \in \mathcal{O}(0)$. Тому

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E\in\mathfrak{F}} \overline{x(E)} \subset \bigcap_{U\in\mathcal{O}(0)} \overline{x(E(K,U))} \subset \bigcap_{U\in\mathcal{O}(0)} (K+U+U) = \overline{K}.$$

Розглянемо наступну сім'ю підмножин

$$G = \{K \cap (x(A)+U) : A \in \mathfrak{F},\ U \in \mathcal{O}(0)\}.$$

Зауважимо, що усі ці множини не є порожніми. Дійсно, нехай $W := -U \in \mathcal{O}(0)$. Згідно з умовою $x \prec_{\mathfrak{F}} K$ існує $B \in \mathfrak{F}$ такий, що $x(B) \subset K+W$. Оскільки $B \cap A \neq \emptyset$, існує $n \in B \cap A$ такий, що $x_n \in K+W$. Візьмемо $x \in K$ і $w \in W$ такі, що $x_n = z+w$. Тоді $z = x_n - w \in x(A)+U$, отже $z \in K \cap (x(A)+U)$.

Сім'я G формує базу фільтра на K. Позначимо $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(G)$ – фільтр на K, який задано базою фільтра G. Оскільки K – компакт, то $\mathfrak{G}$ має граничну точку $z \in K$. Покажемо, що $z \in \Gamma_x(\mathfrak{I})$. за лемою (4.3) нам треба показати, що $(z+A) \cap x(A) \neq \emptyset$ для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(0)$ і $A \in \mathfrak{F}$.

Дійсно, візьмемо $W \in \mathcal{O}(0)$ такий, що $W - W \subset U$. Умова $z \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{G})$ означає, що $(z + W) \cap (x(A) + W) \neq \emptyset$. Візьмемо довільну $s \in (z + W) \cap (x(A) + W)$. Ця точка має два представлення $s = z + w_1$ і $s = x_n + w_2$, де $w_1, w_2 \in W$ і $n \in A$. Отже, $x_n = s - w_2 = z + w_1 - w_2 \subset z + W - W \subset z + U$, звідки отримуємо $z \in \Gamma_x(\mathfrak{I})$.

$\square$

Основним результатом даного розділу є наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Тоді*

$$\overline{co}\,\Gamma_x(I) = core_x(\mathfrak{I}),$$

до того ж, обидві множини не є порожніми.

Доведення. Завдяки лемам (4.4) і 4.6) нам достатньо довести тільки включення

$$\overline{\mathrm{co}}\,\Gamma_x(I) \supset \mathrm{core}_x(\mathfrak{I}).$$

Візьмемо до уваги той факт, що $\overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$ є замкненою та опуклою множиною, і використаємо теорему Гана-Банаха в геометричній формі: нам треба показати, що для будь-якого ненульового лінійного функціонала $f : X \to \mathbb{R}$ і для довільного $\alpha \in R$ такого, що

$$\sup\{f(y) : \; y \in \overline{\mathrm{co}}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})\} = \sup\{f(y) : \; y \in \Gamma_x(\mathfrak{I})\} < \alpha$$

наступна умова є правильною:

$$\sup\{f(z): \ z \in \mathrm{core}_x(\mathfrak{I})\} \leq \alpha.$$

Будемо доводити від супротивного. Припустимо, що існує $s \in \mathrm{core}_x(\mathfrak{I})$ і $\beta > \alpha$ з $f(s) > \beta$. Це означає, що $\sup\{f(x_n): \ n \in E\} > \beta$ для будь-якого $E \in \mathfrak{F}$. Відповідно, $\{n : \ f(x_n) > \beta\} \cap E \neq \emptyset$ для довільного $E \in \mathfrak{F}$. Позначимо $f_{>t} := \{y \in X : \ f(y) > t\}$.

Розглянемо сім'ю G_1 підмножин K:

$$G_1 = \{K \cap (x(A) + U) \cap f_{>\alpha} : \ A \in \mathfrak{F}, \ U \in \mathcal{O}(0)\}.$$

Покажемо, що ці підмножини не є порожніми. Позначимо $H := f^{-1}(\alpha - \beta, \beta - \alpha)$. Розглянемо $W = (-U) \cap H \in \mathcal{O}(0)$. Згідно з умовою $x \prec_{\mathfrak{F}} K$, існує $B \in \mathfrak{F}$ такий, що $x(B) \subset K + W$. Ми знаємо, що $B \cap A \cap \{n : \ f(x_n) > \beta\} \neq \emptyset$. Розглянемо деякий $m \in B \cap A \cap \{n : f(x_n) > \beta\}$, тоді, зокрема, $x_m \in x(B) \subset K + W$. Візьмемо $z \in K$ і $w \in W$ такі, для яких $x_m = z + w$. Тоді $z = x_m - w \in x(A) + U$ і $f(z) = f(x_m) - f(w) > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha$, so $z \in K \cap (x(A) + U) \cap f > \alpha$.

Сім'я G_1 є базою фільтра на K. Позначимо $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1(G_1)$. Компактність множини K гарантує нам існування граничної точки $z_1 \in K$ фільтра $\mathfrak{G}_1$. З означення бази G_1 ми можемо отримати, що $f(z) \geq \alpha$. Поглянувши на G та $\mathfrak{G}$ з доведення леми (4.6), ми бачимо, що кожен елемент сім'ї G містить елементи сім'ї G_1, отже $\mathfrak{G}_1$ мажорує $\mathfrak{G}$. Звідси ми отримуємо, що гранична точка z фільтру $\mathfrak{G}_1$ також є граничною точкою $\mathfrak{G}$, значить, $z \in \Gamma_x(\mathfrak{I})$. Отже,

$$\sup\{f(y):\ y \in \Gamma_x(\mathfrak{I})\} \geq f(z) \geq \alpha,$$

що суперечить початковому припущенню.

$\square$

4.4 Застосування отриманих результатів

Спершу помітимо, що якщо $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого елементу $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, тоді $x \prec_{\mathfrak{F}} K$ для компакту $K := \overline{x(E)}$.

Таким чином, теорема (4.2) дає нам результат, який було анонсовано у вступній частині даного розділу.

Наслідок 4.1. *(Посилення теореми 2.2 статті [25]) Нехай $x = (x_n)$ – послідовність елементів у локально опукло топологічному векторному просторі X така, що $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого елемента фільтра $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Тоді $core_x(I) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

Далі, розглянемо Теорему 4.2 у контексті слабкої топології. З теореми Гана-Банаха можемо отримати, що якщо A – опукла підмножина локального опуклого простору X, то замикання множини A в стандартній топології і в слабкій топології є однаковими. З цієї причини, якщо у теоремі (4.2) перейти до слабкої топології, ядро $\mathrm{core}_x(\mathfrak{I})$ не зминиться. Тому ми можемо замінити умови теореми (4.2) на більш слабкі і отримати наступний

Наслідок 4.2. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт у слабкій топології, $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині натуральних чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$,*

$x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X таких, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Позначимо $\Gamma_x^w(\mathfrak{I})$ – множину $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності у слабкій топології. Тоді

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x^w(\mathfrak{I}),$$

і обидві множини не є порожніми. Зокрема, написана вище формула матиме силу за умови, що $\overline{co}\,x(E)$ є слабким компактом для деякого $E \in \mathfrak{F}$.

Зауважимо, що у скінченновимірному гаусдорфовому просторі існують компакті околи нуля. Тому для компакту $U \in \mathcal{O}(0)$ множина $K + U$ з означення 4.1 є також компактом. Отже, у скінченно-вимірному просторі умова $x \prec_{\mathfrak{F}} K$ з теореми (4.2) рівносильна умові існування такого елемента фільтра $E \in \mathfrak{F}$, що $\overline{x(E)}$ є компактом.

У наступному прикладі ми покажемо, що у нескінченно-вимірних просторах такої еквівалентності немає.

Приклад 4.1. Нехай $X := \ell_2$ у слабкій топології, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$ таких множин, які мають нульову натуральну щільність: $A \in \mathfrak{I}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{k \in A : \ k \le n\}|}{n} = 0,$$

де $|M|$ – кількість елементів множини M.

Нехай e_n – елементи канонічного ортонормованого базису простору ℓ_2. Позначимо $x_n = a_n e_n$, де $a_n \in (0, +\infty)$, $a_n = \overline{o}(\sqrt{n})$, і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Тоді послідовність (x_n) має такі властивості:

- x збігається до 0 у просторі X відносно фільтра $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$;
- $x \prec_{\mathfrak{F}} K$ для найпростішого компакту $K = \{0\}$;
- для будь-якого $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ множина $\overline{x(E)}$ є необмеженою, а отже не є компактом.

4.5 Висновки до розділу

Даний розділ було присвячено дослідженню ідеалів на множині натуральних чисел. Зокрема, було отримано такі результати:

1. Було посилено результат, отриманий автором в роботі [25], а саме: було доведено, що якщо $\mathfrak{F}$ – фільтр на множині натуральних чисел, (x_n) – послідовність елементів локально опуклого топологічного векторного простору X така, що замикання $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$, то $\operatorname{core}_x(I) = \overline{\operatorname{co}}\, \Gamma_x(\mathfrak{I})$. Посилення полягає в тому, що оригінальний результат містив додаткову умову на простір X: він мав задовольняти першій аксіомі зліченності. Нам вдалося отримати більш сильний результат, який не використовує цієї додаткової умови.

2. Було введено нове поняття $\mathfrak{F}$-асимптотичної K-контрольованості, яке пов'язане зі збіжністю послідовності та її граничними точками. Це поняття було введено для отримання центрального результату розділу, а саме Теореми 4.2, одним із наслідків якої і є посилення роботи [25].

3. Наприкінці розділу отримані результати розглянуто в просторах із слабкою топологією. У Наслідку 4.2 показано, що результат, отрима-

ний в Теоремі 4.2 майже дослівно переноситься для компактів у слабкій топології.

Результати розділу висвітлено у статті [22].

5 Статистичний ідеал та модульні функції

5.1 Модульна функція

В цій частині дисертаційної роботи ми розглядатимемо ідеали на множині натуральних чисел. Якщо $\mathfrak{I}$ це ідеал на $\mathbb{N}$, то ми також припускаємо, що він містить сім'ю скінченних підмножин множини натуральних чисел.

Нехай $A \subset \mathbb{N}$ – непорожня множина. Позначимо

$$\alpha_A(n) := |A \cap [1, n]|,$$

де $|M|$ – кількість елементів підмножини $M \subset \mathbb{N}$. *Натуральною щільністю множини* A називають наступну величину

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_A(n)}{n}.$$

Зрозуміло, що цю величину визначено не для кожної підмножини множини $\mathbb{N}$. Тому також використовують *верхню натуральну щільність множини* A

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_A(n)}{n},$$

і *нижню натуральну щільність множини* A

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha_A(n)}{n},$$

де $\limsup$ і $\liminf$ відповідно позначають верхню границю та нижню границю. Наведемо декілька прикладів множин та їх щільностей.

1. Очевидно, що якщо A – скінченна множина, то $d(A) = 0$;
2. $2\,\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ – множина парних чисел. Тоді $d(2\,\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$;
3. $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$ – множина простих чисел. В цьому випадку $d(\mathbb{P}) = 0$.

Нагадаємо тепер одне з найважливіших понять цього розділу. *Статистичним ідеалом* $\mathfrak{I}_s$ називають сім'ю таких підмножин натуральних чисел, які мають нульову натуральну щільність, тобто

$$\mathfrak{I}_s = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}.$$

Статистичний ідеал пов'язаний із надзвичайно важливим видом збіжності, а саме статичною збіжністю. З цим поняттям ми познайомимось більш докладно в наступних розділах. А зараз звернемо свою увагу до одного узагальнення натуральної щільності, яке ввели автори статті [1].

Функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ називають *модульною функцією*, якщо вона задовольняє наступним аксіомам:

1. $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
2. $f(x + y) \le f(x) + f(y)$, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^+$;
3. $f(x) \le f(y)$, якщо $x \le y$;
4. f – неперервна справа в нулі;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Нехай $A \subset \mathbb{N}$, f – модульна функція. *f-щільністю множини A* називають наступну границю

$$d_f(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)}.$$

Зрозуміло, що це поняття також визначено далеко не для всіх множин, тому використовують *верхню f-щільність множини A*

$$\overline{d_f}(A) = \limsup_{n \to \infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)},$$

і *нижню f-щільність множини A*

$$\overline{d_f}(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)}.$$

Ідеал

$$\mathfrak{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : d_f(A) = 0\}.$$

називають *f-ідеалом*, або *ідеалом, який задано модульною функцією f*.

Зауважимо, що якщо $f = \mathrm{id}$ – тотожна функція, то, за умови, що відповідна границя існує, $d(A) = d_f(A)$, і, відповідно, $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$. Поняття f-ідеалу неявно виникає в роботі [1], де автори досліджують збіжність послідовностей відносно ідеалу $\mathfrak{I}_f$, та виникає явно в статті [24].

В роботі [1] автори зауважують, що для будь-якої модульної функції f і для будь-якої підмножини $A \subset \mathbb{N}$, якщо $d_f(A) = 0$, то $d(A) = 0$. Іншими словами, $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$. Природнім є питання: для яких модульних функцій ми маємо обернене включення? У розділі 2 ми отримаємо повний опис таких функцій f, для яких $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$.

5.2 Опис модульних функцій f, для яких $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$

Нехай f – модульна функція, $t \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Будемо використовувати такі позначення:

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)},\;\; g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

Наступна теорема є обіцяним описом такий модульних функцій f, для яких $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$.

Теорема 5.1. *Нехай f – модульна функція. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$;
3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$;

Доведення. Зауважимо, що рівносильність тверджень (2) і (3) є очевидною через монотонність функції $h_f(t)$ за змінною t. В теорему ми додали обидві умови для зручності, оскільки далі будемо їх використовувати. Отже, нам залишилось довести еквівалентність тверджень (1) і (2). Будемо це робити за наступною схемою: (3) $\Rightarrow$ (1), (1) $\Rightarrow$ (2).

(**3**) $\Rightarrow$ (**1**): У вступній частині було зазначено, що включення $\mathfrak{I}_s \supset \mathfrak{I}_f$ є відомим, то нам необхідно показати лише $\mathfrak{I}_s \subset \mathfrak{I}_f$. Позначимо $\delta_t^f := h_f(t) + \dfrac{1}{t}$. Величина δ_t^f спадає за t і $\lim\limits_{t\to\infty} \delta_t^f = 0$. Ми знаємо, що для довільного $t \in [1, +\infty)$ маємо $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(tn)} < \delta_t^f$. Зокрема, звідси ми можемо отримати, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує таке число $N_1(k) \in \mathbb{N}$, що для довільного $n \geq N_1(k)$ отримуємо наступну нерівність:

$$f\left(\frac{n}{k}\right) < \delta_t^f f(n).$$

Нехай $A \in \mathfrak{I}_s$. За означенням статистичного ідеалу, це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_A(n)}{n} = 0$. Це означає, зокрема, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує $N_2(k) \in \mathbb{N}$ таке, що $\alpha_A(n) < \dfrac{n}{k}$, для довільного $n > N_2(k)$. Позначимо $N_k := \max\{N_1(k), N_2(k)\}]$. Тоді для кожного $n > N_k$

$$f(\alpha_A(n)) < f\left(\frac{n}{k}\right) < \delta_t^f f(n).$$

З попередньої нерівності ми маємо:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_A(n))}{f(n)} \leq \delta_t^f \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

що завершує доведення імплікації (3) $\Rightarrow$ (1).

(**1**) $\Rightarrow$ (**2**): Будемо доводити від супротивного. Припустимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) \neq 0$. Оскільки g_f – монотонна, це означає, що існує таке число $\xi > 0$, що $g_f(k) > \xi$, для довільного $k \in \mathbb{N}$. Відповідно, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(2^k n)} > \xi$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує нескінченна множина $N_k \subset \mathbb{N}$ така, що для довільного $n \in N_k$

$$f(n) > \xi f(2^k n). \tag{11}$$

Оберемо послідовність чисел $0 = n_0 < n_1 < n_2 < ...$ таку, що $n_j \in N_j$, для кожного $j \in \mathbb{N}$. Тож для будь-якого $k \in \mathbb{N}$

$$f(n_k) > \xi f(2^k n_k).$$

Позначимо $m_k := 2^k n_k$, $k = 1, 2, ...$ Розглянемо наступну множину A:

$$A = \{m_1 - n_1 + 1, m_1 - n_1 + 2, ..., m_1 - 1,$$
$$m_2 - n_2 + n_1, m_2 - n_2 + n_1 + 1, m_2 - n_2 + n_1 + 2, ..., m_2 - 1, ...\}.$$

Як влаштована множина A. Ми беремо число $k \in \mathbb{N}$, далі з кожного блоку натуральних чисел $(m_{k-1}, m_k]$ ми обираємо $n_k - n_{k-1}$ найбільших. Для коректності визначення множини A ми маємо перевірити, що $m_k - m_{k-1} > n_k - n_{k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Дійсно, для кожного $k \in \mathbb{N}$ ми маємо:

$$m_k - n_k + n_{k-1} - m_{k-1} = 2^k n_k - n_k + n_{k-1} - 2^{k-1} n_{k-1} =$$
$$n_k(2^k - 1) - n_{k-1}(2^{k-1} - 1) > 0,$$

бо $n_k > n_{k-1}$ і $2^k - 1 > 2^{k-1} - 1$.

Позначимо $\alpha_n := \alpha_A(n)$. Покажемо, що $A \notin \mathfrak{I}_f$. За нашою побудовою, $\alpha_{m_k} = n_k$, для кожного $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи нерівність (11) ми маємо, що $\dfrac{f(\alpha_{m_k})}{f(m_k)} > \xi > 0$, тож $\dfrac{f(\alpha_n)}{f(n)} \not\to 0$ при $n \to \infty$, тому $A \notin \mathfrak{I}_f$.

Покажемо нарешті, що $A \in \mathfrak{I}_s$. Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ множину $[m_k + 1, m_{k+1}] \cap \mathbb{N}$ ми можемо представити наступним чином:

$$[m_k + 1, m_{k+1}] \cap \mathbb{N} = ([m_k + 1, m_{k+1} - n_{k+1} + n_k - 1] \cap \mathbb{N}) \cup$$
$$([m_{k+1} - n_{k+1} + n_k, m_{k+1} - 1] \cap \mathbb{N}) \cup \{m_{k+1}\}.$$

У перший частині цього розбиття для $j \in [m_k+1, m_{k+1}-n_{k+1}+n_k-1]$ ми маємо: $\alpha_j = n_k$ і $\frac{\alpha_j}{j} = \frac{n_k}{j} \leq \frac{n_k}{m_k+1} \leq \frac{n_k}{m_k} = \frac{1}{2^k}$. У наступній частині для $j \in [m_{k+1} - n_{k+1} + n_k, m_{k+1} - 1] = [n_{k+1}(2^{k+1} - 1) + n_k, 2^{k+1} n_{k+1}]$ ми маємо $\alpha_j = n_k + x_j$, де $1 \leq x_j \leq n_{k+1} - n_k$. Використовуючи це, ми отримуємо, що $\frac{1}{j} \leq \frac{x_j}{j} \leq \frac{n_{k+1} - n_k}{j}$, і

$$\frac{\alpha_j}{j} = \frac{n_k + x_j}{j} \leq \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}(2^{k+1} - 1) + n_k} \leq \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}(2^{k+1} - 1)} = \frac{1}{2^{k+1} - 1} \leq \frac{1}{2^k}.$$

На останньому шматочку $j = m_{k+1}$ ми маємо $\alpha_j = n_{k+1}$ і

$$\frac{\alpha_j}{j} = \frac{n_{k+1}}{m_{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}.$$

Отож, для довільного $k \in \mathbb{N}$ і для довільного $j \in [m_k+1, m_{k+1}]$ ми маємо $\frac{\alpha_j}{j} < \frac{1}{2^k}$, іншими словами, $A \in \mathfrak{I}_s$.

□

Тепер ми обговоримо деякі послаблення теореми (5.1) і отримаємо деякі прості часткові випадки. Спочатку доведемо одну технічну лему.

Лема 5.1. *Нехай f – модульна функція. Нехай існує $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} = a$. Тоді $g_f(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)} = a^k$, для довільного $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. База: $k = 2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(4n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n) \cdot f(2n)}{f(2n) \cdot f(4n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(2n)}{f(4n)} = a^2.$$

Індуктивний перехід: $k \to k+1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^{k+1}n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^k n)}{f(2^{k+1}n)} = a^k \cdot a = a^{k+1}.$$

$\square$

Теорема 5.2. *Нехай f – модульна функція. Припустимо, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)}$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} < 1$.

Доведення. За припущенням існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)}$, лема (5.1) дає еквівалентність нашої умови (2) та умови (2) теореми (5.1). $\square$

5.3 Приклади

По-перше, покажемо, що серед елементарних функцій f можливі обидві ситуації: $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$ і $\mathfrak{I}_s \neq \mathfrak{I}_f$.

Приклад 5.1. $f(x) = x^p$, $p \in (0,1]$. В цьому випадку $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$. Дійсно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{(2n)^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^p < 1$.

Приклад 5.2. $f(x) = \log(1+x)$. В цій ситуації $\mathfrak{I}_f \neq I_s$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{\log(1+2n)} = 1$.

Наступний приклад демонструє, що теорему (5.1) не можна звести у загальному випадку до теореми (5.2), тобто що існує модульна функція f для якої границя $\dfrac{f(n)}{f(2n)}$ не існує.

Приклад 5.3. Нехай $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Значення функції в інших натуральних точках означимо рекурентно: якщо для деякого натурального числа n значення $f(k)$ визначені для $k \in [1, 2^n]$, ми визначаємо $f(k)$ для $k = 2^n + \alpha \in [2^n + 1, 2^{n+1}]$, $\alpha \in [1, 2^n]$ за наступною формулою

$$f(2^n + \alpha) = \begin{cases} f(2^n), \text{ якщо } n \in \{1, 3, 5, ...\} \\ f(2^n) + f(\alpha), \text{ якщо }, n \in \{2, 4, 6, ...\} \end{cases} . \qquad (12)$$

Такий чином ми означила $f(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В інших точках ми означаємо функцію за допомогою лінійною інтерполяції. Тож функцію f визначено для всіх $x \in \mathbb{R}^+$, вона монотонна, неперервна і $f(2^k) := 2^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ для $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $\lceil x \rceil = \min\{a \in \mathbb{Z} : a \geq x\}$ – ціла частина "стеля".

Перевіримо тепер, що f є модульною функцією. Для цього для кожного $w, z \in \mathbb{N}$ (без зменшення загальності, вважаємо, що $w > z$) ми маємо показати, що

$$f(w + z) \leq f(w) + f(z). \qquad (13)$$

Будемо робити це індукцією за n, де n –найменший натуральний степінь такий, що $w + z \leq 2^n$.

База $n = 1$ є очевидною. Припустимо, що ми маємо нерівність (13) для $0 \leq w + z \leq 2^n$ і будемо будемо доводити для $0 \leq w + z \leq 2^{n+1}$. Запишемо

$w+z=2^n+\alpha$, де $\alpha\in[1,2^n]$.

1. Нехай n – непарне число. Тоді існують натуральні числа $\tilde{w},\tilde{z}$, $\tilde{w}<w$, $\tilde{z}<z$ такі, що $\tilde{w}+\tilde{z}=2^n$. Тоді $f(w+z)=f(2^n)=f(\tilde{w}+\tilde{z})\leq f(\tilde{w})+f(\tilde{z})\leq f(w)+f(z)$.

2. Нехай n – парне число. Тоді $f(w+z)=f(2^n\alpha)=f(2^n)+f(\alpha)$.

   (а) Нехай $w\geq 2^n$, тоді $z\leq\alpha$. Представимо w у вигляді $w=2^n+\beta$. В цьому випадку $f(w+z)=f(2^n)+f(\alpha)$ і $f(w)=f(2^n)+f(\alpha)$. Тоді нерівність (13) є правильною за індуктивним припущенням.

   (б) Нехай $w<2^n$, що означає $2^{n-1}<w<2^n$ і $z>\alpha$. Тоді $f(w)=f(2^{n-1})=f(2^n)$, оскільки $n-1$ є непарним. В цій ситуації нерівність (13) еквівалентна наступній: $f(\alpha)\leq f(w)$. Остання нерівність є правильною, оскільки $z>\alpha$.

Тож, ми показали, що функцію, означена формулою (12) є модульною функцією. Розглянемо тепер послідовність $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})}$, $n=0,1,2,\ldots$. Коли n є непарним, $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})}=1$, коли ж n є парним, $\dfrac{f(2^n)}{f(2^{n+1})}=\dfrac{1}{2}$. Це означає, що послідовність $\dfrac{n}{f(2n)}$ не має границі.

У цьому прикладі $g_f(k)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{f(2^kn)}=\dfrac{1}{2^{k-1}}$, тому $\mathfrak{I}_f=\mathfrak{I}_s$.

5.4 Висновки до розділу

Даний розділ було присвячено деяким властивостям модульних функцій, ідеалам, які породжують ці функції, та їхнім зв'язкам з ідеалом статистичної збіжності. У Теоремі 5.1 була повністю описана сім'я таких модульних функцій f, для яких $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$, де $\mathfrak{I}_f$ та $\mathfrak{I}_s$ відповідно позначають f-статистичний ідеал та стандартний ідеал статистичної збіжності. Теорема 5.2 є частковим випадком центрального результату розділу, Теореми 5.1 в тому сенсі, що для модульної функції f в ній накладається додаткова умова існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(2n)}$. Це досить суттєво спрощує доведення даного результату. Далі ми розглянули різні приклади модульних функцій для ілюстрації того факту, що не для всіх модульних функцій f ідеал $\mathfrak{I}_f$ дорівнює ідеалу статистичної збіжності $\mathfrak{I}_s$. А саме, якщо $f(x) = x^p$, де $p \in (0, 1]$, то $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$, але якщо $f(x) = \log(1 + x)$, то $\mathfrak{I}_s \neq \mathfrak{I}_f$. Ми навели приклад функції, яка показує, що повну теорему (Теорему 5.1) не можна звести до часткового (Теорема 5.2).

Результати розділу опубліковано в [22].

6 Узагальнення поняття повноти топологічних векторних просторів в термінах фільтрів

6.1 Попередні факти

Даний розділ присвячено питанням повноти загальних топологічних векторних просторів. Відомо, що якщо X – метризовний топологічний векторний простір, то на ньому всі типи повноти співпадають. Якщо ж ми послаблюємо умову метризовності, і працює із просторами, на яких немає метрики, то тут можлива ситуація, що простір буде повним відносно одного ультрафільтра, і не буде повним відносно іншого. Саме тому систематичне вивчення повноти неметризовних топологічних векторних просторів є важливим.

Ми почнемо із нагадування необхідних нам понять, формулювання відомих фактів, які будуть нам корисні при викладенні основного змісту розділу.

Нехай Ω – непорожня множина. Нагадаємо, що фільтр $\mathfrak{F}$ на множині Ω – це непорожня сім'я непорожніх підмножин множини Ω, стійке відносно перетину своїх елементів, та взяття надмножини свого елемента, а саме, якщо $A,\ B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$, і якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$, то $D \in \mathfrak{F}$. Будемо говорити, що підмножина $A \subset \Omega$ є $\mathfrak{F}$*-стійкою*, якщо A перетинається зі всіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Непорожню сім'ю підмножин G множини Ω називають *базою фільтра*, якщо $\emptyset \notin G$ і для кожних $A, B \in G$ існує $C \in G$ такий, що $C \subset A \cap B$. Кажуть, що фільтр задано базою G (позначення:

$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(G)$), якщо кожен елемент фільтра містить принаймні один елемент бази.

На множині всіх фільтрів існує природне відношення порядку: $\mathfrak{F}_1 \prec \mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Максимальний елемент відносно такого порядку називають *ультрафільтром.* Фільтр на множині натуральних чисел називають *вільним*, якщо він містить фільтр Фреше.

Для деякої непорожньої множини Ω розглянемо фільтр $\mathfrak{F}$. Нехай Y – теж деяка непорожня множина. Розглянемо функцію $f : \Omega \to Y$. Сім'я множин $f(\mathfrak{F}_0) = \{f(A) : \ A \in \mathfrak{F}_0\}$ буде базою фільтра на Y. Фільтр, породжений цією базою будемо позначати $f[\mathfrak{F}_0] = \mathfrak{F}(f(\mathfrak{F}_0))$. Якщо $x = (x_n) \subset Y$ – послідовність елементів множини Y, то, записуючи $x(A)$ ми маємо на увазі $x(A) = \{x_n : \ n \in A\}$. Тобто тут ми використовуємо спостереження про те, що послідовність – це функція на множині натуральних чисел.

Нехай тепер Y – топологічний векторний простір. Нагадаємо, що якщо $t \in Y$, то для системи околів цієї точки ми використовуємо позначення $\mathcal{O}(t)$. Отож, точку $y \in Y$ називають *границею фільтра* $\mathfrak{F}$ ($y = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathcal{O}(y) \subset \mathfrak{F}$, і цю точку називають *граничною точкою фільтра* $\mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки y є $\mathfrak{F}$-стійкою.

Ясно, що якщо $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, то граничні точки фільтра $\mathfrak{F}_2$ є так само і граничними точками фільтра $\mathfrak{F}_1$, і, якщо фільтр $\mathfrak{F}_1$ має границю, то вона співпадає з границею фільтра $\mathfrak{F}_2$.

Кажуть, що послідовність $x = (x_n) \subset Y$ збігається до елемента $y \in Y$ за фільтром $\mathfrak{F}$ на множині натуральних чисел, якщо $y = \lim x[\mathfrak{F}]$, і точка y

є граничною точкою послідовності x відносно фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожен окіл точки y є $x[\mathfrak{F}]$-стійким.

6.2 Повнота, секвенційна повнота, і повнота відносно фільтрів на $\mathbb{N}$

Нехай X – топологічний векторний простір. Фільтр $\mathfrak{F}$ на X називають фільтром Коші (позначення: $\mathfrak{F} \in \mathrm{Cauchy}$), якщо для будь-якого $U \in \mathcal{O}(0)$ існує елемент фільтра $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $A - A \subset U$.

Топологічний векторний простір X називають *повним*, якщо кожен фільтр Коші на X має границю.

Сформулюємо одне досить очевидне твердження, яким ми будемо користуватись далі.

Твердження 3. *[20]*
Нехай X – топологічний векторний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр Коші на X, $x \in X$ – гранична точка фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді $x = \lim \mathfrak{F}$.

Нагадаємо ще декілька технічних визначень. Послідовність $x = (x_n)$ елементів простору X називають *послідовністю Коші відносно фільтра $\mathfrak{F}$ на множині натуральних чисел*, якщо $x[\mathfrak{F}]$ – фільтр Коші на просторі X.

Послідовність $x = (x_n)$ елементів простору X називають *послідовністю Коші*, якщо x – послідовність Коші відносно фільтру Фреше. Нескладно побачити, що це визначення співпадає з добре знайомим означення послідовності Коші з курсу математичного аналізу.

Далі ми наведемо означення понять, які є новими, і їх до цього моменту не було знайдено в літературі.

Означення 6.1. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, X – топологічний векторний простір. Будемо називати простір X *повним відносно фільтру* $\mathfrak{F}$, якщо кожна послідовність Коші відносно фільтру $\mathfrak{F}$ на X має границю відносно $\mathfrak{F}$.

Будемо позначати цю властивість наступним чином: $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F})$

Зауваження 6.1. Очевидно, що Означення 6.1 є природнім узагальненням класичного означення повноти метричного простору. Дійсно, якщо X – метричний простір, $\mathfrak{F}$ – фільтр Фреше, то ми отримає добре відоме означення повноти.

Нагадаємо, що простір називають *секвенційно повним*, якщо $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F}\mathfrak{R})$.

Наступна теорема досить елементарна, і пояснює очевидні властивості повноти простору відносно фільтра.

Теорема 6.1. *(1) Якщо $X \in Compl$, то $X \in Compl(\mathfrak{F})$ для будь-якого фільтру $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.*

(2) Повний топологічний векторний простір є секвенційно повним.

(3) Аби перевірити, що $X \in Compl(\mathfrak{F})$, достатньо перевірити, що кожна послідовність Коші відносно $\mathfrak{F}$ в X має граничну точку відносно $\mathfrak{F}$.

(4) Якщо $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ *– фільтри на* $\mathbb{N}$ *і* $X \in Compl(\mathfrak{F}_2)$*, то* $X \in Compl(\mathfrak{F}_1)$*.*

(5) Якщо $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* $\mathbb{N}$*,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *– функція, і* $X \in Compl(\mathfrak{F})$*, то* $X \in Compl(f[\mathfrak{F}])$*.*

(6) Якщо $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* $\mathbb{N}$*,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *– ін'єктивна функція, і* $X \in Compl(f[\mathfrak{F}])$*, то* $f \in Compl(\mathfrak{F})$*.*

Доведення. Пункт (1) очевидно витікає з означення, пункт (2) є частковим випадком пункту (1) з $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{R}$.

Перевіримо пункт (3). Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$, $x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ – послідовність, яка є послідовністю Коші відносно фільтра $\mathfrak{F}$. Припустимо, що x має граничну точку відносно $\mathfrak{F}$. Це означає, що фільтр Коші $x[\mathfrak{F}]$ також має граничну точку, тобто, використовуючи Твердження 3, отримуємо, що фільтр $x[\mathfrak{F}]$ має границю.

Перейдемо тепер до доведення пункту (4). Якщо $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \in \mathrm{Cauchy}(\mathfrak{F}_1)$, то, очевидно, що $x \in \mathrm{Cauchy}(\mathfrak{F}_2)$. Тому, оскільки $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F}_2)$, то існує $t \in X$ такий, що $t = \lim x[\mathfrak{F}_2]$. зважаючи на включення $x[\mathfrak{F}_2] \supset x[\mathfrak{F}_1]$, t є граничною точкою $x[\mathfrak{F}_1]$, що і завершує доведення пункту (4).

Розглянемо твердження з пункту (5).
Нехай $x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $x \in \mathrm{Cauchy}(f[\mathfrak{F}])$. Розглянемо послідовність $y = x \circ f$, тобто $y = (y_n)$ і $y_n = x_{f(n)}$. Тоді $y[\mathfrak{F}] = x[f[\mathfrak{F}]]$, а отже $y \in \mathrm{Cauchy}(\mathfrak{F})$. Оскільки, за умовою, $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F})$, то існує границя $\lim\limits_{\mathfrak{F}} y$, яка також буде і границею послідовності x відносно $f[\mathfrak{F}]$.

Перевіримо, нарешті, пункт (6). Розглянемо $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – ліве обернене до функції f. Докладніше: $g(f(n)) = n$, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ – послідовність Коші відносно $\mathfrak{F}$. Розглянемо послідовність $y = x \circ g$. Тоді $y \circ f = x \circ g \circ f = x$. Отже, $y \circ f \in \mathrm{Cauchy}(\mathfrak{F})$, що означає, що фільтр $y[f[\mathfrak{F}]]$ є фільтром Коші, тобто $y \in \mathrm{Cauchy}(f[\mathfrak{F}])$. Оскільки, за умовою, $X \in \mathrm{Compl}(f[\mathfrak{F}])$, то існує границя $\lim\limits_{f[\mathfrak{F}]} y$. Це означає, за означенням, що $y[f[\mathfrak{F}]] = x[g[f[\mathfrak{F}]]] = x[\mathfrak{F}]$ – збіжний фільтр. $\square$

Зауваження 6.2. У пункті (5) попередньої теореми нас цікавили тільки такі фільтри, що $f[\mathfrak{F}] \supset \mathfrak{F}\mathfrak{R}$.

Зауваження 6.3. У пункті (6) попередньої теореми ін'єктивність відображення f не можна відкинути, бо, якщо її прибрати, то, може статися так, що $f[\mathfrak{F}]$ є тривіальним фільтром, а отже властивість $f[\mathfrak{F}]$-повноти виконується для будь-якого простору, але це нічого не говорить нам про $\mathfrak{F}$-повноту.

Далі нашою метою буде узагальнення Теореми 3.3 зі статті [27]. Сформулюємо цей результат.

Теорема 6.2. *[27] Нехай X – нормований простір. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) X – повний.

(2) X є f-повним, для будь-якої необмеженої модульної функції f.

(3) Існує необмежена модульна функція f така, що X є f-повним.

Очевидно, що цю теорему можна довести, використовуючи техніку фільтрів, або двоїстого до них поняття, ідеалів. Саме тому нижче ми наведемо обіцяне узагальнення сформульованої щойно теореми.

Теорема 6.3. *Нехай X – топологічний векторний простір зі зліченною базою нуля. Наступні твердження є еквівалентними:*

(1) X – повний.

(2) $X \in Compl(\mathfrak{F})$ для кожного фільтру $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

(3) Існує вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ такий, що $X \in Compl(\mathfrak{F})$.

(4) X є секвенційно повним.

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) доведено у пункті 1 Теореми 6.1. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) є очевидною, а імплікацію (3) $\Rightarrow$ (4) можна отримати з пункту (3) Теореми 6.2. Тобто нам залишилось довести тільки імплікацію (4) $\Rightarrow$ (1). Нехай (U_n) – є базою системи околів нуля простору X, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ з властивістю $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, і нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр Коші. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виберемо $A_n \in \mathfrak{F}$ такий, що $A_n - A_n \subset U_n$, і оберемо $x_n \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тоді послідовність $x = (x_n)$ є послідовністю Коші. Дійсно, для довільного $U \in \mathcal{O}(0)$ існує $N \in \mathbb{N}$ такий, що $U_N \subset U$. Тоді, для $n, m \geq N$ маємо $x_n - x_m \in A_n - A_m \subset U_N \subset U$.

Оскільки $x = (x_n)$ є послідовністю Коші, і X є секвенційно повним простором, то існує $y := \lim\limits_{n \to} x_n$. Покажемо тепер, що $y = \lim \mathfrak{F}$. Розглянемо довільний окіл $V \in \mathcal{O}(y)$. Очевидно, що $V - y \in \mathcal{O}(0)$, тобто існує

$m \in \mathbb{N}$ таке, що $U_m \subset V - y$. За означенням точки y, існує $k > m$ таке, що $x_k \in U_{m+1} + y$. Для цього самого k ми маємо $A_k - x_k \subset A_k - A_k \subset U_k \subset U$, тобто $A_k \subset U_{m+1} + x_k$. Це означає, що

$$V \supset U_m + y \supset U_{m+1} + U_{m+1} + y \supset U_{m+1} + x_k \supset A_k,$$

тобто $V \in \mathfrak{F}$, а значить $y = \lim \mathfrak{F}$. □

6.3 Різні типи повноти та класи фільтрів і просторів

Ми вже згадували вище, що усі типи повноти для метризовних просторів співпадають. Проте, для загальних неметризовних топологічних просторів це не правда і ситуація з повнотою тут набагато цікавіша. Добре відомо, що неповний топологічний векторний простір може бути секвенційно повним. Найпростішим прикладом є гільбертів простір ℓ_2 у слабкій топології. Цей підрозділ присвячено саме неметризовним просторам, де ми будемо користуватися технікою теорії двоїстості для локально опуклих просторів. Для дуальної пари просторів X, Y через $\sigma(X, Y)$ ми позначатимемо слабку топологію на X породжену функціоналами з простору Y.

Введемо наступне поняття.

Означення 6.2. Назвемо топологічний векторний простір X *злічено-повним*, якщо $X \in \mathrm{Compl}_\mathfrak{F}$ для всіх фільтрів $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

Нижче ми покажемо, що для сепарабельних просторів зі зліченної повноти витікає повнота, але для загальних просторів це неправда. Також ми доведемо, що із секвенціальної повноти не випливає властивість зліченної повноти.

Наведемо для початку одне очевидне переформулювання визначення зліченної повноти.

Твердження 4. *Для топологічного векторного простору X наступні твердження є еквівалентними:*

(1) X – зліченно повний.

(2) Для будь-якого фільтру Коші $\mathfrak{F}$ на X, якщо $\mathfrak{F}$ має зліченний елемент, то $\mathfrak{F}$ має границю.

Доведення. (2) $\Rightarrow$ (1): Нехай $\mathfrak{F}$ фільтр на $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X, яка є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші. Тоді $x[\mathfrak{F}]$ – це фільтр Коші на X, $x[\mathfrak{F}]$ має зліченний елемент $x(\mathbb{N})$, а значить $x[\mathfrak{F}]$ має границю, отже, згідно з означенням, існує $\lim\limits_{\mathfrak{F}} x$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Нехай $\mathfrak{F}$ – це нетривіальний фільтр Коші на X, $A \in \mathfrak{F}$ – зліченний елемент. Розглянемо $x : \mathbb{N} \to X$ – бієктивне відображення. Позначимо $x^{-1}(\mathfrak{F}) = \{D \subset \mathbb{N} : \ x(D) \in \mathfrak{F}\}$. Тоді $x[x^{-1}(\mathfrak{F})] = \mathfrak{F}$, а отже $x \in \mathrm{Cauchy}(x^{-1}(\mathfrak{F}))$, що означає існування $\lim\limits_{x^{-1}[\mathfrak{F}]} x$. За означенням, це і є границя $x[x^{-1}(\mathfrak{F})] = \mathfrak{F}$ на X. $\square$

Означення 6.3. Топологічний векторний простір X назвемо *асимптотично зліченним*, якщо для будь-якого фільтру Коші $\mathfrak{F}$ на X існує зліченна підмножина $A \subset X$ така, що для будь-яких $U \in \mathcal{O}(0)$ і $B \in \mathfrak{F}$ виконано: $A \cap (B + U) \neq \emptyset$.

Зауважимо очевидний факт: будь-який сепарабельний простір є асимптотично зліченним. Проте існують приклади і несепарабельних асимптотично повних просторів.

Теорема 6.4. *Якщо X є асимптотично зліченним топологічним векторним простором, то його повнота еквівалента його зліченній повноті.*

Доведення. Якщо X є повним, то він є повним і відносно всіх фільтрів на множині натуральних чисел, згідно з пунктом (1) Теореми 6.3, а отже нам залишилось показати тільки зворотну імплікацію.

Нехай X – асимптотично зліченним топологічний векторний простір, який є зліченно повним. Нехай $\mathfrak{F}$ – нетривіальний фільтр Коші на X. Зафіксуємо зліченну підмножину $A \subset X$ таку, що сім'я $G \subset 2^X$, $G = \{A \cap (U + B)\}_{U \in \mathcal{O}(0),\ B \in \mathfrak{F}}$ не містить порожньої множини. Очевидно, G є базою фільтра. Позначимо $\tilde{\mathfrak{F}}$ фільтр, який задано базою G. Оскільки $A \in G \subset \tilde{\mathfrak{F}}$, то $\tilde{\mathfrak{F}}$ має зліченний елемент. Також $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathrm{Cauchy}$. Дійсно, нехай $U \in \mathcal{O}(0)$. виберемо врівноважений окіл $V \in \mathcal{O}(0)$ такий, що $V+V+V \subset U$. ми знаємо, що $\mathfrak{F} \in \mathrm{Cauchy}$, а отже існує $B \in \mathfrak{F}$ з $B - B \subset V$. Тоді $A \cap (V + B) \in \tilde{\mathfrak{F}}$ і

$$(A \cap (V + B)) - (A \cap (V + B)) \subset (V + B) - (V + B) \subset$$

$$\subset (V - V) + (B - B) \subset V - V + V = V + V + V \subset U,$$

що є доведення факту про те, що $\tilde{\mathfrak{F}} \in \mathrm{Cauchy}$. Тоді, використовуючи зліченну повноту, існує $y \in X$ такий, що $y = \lim \tilde{\mathfrak{F}}$ (за Твердженням 4).

Залишилось показати, що $y = \lim \mathfrak{F}$. Для цього нам достатньо показати, що y є граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$. Для цього розглянемо довільний окіл $U \in \mathcal{O}(y)$, довільний елемент фільтра $D \in F$ і покажемо, що $U \cap D \neq \emptyset$. Виберемо врівноважений окіл нуля $V \in \mathcal{O}(0)$ такий, що $V + V \subset U - y$. Оскільки $y = \lim \tilde{\mathfrak{F}}$, то $V + y \in \tilde{\mathfrak{F}}$, а отже $V + y$ містить підмножину виду $A \cap (W + B)$, де $B \in \mathfrak{F}$, $W \in \mathcal{O}(0)$. Маємо:

$$U \supset V + V + y \supset V + A \cap (W + B) \supset V + A \cap (W \cap V + B \cap D).$$

Візьмемо точку $a \in A \cap (W \cap V + B \cap D)$. Її можна подати у вигляді $a = v + d$, де $v \in V$, $d \in D$. Тоді

$$d = a - v \in A \cap (W \cap V + B \cap D) + V \subset U,$$

а отже $U \cap D \neq \emptyset$.

□

Твердження 5. *Із секвенціальної повноти не витікає зліченна повнота.*

Доведення. За попередньою теоремою, аби навести такий приклад, нам достатньо знайти неповний сепарабельний топологічний векторний простір, який є секвенційно повним. Класичним прикладом такого простору є гільбертів простір ℓ_2 зі слабкою топологією. Більш загальний результат: для будь-якого сепарабельного нескінченновимірного банахового простору X його спряжений простір X^* в топології $\sigma(X^*, X)$ є секвенційно повним, сепарабельним, але неповним. □

Наступна теорема є обґрунтуванням того, що у Теоремі 6.4 умову асимптотичної зліченності не можна прибрати.

Теорема 6.5. *Існує неповний топологічний векторний простір X, потужності континууму, який є зліченно повним.*

Доведення. Розглянемо $\mathbb{R}^{[0,1]}$ – простір всіх функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ зі стандартною топологією декартового добутку, тобто топологією поточкової збіжності. Простір X, який ми шукаємо, буде підмножиною у $\mathbb{R}^{[0,1]}$, і складатиметься з функцій зі зліченним носієм. Іншими словами, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \in X$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{supp} f := \{t \in [0,1] : \ f(t) \neq 0\}$ є не більш, ніж зліченним. Оскільки X є щільною підмножиною у $\mathbb{R}^{[0,1]}$, то X не може бути повним. Покажемо, що X є зліченно повним.

Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$ і $x = (x_n)$ – послідовність Коші в просторі X відносно фільтру $\mathfrak{F}$ на X. Тоді x є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші, як послідовність у $\mathbb{R}^{[0,1]}$. За повнотою простору $\mathbb{R}^{[0,1]}$, існує $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ така, що $f = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n$ в $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Носій цієї функції лежатиме в об'єднанні носіїв елементів x_n, тобто буде зліченною множиною. Тому $f \in X$. $\square$

6.4 Повнота та обмеженість

У своїй нещодавній статті [4] Ben De Bondt та Hans Vernaeve ввели декілька дуже корисних для нас понять. Нижче ми наводимо найважливіші для нас часткові випадки цих тверджень.

Нехай X це банахів простір, $(x_n^*) \subset X^*$ – послідовність функціоналів, і нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Послідовність (x_n^*) називають *поточково $\mathfrak{F}$-обмеженою*, якщо для довільного $x \in X$ існує така константа $C = C(x) > 0$, що $\{n \in \mathbb{N} : |x_n^*(x)| < C\} \in \mathfrak{F}$. Послідовність (x_n^*) називають $\mathfrak{F}$- *обмеженою (стійко $\mathfrak{F}$-обмеженою)*, якщо існує константа $C > 0$ така, що $\{n \in \mathbb{N} : ||x_n^*|| < C\} \in \mathfrak{F}$ ($\{n \in \mathbb{N} : ||x_n^*|| < C\}$ є $\mathfrak{F}$-стійкою, тобто має непорожній перетин з усіма елементами фільтра).

Вільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ називають *банаховим UBP-фільтром (стійким банаховим UBP-фільтром)*, якщо для кожного банахового простору X кожна поточково $\mathfrak{F}$-обмежена послідовність $(x_n^*) \subset X^*$ є $\mathfrak{F}$-обмеженою (стійко $\mathfrak{F}$-обмеженою). Зауважимо, що наше означення формально є слабшим за означення з роботи [4]. Тим не менше, насправді, з доведення у роботі [4] лем 4.3 і 4.4 можна отримати, що наша версія означення описує той самий клас фільтрів.

Твердження про те, що фільтр Фреше є банаховим UBP-фільтром, є класичною теоремою Банаха-Штайнгауза. З іншого боку, багато класичних фільтрів $\mathfrak{F}$ не задовольняють цій властивості через існування $\mathfrak{F}$-необмежених поточково $\mathfrak{F}$-збіжний послідовностей у спряженому просторі. Останній ефект було помічено у роботі [11] для статистичної збіжності, та детально досліджено у [19].

Ben De Bondt та Hans Vernaeve надали нетривіальний опис та приклади банахових UBP-фільтрів і стійких банахових UBP-фільтрів і показали, що існування банахових UBP-ультрафільтрів узгоджується зі стандартною системою аксіом ZFC.

Це мотивує нас ввести наступне означення, що дає ослаблення зліченної повноти таким саме чином, як квазі-повнота є слабшою за звичайну повноту топологічного векторного простору.

Означення 6.4. Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Будемо називати топологічний векторний простір X *обмежено повним відносно* $\mathfrak{F}$, якщо всяка обмежена відносно фільтра $\mathfrak{F}$ послідовність Коші на X має границю відносно $\mathfrak{F}$. Будемо позначити цю властивість наступним чином: $X \in \mathrm{Compl}_b(\mathfrak{F})$. Простір X називатимемо *обмежено зліченно повним*, якщо він є обмежено повним відносно будь-якого фільтра $\mathfrak{F}$ на множині натуральних чисел.

Наступна теорема дає нам численні приклади таких просторів.

Теорема 6.6. *Нехай X – банахів простір. Тоді $(X^*, \sigma(X^*, X))$ є обмежено зліченно повним.*

Доведення. Нехай $(x_n^*) \subset X^*$ – обмежена послідовність функціоналів. Нагадаємо, що $\sigma(X^*, X)$-обмеженість еквівалента обмеженості за нормою (за теоремою Банаха-Штайнгауза), а отже $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n^*|| = C < \infty$. Припустимо тепер, що для деякого фільтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ послідовність (x_n^*) є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші в топології $\sigma(X^*, X)$. Це означає, що для довільного $x \in X$ послідовність чисел $(x_n^*(x)) \subset \mathbb{K}$ є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші, де $\mathbb{K}$ – числове поле дійсних або комплексних чисел. Оскільки поле $\mathbb{K}$ є повним, то для довільного $x \in X$ існує $\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*(x)$. Розглянемо тепер відображення $f : X \to \mathbb{R}$, що діє за правилом $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*(x)$. Помітимо, що це лінійний функціонал. Дійсно, $f(ax_1+bx_2) = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*(ax_1+bx_2) = a\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*(x_1)+b\lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*(x_2) = af(x_1)+bf(x_2)$. Також для довільного $x \in X$ виконано нерівність $|f(x)| = \lim\limits_{\mathfrak{F}} ||x_n^*(x)|| \leq C||x||$. Таким чином ми показали, що $f \in X^*$, і $f = \lim\limits_{\mathfrak{F}} x_n^*$ у $\sigma(X^*, X)$.

$\square$

Теорема 6.7. *Нехай X – банахів простір, $\mathfrak{F}$ – стійкий банахів UBP-фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді $(X^*, \sigma(X^*, X))$ є $\mathfrak{F}$-повним простором.*

Доведення. Нехай $x^* = (x_n^*) \subset X^*$ – послідовність функціоналів, яка є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші в топології $\sigma(X^*, X)$. Тоді для довільного $x \in X$ послідовність $(x_n^*(x)) \subset \mathbb{K}$ є $\mathfrak{F}$- послідовністю Коші. З цього випливає, що x^* є поточково $\mathfrak{F}$-обмеженою. З означення стійкого банахового UBP-фільтра ми отримуємо існування $\mathfrak{F}$-стійкої множини $A \subset \mathbb{N}$ такої, що $\sup\limits_{n \in A} ||x_n^*|| < \infty$. Розглянемо сім'ю множин $G = \{A \cap B\}_{B \in \mathfrak{F}}$. Очевидно, що G є базою фільтра. Позначимо $\mathfrak{F}_A$ фільтр на $\mathbb{N}$, базою якого є база фільтра G. Нехай $g : \mathbb{N} \to A$ – деяке бієктивне відображення. Позначимо через $\mathfrak{F}_g$ фільтр тих підмножин $B \subset \mathbb{N}$, для яких $g(B) \in G$, і розглянемо $y^* := x^* \circ g$. Тоді y^* є поточково обмеженим і $\mathfrak{F}_g$-послідовністю Коші. За Теоремою 6.6 послідовність y^* поточково збігається за фільтром $\mathfrak{F}_g$ до деякого елемента $f \in X^*$. це означає, що послідовність x^* збігається до f відносно фільтра $g[\mathfrak{F}_g] = \mathfrak{F}_A$. Тоді, за побудовою, $\mathfrak{F}_A \supset \mathfrak{F}$, значить f є $\mathfrak{F}$-граничною точкою для для послідовності x^* в $\sigma(X^*, X)$. Ми знаємо, що x^* є $\mathfrak{F}$-послідовністю Коші, а значить, за Твердженням 3, гранична точка цієї послідовності є її границею. □

Нам не відомо, чи є правильним той факт, що для довільного топологічного векторного простору із його секвенційної повноти витікає f-статистична повнота для будь-якої необмеженої модульної функції f, проте ми маємо аналогічний результат для обмеженої повноти локально опуклих просторів.

Нагадаємо, що в частковому випадку модульної функції $f(t) = t$, f-статистична збіжність зводиться до добре відомої звичайної статистичної збіжності, яку задано статистичним фільтром $\mathfrak{F}_{st}$ таких $A \subset \mathbb{N}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A(n)|}{n} = 1$, де $|\cdot|$ означає кількість елементів множини, а $A(n) = A \cap \{1, ..., n\}$.

Спочатку нам потрібне узагальнення факту, який було доведено в роботі [13]: якщо обмежена числова послідовність (x_n) статистично збігається до числа a, то ця сама послідовність збігається до a в сенсі Чезаро, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = a.$$

Лема 6.1. *Нехай X – локально опуклий топологічний векторний простір, $x = (x_n)$ – обмежена, $\mathfrak{F}_{st}$-послідовність Коші в X. Тоді послідовність $y = (y_n) \subset X$, де $y_n := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ є обмеженою послідовністю Коші.*

Доведення. Нехай $U \in \mathcal{O}(0)$ – опуклий, відкритий, врівноважений окіл нуля, і нехай p – напівнорма, в якій відкрита одинична куля дорівнює U. Позначимо $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(x_n)$. Тоді всі $x_k \in CU$, і, за опуклістю множини U, всі $y_k \in CU$. Цим ми показали обмеженість послідовності y. Залишилося показати, що y є послідовністю Коші.

За нашим припущенням, існує підмножина $A \subset \mathbb{N}$, така, що $A \in \mathfrak{F}_{st}$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} = 1,$$

і така, що для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ $p(x_n - x_m) < \dfrac{1}{2}$. Виберемо такий $N \in \mathbb{N}$, що для будь-якого більшого номера $n > N$ виконано

$$\frac{|(\mathbb{N} \setminus A)(n)|}{n} < \frac{1}{8C}.$$

Тоді для $m, n \geq N$ ми маємо

$$p(y_n - y_m) = p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k\right) =$$

$$p\Bigg(\frac{1}{n}\sum_{k\in(\mathbb{N} \setminus A)(n)} x_k - \frac{1}{m}\sum_{j\in(\mathbb{N} \setminus A)(m)} x_j + \frac{1}{|A(n)||A(m)|}\sum_{k\in A(n),\ j\in A(m)} (x_k - x_j) -$$

$$(\frac{1}{|A(n)|} - \frac{1}{n})\sum_{k\in A(n)} x_k - (\frac{1}{|A(m)|} - \frac{1}{m})\sum_{j\in A(m)} x_j\Bigg)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k\in(\mathbb{N} \setminus A)(n)} p(x_k) + \frac{1}{m}\sum_{j\in(\mathbb{N} \setminus A)(m)} p(x_j) + \frac{1}{|A(n)||A(m)|}\sum_{k\in A(n),\ j\in A(m)} (x_k - x_j) +$$

$$+ (\frac{1}{|A(n)|} - \frac{1}{n})\sum_{k\in A(n)} p(x_k) + (\frac{1}{|A(m)|} - \frac{1}{m})\sum_{j\in A(m)} p(x_j) <$$

$$< \frac{C}{n}\frac{n}{8C} + \frac{C}{m}\frac{m}{8C} + \frac{1}{2} + \frac{C}{n}\frac{n}{8C} + \frac{C}{m}\frac{m}{8C} = 1,$$

тобто $y_n - y_m \in U$. □

Теорема 6.8. *Нехай X – обмежено секвенціально повний, локально опуклий топологічний векторний простір. Тоді $X \in Compl_b(\mathfrak{F}_{st})$.*

Доведення. Нехай $x = (x_n) \subset X$ – обмежена $\mathfrak{F}_{st}$-послідовність Коші в X. Згідно з попередньою лемою, послідовність $y = (y_n) \subset X$, де $y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ є обмеженою послідовністю Коші, а отже має границю в X.

Позначимо $a := \lim_{n\to\infty} y_n \in X$. Покажемо тепер, що $a = \lim_{\mathfrak{F}_{st}} x$. Аби зробити це, виберемо $U,\ p,\ C,\ A,\ N$ як у попередній Лемі 6.1. Також зафіксуємо число $M > N$ таке, що $p(y_n - a) < \dfrac{1}{4}$ для всіх $n > M$. Тоді, для будь-якого $n \in A \setminus \{1, ..., M\}$ маємо

$$p(x_n - a) \leq \frac{1}{4} + p(x_n - y_n) \leq \frac{1}{4} + p\left(\frac{1}{n} \sum_{k \in (\mathbb{N} \setminus A)(n)} x_k\right) + p\left(x_n - \frac{1}{n} \sum_{k \in A(n)} x_k\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{C}{n}\frac{n}{8C} + p\left(\frac{1}{|A(n)|} \sum_{k \in A(n)} (x_n - x_k)\right) + \left(\frac{1}{|A(n)|} - \frac{1}{n}\right) p\left(\sum_{k \in A(n)} x_k\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{C}{n}\frac{n}{8C} + \frac{1}{2} + \frac{C}{n}\frac{n}{8C} = 1,$$

тобто $x_n - a \in U$. □

Наслідок 6.1. *Нехай X – обмежено секвенційно повний локально опуклий топологічний векторний простір, Тоді $X \in Compl_b(\mathfrak{F}_{f-st})$, де $\mathfrak{F}_{f-st}$ – фільтр f-статистичної збіжності, для будь-якої необмеженої модульної функції f.*

Доведення. Оскільки $\mathfrak{F}_{f-st} \subset \mathfrak{F}_{st}$, залишається застосувати пункт (4) Теореми 6.1 для обмежених послідовностей, що працює так само, як і оригінальний пункт (4). □

6.5 Повнота та ультрафільтри

Почнемо з очевидного спостереження.

Зауваження 6.4. Якщо топологічний простір X є повним відносно всіх ультрафільтрів на $\mathbb{N}$, от X є зліченно повним. Дійсно, виберемо ультрафільтр $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}$. За нашим припущенням, $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{U})$, і , аби показати те, що $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{F})$, нам залишається застосувати пункт (4) з Теореми 6.1.

Описане вище зауваження мотивує природне питання. По-перше, чи правда, що з повноти відносно одного ультрафільтра випливає повнота відносно всіх ультрафільтрів (і як наслідок зліченна повнота)? Якщо відповідь на це питання негативна, тоді виникає друге питання: чи витікає з секвенціальної повноти повнота відносно деякого ультрафільтра? Нижче наведено негативні відповіді на обидва питання (відповідь на перше питання дано з використанням додаткового теоретико-множинного припущення).

Теорема 6.9. *За умови виконання аксіоми Мартіна існують вільні ультрафільтри $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ на $\mathbb{N}$ та існує такий топологічний векторний простір X, що $X \in Compl(\mathfrak{U}_1)$, але $X \notin Compl(\mathfrak{U}_2)$,*

Доведення. Нехай $X = (Y^*, \sigma(Y^*, Y))$, де Y – сепарабельний нескінченновимірний банахів простір. Згідно з Наслідком 5.1 і Теоремою 5.3 статті [4], аксіома Мартіна гарантує існування банахового UBP-ультрафільтра, до того ж потужність множини таких фільтрів дорівнює $2^{2^{\aleph_0}}$. Нехай $\mathfrak{U}_1$ – банахів UBP-ультрафільтр на $\mathbb{N}$. Згідно з Теоремою 6.7, $X \in \mathrm{Compl}(\mathfrak{U}_1)$. З іншого боку, X є сепарабельним (спряжений простір сепарабельного банахового простору містить зліченну тотальну систему ([20], розділ 17.2.4, наслідок 2), і, як наслідок, є w^*-сепарабельним) та неповним, а отже за Теоремою 6.4 X не є зліченно повним, з чого випливає, що $X \notin \mathrm{Compl}(\mathfrak{U}_2)$ для деякого вільного ультрафільтра $\mathfrak{U}_2$ на $\mathbb{N}$. □

Нагадаємо, що $(\ell_1)^* = \ell_\infty$, і для будь-якого $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_\infty$ і $y = (y_1, y_2, ...) \in \ell_1$ дія x на y виглядає наступним чином: $x(y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_n y_n$.

Теорема 6.10. *Простір ℓ_1 у слабкій топології $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ є секвенційно повним, але не є обмежено повним відносно жодного вільного ультрафільтра $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$.*

Доведення. Слабка секвенційна повнота простору ℓ_1 є класичним результатом теорії банахових просторів. Зафіксуємо довільний ультрафільтр $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$ і покажемо, що $(\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty)) \notin \mathrm{Compl}_b(\mathfrak{U})$. Позначимо $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – канонічний базис простору ℓ_1, тобто $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, ...), \ldots$. Для довільного $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_\infty$ значення $x(e_n) = x_n$ утворюють обмежену послідовність скалярів, а отже існує границя $x(e_n)$ відносно $\mathfrak{U}$. Значить, (e_n) є $\mathfrak{U}$-послідовністю Коші в топології $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$.

Тепер покажемо, що послідовність (e_n) не має слабкої границі по $\mathfrak{U}$. Припустимо, що існує $z = (z_1, z_2, ...) \in \ell_1$ такий, що $x(z) = \lim\limits_{\mathfrak{U}}(x(e_n)) = \lim\limits_{\mathfrak{U}} x_n$ для довільного $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell_\infty$. Тоді, з одного боку, розглядаючи e_k як елементи простору ℓ_∞, ми отримуємо, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$

$$z_k = e_k(z) = \lim_{\mathfrak{U},n}(e_k(e_n)) = 0,$$

але з іншого боку, взявши $x = (1, 1, 1, ...)$ ми маємо $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n = x(z) = \lim\limits_{\mathfrak{U}} x_n = 1$. Ми прийшли до протиріччя. □

6.6 Висновки до розділу

Даний розділ було присвячено одному з центральних понять теорії топологічний векторних просторів, а саме повноті. Якщо метричний простір X

є повним, то будь-яка послідовність Коші в ньому має границю. В даному розділі ми дослідили, яким чином можна пов'язати поняття класичної повноти із теорією фільтрів. Ми запропонували ряд узагальнень повноти простору, а саме повнота простору відносно фіксованого фільтра на множині натуральних чисел, зліченна повнота, обмежена повнота простору відносно фільтра на $\mathbb{N}$. Було проведено детальний аналіз введених понять, і показано, що нові поняття дійсно є узагальненнями класичної повноти з різних точок зору. Дійсно, якщо в означенні повноти простору відносно фільтра $\mathfrak{F}$ в якості фільтра $\mathfrak{F}$ взяти фільтр Фреше $\mathfrak{FR}$, то ми отримаємо добре відоме означення повноти метричного простору. Теорема 6.1 дозволяє більш детально поглянути на означення повноти простору відносно фіксованого фільтра. В Теоремі 6.3 вдалося покращити результат статті [27]. В роботі [27] автори розглядали ідеали, породжені модульними функціями f. Нам вдалося поширити цей результат на довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$, тобто на довільній ідеал $\mathfrak{I}$, породжений фільтром $\mathfrak{F}$. Ми дослідили повноту неметризовних топологічних векторних просторів, запропонувавши поняття зліченної повноти та асимптотичної зліченності. Отримано зв'язок між новим поняттям асимптотичної зліченності та його повнотою. Показано, що із секвенціальної повноти простору не можна отримати його зліченну повноту (Твердження 5). В Теоремі 6.5 наведено приклад зліченно повного, але неповного топологічного векторного простору. Ми вивчили зв'язок повноти простору та поведінкою обмежених послідовностей в цьому просторі, а саме, ввели поняття обмеженої повноти простору відносно фільтра, та отримали багато прикладів таких просторів. Наприкінці розділу ми проаналізували, яким чином застосування ультрафільтрів може вплинути на раніше отримані результати. Тут ми використовуємо аксіому Мартіна. Зокрема, було дано негативну відповідь на питання: чи правда, що із повноти відносно ультрафільтра витікає повнота відносно довільного фільтра на $\mathbb{N}$.

Результати цього розділу опубліковано у статті [24].

7 Про інтегрування відносно фільтрів

Даний розділ дисертації присвячено застосуванню теорії фільтрів до математичного аналізу, а точніше до теорії інтегрування. Ми використовуємо поняття фільтра та узагальнене поняття збіжності для побудови досить загального об'єкту, який ми назвали інтегралом функції відносно фільтра. Спершу ми нагадаємо концепцію побудови інтеграла Рімана по відрізку для функції однієї змінної. Далі, застосовуючи техніку фільтрів, ми даємо центральне визначення цієї частини дисертаційної роботи і досліджуємо деякі властивості введеного поняття і його зв'язок з уже відомими результатами про класичний інтеграл Рімана.

7.1 Вступ

Схема побудови інтеграла Рімана по відрізку для числової функції однієї змінної чудово відомо будь-якому студенту-першокурснику. Тим не менше, для загального розуміння ми нагадаємо цю техніку. Отож нехай $[a, b] \subset \mathbb{R}$ – відрізок числової прямої, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – функція. Позначимо

$$\Pi = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n = b\}$$

– розбиття відрізка $[a, b]$, іншими словами,

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [\xi_{k-1}, \xi_k].$$

Розглянемо також набір відмічених точок $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, які задовольняють такій властивості: для довільного $k \in \{1, ..., n\}$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$.

Пару (Π, T) будемо називати *відміченим розбиттям* відрізка. Позначимо $d(\Pi)$ *діаметр* розбиття Π, а саме

$$d(\Pi) = \max_{1 \le k \le n} \{\lambda([\xi_{k-1}, \xi_k])\},$$

де $\lambda(\cdot)$ – стандартна міра Лебега на відрізку. Нагадаємо, що функцію f називають *інтегровною за Ріманом*, якщо існує границя

$$I = \lim_{d(\Pi) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)|\xi_k - \xi_{k-1}|.$$

Ми називаємо це число інтегралом Рімана функції f, і позначаємо

$$I = \int_a^b f(t)dt.$$

Ми знаємо багато чудових властивостей, які має інтеграл Рімана, наприклад, лінійність, інтегрування по підвідрізку тощо.

Можна помітити, що насправді, інтеграл Рімана – це просто границя інтегральних сум Рімана за певним спеціальним фільтром. Наступний розділ присвячено вивченню цієї ідеї.

7.2 Інтеграл як границя інтегральних сум відносно фільтра

Для простоти будемо розглядати функції, визначені на відрізку $[0, 1]$. Нехай $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ – функція. Як описано раніше, позначимо $\Pi = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n = b\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$, тобто,$[a, b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Розглянемо множину точок $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$, такі, що для довільного $k \in \{1, ..., n\}$ $t_k \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Для $k \in \{1, ..., n\}$ позначимо

$$\Delta_k := |\xi_k - \xi_{k-1}|.$$

Через $\mathrm{TP}\,[0,1]$ множину всіх відмічених розбиттів відрізку $[0,1]$. Для розбиття $(\Pi, T) \in \mathrm{TP}\,[0,1]$ позначимо

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k.$$

Тепер ми готові дати центральне визначення даного розділу дисертаційної роботи.

Означення 7.1. Нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – функція, $\mathfrak{F}$ –фільтр на $\mathrm{TP}\,[0,1]$. Будемо називати функцію f *інтегровною відносно фільтра* $\mathfrak{F}$ (коротше: $\mathfrak{F}$-інтегровною), якщо існує таке число $I \in \mathbb{R}$, що

$$I = \lim_{\mathfrak{F}} S(f, \Pi, T).$$

Число I при цьому будемо називати *інтегралом функції f відносно фільтра* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-інтегралом функції f). Позначення:

$$I = \int_0^1 f d\,\mathfrak{F}\,.$$

Зауваження 7.1. Клас інтегровних за фільтром $\mathfrak{F}$ функцій будемо позначати через $\mathrm{Int}\,(\mathfrak{F})$. Тобто, якщо f є $\mathfrak{F}$-інтегровною, то ми будемо позначати це як $f \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{F})$.

Зауваження 7.2. Використовуючи Означення 7.1, можна побудувати інтеграл Рімана таким чином. Нехай $\delta > 0$. Позначимо

$$P_{<\delta} = \{(\Pi, T) \in \mathrm{TP}\,[0,1] : \ d(\Pi) < \delta\}.$$

Розглянемо тепер

$$\mathfrak{B}_{<\delta} = \{P_{<\delta} : \ \delta > 0\}.$$

Нескладно побачити, що $\mathfrak{B}_{<\delta}$ є базою фільтра. Позначимо $\mathfrak{F}_{<\delta}$ фільтр з базою $\mathfrak{B}_{<\delta}$. Нехай тепер $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – деяка функція. Ця функція буде інтегровною за Ріманом, якщо $f \in \mathrm{Int}(\mathfrak{F}_{<\delta})$, або якщо існує границя $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{<\delta}} S(f, \Pi, T)$.

Далі ми будемо проводити дослідження введеного поняття.

Означення 7.2. Нехай X – непорожня множина, $f : X \to \mathbb{R}$ –функція, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Будемо говорити, що функція f є *обмеженою відносно фільтра* $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}$-обмеженою), якщо існує таке число $C > 0$ і існує такий елемент фільтра $A \in \mathfrak{F}$ такі, що для довільного $t \in A$ виконано $|f(t)| < C$.

Лема 7.1. *Нехай X – непорожня множина, $f : X \to \mathbb{R}$ –функція, $\mathfrak{F}$ – фільтр на X. Припустимо, що існує таке число $I \in \mathbb{R}$, що $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Тоді f є $\mathfrak{F}$-обмеженою.*

Доведення. Нам дано, що $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Значить, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що для будь-якого $t \in A$ $|f(t) - I| < \varepsilon$. Розглянемо

$$|f(t)| - |I| \leq |f(t) - I| < \varepsilon.$$

Іншими словами, $|f(t)| \leq |I| + \varepsilon$. Отже візьмемо $C := |I| + \varepsilon$. $\square$

Теорема 7.1. *Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $TP[0,1]$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ – функція, $f \in Int(\mathfrak{F})$. Тоді $S(f, \Pi, T)$ є $\mathfrak{F}$-обмеженою.*

Доведення. Достатньо використати Лему 7.1. $\square$

Далі ми сформулюємо відомий факт про інтеграл Рімана в термінах фільтрів.

Теорема 7.2. *Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– функція, нехай існує* $\lim\limits_{\mathfrak{F}_{<\delta}} S(f,\Pi,T)$. *Тоді* f *є обмеженою функцією, іншими словами, існує константа* $C > 0$ *така, що для довільного* $t \in [0,1]$ $|f(t)| \leq C$.

Наступна теорема є природнім узагальненням Теореми 7.2.

Теорема 7.3. *Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* $TP[0,1]$ *такий, що для довільного* $A \in \mathfrak{F}$ *існує* $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ *такі, що* $B \subset A$ *і нехай існує* $I \in \mathbb{R}$ *таке, що* $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} S(f,\Pi,T)$. *Тоді існує число* $C > 0$ *таке, що* $|f(t)| < C$ *для довільного* $t \in [0,1]$.

Доведення. Існує $I \in \mathbb{R}$ таке, що $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}} S(f,\Pi,T)$, іншими словами, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $A \in F$ таке, що для довільного $(\Pi,T) \in A$ $|S(f,\Pi,T) - I| < \varepsilon$. Ми знаємо, що для $A \in \mathfrak{F}$ існує $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ таке, що $B \subset A$, тоді, зокрема, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $A \in \mathfrak{F}$ та існує $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ з $B \subset A$ такі, що для кожного $(\Pi,T) \in B$ $|S(f,\Pi,T) - I| < \varepsilon$. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $B \in \mathfrak{F}_{<\delta}$ таке, що для кожного $(\Pi,T) \in B$ $|S(f,\Pi,T) - I| < \varepsilon$. За Теоремою 7.2 отримуємо існування такої константи $C > 0$ що $|f(t)| < C$ для будь-якого $t \in [0,1]$. □

Тепер покажемо, що інтегрування відносно фільтра задовольняє властивості адитивності. Для цього спочатку доведемо дві відомі леми.

Лема 7.2. *Нехай* X *– непорожня множина,* $f,g : X \to \mathbb{R}$ *– функції,* $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* X. *Нехай* $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} g$. *Тоді* $\lim\limits_{\mathfrak{F}}(f+g) = x + y$.

Доведення. Нам відомо, що $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, тобто для кожного околу $U \in \mathcal{O}(x)$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $f(A) \subset U$. Аналогічно, $y = \lim\limits_{\mathfrak{F}} g$, тобто для кожного околу $V \in \mathcal{O}(y)$ існує $B \in \mathfrak{F}$ такий, що $g(B) \subset V$. Нам треба показати, що для для довільного $W \in \mathcal{O}(x+y)$ існує $C \in \mathfrak{F}$ такий, що $(f+g)(C) \subset W$. Зафіксуємо довільний окіл $W \in \mathcal{O}(x+y)$. Тоді існують такі околи $W_1 \in \mathcal{O}(x)$, $W_2 \in \mathcal{O}(y)$, що $W \supset W_1 + W_2$. Тоді існують $C_1,\ C_2 \in \mathfrak{F}$ такі, що $f(C_1) \subset W_1$ і $f(C_2) \subset W_2$. Позначимо $C := C_1 \cap C_2$. За аксіомами фільтру, $C \in \mathfrak{F}$. Отже,

$$(f+g)(C) = f(C) + g(C) \subset W_1 + W_2 \subset W.$$

□

Лема 7.3. *Нехай X – непорожня множина, $f : X \to \mathbb{R}$ – функція, $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Нехай $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$. Тоді $\lim\limits_{\mathfrak{F}} \alpha f = \alpha x$.*

Доведення. $x = \lim\limits_{\mathfrak{F}} f$, тобто для довільного околу $U \in \mathcal{O}(x)$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $f(A) \subset U$. Покажемо, що для довільного околу $V \in \mathcal{O}(\alpha x)$ існує $B \in \mathfrak{F}$ такий, що $(\alpha f)(B) \subset V$. Випадок $\alpha = 0$ тривіальний. Далі $\alpha \neq 0$. Зауважимо, що якщо $W \in \mathcal{O}(x)$, то $\alpha W \in \mathcal{O}(\alpha x)$. Отже $B := A$. Тоді $(\alpha f)(B) = \alpha f(B) \subset \alpha U \in \mathcal{O}(\alpha x)$. □

Теорема 7.4. *Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $TP[0,1]$, $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ – функції, $f, g \in Int(\mathfrak{F})$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Тоді $(\alpha f + \beta g) \in Int(\mathfrak{F})$.*

Доведення. Достатньо використати попередні Лему 7.3 і Лему 7.2. □

7.3 Інтегрування відносно різних фільтрів

В попередньому розділі ми досліджували арифметичні властивості інтегрування по фільтру і проблеми, пов'язані з обмеженістю. Даний розділ присвячено інтегруванню відносно різних фільтрів та зв'язків між ними.

Для відміченого розбиття $(\Pi_1, T_1) \in \mathrm{TP}\,[0,1]$ і для $t \in [0,1]$ через $\ell(\Pi, T, t)$ будемо позначати довжину елемента розбиття Π, який накриває точку t.

Нехай (Π_1, T_1), (Π_2, T_2) – відмічені розбиття відрізка $[0,1]$. Розглянемо

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = \sum_{t \in T_1 \cap T_2} |\ell(\Pi_1, T_1, t) - \ell(\Pi_2, T_2, t)| + \sum_{T_1 \setminus T_2} \ell(\Pi_1, T_1, t) + \sum_{T_2 \setminus T_1} \ell(\Pi_2, T_2, t). \tag{14}$$

Для простішого використання величини, введеної в 14, розглянемо $\mathbb{F} : [0,1] \to \ell_1[0,1]$, $\mathbb{F}(t) = e_t$, де

$$e_t(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \tau = t; \\ 0, \text{ в інших випадках }. \end{cases}$$

Використовуючи відображення $\mathbb{F}$,

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)||.$$

Покажемо тепер, що відображення ρ, визначене вище, є метрикою на множині відмічених розбиттів відрізка.

Твердження 6. *Розглянемо* $TP[0,1] \times TP[0,1] \to \mathbb{R}$, $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = ||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)||$. *Тоді* ρ *задовольняє всім аксіомам метрики.*

Доведення. 1. Нехай $(\Pi_1, T_1) = (\Pi_2, T_2)$. Ясно тоді, що $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = 0$;

2. Нехай $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = 0$. Тоді

   $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) = \sum\limits_{t \in T_1 \cap T_2} |\ell(\Pi_1, T_1, t) - \ell(\Pi_2, T_2, t)| + \sum\limits_{T_1 \setminus T_2} \ell(\Pi_1, T_1, t) + \sum\limits_{T_2 \setminus T_1} \ell(\Pi_2, T_2, t) = 0$. Маємо суму невід'ємних чисел, яка дорівнює 0. Це означає, що

   - $\forall t \in T_1 \cap T_2 \ |\ell(\Pi_1, T_1, t) - \ell(\Pi_2, T_2, t)| = 0 \Rightarrow \forall t \in T_1 \cap T_2 \ \ell(\Pi_1, T_1, t) = \ell(\Pi_2, T_2, t)$;
   - $\forall t \in T_1 \setminus T_2 \ \ell(\Pi_1, T_1, t) = 0$;
   - $\forall t \in T_2 \setminus T_1 \ \ell(\Pi_2, T_2, t) = 0$;

   $\Rightarrow (\Pi_1, T_1) = (\Pi_2, T_2)$.

3. Розглянемо $(\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2), (\Pi_3, T_3)$. Тоді

$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) =$$
$$||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2) + S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3) - S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3)|| \leq$$
$$||S(\mathbb{F}, \Pi_1, T_1) - S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3)|| + ||S(\mathbb{F}, \Pi_3, T_3) - S(\mathbb{F}, \Pi_2, T_2)|| =$$
$$\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_3, T_3)) + \rho((\Pi_3, T_3), (\Pi_2, T_2))$$

$\square$

Введемо тепер одне дуже важливе поняття.

Означення 7.3. Нехай $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – фільтри $TP[0, 1]$. Будемо говорити, що фільтр $\mathfrak{F}_2$ *ρ-домінує* фільтр $\mathfrak{F}_1$ (позначаємо: $\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$), якщо для довільного $\varepsilon < 0$ і для кожного $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ існує $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ такий, що для всіх $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ існує $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ такий, що $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$.

Твердження 7. *Нехай* $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$. *Тоді* $\mathfrak{F}_2$ *ρ-домінує* $\mathfrak{F}_1$

Доведення. Оскільки $\mathfrak{F}_2 \supset \mathfrak{F}_1$, ми маємо, що якщо $A \in \mathfrak{F}_1$, то $A \in \mathfrak{F}_2$. Розглянемо довільний $\varepsilon > 0$. Тоді для кожного $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ можемо знайти $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, $A_2 := A_1$ такий, що для кожного $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ існує $(\Pi_1, T_1) \in A_1$, $(\Pi_1, T_1) := (\Pi_2, T_2)$ такий, що $\rho\left((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)\right) = \rho\left((\Pi_2, T_2), (\Pi_2, T_2)\right) = 0 < \varepsilon$. $\square$

Попереднє твердження показує, що ρ-домінування є певним відношенням порядку на $\mathrm{TP}\,[0,1]$ та є більш загальним поняттям, ніж відношення включення.

Ясно, що якщо $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ і $f \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{F}_1)$, то $f \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{F}_2)$ – для цього достатньо використати визначення границі функції за фільтром. Отже ми можемо сформулювати наступне твердження.

Твердження 8. *Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– функція,* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ *– фільтр на* $TP[0,1]$ *такий, що* $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ *і* $f \in Int(\mathfrak{F}_1)$. *Тоді* $f \in Int(\mathfrak{F}_2)$

Теорема 7.5. *Нехай* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ *– фільтри* $TP[0,1]$. *Нехай* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *– обмежена функція. Нехай* $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_1} S(f, \Pi, T)$ *і* $\mathfrak{F}_2 \succ_\rho \mathfrak{F}_1$. *Тоді* $I = \lim\limits_{\mathfrak{F}_2} S(f, \Pi, T)$

Доведення. Позначимо $C := \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Ми маємо показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $B \in \mathfrak{F}_2$ такий, що для кожного $(\Pi_B, T_B) \in B$ маємо $|S(f, \Pi_B, T_B) - I| < \varepsilon$.

За умовою ми знаємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $A \in \mathfrak{F}_1$ такий, що для кожного $(\Pi_1, T_1) \in A$ виконано $|S(f, \Pi_1, T_1) - I| < \varepsilon$.

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ і $A \in \mathfrak{F}_1$, який ми знайшли вище, можна знайти $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ такий, що для кожного $(\Pi_2, T_2) \in A_2$ існує $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ такий, що $\rho((\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2)) < \varepsilon$. Позначимо $B := A_2$. Тоді для довільного $(\Pi_B, T_B) \in B$ ми маємо $(\Pi_1, T_1) \in A_1$ такий, що

$$|S(f, \Pi_B, T_B) - I| =$$

$$|S(f, \Pi_B, T_B) - S(f, \Pi_1, T_1) + S(f, \Pi_1, T_1) - I| \leq$$

$$|S(f, \Pi_B, T_B) - S(f, \Pi_1, T_1)| + |S(f, \Pi_1, T_1) - I| =$$

$$\sum_{t \in T_B \cap T_1} |f(t)| \cdot |\ell(\Pi_B, T_B, t) - \ell(\Pi_1, T_1, t)| + \sum_{t \in T_B \setminus T_1} |f(t)| \cdot \ell(\Pi_B, T_B, t) +$$

$$\sum_{t \in T_1 \setminus T_B} |f(t)| \cdot \ell(\Pi_1, T_1, t) + \varepsilon \leq C \cdot \rho((\Pi_B, T_B), (\Pi_1, T)) + \varepsilon \leq$$

$$C\varepsilon + \varepsilon \leq \varepsilon(1 + C).$$

□

7.4 Точно відмічені фільтри

В цьому розділі ми розглянемо питання, пов'язані з інтегруванням по фільтру необмежених функцій.

Означення 7.4. Нехай $\mathfrak{B}$ – база фільтра на TP $[0,1]$. Будемо говорити, що база $\mathfrak{B}$ є *точно відміченою*, якщо існує підмножина $A \subset [0,1]$ – строго спадаюча послідовність чисел така, що для довільного $B \in \mathfrak{B}$ і для довільного $(\Pi, T) \in \mathfrak{B}$ виконано $T \cap A = \emptyset$.

Означення 7.5. Говоримо, що фільтр $\mathfrak{F}$ на TP$[0,1]$ є *точно відміченим*, якщо існує точно відмічена база фільтра $\mathfrak{B}$ для $\mathfrak{F}$.

Теорема 7.6. *Якщо фільтр* $\mathfrak{F}$ *на* $TP[0,1]$ *є точно відміченим, то існує необмежена функція* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *така, що* $f \in Int(\mathfrak{F})$.

Доведення. Позначимо $\mathbb{N}^{-1} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ і розглянемо наступну базу фільтра $\mathfrak{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на $\mathrm{TP}[0,1]$:

$$B_1 = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ і } d(\Pi) < 1\right\};$$

$$B_2 = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ і } d(\Pi) < \frac{1}{2}\right\};$$

...

$$B_m = \left\{(\Pi, T) : T \cap \mathbb{N}^{-1} = \emptyset \text{ і } d(\Pi) < \frac{1}{m}\right\}.$$

Розглянемо тепер функцію

$$f(t) = \begin{cases} n, \text{ якщо } t = \dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}.$$

Тоді для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $(\Pi, T) \in B_n$ маємо $S(f, \Pi, T) = 0$, а отже і $\lim\limits_{\mathfrak{B}} S(f, \Pi, T) = 0$. Тобто $\displaystyle\int_0^1 f d\mathfrak{F} = 0$. □

Для відміченого розбиття (Π, T) відрізка $[0,1]$ і $\tau \in [0,1]$ позначимо через $\ell(\Pi, T, \tau)$ довжину того відрізка $\Delta \in \Pi$ для якого $\tau \in \Delta$, якщо $\tau \in T$; якщо ж $\tau \notin T$, тоді $\ell(\Pi, T, \tau) = 0$. Використовуючи таку нотацію,

$$S(f, \Pi, T) = \sum_{t\in[0,1]} f(t)\ell(\Pi, T, t).$$

Попереднє позначення є дуже зручним, оскільки тепер під інтегральною сумою ми маємо суму по всім точкам відрізка $[0,1]$.

Теорема 7.7. *Для фільтра* $\mathfrak{F}$ *на* $TP[0,1]$ *наступні твердження є еквівалентними:*

1. *існує необмежена функція* $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ *така, що* $S(f,\Pi,T)$ *є* $\mathfrak{F}$*-обмеженою;*
2. *існує злічення множина* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$*, та існує* $A\in\mathfrak{F}$ *такі, що для кожного відміченого розбиття* $(\Pi,T)\in A$ *виконано*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\cdot \ell(\Pi,T,t_n)<1.$$

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2): нехай f – невід'ємна, необмежена функція на $[0,1]$ така, що існує $C>0$ і $B\in\mathfrak{F}$ такі, що для кожного $(\Pi,T)\in B$ $\sum\limits_{t\in[0,1]} f(t)\ell(\Pi,T,t)<C$. Оскільки f є необмеженою, то існує послідовність точок $(\alpha_n)\subset[0,1]$ така, що для довільного $n\in\mathbb{N}$ $f(\alpha_n)>C\cdot n$. Для цих $(\alpha_n)\subset[0,1]$, $C>0$, та $A\in\mathfrak{F}$, $A:=B$, і для кожного $(\Pi,T)\in A$ маємо

$$\sum_{t\in[0,1]} n\cdot \ell(\Pi,T,\alpha_n)\le\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(\alpha_n)}{C}\cdot\ell(\Pi,T,\alpha_n)\le$$
$$\frac{1}{C}\sum_{t\in[0,1]} f(t)\cdot\ell(\Pi,T,t)<\frac{1}{C}\cdot C=1.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): нехай існує злічення підмножина $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1]$ і $C>0$ для яких існує $A\in\mathfrak{F}$ такий, що для кожного $(\Pi,T)\in A$ має місце нерівність $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\cdot\ell(\Pi,T,t_n)<C$.

Розглянемо функцію

$$f(t) = \begin{cases} n, \text{ якщо } t = \alpha_n, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ якщо } t \neq \alpha_n \end{cases}.$$

Очевидно, функція f є необмеженою. Тоді для обраного вище $C > 0$ та $B \in \mathfrak{F}$, $B := A$ отримуємо, що для довільного відміченого розбиття $(\Pi, T) \in A$

$$\sum_{t \in [0,1]} f(t) \cdot \ell(\Pi, T, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\alpha_n) \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \ell(\Pi, T, \alpha_n) < C$$

. $\square$

7.5 Інтегрування відносно фільтра по підвідрізку

Наша наступна мета полягає в тому, аби показати, що якщо функція є інтегровною відносно фільтра по відрізку, то вона ж буде інтегровною відносно цього самого фільтра по будь-якому підвідрізку даного відрізка.

Аби досягти цього, нам потрібно побудувати обмеження фільтра $\mathfrak{F}$ на довільний підвідрізок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$

Розглянемо довільний $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Будемо розглядати тільки такі T, що $T \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$. Розглянемо тепер довільне відмічене розбиття $(\Pi, T) \in \mathrm{TP}[0, 1]$. Ми маємо чотири можливих конфігурації:

1. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$
   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$;

2. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \max\{\Pi \cap (0, \alpha)\}$

   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$;

3. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}$

   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \min\{\Pi \cap (\beta, 1)\}$;

4. $\min\{T \cap (\alpha, \beta)\} > \max\{\Pi \cap (0, \alpha)$

   $\max\{T \cap (\alpha, \beta)\} < \min\{\Pi \cap (\beta, 1)\}$.

Тепер побудуємо обмеження розбиття (Π, T) на $[\alpha, \beta]$. У кожному з наступних випадків ми маємо такі $(\Pi_k, T_k) \in \mathrm{TP}\,[\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, 3, 4$:

1. $\Pi_1 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup (\Pi \cap (\beta, 1)) \cup \min\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\} \cup \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\}\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$

   $T_1 = T \setminus \big((T \cap [0, \alpha)) \cup (T \cap (\beta, 1])\big)$;

2. $\Pi_2 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup \max\{\Pi \cap (\alpha, \beta)\} \cup (\Pi \cap (\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$

   $T_2 = T_1$;

3. $\Pi_3 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup \min\{\Pi \cap (\alpha)\} \cup (\Pi \cap [\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$

   $T_3 = T_1$;

4. $\Pi_4 = \Big(\Pi \setminus \big((\Pi \cap [0, \alpha)) \cup (\Pi \cap [\beta, 1))\big)\Big) \cup \{\alpha, \beta\}$

   $T_4 = T_1$.

Тепер, якщо $\mathfrak{F}$ – деякий фільтр на $\mathrm{TP}[0, 1]$, ми можемо побудувати фільтр $\mathfrak{F}_{[\alpha,\beta]}$ на $\mathrm{TP}\,[\alpha, \beta]$, індукований $\mathfrak{F}$, наступним чином: беремо довільний $A \in \mathfrak{F}$ і для кожного $(\Pi, T) \in A$ виконуємо описаний вище алгоритм.

Для $A \in \mathfrak{F}$ позначимо через A_α^β обмежена A на $[\alpha, \beta]$ в описаному вище сенсі.

Означення 7.6. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на (Π, T), $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Говоримо, що $\mathfrak{F}$ є $[\alpha, \beta]$-*доповненим*, якщо для кожного $A \in \mathfrak{F}$, для кожного (Π_1, T_1), $(\Pi_2, T_2) \in A_\alpha^\beta$ існують$(\Pi^*, T^*) \in TP[0, \alpha]$ і $(\Pi^{**}, T^{**}) \in TP[\beta, 1]$ такі, що

$$(\Pi^*, T^*) \cup (\Pi_1, T_1) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A,$$

$$(\Pi^*, T^*) \cup (\Pi_2, T_2) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A.$$

Далі ми формулюємо і доводимо обіцяний результат про інтегрування функції за підвідрізком.

Теорема 7.8. *Нехай* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *– функція,* $\mathfrak{F}$ *– фільтр на* $TP[0, 1]$ *такий, що для довільного* $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ $\mathfrak{F}$ *є* $[\alpha, \beta]$*-доповненим. Нехай* f *інтегровна на* $[0, 1]$ *по фільтру* $\mathfrak{F}$*. Тоді для довільного* $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ *функція* f *є інтегровною на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *відносно фільтра* $\mathfrak{F}$*.*

Доведення. Ми маємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що кожних $(\Pi_1, T_1), (\Pi_2, T_2) \in A$ виконується $|S(f, \Pi_1, T_1) - S(f, \Pi_2, T_2)| < \varepsilon$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо довільний відрізок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Для $A \in \mathfrak{F}$ розглянемо довільні розбиття $(\Pi^1, T^1), (\Pi^2, T^2) \in A_\alpha^\beta$. Оскільки $\mathfrak{F}$ є $[\alpha, \beta]$-доповненим, ми можемо знайти такі $(\Pi^*, T^*) \in A_0^\alpha$ і $(\Pi^{**}, T^{**}) \in A_\beta^1$, що $(\Pi_{11}, T_{11}) := (\Pi^*, T^*) \cup (\Pi^1, T^1) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A$ та $(\Pi_{22}, T_{22}) := (\Pi^*, T^*) \cup (\Pi^2, T^2) \cup (\Pi^{**}, T^{**}) \in A$. Тоді $\varepsilon > |S(f, \Pi_{11}, T_{11}) - S(f, \Pi_{22}, T_{22})| = |S(f, \Pi^1, T^1) - S(f, \Pi^2, T^2)|$. $\square$

7.6 Висновки до розділу

Даний розділ дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтеграла Рімана.

- Було запропоновано поняття інтеграла функції по відрізку відносно фільтра.

- Показано, що нове поняття є узагальненням класичного інтеграла Рімана.

- Досліджено властивості інтегрування функції по фільтру. Зокрема показано, що такий інтеграл є лінійною та однорідною операцією.

- Вивчено питання інтегрування функції відносно різних фільтрів та зв'язок між цими фільтрами.

- Наведено приклад фільтра та необмеженої функції, яка може бути проінтегрована відносно цього фільтра.

Результати цього розділу опубліковано в статті [29].

8 Висновки до дисертації

Дисертаційна робота пов'язана із дослідженням фільтрів та їхніми застосуваннями до різноманітних областей математики, зокрема, у математичному та функціональному аналізі. Ми вивчаємо властивості різноманітних класів фільтрів, пов'язаних з ними об'єктів таких, як ідеали, бази фільтрів, збіжність послідовності за фільтром тощо.

Перший розділ присвячено короткому огляду історії питання, наведено означення основних понять, яким присвячено дисертацію. Також у першому розділі сформульовано основні властивості досліджуваних нами об'єктів, а саме критерій ультрафільтра, критерій компактності в термінах ультрафільтрів, теорему про те, що фільтр є перетином всіх ультрафільтрів, які його мажорують та інші. Перший розділ містить перелік поставлених перед дисертантом задач, розв'язок яких міститься в наступних розділах дисертаційної роботи.

Другий розділ дисертації повністю присвячено вивченню деяких властивостей фільтрів та ультрафільтрів. А саме

- Нами досліджено клас фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою. Статистичною мірою називають невід'ємну скінченно-адитивну міру на сім'ї всіх підмножин натурального ряду таку, що $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і $\mu(\{k\}) = 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Кажуть, що фільтр можна задати однією статистичною мірою μ, якщо його елементами є такі множини $A \subset \mathbb{N}$, що $\mu(A) = 1$.

- Введено поняття бідного фільтра та конгломерованого фільтра, які дозволяють отримати просту достатню умову того, що фільтр не можна задати однією статистичною мірою.

- На основі отриманого результату було показано, що такі фільтри, як фільтр Фреше, фільтр статистичної збіжності, фільтр Ердеша-Улама, фільтр підсумовування – є фільтрами, які не можна задати однією статистичною мірою.

- Було уточнено відомий факт про те, що будь-який фільтр може бути представлено у вигляді перетину всіх ультрафільтрів, які його містять. Було доведено, що можна обрати таку сім'ю ультрафільтрів потужності не більше, ніж континуум.

- Розв'язано питання єдиності представлення фільтра у вигляді перетину сім'ї ультрафільтрів. Показано, що якщо фільтр є перетином скінченного числа ультрафільтрів, то таке представлення єдине. Якщо ж фільтр є перетином нескінченного числа ультрафільтрів, то таке представлення не єдине.

Третій розділ дисертаційної роботи пов'язано із поняттям, яке є двоїстим до поняття фільтра, а саме, з ідеалом та його властивостями.

- Вивчено поняття граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала на множині натуральних чисел. Це поняття є узагальненням відомого поняття граничних точок послідовності у метричному просторі.

- Показано, що для локально опуклих просторів ядро ідеала послідовності елементів топологічного векторного простору співпадає із замиканням опуклої оболонки множини граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала.

У четвертому розділі дисертаційної роботи ми знову досліджуємо властивості ідеалів, але з іншої точки зору. Розділ присвячено вивченню статистичних ідеалів та їх узагальненню – f-статистичних ідеалів, де f – модульна функція. Центральним результатом даного розділу є опис класу модульних функцій, для яких f-ідеал співпадає зі статистичним ідеалом.

П'ятий розділ дисертації присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії топологічних векторних просторів. Зокрема, було отримано такі результати:

- Було введено ряд визначень повноти топологічного векторного простору, які узагальнюють раніше відомі типи повноти. Зокрема, запропоновано поняття повноти простору відносно фільтра на $\mathbb{N}$ (повнота відносно фільтра), відносно всіх фільтрів на $\mathbb{N}$ (зліченна повнота).

- Отримано ряд результатів, пов'язаних з дослідженням введених понять та їх зв'язків з раніше відомими визначеннями повноти.

Останній, шостий розділ дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтеграла Рімана.

- Було запропоновано поняття інтеграла функції по відрізку відносно фільтра.

- Показано, що нове поняття є узагальненням класичного інтеграла Рімана.
- Досліджено властивості інтегрування функції по фільтру. Зокрема показано, що такий інтеграл є лінійною та однорідною операцією.
- Вивчено питання інтегрування функції відносно різних фільтрів та зв'язок між цими фільтрами.
- Наведено приклад фільтра та необмеженої функції, яка може бути проінтегрована відносно цього фільтра.

Всі результати дисертаційної роботи наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Результати мають теоретичний характер, і розширюють наші знання про фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування.

9 Список використаних джерел

[1] A. Aizpuru, M. C. Listán-García, F. Rambla-Barreno, Density by moduli and statistical convergence. Quaest. Math. 2014. Vol. 37, №. 4. P. 525–530. DOI: 10.2989/16073606.2014.894682

[2] L. Bao, L. Cheng, On statistical measure theory. J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 407. №. 2. P. 413–424. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.05.039

[3] T. Bartoszyński, H. Judah, Set Theory: on the Structure of the Real Line. A.K. Peters, Ltd., Wellesley, MA. 1995. 560 p. https://doi.org/10.1201/9781439863466

[4] B. De Bondt; H. Vernaeve, Filter-dependent versions of the uniform boundedness principle. J. Math. Anal. Appl. 2021. Vol. 495, №. 1. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124705

[5] N. Bourbaki, Éléments de mathématique. Les structures fondamentales de l'analyse. 3. Topologie générale. 1940. Hermann and Cie, Paris, 129 p.

[6] H. Cartan, Téorie des filtres. C. R. Acad. Sci, Paris. 1937. Vol. 205, P. 595–598.

[7] H. Cartan, Filtres et ultrafiltres. C. R. Acad. Sci, Paris. 1937. Vol. 205. P. 777–779.

[8] L. Cheng, G. Lin, H. Shi, On real-valued measures of statistical type and their applications to statistical convergence. Math. Comput. Model. 2009. Vol. 50. P. 116–122. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2009.04.004.

[9] L. Cheng, L.H. Lin, X.G. Zhou, Statistical convergence and measure convergence generated by a single statistical measure. Acta Math. Sin. Engl. Ser. 2016. Vol. 32. P. 668–682, DOI: 10.1007/s10114-016-5025-2.

[10] W. W. Comfort, S. Negrepontis, Chain Conditions in Topology. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press. 1982. Vol. 79. 1982. 300 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511897337

[11] J. Connor, M. Ganichev, V. Kadets, A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 244. №. 1. P. 251 - 261. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.6725

[12] E. K. van Douwen, Finitely additive measures on $\mathbb{N}$. Topol. Appl. 1992. Vol. 47. P. 223–268. https://doi.org/10.1016/0166-8641(92)90032-U

[13] H. Fast, Sur la convergence statistique. Colloq. Math. 1951. Vol. 2. P. 241-244. https://doi.org/10.4064/cm-2-3-4-241-244

[14] D. H. Fremlin, Measure Theory. Torres Fremlin 2003. Vol. 4. 102 p.

[15] J. A. Fridy, C. Orhan, Statistical core theorems. J. Math. Anal. Appl. 1997. Vol. 208. P. 520-527. https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5350

[16] J. A. Fridy, C. Orhan, Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math.Soc. 1997. Vol. 125. P. 3625-3631. https://www.jstor.org/stable/2162264

[17] H. Gaifman, Concerning measures on Boolean algebras. Pac. J. Math. 1964. Vol. 14. 61–73. DOI: 10.2140/pjm.1964.14.61

[18] W. Just, A. Krawczyk, On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$. Trans. Am. Math. Soc. 1984. Vol. 285. P. 411–429. https://doi.org/10.2307/1999489

[19] V. Kadets. Weak cluster points of a sequence and coverings by cylinders. Mat. Fiz. Anal. Geom. 2004. Vol. 11. №. 2. P. 161 – 168. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0312131

[20] V. Kadets, A course in Functional Analysis and Measure Theor: Translated from the Russian by Andrei Iacob. Universitext. Cham: Springer. 2018. 539 p. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-92004-7

[21] V. Kadets, Statistical convergence cannot be generated by a single statistical measure. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University Ser., Math., Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 84. P. 4–8. DOI: 10.26565/2221-5646-2016-84-01

[22] V. Kadets, D. Seliutin, On relation between the ideal core and ideal cluster points. J. Math. Anal. Appl. 2020. Vol. 492. №. 1. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124430

[23] V. Kadets, D. Seliutin, J. Tryba, Conglomerated filters and statistical measures. J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 509. №. 1. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125955

[24] V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$. Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin. 2022. Vol. 28. №. 4. DOI: 10.36045/j.bbms.210512

[25] P. Leonetti, Characterizations of the ideal core. J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 477. №. 2. P. 1063–1071. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.05.001

[26] P. Leonetti and F. Maccheroni, Characterizations of Ideal Cluster Points, Analysis (Berlin). 2019. Vol. 39. №. 1. P. 19–26. DOI: 10.1515/anly-2019-0001

[27] M.C. Listán-García, f-statistical convergence, completeness and f-cluster points. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2016. Vol. 23. P. 235–245. DOI: 10.36045/bbms/1464710116

[28] D. Seliutin, On relation between statistical ideal and ideal generated by a modulus function, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2022. Vol. 95. P. 23-30. DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95

[29] D. Seliutin. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2023. Vol. 98. P. 25-35. DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02.

[30] M. Talagrand, Filtres non mesurables et compacts de fonctions mesurables. Stud. Math. 1980. Vol. 67. P. 13–43. http://eudml.org/doc/218303

[31] G. Tomkowicz, S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox. Second edition, Cambridge University Press. 2016. 366 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781107337145

[32] D. Seliutin. On some properties of filters. XVI International *Scientific Conference of Students and Young Scientists "Modern Problems of Mathematics and its Application in Natural Sciences and Information Technologies"*. 2021 March, 13-14.

[33] D. Seliutin. Relations between the ideal core and the ideal cluster point. *nternational Scientific Internet Conference of Young Researchers "Innovation in Science: Modern Dimension"*I. April 22, 2021. P. 25-26.

[34] D. Seliutin. A generalization of completeness of topological vector spaces. *International conference on complex and functional analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytsky*. September 13-16, 2021, Drohobych, Ukraine.

[35] D. Seliutin. On relations between statistical ideal and ideal generated by a modulus function. *The International Online Conference "Current trends in abstract and applied analysis"*. May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine.

[36] Д. Селютін, Про застосування фільтрів в теорії інтегрування. *XVIII Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях"*. 2023. Харків.

[37] Д. Селютін, Про перетин сімейств ультрафільтрів, *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики — 2023"*. 2023. Львів.

Додаток А

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

1. D. Seliutin. On relation between statistical ideal and ideal generated by a modulus function. Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2022. Vol. 95. P. 23-30.

   DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95

   Key words: ideal, statistical ideal, modulus function.

2. D. Seliutin. On integration with respect to filter, Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2023. Vol. 98. P. 25-35.

   DOI: 10.26565/2221-5646-2023-98-02

   Key words: filter, ideal, filter base, integral.

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. V. Kadets, D. Seliutin. Completeness in topological vector spaces and filters on $\mathbb{N}$. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin. 2022. Vol. 28. №. 4. P. 531-545.

   DOI: 10.36045/j.bbms.210512. (Scopus Q3)

   Key words: topological vector scape, completeness, filter, ideal, f-statistical convergence.

(Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить теореми 3.3, 3.4 про зв'язок різних типів повноти в загальних топологічних векторних просторах; теорема 4.15 про секвенціальну, але не обмежену повноту простору ℓ_1 зі слабкою топологією. Особистий внесок співавтора: співавтору належить постановка задачі, теорема 4.6 про існування неповного топологічного векторного простору із потужністю континуум, який є зліченно повним, теорема 4.8 про обмежену зліченну повноту, теореми 4.10, 4.12 про локально опуклі простоти, розділ 5).

4. V. Kadets, D. Seliutin, J. Tryba, Conglomerated filters and statistical measures. J. Math. Anal. Appl. 2022. Vol. 509. №. 1. Article number 125955.

   DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.125955.(Scopus Q1)

   Key words: filter convergence, statistical convergence, statistical measure, ideal of sets, ultrafilter.

   (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належить теорема 2.5 — достатня умова того, що фільтр не можна задати однією статистичною мірою; здобувачем було перевірено, що фільтр Фреше, фільтр підсумовування, фільтр Ердеша-Улама не можна задати однією статистичною мірою; здобувачеві належить також теорема 3.4, леми 3.5, 3.6, теорема 3.7. Особистий внесок співавторів: співавтору V. Kadets належить загальна постановка задачі, теорема 3.9,

лема 3.10, теорема 3.11, означення тіп-представлення та всі теореми, пов'язані із цим поняттям; співавтору J. Tryba належить твердження 2.11, теорема 2.12, розділ 4).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

5. Seliutin D. On some properties of filters. XVI International *Scientific Conference of Students and Young Scientists "Modern Problems of Mathematics and its Application in Natural Sciences and Information Technologies"*. 2021 March, 13-14.

6. Seliutin D. Relations between the ideal core and the ideal cluster point. *nternational Scientific Internet Conference of Young Researchers "Innovation in Science: Modern Dimension"*I. April 22, 2021. P. 25-26.

7. Seliutin D. A generalization of completeness of topological vector spaces. *International conference on complex and functional analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytsky*. September 13-16, 2021, Drohobych, Ukraine.

8. Seliutin D. On relations between statistical ideal and ideal generated by a modulus function. *The International Online Conference "Current trends in abstract and applied analysis"*. May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine.

9. Селютін Д. Про застосування фільтрів в теорії інтегрування. *XVIII Міжнародна науково-практична конференція "Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях"*. 2023. Харків.

10. Селютін Д. Про перетин сімейств ультрафільтрів, *Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики – 2023"*. 2023. Львів.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертаційної роботи:

11. V. Kadets, D. Seliutin. On relation between the ideal core and ideal cluster points. J. Math. Anal. Appl. 2020. V.492. №1. Article number 124430. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124430.(Scopus Q1)

    Key words: ideal, filter, ideal core, statistical convergence.

    (Особистий внесок здобувача: здобувачеві належать леми 2.2, 2.3 – результати, в яких показано зв'язок між ядром відносно до ідеалу та множиною граничних точок відносно ідеалу для у випадку довільних топологічних векторних просторів Особистий внесок співавтора: співавтору належить загальна постановка задачі, лема 3.1, означення 3.2, лема 3.3, теорема 3.4, розділ 4).

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 21:53:44 28.05.2024

Назва файлу з підписом: Thesis.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 617.4 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Thesis.pdf
Розмір файлу без підпису: 623.8 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: СЕЛЮТІН ДМИТРО ДМИТРОВИЧ
П.І.Б.: СЕЛЮТІН ДМИТРО ДМИТРОВИЧ
Країна: Україна
РНОКПП: 3539109857
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 21:53:43 28.05.2024
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000001F3B6101D4442105
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2024.04.15 13:00