АНОТАЦІЯ

Селютін Д.Д. Фільтри, узагальнені види збіжностей та їхні застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2024.

Дисертацію присвячено дослідженню фільтрів, їхніх властивостей, та їх застосувань до різноманітних розділів математики, зокрема теорії топологічних векторних просторів, загальної топології, теорії інтегрування.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено історії вивчення питань, розглянутих в дисертації, та огляду літератури. Описано основні конструкції, про які йтиме мова протягом всієї дисертації. Також сформульовано основні відомі результати, які буде використано в наступних розділах.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню властивостей фільтрів та ультрафільтрів на множині натуральних чисел.

Нагадаємо, що фільтр $\mathfrak{F}$ на множині Ω – це сім'я підмножин така, що:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \supset A$, то $D \in \mathfrak{F}$

Ідеал $\mathfrak{I}$ на множині Ω – це сім'я підмножин така, що:

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$;
2. якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cup B \in \mathfrak{F}$;
3. якщо $A \in \mathfrak{F}$, $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{F}$

Ультрафільтром на множині Ω називають максимальний за включенням фільтр.

Через $\mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ будемо позначати ідеал, породжений фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{A \subset \Omega : \ \Omega \setminus A \in \mathfrak{F}\}.$$

Статистичною мірою на сім'ї множин $2^{\mathbb{N}}$ називають скінченно-адитивну міру, таку, що $\mu(\mathbb{N}) = 1$ і $\mu(\{k\}) = 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Кажуть, що фільтр $\mathfrak{F}$ на множині $\mathbb{N}$ задано однією статистичною мірою μ, якщо

$$\mathfrak{F} = \{A \subset \mathbb{N} : \ \mu(A) = 1\}.$$

Для фільтра $\mathfrak{F}$ його *коідеалом* називають

$$\mathfrak{F}^+ = 2^{\mathbb{N}} \setminus \mathfrak{I}(\mathfrak{F}) = \{B \in 2^{\mathbb{N}} : \forall A \in \mathfrak{F} \ \ B \cap A \neq \emptyset\}$$

В розділі було введено декілька корисних технічних понять.

Для заданого фільтра $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ говоримо, що $A, B \in \mathfrak{F}^+$ $\mathfrak{F}$*-майже не перетинаються* (є $\mathfrak{F}$-майже неперетинними), якщо $A \cap B \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$.

Означення. Будемо називати фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ *бідним*, якщо довільна попарно $\mathfrak{F}$-майже неперетинна сім'я $A = \{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{F}^+$ є не більш, ніж зліченною.

Означення. Будемо говорити, що фільтр $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$ є *конгломерованим*, якщо існує неперетинна послідовність $(D_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$ така, що для довільної нескінченної множини $M \subset \mathbb{N}$ маємо $\bigcup\limits_{n \in M} D_n \in \mathfrak{F}^+$.

Одним з основних результатів розділу є теорема, яка надає широкий клас фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою.

Теорема. *Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ є конгломерованим, то він не є бідним, а отже його не можна задати однією статистичною мірою.*

З цієї теореми ми одразу отримуємо, що такі фільтри, як фільтр Фреше, статистичний фільтр, фільтр Ердеша-Улама, фільтр підсумовування тощо є фільтрами, які не можна задати однією статистичною мірою.

Також в розділі отримано ряд результатів, пов'язаних із властивостями перетинів сімейств фільтрів та ультрафільтрів. Відомим є той факт, що будь-який фільтр є перетином всіх ультрафільтрів, які його містять. Нам вдалося отримати ряд уточнень даної теореми, зокрема такий результат.

Теорема. *Нехай $\mathfrak{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді існує сім'я ультрафільтрів W на $\mathbb{N}$, потужності не більше, ніж континуум і така, що*

$$\mathfrak{F} = \cap W,$$

де $\cap W = \{B \subset \mathbb{N} : \ B \in U \ \forall U \in W\}$.

Далі було розглянуто питання єдиності представлення фільтра у вигляді перетину скінченного та нескінченного сімейств ультрафільтрів. Докладніше: представлення фільтра у вигляді перетину скінченної множини ультрафільтрів є єдиним, а якщо фільтр є перетином зліченного числа ультрафільтрів, то таке представлення не єдине.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи ми вивчаємо ідеали на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Докладніше: нехай $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині $\mathbb{N}$, тобто, $\emptyset \in \mathfrak{I}$, якщо $A, B \in \mathfrak{I}$, то $A \cup B \in \mathfrak{I}$, і якщо $A \in \mathfrak{I}$, $D \subset A$, то $D \in \mathfrak{I}$. Для топологічного векторного простору X і послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ розглянемо множину $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності

$$\Gamma_x(\mathfrak{I}) = \{y \in X : \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \notin \mathfrak{I}, \ \forall U \in \mathcal{O}(y)\},$$

де $\mathcal{O}(y)$ – система околів точки y.
P. Leonetti в роботі [25] ввів поняття ядра відносно до ідеалу $\mathfrak{I}$ послідовності $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\mathrm{core}_x(\mathfrak{I}) = \bigcap_{E\in\mathfrak{F}(\mathfrak{I})} \overline{\mathrm{co}}\{x_n : n \in E\},$$

де $\overline{\mathrm{co}}$ – замикання опуклої оболонки, а $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ – фільтр, породжений ідеалом $\mathfrak{I}$. Центральним результатом роботи [25] є наступна теорема.

Теорема. *Нехай X – локально опуклий топологічний векторний простір, який задовольняє першій аксіомі зліченності, $(x_n) \subset X$ – послідовність. Нехай існує такий елемент $E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, що $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ – компакт. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I}). \tag{1}$$

В розділі було введено технічне визначення.

Означення. Нехай X – топологічний векторний простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{F}$ – фільтр на множині $\mathbb{N}$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X. Назвемо послідовність x *$\mathfrak{F}$-асимптотично K-контрольовною*, якщо для будь-якого околу $U \in \mathcal{O}(0)$ існує елемент $E = E(K, U) \in \mathfrak{F}$ такий, що $x(E) \subset K + U$. Будемо позначати цю умову

$$x \prec_{\mathfrak{F}} K.$$

Одна із основних задач, розв'язаних у даному розділі, полягає в тому, що результат Leonetti було поширено для просторів, які не задовольняють першій аксіомі зліченності, тобто ця теорема має місце для більш широкого класу просторів. Цей результат є наслідком наступної теореми.

Теорема. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт, $\mathfrak{I}$ – ідеал на $\mathbb{N}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Тоді*

$$\overline{co}\,\Gamma_x(I) = core_x(\mathfrak{I}).$$

Наслідок. *(Посилення теореми Leonetti) Нехай $x = (x_n)$ – послідовність елементів у локально опукло топологічному векторному просторі X така, що $\overline{x(E)}$ є компактом для деякого елемента фільтра $E \in \mathfrak{I}(\mathfrak{F})$. Тоді $core_x(I) = \overline{co}\,\Gamma_x(\mathfrak{I})$.*

Також в розділі досліджено питання застосування отриманих результатів до компактних множин у слабкій топології, а саме доведено наступну теорему.

Наслідок. *Нехай X – локально опуклий простір, $K \subset X$ – компакт у слабкій топології, $\mathfrak{I}$ – ідеал на множині натуральних чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{I})$, $x = (x_n)$ – послідовність елементів простору X така, що $x \prec_{\mathfrak{F}} K$. Позначимо $\Gamma_x^w(\mathfrak{I})$ – множину $\mathfrak{I}$-граничних точок послідовності у слабкій топології. Тоді*

$$core_x(\mathfrak{I}) = \overline{co}\,\Gamma_x^w(\mathfrak{I}).$$

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню одного, проте досить широкого класу ідеалів, а саме ідеалів, породжених модульними функціями. Нагадаємо, що статистичним ідеалом $\mathfrak{I}_s$, або ідеалом статистичної збіжності називають наступну непорожню сім'ю множин:

$$\mathfrak{I}_s = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\},$$

де $d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|A \cap [1, n]|}{n}$ – щільність підмножини $A \subset \mathbb{N}$.

Функцію $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ називають модульною функцією, якщо вона задовольняє наступним аксіомам:

1. $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}^+$;
3. $f(x) \leq f(y)$, якщо $x \leq y$;
4. f – неперервна справа в нулі;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

Модульна функція f породжує ідеал $\mathfrak{I}_f$ на множині натуральних чисел, який називають f-ідеалом:

$$\mathfrak{I}_f = \{A \subset \mathbb{N} : d_f(A) = 0\},$$

де $d_f(A) = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(|A \cap [1, n]|)}{f(n)}$ – f-щільність множини A.

Ясно, що якщо f – тотожна функція, то $d_f(A) = d(A)$.

В роботі [1] A. Aizpuru, M. C. Listán-García, F. Rambla-Barreno показали, що $\mathfrak{I}_f \subset \mathfrak{I}_s$, для довільної модульної функції f. Головним результатом даного розділу дисертації було дати повний опис таких модульних функцій f, для яких $\mathfrak{I}_f = \mathfrak{I}_s$.

Нехай f – модульна функція, $t \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Для зручності будемо використовувати такі позначення:

$$h_f(t) := \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(tn)}, \ g_f(k) := h_f(2^k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{f(2^k n)}.$$

Було доведено наступну теорему.

Теорема. *Нехай f – модульна функція. Наступні твердження є еквівалентними:*

1. $\mathfrak{I}_s = \mathfrak{I}_f$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} g_f(k) = 0$;
3. $\lim\limits_{t\to\infty} h_f(t) = 0$.

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи ми вивчаємо застосування теорії фільтрів до теорії топологічних векторних просторів. Повнота простору є одним із найважливіших понять не тільки в теорії топологічних векторних просторів, а й взагалі в математиці. Саме тому природною є задача узагальнення цього поняття для просторів, які не мають метричної структури, в яких ми не можемо користуватися мовою збіжностей послідовностей у стандартному сенсі цього слова. Тому в даному розділі ми вводимо цілу низку узагальнень поняття повноти простору мовою фільтрів, аналізуємо зв'язок введених понять з раніше відомими, та досліджуємо властивості нових видів повноти простору.

Нагадаємо стандартне визначення повного топологічного векторного простору.

Означення. Фільтр $\mathfrak{F}$ топологічного векторного простору X називають фільтром Коші, якщо для довільного $U \in \mathcal{O}(0)$ існує $A \in \mathfrak{F}$ такий, що $A - A \subset U$.

Означення. Топологічний векторний простір X називають повним, якщо довільний фільтр Коші на X має границю.

Нами запропоновано такі узагальнення повноти топологічного векторного простору:

Означення. Нехай $\mathfrak{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$, X – топологічний векторний простір. Будемо називати простір X *повним відносно фільтру* $\mathfrak{F}$, якщо кожна послідовність Коші відносно фільтру $\mathfrak{F}$ на X має границю відносно $\mathfrak{F}$.

Означення. Назвемо топологічний векторний простір X *зліченно-повним*, якщо X є повним для всіх фільтрів $\mathfrak{F}$ на $\mathbb{N}$.

Означення. Топологічний векторний простір X назвемо *асимптотично зліченний*, якщо для будь-якого фільтру Коші $\mathfrak{F}$ на X існує зліченна підмножина $A \subset X$ така, що для будь-яких $U \in \mathcal{O}(0)$ і $B \in \mathfrak{F}$ виконано: $A \cap (B + U) \neq \emptyset$.

Одним із найцікавіших результатів даного розділу є наступна теорема.

Теорема. *За умови виконання аксіоми Мартіна існують вільні ультрафільтри $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ на $\mathbb{N}$ та існує такий топологічний векторний простір X, що X є повним відносно $\mathfrak{U}_1$, але X не є повним відносно $\mathfrak{U}_2$.*

Шостий розділ дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтегрування. Ми розглядаємо звичайну одновимірну, дійснозначну функцію $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Нами побудовано конструкцію, яку ми назвали інтегралом функції f по фільтру на множині відмічених розбиттів $\mathfrak{F}$ відрізка $[0,1]$:

$$\int_0^1 f d\,\mathfrak{F}\,.$$

Ми показали, що звичайний інтеграл Рімана функції на відрізку є частковим випадком описаного вище поняття. Досліджено властивості інтеграла функції по фільтру, зокрема такий інтеграл задовольняє властивості лінійності та однорідності, має місце аналог результату про те, що якщо функція інтегровна за Ріманом, то вона обмежена. Вивчено можливість інтегрування функції відносно фільтра по підвідрізку фіксованого відрізка. Описано цікаві результати, присвячені інтегралу по фільтру від необмежених функцій.

Ключові слова: фільтри, ідеали, загальна топологія, функції, інтеграл, збіжність, повнота, топологічні векторні простори, локально-опуклі простори, міра, банахові простори, властивість Бера, гільбертові простори, послідовність, компактність.