Голові разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

**Рецензія**

офіційного рецензента, доцента кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, кандидата фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз) Гефтера Сергія Леонідовича на дисертаційну роботу Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

## 1. Актуальність теми дослідження

В дисертації досліджуються фільтри, деякі їхні властивості і класи, та застосування фільтрів до різних розділів математики, зокрема теорії топологічних векторних просторів, загальної топології, теорії інтеграла Рімана. Основні результати дисертації пов’язані з глибоким аналізом застосування фільтрів до поняття збіжності послідовностей у загальних топологічних векторних просторах, дослідженням поняття повноти цих просторів з точки зору фільтрів на множині натуральних чисел, і побудовою концепції інтеграла, аналогічного до інтегралу Рімана, в термінах фільтрів.

Зауважимо, що теорія фільтрів — це відносно молода область математичних досліджень. Даній теорії присвячено численні статті як вітчизняних, так і закордонних фахівців, оскільки застосування теорії фільтрів — це досить універсальний інструмент для дослідження загальних топологічних векторних просторів.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною, а результати дисертації важливими.

## 2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

У **вступі** наявні всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі, об’єкт і предмет дослідження, наукова новизна та практичне значення результаті, особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** поставлено задачу і наведено основні відомі результати, які потім будуть використані для доведення основних результатів дисертації, з належними посиланнями.

**Другий розділ** дисертаційної роботи присвячено докладному вивченню властивостей фільтрів та ультрафільтрів на множині натуральних чисел.

У **третьому розділі** дисертаційної роботи досліджуються властивості ідеалів на множині натуральних чисел ℕ.

**Четвертий розділ** дисертаційної роботи присвячено дослідженню спеціального, проте досить широкого й важливого класу ідеалів, а саме ідеалів, що породжуються модульними функціями.

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи розглядаються застосування теорії фільтрів та ультрафільтрів до теорії топологічних векторних просторів. Зазначимо, що поняття повноти просторів різної структури є одним із найважливіших понять не тільки в теорії топологічних векторних просторів, а й взагалі в математиці. Саме тому природною є задача узагальнення цього поняття для топологічних векторних просторів, які не мають метричної структури, і в яких ми не можемо користуватися мовою збіжностей послідовностей у стандартному сенсі цього слова. У даному розділі дисертації вводиться ціла низка узагальнень поняття повноти простору за допомогою мови фільтрів, аналізується зв'язок введених понять з раніше відомими поняттями повноти, та досліджується властивості топологічних векторних просторів, що є повними у нових сенсах.

**Шостий розділ** дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до побудови теорії інтегрування.

**Висновки є** логічними та послідовними. Вони підсумовують отримані результати та наукову новизну роботи.

**Список використаних джерел** свідчить про те, що при виконанні роботи було проаналізовано актуальні закордонні та вітчизняні наукові праці з тематики дослідження.

Дисертація є завершеною науковою працею, а її оформлення відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

## 3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Всі використані відомі результати сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено чітко і повно, що переконує в обґрунтованості результатів дисертаційної роботи. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати.

## 4. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

Дисертант отримав наступні нові наукові результати:

- Введено поняття бідного та конгломерованого фільтрів, які дозволяють отримати достатню умову того, чи можна задати фільтр однією статистичною мірою;
- На основні отриманих результатів було показано, що ряд відомих фільтрів не можна задати однією статистичною мірою;
- Було уточнено факт про можливість задання фільтр у вигляді перетину сім'ї ультрафільтрів;
- Вивчено поняття граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала на множині натуральних чисел;
- Вперше показано, що для локально опуклих просторів ядро ідеала послідовності елементів топологічного векторного простору співпадає із замиканням опуклої оболонки множини граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала;
- Повністю описано необхідні і достатні умови, за яких f-ідеал, породжений модульною функцією f, співдападає зі статистичним ідеалом;
- Запропоновано ряд нових підходів до означення повноти для довільного топологічного векторного простору;
- Вперше було описано конструкцію інтеграла по відрізку за допомогою фільтрів, і досліджено властивості введеного поняття.

## 5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 10 наукових працях, з яких 2 статті у наукових фахових виданнях України, 2 статті у виданнях, які входять до переліку міжнародних наукометричних баз, та 5 праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях.

## 6. Дотримання академічної доброчесності

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи. Вони мають належні посилання. Також в дисертації є посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

## 7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати розширюють наші уявлення про фільтри і топологічні векторні простори, та

можуть бути використані в теорії банахових просторів, загальній топології, та інших суміжних розділах математичних досліджень.

## 8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До дисертаційної роботи є декілька зауважень.

1. В роботі йде мова про поняття фільтра, проте нічого не сказано про об'єкти, для яких можлива побудова паралельної теорії – про направленості. Як добре відомо, у багатьох топологічних ситуаціях направленості є природними узагальненнями послідовностей.
2. У деяких книгах з математичного аналізу описано конструкцію інтеграла Рімана, яка є основаною на понятті границі за базою. Доречно було б провести порівняння цієї конструкції з конструкцією інтеграла по відрізку за допомогою фільтрів, яка розглядається у шостому розділі дисертаційної роботи.
3. Дисертаційна робота містить тільки початок побудови теорії інтегралу за фільтром. Очевидно, що цю теорію можна значно розширити.
4. Текст дисертації містить деякі граматичні та стилістичні помилки, які, втім, не впливають на сприйняття змісту роботи.

Проте зазначені зауваження не впливають на високу оцінку якості результатів дисертаційного дослідження і обґрунтованості наведених здобувачем висновків.

## Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати.

Здобувач Селютін Дмитро Дмитрович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Офіційний рецензент, доцент кафедри
фундаментальної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
кандидат фізико-математичних наук, доцент Сергій ГЕФТЕР

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 08:34:49 07.08.2024

Назва файлу з підписом: Рецензія_С. Л.Гефтер.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 379.2 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Рецензія_С. Л.Гефтер.pdf
Розмір файлу без підпису: 384.5 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ГЕФТЕР СЕРГІЙ ЛЕОНІДОВИЧ
П.І.Б.: ГЕФТЕР СЕРГІЙ ЛЕОНІДОВИЧ
Країна: Україна
РНОКПП: 2241700878
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 08:34:48 07.08.2024
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000066A57601D28F4A05
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2024.04.15 13:00

Голові
Разової спеціалізованої
вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

**Відгук**

офіційного опонента, завідувача кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського національного університету імені Івана Франка, доктора фізико-математичних наук (за спеціальностями 01.01.01 – математичний аналіз та 01.01.04 – геометрія і топологія), професора Банаха Тараса Онуфрійовича на дисертаційну роботу Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

## 1. Актуальність теми дослідження

Поняття збіжності послідовностей є одним із стовпів, на яких покоїться класичний математичний аналіз ще з часів Ньютона та Лейбніца. Мова послідовностей використовувалася також на початковому етапі розвитку функціонального аналізу, проте досить швидко стало зрозуміло, що для опису деяких топологічних явищ послідовностей не вистарчає і тому панівною методологією у вивченні топологічних явищ стала топологія (тобто система відкритих множин, що задовільняє три добре відомі аксіоми). З іншого боку, у 1937 році Анрі Картан придумав поняття фільтра, яке краще підходить до вивчення явищ збіжності, і є альтернативним інструментом до поняття напрямленості Мура--Сміта. З того часу фільтри та ультрафільтри посіли важливе місце в арсеналі дослідників з теорії множин, топології та булевої алгебри. В функціональному аналізі фільтри не є такими популярними і ця дисертація покликана заповнити цю прогалину.

Основні результати дисертації пов’язані з аналізом можливих застосувань фільтрів до поняття збіжності послідовностей в загальний топологічних векторних просторів, дослідження повноти просторів з точки зору фільтрів і фільтрового узагальнення інтеграла Рімана.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною, а результати дисертації цікавими та важливими.

## 2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

У **вступі** наявні всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна та практичне значення результаті, особистий внесок здобувача.

**Другий розділ «Огляд літератури та вибір теми»** містить основні означення і факти з теорії фільтрів, а також основні задачі дисертаційного дослідження та формулює відповіді на ці задачі, отримані в дисертації.

У **третьому розділі «Конгломеровані фільтри та статистичні міри»** вивчаються фільтри з наголосом на їхнє зображення як перетину ультрафільтрів, а також розпізнаванню фільтрів, породжених скінченно-адитивними мірами.

У **четвертому розділі** уточнюються деякі результати Leonetti про опис опуклої оболонки множини F-граничних точок послідовності у локально опуклому топологічному векторному просторі.

У **п'ятому розділі** дисертаційної роботи вивчаються ідеали на множині натуральних чисел, породжені модульною функцією. Основними результами цього розділу можна вважати (цікаві та дещо несподівані) теореми 5.1 та 5.2 про характеризацію статистичного ідеалу в термінах модульних функцій.

У **шостому розділі** дисертаційної роботи вивчаємо застосування теорії фільтрів до теорії повноти топологічних векторних просторів. У цьому розділі введено низку узагальнень поняття повноти простору на мові фільтрів, проаналізовано зв'язок введених понять з раніше відомими, та досліджено властивості нових видів повноти простору.

**Сьомий розділ** дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтегрування, зокрема узагальнено поняття інтегралу Рімана та встановлено основні властивості цього узагальненого інтегралу.

## 3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Всі використані відомі результати сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено чітко і повно, що переконує в обґрунтованості результатів дисертаційної роботи. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати.

## 4. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

Дисертант отримав такі нові наукові результати:

- На основі понять бідного та конгломерованого фільтрів, отримано достатню умову породженості фільтра однією статистичною мірою;
- Досліджено природу фільтрів, що є скінченними або зліченними перетинами ультрафільтрів;

- Уточнено результат Leonetti про ядро послідовності точок локально опуклого векторного простору відносно ідеалу на множині натуральних чисел;
- Охарактеризовано модульні функції, що породжують статистичний ідеал;
- Запропоновано ряд нових підходів до означення повноти на довільному топологічному векторному просторі;
- Описано конструкцію інтеграла по відрізку за допомогою фільтрів, і досліджено властивості даного поняття.

**5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях**

Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 10 наукових працях, з яких 2 статті у наукових фахових виданнях України, 2 статті у виданнях, які входять до переліку міжнародних наукометричних баз, та 5 праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях.

**6. Дотримання академічної доброчесності**

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи. Вони мають належні посилання. Також в дисертації є посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

**7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації**

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати розширюють наші уявлення про фільтри і топологічні векторні простори, та можуть бути використані в функціональному аналізі, загальній топології, теорії множин та інших суміжних розділах математичних досліджень.

**8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації**

1. Другий розділ названо «Огляд літератури та вибір теми», проте містить радше огляд отриманих результатів, про що вже два рази йшла мова (українською та англійською) на сторінках 2—20, тобто тут все повторюється втретє, і це трохи видовжує загальний об’єм дисертації, але напевно це такі теперішні вимоги до оформлення дисертацій.
2. Правила формального запису математичних виразів рекомендують спершу писати квантори, а опісля умови, які регулюються цими кванторами. Цього правила автор дисертації не завжди дотримується (зокрема, у формулах на сторінках 4, 5, 43, 74).
3. На сторінці 29, при описі новизни отриманих результатів, стверджується, що у дисертації введено нове поняття бідного фільтра, яке насправді не зовсім нове, оскільки перегукується з добре відомою (в теорії множин, топології та булевій алгебрі) умовою зліченності ланцюгів.

4. Множину натуральних чисел в означенні ідеалу, породженому фільтром на стор. 34 слід замінити на Ω.
5. В означенні статистичної міри на сторінці 37 міра синґлетонів мала б бути рівною нулю, а не одиниці.
6. Як на мене, теорема 2.6 надто проста (і теж відома, принаймні як фольклор) і не факт, що її вартувало включати до основних результатів.
7. В Означенні 2.6 на стор. 48 пропущено символ фільтра після Compl. Та ж помилка повторюється в означенні 6.2 на стор. 105.
8. В Зауваженні 3.1 сума $a_n$ напевно мала б дорівнювати одиниці, а не нескінченності.
9. На сторінці 58 перед формулюванням леми 3.1 «F-перетинаються» напевно слід замінити на «F-неперетинні».
10. На сторінці 77 автор пише, що «ми можемо розглядати послідовність *x* як функцію, яка діє на просторі X у множину N», хоча малося на увазі, що *x* є функцією з N в X (а не навпаки).
11. Умову гаусдорфовості можна забрати з леми 4.6, бо кожен топологічний векторний простір допускає факторне відображення на гаусдорфовий топологічний векторний простір. Окрім того, лема 4.6 і не містить доведення своєї гаусдорфової частини.
12. У передостанній лінійці на сторінці 84 вживається непояснене позначення o з рискою вгорі. Якщо це якась спеціальна версія звичайної o-нотації, то можливо, з неї випливає умова прямування послідовності $(a_n)$ до нескінченності?
13. В означенні величини $d_f(A)$ на стор. 89 liminf треба замінити на lim, а декількома лінійками нижче верхню риску над $d_f$ замінити на нижню.
14. Пишучи, що щільність множини простих чисел рівна нулю на стор. 88, вартувало б додати якесь посилання, бо це не є настільки очевидний факт. Те ж стосується секвенціальної повноти банахового простору $l_1$, яка є «класичним результатом теорії банахових просторів», але посилання все ж би не завадило (на стор. 117).
15. У теоремі 6.3 замість зліченної бази нуля можна було б говорити про метризовність (яка еквівалентна існуванню зліченної бази в нулі).
16. Згадуючи про існування прикладів несепарабельних асимптотично зліченних просторів (які чомусь написані як асимптотично повні) на стор. 107, вартувало б навести хоча б один приклад такого простору: таким є довільний несепарабельий метризовний лінійний векторний простір.
17. В означенні діаметра розбиття на сторінці 121 замість міри Лебега (яка є складним поняттям) можна використати модуль різниці (кінців відрізка), що на порядок простіше за міру Лебега.
18. В Лемі 7.3 фільтр F має бути на множині X, а не F.

**19.** У тексті дисертації є низка мовних описок: «вдалося отримати більша загальний результат» на стор. 44, «у довільному топологічний векторний простір» на стор. 75, «задовольняти перший аксіомі зліченності» на стор. 76, «зминиться» на стор. 83, «компакті околи» на стор. 84, «ми означила» на стор. 95, «ми … працює із просторами» на стор. 98, «стійке» (замість «стійка») на стор. 98, «асимптотично зліченним топологічний векторний простір» на стор. 107, «от» (заміть «то») в Зауваженні 6.4 на стор. 115.

**20.** Наявні не зовсім коректні граматичні конструкції, наприклад, «Використовуючи аксіому Мартіна, існують вільні ультрафільтри» в теоремі 2.18 на стор. 49 замість «При аксіомі Мартіна, існують вільні ультрафільтри»;

**21.** Також трапляються русизми, наприклад «Введення» замість «Вступ» на сторінці 53, «задовольняє наступним аксіомам» замість «задовольняє наступні аксіоми» на стор. 74, «задовольняє першій аксіомі зліченності» на стор. 75 замість «задовольняє першу аксіому зліченності».

**22.** При цитуванні монографій (наприклад, [31] на стор. 55) вартувало б конкретизувати посилання (вказувати сторінку чи номер теореми), щоб потрібний факт легше було знайти.

Проте згадані вище недоліки непринципові і не применшують позитивного враження про дисертаційну роботу, яка виконана на високому науковому рівні і свідчить про наукову зрілість її автора.

## 9. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати.

Здобувач Селютін Дмитро Дмитрович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Офіційний опонент,
завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики Львівського університету імені Івана Франка
доктор фізико-математичних наук,
професор

Тарас Банах

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 11:42:33 11.08.2024

Назва файлу з підписом: Відгук-Банах.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 158.3 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Відгук-Банах.pdf
Розмір файлу без підпису: 161.4 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: БАНАХ ТАРАС ОНУФРІЙОВИЧ
П.І.Б.: БАНАХ ТАРАС ОНУФРІЙОВИЧ
Країна: Україна
РНОКПП: 2492610634
Організація (установа): ГО ЛМТ
Код ЄДРПОУ: 44531545
Посада: ГОЛОВА ПРАВЛІННЯ
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 11:42:29 11.08.2024
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000045D447014578CE04
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2024.04.15 13:00

Голові спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
доктору фізико-математичних наук,
доценту Ігнатович Світлані Юріївні
Майдан Свободи 4, Харків, 61022

# ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника Загороднюка Андрія Васильовича на дисертаційну роботу Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

**Актуальність теми дослідження.** Дисертаційна робота присвячена дослідженням в теорії фільтрів та її застосуванням в теорії топологічних векторних просторів та для побудови різних узагальнень інтеграла Рімана.

Теорія фільтрів на топологічних просторах (зокрема на множині натуральних чисел у дискретній топології) є важливим інструментом дослідження у функціональному аналізі та топології. Становлення і розвиток теорії фільтрів та ультрафільтрів відбувся в роботах П. Леонетті, Н. Бурбакі (зокрема Г. Картана), В. Рудіна, Е. Шехтера, А. Сажара, Дж. Дугуджі та інших. Використання фільтрів дає можливість працювати з неметризовними топологіями у банахових та, більш загально, топологічних векторних просторах. При цьому ми отримуємо різні типи неперервності та різні типи повноти. Цікавим є питання щодо опису сім'ї фільтрів, які не можна задати однією статистичною мірою. Іншим важливим напрямком можливого застосування теорії фільтрів є теорія інтегрування. Маючи різні фільтри на множині натуральних чисел, ми можемо розглядати різні типи збіжності і, як наслідок, різні способи підсумовування інтегральних сум. Це дає можливість описати різні узагальнення інтеграла Рімана та дослідити їх властивості.

У дисертаційній роботі проведено нові дослідження властивостей фільтрів, ультрафільтрів та ідеалів на множині натуральних чисел та отримано застосування теорії ультрафільтрів для опису різних типів повноти топологічних векторних просторів і різних узагальнень інтеграла Рімана. Таким чином, актуальність тематики дисертаційного дослідження Селютіна Дмитра Дмитровича не викликає жодних сумнівів.

**Аналіз змісту роботи.** Дисертація складається, семи розділів (один з яких є вступом), висновків до дисертації, списку використаних джерел і додатка. Загальний обсяг роботи складає 148 сторінок, список використаних джерел містить 37 найменувань.

Структура дисертації є логічною, відповідає меті та завданням дослідження, що забезпечує цілісність, системність та послідовність викладу матеріалу.

У **вступі (який є першим розділом)** обґрунтовано актуальність обраної теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок дисертаційного дослідження з науково-дослідним проєктом, підтриманим Національним фондом досліджень України, встановлено мету, задачі, об'єкт, предмет, методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, вказано особистий внесок здобувача, перелік публікацій та апробацію результатів дисертаційного дослідження.

У **другому розділі** наведено необхідний теоретичний матеріал і зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження.

У **третьому розділі** досліджено властивості фільтрів та ультрафільтрів на множині натуральних чисел. Зокрема доведено, що кожен конгломерований фільтр не можливо задати однією статистичною мірою. Таким чином, отримано широкий клас фільтрів, які не задаються однією статистичною мірою. Це значно узагальнює відомі результати. Також, отримано інші цікаві результати, пов’язані з властивостями перетинів сімей фільтрів та ультрафільтрів і з питанням про єдиність зображення заданого фільтра у вигляді перетину ультрафільтрів, які його містять. Зокрема показано, що якщо фільтр зображено у вигляді перетину скінченної сім’ї ультрафільтрів, то таке зображення єдине, а якщо у вигляді перетину зліченної сім’ї ультрафільтрів, то ні.

У **четвертому розділі** досліджено властивості ідеалів на множині натуральних чисел і фільтрів, породжених деяким ідеалом. Основний результат розділу стверджує, що якщо у локально опуклому просторі $X$ існує послідовність векторів і фільтр породжений деяким ідеалом такий, що замикання цієї послідовності відносно деякого елемента цього фільтра є компактом, то ядро відносно заданого ідеалу збігається з замиканням опуклої оболонки граничних точок послідовності відносно цього ідеалу. Цей результат покращує класичний результат П. Леонетті у якому додатково вимагається, щоб $X$ задовольняв першу аксіому зліченності. Також, у цьому розділі отримано застосування даного результату до слабко компактних множин топологічного векторного простору.

У **п’ятому розділі** розглянуто статистичні ідеали та ідеали породжені модульними функціями. У цьому розділі дано повний опис модульних функцій для яких відповідні $f$-ідеали збігаються з статистичними ідеалами.

У **шостому розділі** запропоновано застосування теорії фільтрів до вивчення повноти топологічних векторних просторів. Введено низку узагальнень, пов’язаних з фільтрами, поняття повноти неметризовних топологічних просторів та зроблено їх порівняльний аналіз. Доведено, що за умови виконання аксіоми Мартіна існують два вільні ультрафільтри на множині натуральних чисел і топологічний векторний простір, який повний відносно одного ультрафільтру і неповний відносно іншого.

У **сьомому розділі** досліджено застосування теорії фільтрів до побудови узагальнень класичного інтеграла Рімана. Визначено інтеграл функції по фільтру на множині відмічених розбиттів відрізка і показано, що інтеграл Рімана є частковим випадком цього інтеграла.

З**агальні висновки** дисертації логічно випливають з викладеного у дисертаційній роботі матеріалу і вказують на те, що поставлені завдання є повністю реалізованими, а результати дисертаційного дослідження мають наукову цінність.

**Список використаних джерел** містить сучасні посилання на роботи провідних вітчизняних та закордонних вчених та на класичні результати у даній галузі дослідження.

У **додатку** наведено список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Відсутність порушення академічної доброчесності.** У дисертаційній роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності. Елементи фабрикації тексту чи фальсифікації у роботі відсутні.

**Наукова новизна дисертаційної роботи.** Усі результати дисертаційної роботи є новими. У роботі вперше описано зв'язок між ядром відносно ідеалу та множиною граничних точок послідовності відносно ідеалу в загальних локально опуклих топологічних векторних просторах; описано необхідні й достатні умови для функцій $f$, щоб ідеали, породжені цими функціями, збігалися зі статистичними ідеалами; знайдено широкий клас так званих конгломерованих фільтрів, які неможливо задати однією статистичною мірою. Також повністю розв’язано питання щодо зображення фільтрів у вигляді перетину нескінченної сім’ї ультрафільтрів та єдиності такого зображення. Крім того, в дисертації отримано нові застосування теорії фільтрів до вивчення повноти топологічних векторних просторів та узагальнено класичний інтеграл Рімана.

**Ступінь обґрунтованості та достовірності положень, висновків і рекомендацій, сформульованих в дисертації.** Отримані результати є достовірними і строго обґрунтованими. Всі сформульовані твердження є доведеними. Висновки є аргументованими.

**Повнота відображення в опублікованих роботах наукових положень, висновків та рекомендацій.** Основні результати дисертаційної роботи в повній мірі викладені у публікаціях, 2 з яких опубліковані у журналах, що індексуються наукометричними базами даних Scopus та Web of Science Core Collection і 2 у фахових виданнях України, а також додатково висвітлені у статті опублікованій у журналі, що індексується наукометричними базами даних Scopus та Web of Science Core Collection. Крім того, дисертант має 6 публікацій у матеріалах тез доповідей міжнародних конференцій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації. Публікації відтворюють основний зміст дисертації, об’єм та характер дослідження.

**Рекомендації по використанню результатів дисертації.** Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії топологічних лінійних просторів, в абстрактній теорії інтеграла, в загальній топології, теорії операторів.

**Зауваження до змісту та тексту дисертації.**

1. Кожен розділ дисертації містить вступний підрозділ (у розділі 3 він називається Введення) у якому сформульовано деякі спеціальні

означення і попередні відомості. На мою думку слід було викласти цю всю інформацію у вступному розділі до дисертації.

2. Було б цікаво порівняти техніку фільтрів з технікою напрямленостей, яка є, у певному сенсі, еквівалентною.
3. На сторінці 34 у виділеній формулі замість $\mathbb{N}$ повинно бути $\Omega$.
4. У деяких місцях дисертації прізвища іноземних авторів написано українською мовою, а в інших – використовуючи латинські літери. Вважаю що скрізь у тексті (крім списку використаних джерел) слід писати українською мовою, використовуючи кирилицю.
5. На сторінці 6 в останньому реченні написано: «…а саме доведено наступну теорему» і після цього йде наслідок.
6. Дисертація містить поодинокі русизми як то «сімейство» (краще «сім'я»), «представлення» (краще «зображення»), «ряд результатів» (краще «низка результатів»).

Зазначені вище зауваження не применшують цінність результатів дисертації і не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

**Загальний висновок щодо відповідності дисертації встановленим вимогам.** Дисертаційна робота виконана на високому науковому рівні і є самостійною та завершеною науковою працею. Робота написана правильною українською мовою і є зручною для читання. Вважаю, що дисертаційна робота «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів повністю відповідає вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її автор, Селютін Дмитро Дмитрович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

**Офіційний опонент:**
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри
математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника _____ Андрій ЗАГОРОДНЮК

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 12:44:26 07.08.2024

Назва файлу з підписом: Відгук-Загороднюк А.В.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 164.3 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Відгук-Загороднюк А.В.pdf
Розмір файлу без підпису: 176.9 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ЗАГОРОДНЮК АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ
П.І.Б.: ЗАГОРОДНЮК АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ
Країна: Україна
РНОКПП: 2466113170
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 12:44:28 07.08.2024
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000F8272D014E788B04
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2024.04.15 13:00

Голові
Разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Відгук
офіційного опонента, професора кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.04 – геометрія і топологія) Карлової Олени Олексіївни на дисертаційну роботу Селютіна Дмитра Дмитровича "Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування", подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика

**1. Актуальність теми дослідження**

В дисертації розглянуто фільтри, деякі їхні властивості та класи, та застосування фільтрів до різних розділів математики, зокрема теорії топологічних векторних просторів, загальної топології, теорії інтеграла Рімана. Основні результати дисертації пов'язані з глибоким аналізом застосування фільтрів до поняття збіжності послідовностей в загальний топологічних векторних просторів, дослідження повноти просторів з точки зору фільтрів на множині натуральних чисел, і побудовою концепції інтеграла, аналогічного до інтеграла Рімана, в термінах фільтрів. Зауважимо, що теорія фільтрів — це відносно молода область математичних досліджень. Даній теорії присвячено численні статті як вітчизняних, так і закордонних фахівців, оскільки теорія фільтрів — це досить універсальний інструмент для дослідження загальних топологічних векторних просторів. Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною, а результати дисертації важливими.

**2. Загальна характеристика дисертаційної роботи**

У вступі наявні всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна та практичне значення результаті, особистий внесок здобувача. У першому розділі поставлено задачу і описано відомі факти, які використано в дисертації. Другий розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню властивостей фільтрів та ультрафільтрів на множині натуральних чисел. У третьому розділі дисертаційної роботи ми вивчаємо ідеали на множині натуральних чисел N. Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню одного, проте досить широкого класу ідеалів, а саме ідеалів, породжених модульними функціями. У п'ятому розділі дисертаційної роботи ми вивчаємо застосування теорії фільтрів до теорії топологічних векторних просторів. Повнота простору є одним із найважливіших понять не тільки в теорії топологічних векторних просторів, а й взагалі в математиці. Саме тому природною є задача узагальнення цього поняття для просторів, які не мають метричної структури, в яких ми не можемо користуватися мовою збіжностей послідовностей у стандартному сенсі цього слова. Тому в даному розділі ми вводимо цілу низку узагальнень поняття повноти простору мовою фільтрів, аналізуємо зв'язок введених

понять з раніше відомими, та досліджуємо властивості нових видів повноти простору. Шостий розділ дисертаційної роботи присвячено застосуванню теорії фільтрів до теорії інтегрування.

**3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації**

Всі використані відомі результати сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено чітко і повно, що переконує в обґрунтованості результатів дисертаційної роботи. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати.

**4. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна**

Дисертант отримав такі нові наукові результати:

- Введено поняття бідного та конгломерованого фільтрів, які дозволяють отримати достатню умову задання фільтру однією статистичною мірою;
- Показано, що деякі відомі фільтри не можна задати однією статистичною мірою;
- Уточнено результат про можливість задання фільтру у вигляді перетину сім'ї ультрафільтрів;
- Вивчено поняття граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала на множині натуральних чисел;
- Доведено, що для локально опуклих просторів ядро ідеала послідовності елементів топологічного векторного простору збігається із замиканням опуклої оболонки множини граничних точок послідовності елементів топологічного векторного простору відносно ідеала;
- Наведено критерій, за яким $f$-ідеал, породжений модульною функцією $f$, збігається зі статистичним ідеалом;
- Запропоновано ряд нових підходів до означення повноти на довільному топологічному векторному просторі;
- Описано конструкцію інтеграла по відрізку за допомогою фільтрів, і досліджено властивості даного поняття.

**5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях**

Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 10 наукових працях, з яких 2 статті у наукових фахових виданнях України, 2 статті у виданнях, які входять до переліку міжнародних наукометричних баз, та 5 праць, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях.

**6. Дотримання академічної доброчесності**

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи. Вони мають належні посилання. Також в дисертації є посилання на наукові

роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

**7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації**

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати розширюють наші уявлення про фільтри і топологічні векторні простори, та можуть бути використані в теорії банахових просторів, загальній топології, та інших суміжних розділах математичних досліджень.

**8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації**

1) В означенні 2.1 (і в означенні 3.1) слово "всяка" слід замінити на "будь-яка";

2) В означенні 2.2 замість "неперетинна послідовність" варто вжити "диз'юнктна послідовність";

3) На сторінці $39_2$ бракує пробілу в словосполученні "сім'ї ультрафільтрів";

4) В теоремі 2.11 вказано, що множина $\overline{\{x_n : n \in E\}}$ є компактом, але оскільки поняття "компакт" прийнято вживати в сенсі "компактний гаусдорфовий простір", а локально опуклий простір в умові теореми не обов'язково гаусдорфовий, то краще писати, що вищевказана множина "є компактною"; те ж саме стосується множини $K$ в теоремі 2.12 і множини $\overline{x(E)}$ в теоремі 2.13;

5) Стор. $49^9$: замість "більша" має бути "більш";

6) Стор. $56_9$: має бути "...скінченної сім'ї...";

7) Стор. $58_5$: має бути "...для довільного $n \in \mathbb{N}$";

8) В доведенні Теореми 3.1 варто було б надати посилання або навести пряму конструкцією незліченної сім'ї $\Gamma$ майже неперетинних підмножин $\mathbb{N}$;

9) Стор. $67^8$: замість "...під неперервною функцією" слід вжити "при неперервному відображенні";

10) Стор. $69^2$: має бути "... у випадку перетину скінченного числа сімей ультрафільтрів";

11) У першому реченні в доведенні Леми 4.6 краще вжити словосполучення "згідно з включенням (9)";

12) Стор. $84^8$: має бути "...компактні околи нуля";

13) Стор. $96_8$: має бути "...функцію, означену формулою (12)";

14) Стор. $107^2$: замість словосполучення "асимптотично повних просторів" повинно бути "асимптотично зліченних просторів";

15) Стор. $107^9$: замість "асимптотично зліченним" має бути "асимптотично злічений";

16) Приклад, наведений в теоремі 6.5, може бути узагальнений на довільний $\Sigma$-добуток повного топологічного векторного простору $Y^T$;

17) Стор. $129_5$: має бути "... строго спадна послідовність...";

18) Стор. $134^1$: має бути "... обмеження $A$ на $[\alpha, \beta]$".

**9. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи**

Дисертаційна робота Селютіна Дмитра Дмитровича «Фільтри, узагальнені види збіжності та їхні застосування», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Здобувач Селютін Дмитро Дмитрович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика.

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича Олена Карлова

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 23:57:42 11.08.2024

Назва файлу з підписом: Report_Selyutin.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 86.2 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Report_Selyutin.pdf
Розмір файлу без підпису: 102.1 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Карлова Олена Олексіївна
П.І.Б.: Карлова Олена Олексіївна
Країна: Україна
РНОКПП: 2942517243
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 23:57:58 11.08.2024
Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг
Серійний номер: 382367105294AF9704000000236A10006CFCB802
Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Кваліфікований
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAdES-X Long)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2024.04.15 13:00