

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Протектор Денис Олегович

УДК 536.21+519.63

ДИСЕРТАЦІЯ
«НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕПЛОВІ ПРОЦЕСИ
В АНІЗОТРОПНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ»

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»

(Галузь знань 10 – Природничі науки)

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Д. О. Протектор

Наукові керівники:

Лісін Денис Олександрович, кандидат технічних наук

Немченко Костянтин Едуардович, доктор фізико-математичних наук

Харків – 2022

АНОТАЦІЯ

Протектор Д. О. Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 – Прикладна фізика та наноматеріали (галузь знань 10 – Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2022.

Дисертацію присвячено дослідженню теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв’язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності.

Серед великого розмаїття задач математичної фізики, які нині успішно вирішуються, особливу роль займають задачі теплопровідності в анізотропних матеріалах. Насамперед це пов’язано з активним використанням анізотропних матеріалів при виготовленні великої кількості сучасних приладів та пристроїв, деталей конструкцій та машин – наприклад, трансформаторів із сердечниками з текстурованої сталі (в електротехніці), лопаток газотурбінних двигунів із жароміцних нікелевих сплавів з монокристалічною структурою (в авіації), п’єзоперетворювачів, електрооптичних модуляторів та рідкокристалічних індикаторів (в електронному приладобудуванні). Сучасні анізотропні матеріали зі складною структурою (наприклад, композитні матеріали, багат шарові матеріали, покриття, нанесені на підкладки) все частіше використовуються в новітніх інженерних розробках, а також в якості конструкційних матеріалів.

У різних технологічних процесах і пристроях дані матеріали піддаються тепловому впливу, внаслідок чого в них відбуваються фізико-хімічні явища, зокрема зміна геометричних розмірів. Неконтрольоване теплове розширення конструкційних матеріалів може призвести до погіршення експлуатаційних характеристик пристрою, а також до аварійних ситуацій. Тому при створенні та використанні таких матеріалів необхідно враховувати анізотропію їх

теплофізичних властивостей, а також досліджувати теплові процеси, які в них протікають.

Розробка нових ефективних підходів до моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах є актуальною та перспективною задачею. В даний час існують різні підходи до моделювання теплових процесів в анізотропних матеріалах, що засновані на використанні як методів сіток, так і безсіткових схем. Незважаючи на різноманітність числових методів, найбільш широко використовуваними серед них залишаються методи сіток, а саме метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів та метод граничних елементів, які були розроблені ще у минулому столітті. Методи сіток мають ряд істотних недоліків, до яких можна віднести великі обчислювальні та часові витрати, що виникають в процесі дискретизації області крайової задачі, порушення гладкості представлення заокруглених границь об'єкта, труднощі використання в задачах, в яких слід враховувати зміну геометричної форми досліджуваного об'єкта і це лише деякі з них.

Даних недоліків позбавлені безсіткові методи розв'язання крайових задач, які відносяться до широкого класу ефективних числових методів, що не використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку. У безсіткових методах апроксимація диференціальних рівнянь з частинними похідними заснована виключно на наборі довільно розташованих вузлів в яких розміщуються базисні функції. Відсутність зв'язків між вузлами позбавляє потреби в проведенні трудомісткої процедури генерації інтерполяційної сітки. Попередні дослідження показали, що безсіткові методи продемонстрували свою ефективність при розв'язанні задач теплопровідності в ізотропних матеріалах, а також при розв'язанні двовимірних задач стаціонарної теплопровідності в матеріалах з анізотропією. Це стимулювало розробку безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності, який характеризувався би високим рівнем точності, обчислювальною ефективністю та простотою реалізації, для подальшого дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах.

Метою дисертаційної роботи є дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності.

Основні завдання дисертаційного дослідження: дослідити теоретичні аспекти в області числового моделювання теплових процесів із застосуванням безсіткових підходів; розробити безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах; провести моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних радіальних базисних функцій; оцінити точність результатів моделювання безсітковим методом, заснованим на використанні анізотропних радіальних базисних функцій, шляхом зіставлення отриманих результатів моделювання з аналітичними розв'язками крайових задач або за допомогою обчислення відносних нев'язок; провести аналіз існуючих схем побудови атомарних радіальних базисних функцій багатьох незалежних змінних, що породжені різними диференціальними операторами; побудувати сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, породжених диференціальним оператором спеціального типу, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; розробити методику використання сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу, при моделюванні нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах з використанням безсіткового методу; провести моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних і атомарних радіальних базисних функцій; здійснити порівняльний аналіз точності отриманих результатів моделювання нестационарного теплового процесу в твердому анізотропному тілі в формі пластини безсітковим методом при

використанні анізотропних і атомарних радіальних функцій в якості базисних; дослідити модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом ніобату літію LiNbO_3 у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановити час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 ; розробити програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$; провести тестування розробленого програмного комплексу.

В дисертаційній роботі представлено розроблений безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах [137-140]. Дана безсіткова схема заснована на комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі. Розглянуто застосування методу фундаментальних розв'язків у випадку однозв'язних та багатозв'язних областей. Дискретизація за часом диференціального рівняння нестационарної теплопровідності в описаному безсітковому методі здійснюється з використанням θ -схеми методу скінченних різниць. Розроблений безсітковий метод являє собою ефективний інструмент для моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла.

Побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, які породжуються оператором типу Гельмгольца [159, 160]. Функції $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ розширюють підклас

функцій, які використовуються в якості базисних при реалізації безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах. Характерні властивості функції $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ (нескінченна диференційовність та фінітність, тобто наявність компактного носія) дозволили підвищити точність та обчислювальну ефективність розробленого безсіткового методу. Використання фінітних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних дало змогу розв'язувати крайові задачі на областях зі складною геометричною конфігурацією. Отримано явні формули для обчислення функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перетворення Фур'є. Представлено візуалізацію атомарних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перших похідних за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків. Представлено візуалізацію функції $(L(K) - \delta^2)ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків.

Продемонстровано результати числових розрахунків нестационарних теплових процесів, що протікають в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла, а також різними початковими та граничними умовами, які отримані із використанням розробленого безсіткового методу.

Отримано наближені розв'язки тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла для ізотропного та анізотропного випадків [137, 140]. Проілюстровано застосування атомарних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при моделюванні нестационарного теплового процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла [159]. Знайдено аналітичні розв'язки даних задач нестационарної теплопровідності. Оцінено точність наближених розв'язків крайових задач за величиною значень середньої відносної похибки $\text{get}(u)$, середньої абсолютної

похибки $a_{\text{err}}(u)$ і максимальної похибки $m_{\text{err}}(u)$. Проведено порівняльний аналіз ефективності апроксимації задач нестационарної теплопровідності анізотропними радіальними базисними функціями з глобальним носієм та атомарними радіальними базисними функціями $AH_{\text{orp}_k}(x_1, x_2, x_3)$. Використання атомарних радіальних базисних функцій $AH_{\text{orp}_k}(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних, дозволило підвищити точність отриманих розв'язків.

Представлено результати моделювання теплового процесу, що протікає в монокристалі LiNbO_3 в формі циліндра при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням потужністю 50 Вт та довжиною хвилі 1064 нм [170]. Визначено, що приблизно через 4 постійних часу температура монокристала переходить в сталий стан, і знаходиться в діапазоні від 27.74 до 28.24 °C. Наведено результати числових розрахунків розподілу температурного поля всередині та на поверхні монокристалу LiNbO_3 в різні моменти часу, та оцінено точність отриманих наближених розв'язків за величиною норми відносної нев'язки.

Проілюстровано ефективність застосування розробленого безсіткового методу при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності на багатозв'язній області, а саме при моделюванні теплового процесу в перфорованій графітовій пластині за наявності комбінації різних типів граничних умов.

Результати числових розрахунків, отримані з використанням безсіткового методу, добре узгоджуються з результатами, отриманими при використанні методу скінченних елементів (МСЕ), що свідчить про високу ефективність розробленої безсіткової схеми вже на невеликій кількості інтерполяційних вузлів.

Розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D», який призначено для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом [171-173], що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського

права на твір [174]. Проведено тестування розробленого програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» при числовому розв'язанні розглянутих тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає у наступному: вперше розроблено безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах, який засновано на комбінації методу подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків; вперше проведено моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою розробленого безсіткового методу; вперше побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; вперше програмно реалізовано алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; вперше застосовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при реалізації безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах; вперше проведено моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла за допомогою безсіткового методу на основі використання атомарних радіальних базисних функцій $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$; вперше за допомогою розробленого безсіткового методу досліджено модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання

з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом LiNbO_3 у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановлено час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 ; вперше розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні розробленого безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$, що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір.

Розроблена безсіткова схема моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах може бути використана при реалізації нових ефективних підходів до моделювання теплового стану тіла за наявності процесів плавлення, випаровування або затвердіння, а також методів розв'язання задач нестационарної теплопровідності в композиційних матеріалах з довільним числом рухомих границь фазових перетворень (задача Стефана).

Сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$, які враховують анізотропію матеріалу, являють собою новий підклас функцій, які можуть використовуватися в якості базисних при реалізації безсіткових методів та підходів к моделюванню теплових процесів в анізотропних матеріалах.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, були впроваджені у навчальний процес:

1. Кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Безсіткові методи в задачах фізики» і «Обчислювальні методи в фізиці» для студентів 3 курсу

бакалаврату та «Наближені методи розв'язання задач математичної фізики» і «Наближені обчислення у фізиці» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» (Додаток Б);

2. Кафедри інформаційних технологій електронних засобів факультету радіоелектроніки та телекомунікацій НУ «Запорізька політехніка» при проведенні лекційних та лабораторних практичних занять з курсів «Фізичні основи мікро- і наносистемної техніки» для студентів 3 курсу і «Тепломасообмін у радіоелектронних апаратах» для студентів 4 курсу бакалаврату спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» (Додаток Б);

3. Кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Фізико-теоретичні основи конструювання електронної апаратури» для студентів 2 курсу і «Конструювання електронних пристроїв» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 171 – «Електроніка» (Додаток Б);

4. Кафедри інформатики та прикладної математики дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсу «Комп'ютерні математичні технології» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 275.03 – «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» (Додаток Б).

Результати дисертаційної роботи використовуються в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, про що свідчить відповідна довідка про використання результатів дисертаційного дослідження (Додаток Б).

Ключові слова: задачі нестационарної теплопровідності, анізотропні тверді тіла, безсітковий метод, метод подвійного заміщення, метод фундаментальних розв'язків, анізотропні радіальні базисні функції, атомарні

радіальні базисні функції, оператор типу Гельмгольца, ніобат літію, лазерне випромінювання.

ABSTRACT

Protektor D. O. Non-stationary thermal processes in anisotropic solids. Qualification scholarly paper: a manuscript.

Thesis submitted for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Natural Sciences, Speciality 105 – Applied Physics and Nanomaterials. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2022.

The dissertation deals with the study of thermal processes in anisotropic solids by meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems.

Heat conduction problems in anisotropic solids play a significant role among the wide variety of problems of mathematical physics which are currently being successfully solved. First of all, it is associated with the active use of anisotropic materials in the manufacture of a large number of modern instruments and devices, structural parts and machines. For example, transformers with textured steel cores (in electrical engineering), gas-turbine engine blades of heat-resistant nickel alloys with a single-crystal structure (in aviation), piezoelectric transducers, electro-optic modulators and liquid crystal indicators (in electronic instrument engineering). Modern anisotropic materials with a complex structure (composite materials, multilayered materials, coatings on substrates, etc.) are increasingly used in advanced engineering designs and as structural materials.

In various technological processes and devices, these materials are exposed to thermal effects, resulting in physical and chemical phenomena, including changes in geometric parameters. Uncontrolled thermal expansion of structural materials may lead to device performance degradation, as well as to emergency situations. Therefore, when creating and using such materials, it is necessary to take into account the anisotropy of their thermophysical properties, as well as to study the thermal processes occurring in them.

The development of new effective approaches to the simulation of non-stationary heat conduction in anisotropic solids is an important and perspective problem. Currently, there are different approaches to simulation of heat conduction in anisotropic materials, based on the use of grid-based methods and meshless schemes. Despite the diversity of numerical methods, the most widely used among them remain the grid-based methods, namely, the finite element method, the finite volume method, and the boundary element method, developed in the last century. Grid-based methods have a number of significant disadvantages, which include large computational and time costs arise in the process of discretization of the domain of the boundary-value problem, violation of the smoothness of the representation of the rounded boundaries of the object, difficulties of use in problems in which it is necessary to take into account changes in the geometric shape of the object, and these are just some of them.

Meshless methods for solving boundary-value problems which represent a wide class of effective numerical methods that do not use an interpolation grid in their conception are deprived of these disadvantages. In meshless methods, the approximation of partial differential equations is based only on a set of arbitrarily located nodes in which the basis functions are located. Absence of connections between interpolation nodes eliminates the need for a time-consuming process of generating an interpolation grid. Previous researches have shown that meshless methods have demonstrated their effectiveness in solving heat conduction problems in isotropic materials, as well as in solving two-dimensional stationary heat conduction problems in anisotropic materials. This stimulated the development of a meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems, which would have high accuracy, computational efficiency, and easy implementation for further study of thermal processes in anisotropic solids.

The purpose of this dissertation is simulation of thermal processes in anisotropic solids by meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems.

The main objectives of the dissertation research: to investigate theoretical aspects in the field of numerical modeling of thermal processes using meshless approaches; to develop the meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids; to simulate the distribution of non-stationary temperature fields in anisotropic solids of various geometric shapes in the presence of internal heat sources or sinks by meshless method based on the use of anisotropic radial basis functions; to evaluate the accuracy of the simulation results obtained with the meshless method based on the use of anisotropic radial basis functions by comparing the obtained simulation results with analytical solutions of boundary-value problems or by calculating relative residuals; to analyze existing schemes for constructing atomic radial basis functions of many independent variables generated by various differential operators; to construct a family of atomic radial basis functions of three independent variables generated by a differential operator of a special type, which includes the symmetric positive definite tensor of the second rank, that determines the anisotropy of the material; to develop a technique of using the family of atomic radial basis functions of three independent variables which considers the anisotropy of the material for simulation of non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids by meshless method; to simulate the distribution of non-stationary temperature field in the anisotropic solid in the form of a plate in the presence of a moving heat source by meshless method based on the use of anisotropic and atomic radial basis functions; to perform a comparative analysis of the accuracy of obtained results of simulation of non-stationary heat conduction in anisotropic solid in the form of a plate by meshless method using anisotropic and atomic radial basis functions; to study the model of heat transfer in a single-crystal lithium niobate (LiNbO_3) in the form of cylinder in interaction with continuous-wave laser radiation with the wavelength of 1064 nm at a time interval of 2 h 30 min and determine the time required to achieve the steady-state heating mode of the LiNbO_3 single-crystal; to develop the software «AnisotropicHeatTransfer3D» for simulation of non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids as a GUI

application, based on the use of the meshless method and the atomic radial basis function $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$; to test the developed software.

This dissertation presents a developed meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids [137-140]. This meshless scheme is based on a combination of the dual reciprocity method using anisotropic radial basis functions and the method of fundamental solutions. The dual reciprocity method with anisotropic radial basis functions is used for obtaining of the particular solution, and the method of fundamental solutions is used for obtaining of the homogenous part of solution of the boundary-value problem. The application of the method of fundamental solutions in the case of simply-connected and multiple-connected domains is demonstrated. The time discretization of the differential equation of non-stationary heat conduction problems in this meshless method is made using the θ -scheme of the finite difference method. The developed meshless method is an effective numerical approach for simulation of the distribution of non-stationary temperature fields in anisotropic solids of complex geometric shapes in the presence of internal heat sources or sinks.

The family of the atomic radial basis functions of three independent variables $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, generated by Helmholtz-type operator was constructed [159, 160]. The functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ extend the subclass of functions that are used as basis for the implementation of the meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids. The special properties of the function $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ (infinite differentiability and compact support) had improved the accuracy and computational efficiency of the developed meshless method. The use of finite functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ as basis made it possible to solve boundary-value problems on domains with complex geometric shapes. Explicit formulas for calculating the functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ and their Fourier transform are obtained. Visualizations of the atomic functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ and their first derivatives with respect to the variables x_1 and x_2 at the fixed value of the variable

$x_3 = 0$ for isotropic and anisotropic cases are presented. Visualizations of the functions $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ at the fixed value of the variable $x_3 = 0$ for isotropic and anisotropic cases are presented.

The results of numerical solutions of non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids of various geometric shapes in the presence of internal heat sources or sinks and various initial and boundary conditions obtained using the developed meshless method are demonstrated.

Approximate solutions for the three-dimensional non-stationary heat conduction problem in the solid in the form of a cube in the presence of an internal heat source for the isotropic and anisotropic cases are obtained [137, 140]. The application of atomic functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ as basis in the simulation of the non-stationary heat conduction in an anisotropic solid in the form of a plate in the presence of a moving point heat source is presented [159]. Analytical solutions of these non-stationary heat conduction problems are obtained. The accuracy of approximate solutions of boundary-value problems is estimated by the values of the average relative error $rerr(u)$, the average absolute error $aerr(u)$, and the maximum error $merr(u)$. A comparative analysis of the efficiency of approximation of non-stationary heat conduction problems by anisotropic radial basis functions and the atomic radial basis functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ is performed. The use of the atomic radial basis functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ as basis made it possible to increase the accuracy of the obtained solutions.

This dissertation presents the simulation results of heat transfer in LiNbO_3 single-crystal in the form of cylinder in interaction with continuous-wave laser radiation with the output power 50 W and the wavelength of 1064 nm [170]. It was found, that after about 4τ the temperature of the crystal goes into a steady-state, and is in the range of 27.74 to 28.24 °C. The results of numerical calculations of the temperature field distribution inside and on the surface of the LiNbO_3 single-crystal

at different times are presented. The accuracy of the obtained approximate solutions is estimated by the value of the norm of relative residual.

The effectiveness of the developed meshless method in solving the heat conduction problem in a multiple-connected domain, namely, in simulation of the thermal process in perforated graphite sheet in the presence of a mixed boundary condition, is demonstrated.

The numerical simulation results obtained using the meshless method are in good agreement with the results obtained using the finite element method (FEM), which indicates the high efficiency of the meshless scheme even at a small number of interpolation nodes.

The software «AnisotropicHeatTransfer3D» for simulation of three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids by the meshless method was developed [171-173], which is confirmed by the certificate of state registration of copyright for the work [174]. The software «AnisotropicHeatTransfer3D» has been tested by numerical solution of the considered three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids.

The scientific novelty of the results of the dissertation research is as follows: for the first time the meshless method for solving three-dimensional non-stationary heat conduction problems in anisotropic solids based on a combination of the dual reciprocity method using anisotropic radial basis function and the method of fundamental solutions was developed; for the first time the distribution of non-stationary temperature fields in anisotropic solids of different geometric shapes in the presence of internal heat sources or sinks by meshless method was simulated; for the first time the family of atomic radial basis functions of three independent variables $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, generated by a Helmholtz-type differential operator, which includes the symmetric positive definite tensor of the second rank, that determines the anisotropy of the material was constructed; for the first time an algorithm for constructing the family of atomic radial basis functions of three independent variables

$AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, generated by a Helmholtz-type differential operator, which includes the symmetric positive definite tensor of the second rank, that determines the anisotropy of the material was programmatically implemented; for the first time the family of atomic radial basis functions of three independent variables $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ was used as basis in the implementation of the meshless method for the numerical solution of heat conduction problems in anisotropic solids; for the first time the distribution of non-stationary temperature field in the anisotropic solid in the form of a plate in the presence of a moving point heat source by meshless method based on the use of atomic radial basis functions $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ was simulated; for the first time the model of heat transfer in LiNbO₃ single-crystal in the form of cylinder in interaction with continuous-wave laser radiation with the wavelength of 1064 nm at a time interval of 2 h 30 min by the meshless method was studied and the time required to achieve the steady-state heating mode of the LiNbO₃ single-crystal was determined; for the first time the software «AnisotropicHeatTransfer3D» for simulation of non-stationary heat conduction in anisotropic solids as a GUI application, based on the use of the meshless method and the atomic radial basis function $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ was developed, which is confirmed by the certificate of state registration of copyright for the work.

The developed meshless method for solving non-stationary thermal processes in anisotropic solids can be used in the implementation of new effective approaches to simulation of the thermal state of the solid in the presence of melting, evaporation or solidification processes as well as methods for solving non-stationary heat conduction problems in composite materials with arbitrary number of movable boundaries of phase transformations (Stefan problem).

The family of the atomic radial basis functions of three independent variables $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ which takes into account the anisotropy of the material represents a new subclass of functions that can be used as basis the implementation of meshless methods and approaches to simulation of the thermal processes in anisotropic materials.

The results of the dissertation research, namely the theoretical material and the developed software «AnisotropicHeatTransfer3D» for simulation of the non-stationary thermal processes in anisotropic solids, were introduced in the educational process of:

1. the Department of Information Technologies in Physical Energy Systems at the Education and Research Institute of Computer Physics and Energy of V. N. Karazin Kharkiv National University during lectures, laboratory and practical classes in the courses «Meshless Methods in Problems of Physics» and «Computational Methods in Physics» for third-year undergraduate students and «Approximate Methods for Solving Problems of Mathematical Physics» and «Approximate Computing in Physics» for first-year graduate students of speciality 105 – «Applied Physics and Nanomaterials» (Appendix B);

2. the Department of Information Technologies of Electronic Devices at the Faculty of Radio Electronics and Telecommunications of National University «Zaporizhzhia Polytechnic» during lectures, laboratory and practical classes in the courses «Physical Foundations of Micro- and Nanosystems Technology» for third-year undergraduate students and «Heat and Mass Transfer in Radioelectronic Devices» for fourth-year undergraduate students of speciality 172 – «Telecommunications and Radio Engineering» (Appendix B);

3. the Department of Computer Engineering and Electronics at the Institute of Education and Science in Electrical Engineering and Information Technologies of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University during lectures, laboratory and practical classes in the courses «Physical and Theoretical Foundations of Electronic Devices Design» for second-year undergraduate students and «Design of electronic devices» for third-year undergraduate students of speciality 171 – «Electronics» (Appendix B);

4. the Department of Computer Science and Applied Mathematics at the Faculty of Road Construction of Kharkiv National Automobile and Highway University during lectures, laboratory and practical classes in the course «Computer

mathematical technologies» for third-year undergraduate students of speciality 275.03 – «Transport technologies (on road transport)» (Appendix B).

The results of the dissertation are used in scientific research at the A. Pidhorneyi Institute of Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, which is confirmed by the certificate of use of results of dissertation research (Appendix B).

Keywords: non-stationary heat conduction problems, anisotropic solids, meshless method, the dual reciprocity method, the method of fundamental solutions, anisotropic radial basis functions, atomic radial basis functions, Helmholtz-type operator, lithium niobate, laser radiation.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. Protektor D. O. Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-Type Operator // East European Journal of Physics. 2021. No. 4. P. 49-58. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2021-4-05> (Scopus, Web of Science)

2. Protektor D. O., Lisin D. O. Simulation of Heat Transfer in Single-Crystal Lithium Niobate in Interaction with Continuous-Wave Laser Radiation // East European Journal of Physics. 2022. No. 1. P. 10-15. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2022-1-02> (Scopus, Web of Science)

(Особистий внесок здобувача: здійснив моделювання теплового процесу, який протікає в монокристалі ніобату літію при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням з використанням безсіткового методу; визначив час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання кристала LiNbO_3 , а також його температурний діапазон на всьому часовому інтервалі; обчислив норму відносної нев'язки отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності)

Публікація у періодичному науковому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science держави, яка входить до Організації економічного співробітництва та розвитку та Європейського Союзу (Нідерланди):

3. Protektor D. O., Kolodyazhny V. M., Lisin D. O., Lisina O. Yu. A Meshless Method of Solving Three-Dimensional Nonstationary Heat Conduction Problems in Anisotropic Materials // Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57, No. 3. P. 470-480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00372-8> (Scopus, Web of Science)

(Особистий внесок здобувача: розробив безсітковий метод розв'язання тривимірних нестационарних задач теплопроводности в анизотропных твердых телах, заснований на комбінації методу подвійного заміщення в поєднанні з анизотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків; застосував розроблений безсітковий метод для моделювання теплового процесу в анизотропному та ізотропному твердих тілах у формі куба зі сталим джерелом тепла)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Протектор Д. О., Лісін Д. О. Безсітковий підхід для розв'язку тривимірних нестационарних задач теплопроводности в анизотропному середовищі // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 20-21.

5. Protektor D. O. A Meshless Approach for Solving Heat Conduction Problems in Anisotropic Solids Using Radial Basis Functions // Sectoral research XXI : characteristics and features : collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the I International Scientific and Theoretical Conference, 26 Mar. 2021. : abstr. Chicago, 2021. P. 67-68.

6. Protektor D. O. Constructing Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-type Operator // Problemas y perspectivas de la aplicación de la investigación científica innovadora : Colección de documentos científicos «ΛΟΓΟΣ» con actas de la Conferencia Internacional Científica y Práctica, 11 Jun. 2021. : abstr. Panama, 2021. P. 117-119.

7. Protektor D. O., Hariachevska I. V. Software for simulation of non-stationary heat transfer in anisotropic solid // An integrated approach to science modernization: methods, models and multidisciplinary : Proceedings of the III Correspondence International Scientific and Practical Conference, 29 Apr. 2022. : abstr. Vienna, 2022. P. 356-358.

8. Протектор Д. О., Гарячевська І. В. Програмний комплекс для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом // Комп'ютерні технології і мехатроніка : збірник наукових праць за матеріалами IV Міжнародної науково-методичної конференції, 26 трав. 2022 р., Харків, 2022. С. 67-71.

**Наукові праці, які додатково відображають
наукові результати дисертації, авторські свідоцтва:**

9. Протектор Д. О., Лісін Д. О., Лісіна О. Ю. Система комп'ютерного моделювання для розв'язку тривимірних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Радіoeлектроніка та інформатика. 2019. Т. 84, № 1. С. 20-27. DOI: [https://doi.org/10.30837/1563-0064.1\(84\).2019.184712](https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712)

(Особистий внесок здобувача: створив програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, який заснований на використанні розробленого безсіткового методу)

10. А. с. 112945 Україна, Комп'ютерна програма “Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D»” / Д. О. Протектор. № с202201916 ; заявл. 11.05.22 ; опубл. 16.05.22.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	26
ВСТУП	27
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ПІДХОДІВ ДО ЧИСЛОВОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ.....	41
1.1. Методи сіток.....	42
1.1.1. Метод скінченних елементів	42
1.1.2. Метод скінченних об’ємів.....	46
1.1.3. Метод граничних елементів.....	50
1.2. Безсіткові методи	53
1.2.1. Історичний розвиток безсіткових методів	54
1.2.2. Використання безсіткових методів при моделюванні теплових процесів в анізотропних матеріалах	58
Висновки до розділу 1	60
РОЗДІЛ 2. БЕЗСІТКОВИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ.....	62
2.1. Радіальні базисні функції	63
2.1.1. Радіальні базисні функції з глобальним носієм.....	63
2.1.2. Радіальні базисні функції з компактним носієм.....	67
2.1.3. Анізотропні радіальні базисні функції	69
2.2. Постановка тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.....	71
2.3. Дискретизація рівняння нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.....	73
2.4. Метод подвійного заміщення	76
2.5. Метод фундаментальних розв’язків.....	78
Висновки до розділу 2	82

РОЗДІЛ 3. СІМЕЙСТВО АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ПОРОДЖУЮТЬСЯ ОПЕРАТОРОМ ТИПУ ГЕЛЬМГОЛЬЦА	84
3.1. Алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій	85
Висновки до розділу 3	94
РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ БЕЗСІТКОВОГО ПІДХОДУ	96
4.1. Тривимірна задача нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла	97
4.1.1. Ізотропний випадок	97
4.1.2. Анізотропний випадок	101
4.2. Використання атомарних радіальних базисних функцій при моделюванні теплого процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла	105
4.3. Моделювання теплового процесу в монокристалі ніобату літію при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням	109
4.4. Моделювання теплового процесу в перфорованій графітовій пластині.	118
4.5. Опис програмного комплексу	123
4.5.1. Функціональне призначення	123
4.5.2. Опис архітектури	125
4.5.3. Опис інтерфейсу	130
4.5.4. Умови експлуатації	147
4.5.5. Інструкція користувача	147
Висновки до розділу 4	166
ВИСНОВКИ	169
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	176
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	198
ДОДАТОК Б. АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ	201
ДОДАТОК В. СВІДОЦТВО ПРО РЕЄСТРАЦІЮ АВТОРСЬКОГО ПРАВА.	206

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АРБФ	—	атомарна радіальна базисна функція
ЛКМ	—	ліва кнопка миші
МГЕ	—	метод граничних елементів
МСЕ	—	метод скінченних елементів
МСО	—	метод скінченних об'ємів
РБФ	—	радіальна базисна функція
DEM	—	diffuse element method
DRM	—	dual reciprocity method
EFGM	—	element-free Galerkin method
FPM	—	finite point method
LiNbO ₃	—	ніобат літію
MFS	—	method of fundamental solutions
MLPGM	—	meshless local Petrov-Galerkin method
PIM	—	point interpolation method
RKPM	—	reproducing kernel particle method
SBM	—	singular boundary method
SPH	—	smoothed particle hydrodynamics

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Велика кількість природних і штучних матеріалів, які використовуються в різних галузях науки і техніки, є анізотропними, тобто деякі їх фізичні властивості залежать від обраного напрямку. До анізотропних матеріалів належать кристалічні матеріали (зокрема рідкі кристали), метали і сплави, волокнисті та композиційні матеріали, деякі полікристалічні матеріали та інші. Анізотропні характеристики матеріалам надають у процесі їх отримання або спеціальною технологічною обробкою. Анізотропні матеріали застосовуються для виготовлення приладів та пристроїв, деталей конструкцій та машин – наприклад, трансформаторів із сердечниками з текстурованої сталі (в електротехніці), лопаток газотурбінних двигунів із жароміцних нікелевих сплавів з монокристалічною структурою (в авіації), п'єзоперетворювачів, електрооптичних модуляторів та рідкокристалічних індикаторів (в електронному приладобудуванні). Сучасні анізотропні матеріали зі складною структурою (наприклад, композитні матеріали, багат шарові матеріали, покриття, нанесені на підкладки) все частіше використовуються в новітніх інженерних розробках.

Анізотропні ізоляційні матеріали широко застосовуються у будівельній промисловості та інших суміжних областях завдяки відмінним теплоізоляційним властивостям. Велика кількість теплозахисних композиційних матеріалів, які використовуються, наприклад, в гіперзвукових літальних апаратах є анізотропними [1-3]. До таких матеріалів відносяться склопластики, асбопластики, вуглепластики, більшість графітів і графітовмісних матеріалів. Також, яскраво виражену анізотропію фізичних властивостей, зокрема теплопровідність, демонструють всі сегнетоелектрики. Серед них, найбільш широко застосовувані є кристали ніобату літію (LiNbO_3) та танталату літію (LiTaO_3), які використовуються для створення оптичних амплітудних/фазових модуляторів [4-6], осередків Покельса [7], модуляторів

добротності для лазерів [8, 9], а також механоелектричних резистивних перетворювачів [10] і сенсорів [11].

У різних технологічних процесах і пристроях дані матеріали піддаються тепловому впливу, внаслідок чого в них відбуваються фізико-хімічні явища, зокрема зміна геометричних розмірів. Неконтрольоване теплове розширення конструкційних матеріалів може призвести до погіршення експлуатаційних характеристик пристрою, а також до аварійних ситуацій. Тому при створенні та використанні таких матеріалів необхідно враховувати анізотропію їх теплофізичних властивостей, а також досліджувати теплові процеси, які в них протікають.

Швидкий розвиток обчислювальної техніки сприяв можливості прямого зіставлення натурного експерименту з його комп'ютерною моделлю. Нині, комп'ютерні моделі, які базуються на використанні комп'ютерів і числових методів для розв'язання крайових задач, є головним інструментом математичного моделювання.

Перспективним напрямом досліджень у галузі обчислювальної фізики є числові розрахунки теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах. Насамперед це пов'язано з широким застосуванням анізотропних матеріалів у найрізноманітніших областях, таких як електроніка, аерокосмічна техніка, суднобудування, машинобудування, енергетика, медицина тощо. Це призвело до необхідності розробки ефективних числових методів та підходів до розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми.

В даний час існує велика кількість програмного забезпечення для комп'ютерного моделювання, а саме COMSOL Multiphysics, SolidWorks, Ansys Fluent, THESEUS-FE та інші, що базується на використанні числових методів розв'язання задач математичної фізики. У цих системах для розв'язання крайових задач використовуються давно відомі методи сіток, такі як метод скінченних елементів (МСЕ) [12] та метод скінченних об'ємів (МСО) [13]. Це надійні та ретельно розроблені методи, але вони не позбавлені недоліків.

Одним із них є використання заздалегідь заданої інтерполяційної сітки. Процедура генерації інтерполяційної сітки, особливо у випадку тривимірних областей зі складною геометричною формою, є одним із трудомістких і обчислювально витратних процесів. Крім цього, наявність інтерполяційної сітки накладає певні обмеження на використання цих методів. По-перше, порушується гладкість представлення границь об'єкта. У методах сіток геометрична область крайової задачі розбивається на скінченне число підобластей, які називаються елементами. При цьому, гладкі опуклі або увігнуті границі початкового об'єкта зазвичай піддаються спотворенню. Точність представлення таких границь контролюється кількістю елементів сітки. Зі збільшенням кількості елементів інтерполяційної сітки збільшується гладкість представлення границь об'єкта, що призводить до більш точних результатів обчислень, і навпаки, зі зменшенням кількості структурних елементів сітки, погіршується точність представлення заокруглених границь об'єкта, що, в свою чергу, призводить до значних похибок. На практиці, через обчислювальні та часові обмеження, необхідно контролювати максимальну кількість елементів інтерполяційної сітки. По-друге, використання методів сіток викликає певні труднощі в задачах, в яких треба враховувати зміну геометричної форми досліджуваного об'єкта на деякому часовому інтервалі. Деформація може призвести не тільки до сильного спотворення сітки, але й до ситуацій, коли границі об'єкта змінюються на кожному часовому кроці. Такі випадки виникають, наприклад, при моделюванні процесів формування ливарних виливків, в задачах фільтрації тощо. Для розв'язання подібного класу задач методами сіток необхідно запускати процес генерації інтерполяційної сітки на кожному кроці нестационарної крайової задачі, що супроводжуватиметься значними обчислювальними витратами.

Даних недоліків позбавлені безсіткові методи розв'язання крайових задач, які відносяться до широкого класу ефективних числових методів, що не використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку. У безсіткових методах апроксимація диференціальних рівнянь з частинними похідними заснована

виключно на наборі довільно розташованих вузлів в яких розміщуються базисні функції. Відсутність зв'язків між вузлами позбавляє потреби в проведенні трудомісткої процедури генерації інтерполяційної сітки. Перевагою безсіткових методів є те, що вузли з базисними функціями, у загальному випадку, можуть розміщуватися не тільки всередині області крайової задачі, але також і за її межами. Це робить можливим проведення числових розрахунків на однаковому наборі вузлів для областей різної геометричної форми.

Безсіткові методи продемонстрували свою перспективність при розв'язанні задач теплопровідності [14-18], магнітогідродинаміки [19-21], механіки руйнування [22, 23], при моделюванні течії рідини [24-26], в задачах механіки твердого тіла [27, 28] і це лише деякі з них.

Одним з цікавих варіантів реалізації безсіткових схем є методи, засновані на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) з глобальним носієм. Радіальні базисні функції були вперше застосовані Канзою в 1991 р. для апроксимації диференціальних рівнянь із частинними похідними в задачах гідродинаміки [29, 30]. Канза запропонував безсіткову схему, яка базувалася на комбінації методу колокації та мультікватратичних РБФ. Безсіткові методи, засновані на використанні радіальних базисних функцій із глобальним носієм, є простими в реалізації та обчислювально ефективними. Однак використання радіальних функцій з глобальним носієм в якості базисних призводить до щільної інтерполяційної матриці, а отже, до значних обчислювальних витрат.

Ву [31] та Вендланд [32] у 1995 р. запропонували новий тип РБФ з компактним носієм, використання яких призводить до розрідженої інтерполяційної матриці та допомагає ефективно уникнути поганої обумовленості. Незважаючи на це, головним недоліком РБФ з компактним носієм є дуже низький порядок точності, що створює серйозну перешкоду для їх практичного застосування.

Нові можливості практичної реалізації безсіткових схем відкрилися з використанням атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ). Відкриття класів атомарних функцій належить В. Л. Рвачову та В. О. Рвачову, які у

1971 р. побудували найпростішу одновимірну атомарну функцію $u_p(x)$ [33]. Завдяки особливим властивостям атомарної функції (нескінченна диференційовність і фінітність) вдалося розробити прості в реалізації обчислювальні схеми для розв'язання задач апроксимації й інтерполяції функцій [34]. Узагальнення атомарних функцій на випадок багатьох незалежних змінних було проведено в роботах В. М. Колодяжного, В. О. Рвачова та О. Ю. Лісіной [35-39]. Ними були побудовані АРБФ, що породжені різними диференціальними операторами такими, як оператор Лапласа, Гельмгольца, Клейна-Гордона, бігармонічний оператор та інші. Атомарні радіальні базисні функції продемонстрували свою ефективність при реалізації безсіткових схем числового розв'язання задач нестационарної теплопровідності в ізотропних твердих тілах [40, 41].

У даний час розроблена велика кількість безсіткових підходів до розв'язання задач теплопровідності в ізотропних матеріалах [42-48]. Проте напрочуд невеликим є перелік публікацій, що присвячений безсітковим методам числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах [49-54]. Дані методи застосовувалися здебільшого для розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності в матеріалах з анізотропією.

Отже, оскільки більшість природних і штучних матеріалів, які широко застосовуються в техніці, є анізотропними та піддаються постійному тепловому впливу, це робить актуальною та перспективною розробку нових ефективних підходів до моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності.

Основні завдання дисертаційного дослідження:

1. Дослідити теоретичні аспекти в області числового моделювання теплових процесів із застосуванням безсіткових підходів.
2. Розробити безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.
3. Провести моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних радіальних базисних функцій.
4. Оцінити точність результатів моделювання безсітковим методом, заснованим на використанні анізотропних радіальних базисних функцій, шляхом зіставлення отриманих результатів моделювання з аналітичними розв'язками крайових задач або за допомогою обчислення відносних нев'язок.
5. Провести аналіз існуючих схем побудови атомарних радіальних базисних функцій багатьох незалежних змінних, що породжені різними диференціальними операторами.
6. Побудувати сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, породжених диференціальним оператором спеціального типу, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.
7. Розробити методику використання сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу, при моделюванні нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах із використанням безсіткового методу.
8. Провести моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних та атомарних радіальних базисних функцій.
9. Здійснити порівняльний аналіз точності отриманих результатів моделювання нестационарного теплового процесу в твердому анізотропному

тілі в формі пластини безсітковим методом при використанні анізотропних і атомарних радіальних функцій в якості базисних.

10. Дослідити модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом ніобату літію LiNbO_3 у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановити час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 .

11. Розробити програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$.

12. Провести тестування розробленого програмного комплексу.

Об'єкт та предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є нестационарні теплові процеси, які протікають в анізотропних твердих тілах.

Предмет дослідження – числове розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах з використанням безсіткового методу.

Методи дослідження.

1. Порівняння особливостей реалізації числових методів і підходів до розв'язання задач математичної фізики (використано при розробці безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах).

2. Збір початкових даних (використано при формулюванні постановок крайових задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах).

3. Моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах із використанням безсіткового підходу (використано при накопиченні результатів розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах).

4. Аналіз схем побудови атомарних радіальних базисних функцій багатьох незалежних змінних, що породжені різними диференціальними операторами (використано при побудові сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу).

5. Обробка результатів моделювання теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах (використано для оцінки ефективності безсіткового методу моделювання теплопередачі в анізотропних твердих тілах).

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше розроблено безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах, який засновано на комбінації методу подвійного заміщення (dual reciprocity method – DRM) [55-58] в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків (method of fundamental solutions – MFS) [59-60].

2. Вперше проведено моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою розробленого безсіткового методу.

3. Вперше побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

4. Вперше програмно реалізовано алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

5. Вперше застосовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при

реалізації безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах.

6. Вперше проведено моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання атомарних радіальних базисних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$.

7. Вперше, за допомогою розробленого безсіткового методу, досліджено модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом $LiNbO_3$ у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановлено час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу $LiNbO_3$.

8. Вперше розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні розробленого безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір [174].

Особистий внесок здобувача.

Автором особисто виконано наступні види робіт:

1. Досліджено теоретичні аспекти в області числового моделювання теплових процесів із застосуванням безсіткових підходів.

2. Розроблено безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах, який засновано на комбінації методу подвійного заміщення (dual reciprocity method – DRM) [56] в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків (method of fundamental solutions – MFS) [60].

3. Проведено моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою розробленого безсіткового методу.

4. Оцінено точність результатів моделювання безсітковим методом, заснованим на використанні анізотропних радіальних базисних функцій, шляхом зіставлення отриманих результатів моделювання з аналітичними розв'язками крайових задач або за допомогою обчислення відносних нев'язок.

5. Проведено аналіз існуючих схем побудови атомарних радіальних базисних функцій багатьох незалежних змінних, що породжені різними диференціальними операторами [35-39].

6. Побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

7. Програмно реалізовано алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

8. Застосовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при реалізації безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах.

9. Проведено моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$.

10. Здійснено порівняльний аналіз точності отриманих результатів моделювання нестационарного теплового процесу в твердому анізотропному

тілі в формі пластини безсітковим методом при використанні анізотропних і атомарних радіальних функцій в якості базисних.

11. За допомогою розробленого безсіткового методу, досліджено модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом LiNbO_3 у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановлено час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 .

12. Розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$, що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір [174].

13. Проведено тестування розробленого програмного комплексу.

Апробація матеріалів дисертації.

Матеріали дисертаційного дослідження доповідалися на наступних міжнародних конференціях:

1. Протектор Д. О., Лісін Д. О. Безсітковий підхід для розв'язку тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 20-21.

2. Protektor D. O. A Meshless Approach for Solving Heat Conduction Problems in Anisotropic Solids Using Radial Basis Functions // Sectoral research XXI : characteristics and features : collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the I International Scientific and Theoretical Conference, 26 Mar. 2021. : abstr. Chicago, 2021. P. 67-68.

3. Protektor D. O. Constructing Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-type Operator // Problemas y perspectivas de la aplicación de la investigación científica innovadora : Colección

de documentos científicos «ΛΟΓΟΣ» con actas de la Conferencia Internacional Científica y Práctica, 11 Jun. 2021. : abstr. Panama, 2021. P. 117-119.

4. Protektor D. O., Hariachevska I. V. Software for simulation of non-stationary heat transfer in anisotropic solid // An integrated approach to science modernization: methods, models and multidisciplinary : Proceedings of the III Correspondence International Scientific and Practical Conference, 29 Apr. 2022. : abstr. Vienna, 2022. P. 356-358.

5. Протектор Д. О., Гарячевська І. В. Програмний комплекс для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом // Комп'ютерні технології і мехатроніка : збірник наукових праць за матеріалами IV Міжнародної науково-методичної конференції, 26 трав. 2022 р., Харків, 2022. С. 67-71.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та трьох додатків. Обсяг загального тексту дисертації складає 206 с., з них основного тексту 152 с. Робота містить 90 рисунків та 5 таблиць. Список використаних джерел містить 174 найменування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами.

Дисертаційна робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна відповідно до плану науково-дослідних робіт навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики, зокрема, в межах науково-дослідної роботи «Математичне моделювання теплових процесів в анізотропних наноматеріалах» № держреєстрації 0122U001482, при виконанні якої здобувач приймав участь як виконавець.

Практичне значення отриманих результатів.

Розроблена безсіткова схема моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах може бути використана при реалізації нових ефективних підходів до моделювання теплового стану тіла за наявності процесів плавлення, випаровування або затвердіння, а також методів

розв'язання задач нестационарної теплопровідності в композиційних матеріалах з довільним числом рухомих границь фазових перетворень (задача Стефана).

Сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$, які враховують анізотропію матеріалу, являють собою новий підклас функцій, які можуть використовуватися в якості базисних при реалізації безсіткових методів та підходів к моделюванню теплових процесів в анізотропних матеріалах.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, були впроваджені у навчальний процес:

1. Кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Безсіткові методи в задачах фізики» і «Обчислювальні методи в фізиці» для студентів 3 курсу бакалаврату та «Наближені методи розв'язання задач математичної фізики» і «Наближені обчислення у фізиці» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» (Додаток Б);

2. Кафедри інформаційних технологій електронних засобів факультету радіоелектроніки та телекомунікацій НУ «Запорізька політехніка» при проведенні лекційних та лабораторних практичних занять з курсів «Фізичні основи мікро- і наносистемної техніки» для студентів 3 курсу і «Тепломасообмін у радіоелектронних апаратах» для студентів 4 курсу бакалаврату спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» (Додаток Б);

3. Кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Фізико-теоретичні основи конструювання електронної апаратури» для студентів 2 курсу і

«Конструювання електронних пристроїв» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 171 – «Електроніка» (Додаток Б);

4. Кафедри інформатики та прикладної математики дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсу «Комп'ютерні математичні технології» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 275.03 – «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» (Додаток Б).

Результати дисертаційної роботи використовуються в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, про що свідчить відповідна довідка про використання результатів дисертаційного дослідження (Додаток Б).

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ПІДХОДІВ ДО ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ

В останні роки спостерігається значний інтерес до використання аналітичних та числових методів розв'язання задач математичної фізики. Серед великого розмаїття крайових задач, які нині успішно вирішуються, особливу роль займають задачі теплопровідності в анізотропних матеріалах. Насамперед це пов'язано з активним використанням анізотропних матеріалів при виготовленні великої кількості сучасних приладів та пристроїв, а також із застосуванням їх в якості конструкційних матеріалів у передових інженерних розробках, де вони в процесі експлуатації піддаються тепловому впливу.

Крайові задачі, що описують теплові процеси в анізотропних матеріалах, відносяться до найбільш складних задач математичної фізики та їх розв'язання пов'язане зі значними труднощами, основними серед яких є:

- теплофізичні характеристики анізотропних матеріалів, зокрема теплопровідність, є не скалярними, а тензорними величинами, внаслідок чого теплові потоки в кожній точці простору відрізняються в різних напрямках, а це означає, що диференціальне рівняння з частинними похідними містить змішані похідні;
- метод відокремлення змінних або метод Фур'є, який є основним методом аналітичного розв'язання задач математичної фізики, не застосовується до задач теплопровідності в анізотропних твердих тілах, оскільки змішані частинні похідні не розділяються;
- напрям вектору теплового потоку в анізотропному випадку не обов'язково збігається з нормаллю до ізотермічної поверхні, яка проходить через точку, що розглядається.

Таким чином, використання аналітичних методів для розв'язання задач теплопровідності в анізотропних матеріалах є вкрай обмеженим і може застосовуватись лише для дуже вузького класу задач. Тому, основна увага

дослідників фокусується на розробці саме числових методів та підходів до розв'язання задач теплопровідності в анізотропних тілах.

1.1 Методи сіток

1.1.1 Метод скінченних елементів

Метод скінченних елементів є ефективним числовим методом розв'язання задач математичної фізики. Основні концепції методу скінченних елементів були представлені в роботах Тернера, Клафа, Мартіна та Топпа [61] і Аргіріса та Келсі [62-64] в 1950-х рр. Тернер та інші в процесі вирішення задачі теорії пружності на площині застосували новий елемент трикутної форми та сформували для нього не лише матрицю жорсткості, але й вектор вузлових сил. Термін «скінченний елемент» вперше був запропонований Клафом [65] в 1960 р.

Ідея методу скінченних елементів полягає в заміні початкової області крайової задачі кінцевим набором підобластей, які називаються елементами. На кожному елементі невідома величина представляється у вигляді простої інтерполяційної функції з невідомими коефіцієнтами. При цьому шукана безперервна величина є визначеною в окремих точках області, які називаються вузлами, що обмежують ці елементи. Початкова безперервна величина апроксимується з достатньою точністю при розбитті області на дуже малі елементи. У кожному елементі початкова функція апроксимується поліномом таким чином, щоб безперервність величини зберігалася вздовж границі елемента.

Варто зазначити, що область крайової задачі може бути одновимірною, двовимірною або тривимірною, відповідно до цього елементи області можуть бути лінійними, плоскими або об'ємними. Для одновимірної області, яка насправді є прямою або вигнутою лінією, елементи представляються у вигляді відрізків (Рис. 1.1а). Для двовимірної області елементи зазвичай мають форму трикутника або прямокутника (Рис. 1.1б). Прямокутні елементи найкраще підходять для дискретизації прямокутних областей, а трикутні елементи можна

використовувати для областей довільної форми. У тривимірному випадку початкова область крайової задачі може бути поділена на тетраедри, трикутні призми або прямокутні паралелепіпеди (Рис. 1.1в), серед яких тетраедри є найбільш універсальними та найкраще підходять для областей довільної форми.

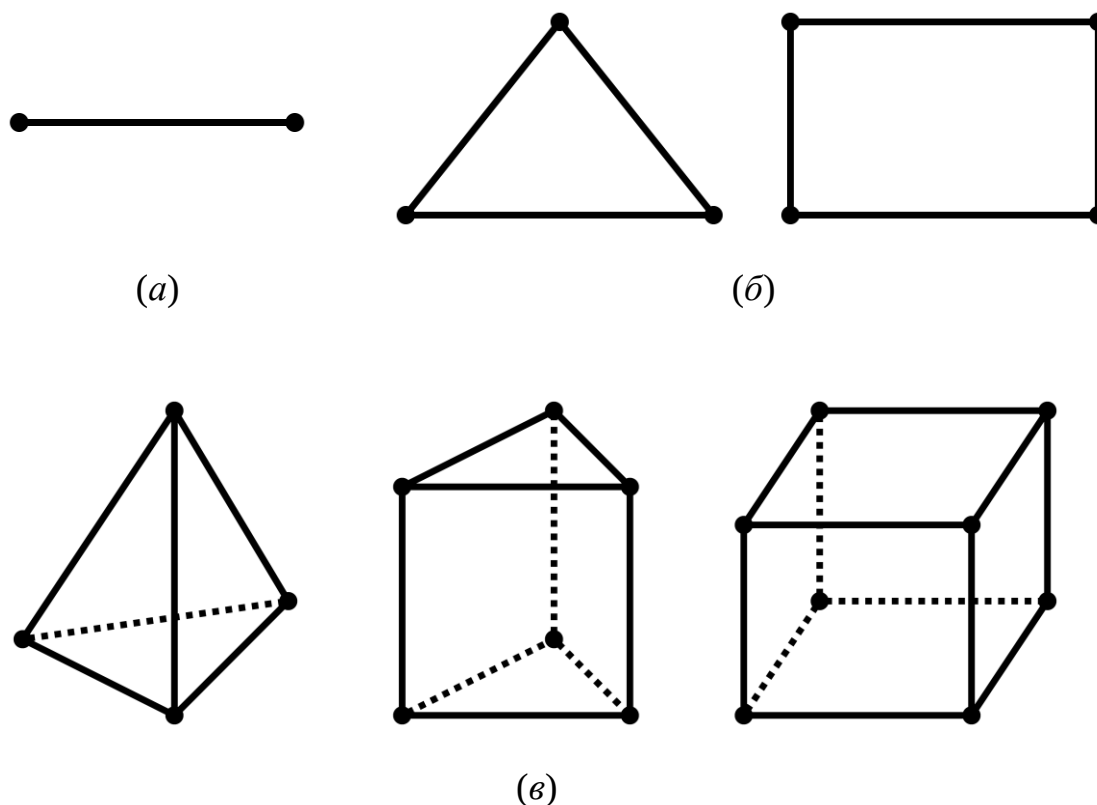


Рис. 1.1 Типи структурних елементів в МСЕ: (а) – одновимірний випадок, (б) – двовимірний випадок, (в) – тривимірний випадок

Таким чином, в методі скінченних елементів можна виділити такі основні етапи:

1. Область крайової задачі розбивається на скінченне число підобластей, які називаються елементами.
2. Безперервна величина апроксимується функцією спеціального виду на кожному елементі i , отже, на всій області. Параметри цих апроксимацій в подальшому стають невідомими параметрами задачі.

3. Підстановка апроксимацій до визначальних рівнянь дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими параметрами. Розв'язуючи цю систему, можна визначити значення цих параметрів і, відповідно, отримати наближений розв'язок задачі.

На Рис. 1.2 наведено приклади візуалізації початкової області крайової задачі та її розбиття на скінченне число елементів.

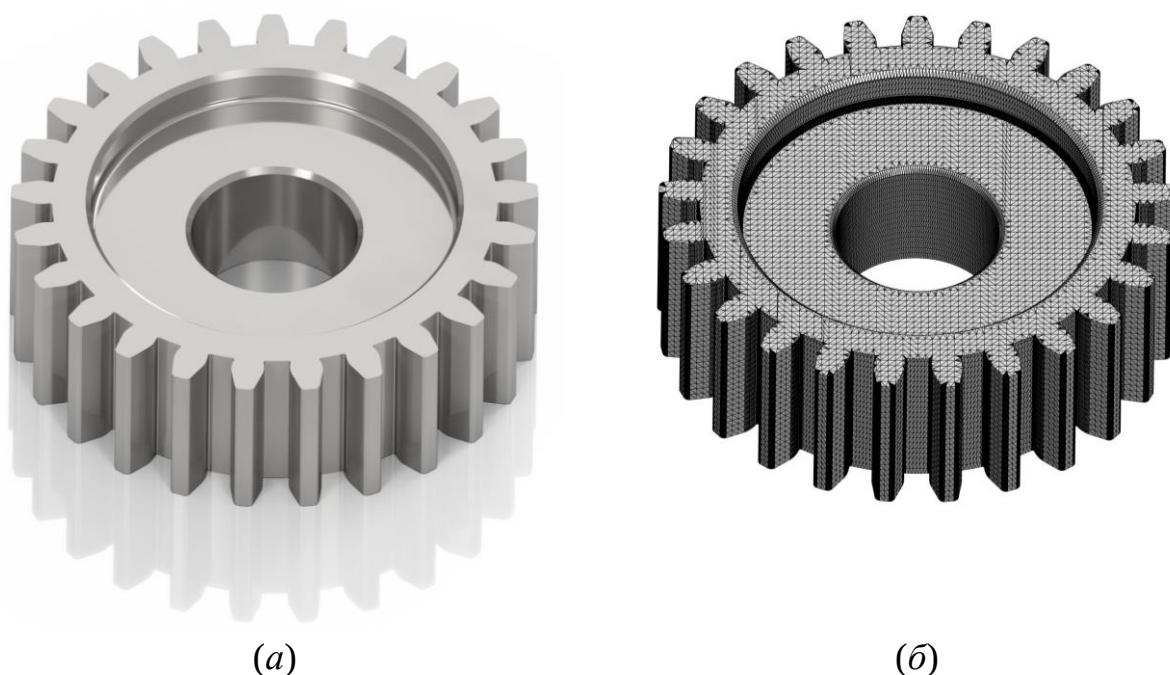


Рис. 1.2 Візуалізація області крайової задачі: (a) – початкова область, (б) – розбиття області на кінцеве число елементів

Метод скінченних елементів успішно застосовувався при моделюванні теплових процесів у різноманітних анізотропних матеріалах, чому свідчить велика кількість наукових праць, присвячених даному напрямку. Ян та інші [66] у своїй роботі застосували метод скінченних елементів при моделюванні розподілу температурних полів у шаруватому композиційному матеріалі на основі мідної матриці, армованої графеном, для дослідження залежності теплофізичних характеристик композиту, зокрема анізотропної теплопровідності, від кількості шарів та товщини покриття. Ішії та інші [67]

дослідили ефективну теплопровідність наноструктур нітриду титану з високим співвідношенням сторін при фототермічному нагріванні лазером безперервної дії з довжиною хвилі 785 нм. Для оцінки ефективної теплопровідності наноструктурованих зразків ними були проведені числові розрахунки теплового процесу, що моделює експериментальні умови, з використанням МСЕ. Для імітації фототермічного нагріву, розподіл інтенсивності лазерного випромінювання був представлений у вигляді гаусівського пучка. В процесі моделювання враховувався конвективний і радіаційний теплообмін. Сун, Чжоу, Хан, Цуй та Чен [68] провели серію числових розрахунків теплових процесів, які протікають у полімерному композиті наповненому гексагональним нітридом бору за наявності теплових потоків із використанням методу скінченних елементів. Моделювання проводилося з урахуванням теплових властивостей наповнювача та полімерної матриці, геометричних розмірів наповнювача, поверхні розділу та факторів неоднорідності. Ше, Ван і Лю [69] провели термічний аналіз композитів, армованих волокнами еліптичного перерізу, та пористих матеріалів за допомогою МСЕ та гібридного методу скінченних елементів Треффца.

Метод скінченних елементів має такі переваги:

1. Може використовуватися для об'єктів різної геометричної форми.
2. Дозволяє враховувати різні граничні умови, а також їх комбінацію.
3. Може використовуватися для розв'язання крайових задач, в яких треба враховувати анізотропію властивостей чи неоднорідність матеріалів.

Однак метод скінченних елементів має ряд істотних недоліків:

1. Процедура генерації інтерполяційної сітки, особливо у разі тривимірних областей зі складною геометричною формою, є одним із трудомістких та обчислювально витратних процесів.
2. У процесі дискретизації області крайової задачі порушується гладкість представлення заокруглених границь об'єкта.
3. Аналіз теплових процесів у тривимірних областях з використанням МСЕ потребує значних часових витрат.

4. Точність наближеного розв'язку в МСЕ може варіюватися від вибору типу елемента, який використовується в процесі дискретизації області крайової задачі.

5. Викликає певні труднощі в задачах, в яких слід враховувати зміну геометричної форми досліджуваного об'єкта на певному часовому діапазоні.

1.1.2 Метод скінченних об'ємів

Метод скінченних об'ємів – це числовий метод розв'язання еліптичних, параболічних або гіперболічних диференціальних рівнянь із частинними похідними у вигляді алгебраїчних рівнянь на основі законів збереження. Даний метод був запропонований Макдональдом у 1971 р. [70].

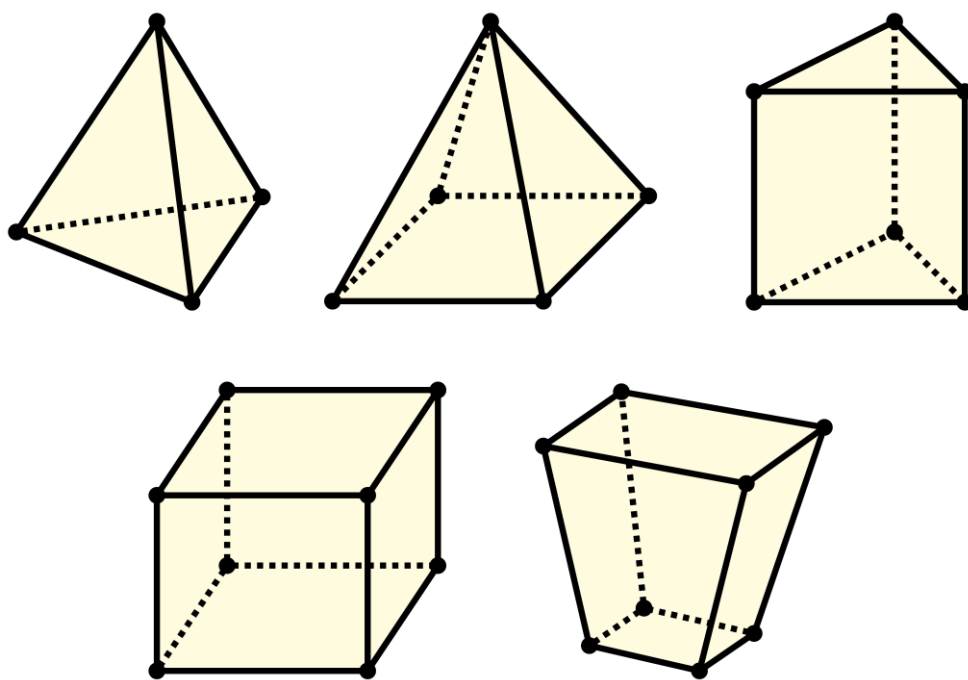


Рис. 1.3 Типи форм елементарних об'ємів в МСО

Ідея методу скінченних об'ємів полягає у наступному. На першому етапі виконується процедура дискретизації розрахункової області, в процесі якої будується структурна сітка. На наступному кроці, область крайової задачі розбивається на скінченне число елементарних об'ємів або комірок, які не

перетинаються між собою. У загальному випадку елементарні об'єми можуть бути довільної форми та розміру, хоча традиційно ці комірки мають форму тетраедра чи гексаедра (Рис. 1.3). Один із можливих варіантів побудови елементарних об'ємів полягає в тому, що кожна комірка будується на вузлах структурної сітки, як показано на Рис. 1.4.

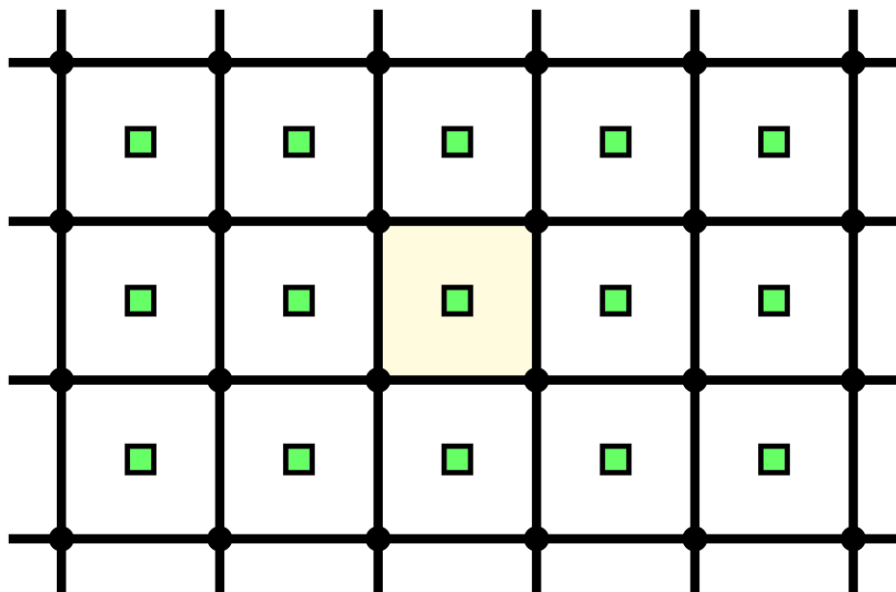


Рис. 1.4 Візуалізація елементарних об'ємів побудованих на вузлах структурної сітки у двовимірному випадку. Зеленими квадратами в центрах комірок позначені розрахункові вузли, чорними кружками – вузли структурної сітки.

У даному випадку, на відміну від МСЕ, вузли структурної сітки визначають лише вершини елементарних об'ємів і не є розрахунковими вузлами. У центрі кожного елементарного об'єму розміщується один єдиний вузол, який міститиме значення шуканої величини (див. Рис. 1.4). Існує і альтернативний підхід до розбиття області на елементарні об'єми. Цей метод полягає в тому, що початкова область розбивається на комірки таким чином, щоб кожен вузол структурної сітки співпадав із центром кожного елементарного об'єму. При цьому вершинами кожного елементарного об'єму, в даному випадку, будуть центроїди його сусідніх комірок (Рис. 1.5). У такому

підході вузли структурної сітки слугуватимуть розрахунковими вузлами. Переважно, для тривимірних областей складної геометричної форми, елементарні об'єми будуються так, щоб співпадати з осередками структурної сітки, як зображено на Рис. 1.4.

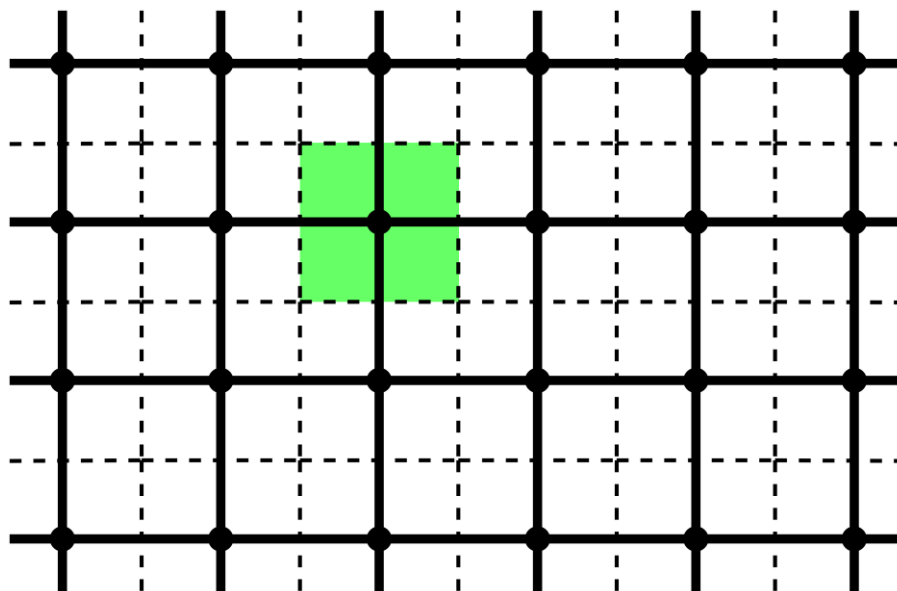


Рис. 1.5 Візуалізація елементарних об'ємів в яких вузли структурної сітки співпадають з центрами комірок. Пунктирними лініями позначені границі кожної комірки, а кружками – вузли структурної сітки, які є розрахунковими вузлами.

Після розбиття на елементарні об'єми диференціальне рівняння з частинними похідним замінюється інтегральними балансними співвідношеннями для кожного елементарного об'єму. Отримані інтеграли в інтегробалансних співвідношеннях апроксимуються з використанням значень функції в розрахункових вузлах або значень похідних шуканої функцій, взятих із граничних умов. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язуючи яку знаходимо значення шуканої величини.

Історично склалося так, що метод скінченних об'ємів використовується, здебільшого, для розв'язання задач гідрогазодинаміки. Однак, незважаючи на

це, МСО знайшов своє застосування також і при моделюванні задач теплопереносу в твердих тілах. Далі наведено декілька прикладів успішного застосування методу скінченних об'ємів при числовому розв'язанні задач теплопровідності в неоднорідних і композиційних матеріалах. Вессакосол та інші [71] застосували метод скінченних об'ємів при моделюванні нестационарних теплових процесів, які протікають в функціонально-градієнтних матеріалах з односпрямованою експоненційною зміною теплофізичних характеристик. Розрахунки проводилися для двох об'єктів різної геометричної форми, а саме смуги з односпрямованою зміною теплопровідності та полого циліндра із заданими постійними температурами на внутрішній і зовнішній границях. Джі та інші [72] провели моделювання процесу спрямованого теплопереносу в системі теплозахисту із вуглець-вуглецевого композиційного матеріалу на основі вуглецевої матриці та вуглецевих волокон L-подібної форми при аеродинамічному нагріванні з використанням МСО та методу ґраткових рівнянь Больцмана. Ними було визначено температуру, за якої відбувається руйнування запропонованої конструкції системи теплозахисту у надзвукових літаках, а також докладно досліджено вплив пористості, діаметра пучка вуглецевого волокна та діаметра пор на спрямований теплоперенос.

Метод скінченних об'ємів має наступні переваги:

1. Маса, імпульс та енергія елементарного об'єму зберігаються за визначенням навіть на грубих сітках.
2. Форма елементарних об'ємів, у загальному випадку, не залежить від форми комірок структурної сітки.
3. Можливість проводити обчислення як на структурованій, так і на неструктурованій сітці, що дозволяє використовувати МСО для областей складної геометричної форми.

До основних недоліків методу кінцевих обсягів можна віднести наступне:

1. Його неуніверсальність, оскільки МСО використовується для розв'язання лише певних класів задач.

2. Метод скінченних об'ємів є менш точним у порівнянні з методом скінченних елементів.

1.1.3 Метод граничних елементів

Метод граничних елементів (МГЕ) – це числовий метод розв'язання крайових задач, заснований на використанні інтегральних рівнянь, який у багатьох випадках пропонує низку переваг у порівнянні з МСЕ та МСО. Дослідження інтегральних рівнянь почалося за багато десятиліть до того, як МГЕ знайшов своє практичне застосування. У 1903 р. Фредгольм [73] опублікував свою роботу о застосуванні інтегральних рівнянь в задачах теорії пружності. Перша реалізація МГЕ та його практичне застосування в аеродинаміці були представлені в новаторській роботі Хесса та Сміта [74] та в роботах Джасвона [75, 76] в теорії потенціалу. МГЕ отримав свій розвиток у роботах Круза [77, 78], Ріццо [79] та Шоу [80] в задачах механіки, теплопровідності й акустики, проте на той час він згадувався під іншою назвою, а саме «метод граничних інтегральних рівнянь». Свою нинішню назву МГЕ отримав після видання в 1978 р. першої книги, присвяченої даному методу, автором якої був Бреббіа [81].

Основна ідея МГЕ полягає в наступному. На першому кроці аналізоване диференціальне рівняння з частинними похідними зводиться до еквівалентного граничного інтегрального рівняння, яке містить інформацію про значення змінних тільки на границі області, а не в усьому просторі, як початкове диференціальне рівняння. Перехід до інтегральних рівнянь дозволяє знизити розмірність крайової задачі на одиницю, і як наслідок, значно знизити обчислювальні витрати, оскільки будь-який подальший процес дискретизації здійснюватиметься виключно на границі області. Ця особливість МГЕ вигідно відрізняє його від МСЕ та МСО, в яких процедура дискретизації виконується на всій області крайової задачі. Проте, виведення граничних інтегральних рівнянь, у деяких ситуаціях, може бути складною математичною задачею. Подальше розв'язання крайової задачі зводиться до пошуку розв'язку отриманого

інтегрального рівняння. Після того, як буде отримано числовий розв'язок інтегрального рівняння для аналізованої крайової задачі, інтегральне рівняння можна знову використовувати для отримання числового розв'язку всередині області.

Алгоритм методу граничних елементів, у загальному випадку, складається з наступних кроків:

1. Диференціальне рівняння з частинними похідними зводиться до еквівалентного граничного інтегрального рівняння.

2. Границя області крайової задачі розбивається на скінченне число елементів. Всередині кожного елемента передбачається, що значення шуканої величини та її нормальна похідна змінюються відповідно до обраної інтерполяційної функції.

3. Для кожної вузлової точки на границі області записується дискретна форма рівняння, яка пов'язує значення шуканої величини та її нормальної похідної.

4. Інтеграли по кожному елементу обчислюються за допомогою будь-якого числового методу інтегрування.

5. Використовуючи граничні умови, формується система лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язання даної системи рівнянь за допомогою прямого або ітераційного методу дає значення шуканої функції в вузлах на границі області.

6. Використовуючи відомі значення на границі області, за допомогою процедури числового інтегрування граничного інтегрального рівняння, знаходиться наближений розв'язок всередині області крайової задачі.

Метод граничних елементів активно використовується при моделюванні теплових процесів в анізотропних матеріалах, через його унікальні особливості, пов'язані з процедурою дискретизації області крайових задач. Шіах та інші [82] застосували МГЕ для дослідження теплових процесів в анізотропному композиційному матеріалі на основі кварцу та монокристалу оксиду алюмінію за наявності точкових джерел тепла. Також за допомогою МГЕ ними була

досліджена теплопровідність композиту, отриманого з додаванням третього матеріалу (вісмуту) до перших двох. Туан та Шіах [83] застосували МГЕ для числового розв'язання нестационарних задач теплопровідності в композиційних матеріалах на основі оксиду алюмінію та ніобію, що мають форму порожнистого циліндра та прямокутного паралелепіпеда за наявності внутрішнього джерела тепла. Гу та інші [84] застосували МГЕ для числового розв'язання тривимірних задач стаціонарної теплопровідності в анізотропних оболонках різної геометричної форми. Мера та інші [85] застосували метод граничних елементів для визначення теплофізичних характеристик анізотропного матеріалу, зокрема для прогнозування коефіцієнтів тензора теплопровідності.

Метод граничних елементів має наступні переваги в порівнянні з МСЕ і МСО:

1. Процес дискретизації здійснюється лише на границі області крайової задачі, що суттєво знижує обчислювальні витрати. Особливо це помітно на двовимірних областях, де границя представляється у вигляді кривої.
2. Перехід до інтегральних рівнянь дозволяє зменшити розмірність крайової задачі на одиницю.
3. МГЕ дозволяє розв'язувати крайові задачі на необмежених областях.
4. Значення на границі області можна отримати безпосередньо розв'язавши граничне інтегральне рівняння.

До основних недоліків методу граничних елементів можна віднести:

1. Використання граничних інтегральних рівнянь в МГЕ потребує явного знаходження фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними. Однак, фундаментальні розв'язки для задач із неоднорідностями або нелінійними диференціальними рівняннями, як правило, не обчислюються, що ускладнює використання МГЕ для ряду крайових задач.
2. Використання МГЕ на областях, границі яких є гладкими, призводить до виникнення особливостей на границях. Це відбувається також, якщо

граничні умови є розривними, наприклад, в крайових задачах зі змішаними граничними умовами.

1.2 Безсіткові методи

Безсіткові методи розв'язання крайових задач складають широкий клас ефективних числових методів, що не використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку. У безсіткових методах апроксимація диференціальних рівнянь з частинними похідними заснована виключно на наборі довільно розташованих вузлів в яких розміщуються базисні функції (Рис. 1.6).

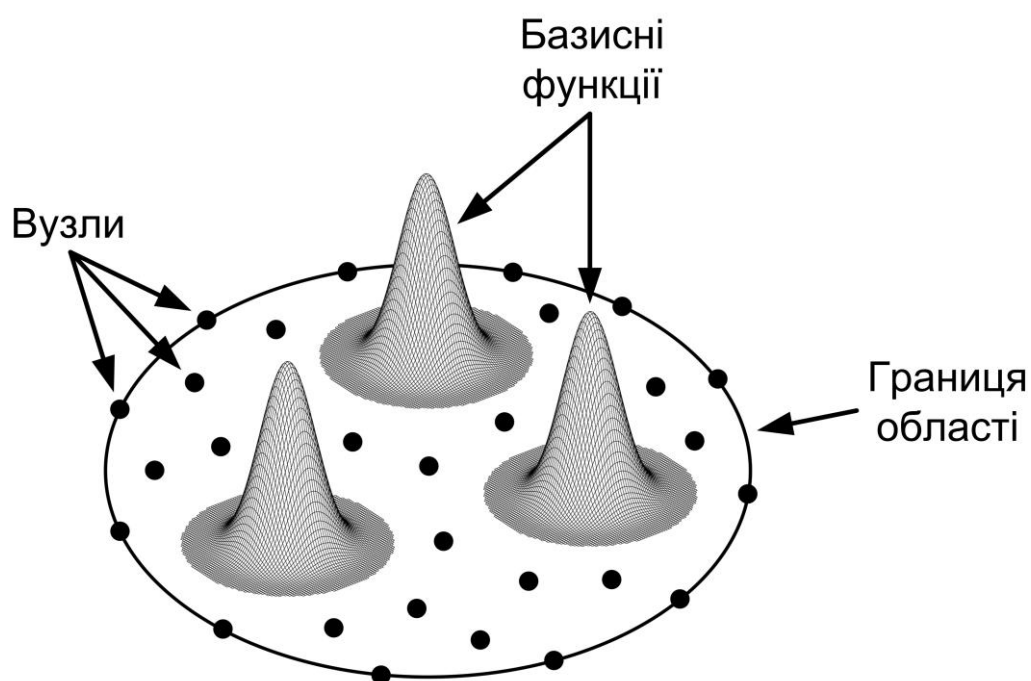


Рис. 1.6 Розташування вузлів з базисними функціями

Завдяки відсутності зв'язків між вузлами, зникає потреба в проведенні трудомісткої процедури генерації інтерполяційної сітки. Вузли з базисними функціями, у загальному випадку, можуть розміщуватися не тільки всередині області крайової задачі, але також і за її межами. Це робить можливим проведення числових розрахунків на однаковому наборі вузлів для областей різної геометричної форми. Використання різних базисних функцій для

апроксимації диференціальних рівнянь є суттєвою особливістю всіх безсіткових схем. При цьому вибір типу апроксимуючої функції відіграє важливу роль у продуктивності даних методів.

1.2.1 Історичний розвиток безсіткових методів

Історія розвитку безсіткових методів почалася в 1977 р., коли Монаган, Гінгольд [86] і Люсі [87] розробили перший безсітковий лагранжевий метод, заснований на використанні функції ядра, для моделювання задач астрофізики, таких як виникнення й еволюція протозірок або галактик. Даний метод отримав назву «гідродинаміка згладжених частинок» (smoothed particle hydrodynamics – SPH). Ідея методу SPH полягає в заміні рідини дискретним набором рухомих елементів, які називаються частинками. Ці частинки взаємодіють між собою за допомогою функції ядра з характерним радіусом, відомим як «довжина згладжування». При цьому значення шуканої величини для окремої частинки може бути обчислено за допомогою підсумовування відповідних величин інших частинок, що розташовані в межах діапазону ядра. Незважаючи на успіх методу гідродинаміки згладжених частинок при моделюванні астрофізичних явищ, своє поширення на інші класи задач SPH отримав лише в 90-х рр. XX століття. Даний метод успішно застосовувався при моделюванні вільних поверхонь [88], в задачах магнітогідродинаміки [89], теплопровідності [90], при моделюванні процесу різання металів [91] та лазерного свердління [92], в задачах механіки руйнування [93] і це лише деякі з прикладів.

Перша безсіткова схема, заснована на методі Гальоркіна, була представлена через п'ятнадцять років після того, як Монаган і Гінгольд опублікували метод SPH. У 1992 р. Найролес і Тузот [94] розробили метод дифузного елемента (diffuse element method – DEM), який був заснований на використанні MLS-апроксимації. Вважається, що поява методу дифузного елемента стала відправною точкою, після якої концепції безсіткових схем почали привертати увагу багатьох дослідників.

В 1994 р. Беличко та інші [95] створили безелементний метод Гальоркіна (element-free Galerkin method – EFGM), який представляє собою розширену версію DEM. У своєму методі вони використали множники Лагранжа для забезпечення дотримання граничних умов і повну похідну функцій в MLS-апроксимації. Крім того, вони застосували квадратури Гауса більш високого порядку для підвищення точності числового інтегрування. Безелементний метод Гальоркіна виявився точнішим, ніж метод дифузного елемента, проте «покращення», які були реалізовані в цьому методі, збільшили його обчислювальні витрати. EFGM є одним з найпопулярніших безсіткових методів і за довгий час існування знайшов своє застосування при розв’язанні великого класу задач, а саме, теплопровідності [96], механіки руйнування [97], акустики [98], гідродинаміки [99, 100], задач пружності [101] та інших.

В 1995 р. Лю та інші [102] розробили метод частинок репродукованого ядра (reproducing kernel particle method – RKPM), який був заснований на теорії вейвлетів та методі SPH. У своїй структурі RKPM використовує фундаментальні концепції теореми про згортку, кратномасштабного аналізу та вагових функцій. Додавання функції корекції до функцій масштабування, дозволило RKPM досягти більш точних результатів у порівнянні з методом гідродинаміки згладжених частинок, зокрема при апроксимації на границі області. Метод частинок репродукованого ядра знайшов своє застосування в багатомасштабному моделюванні, в акустиці, в аналізі великих деформацій та інших областях [103]. У подальшому поєднання RKPM та MLS-апроксимації лягли в основу методу ковзних найменших квадратів репродукованого ядра (moving least square reproducing kernel method – MLSRKM) [104, 105].

В 1996 р. Онат та інші [106-108] створили метод скінченних точок (finite point method – FPM), який застосували при моделюванні задач течії рідини та задач конвекції-дифузії. Згодом FPM був успішно використаний при аналізі деформацій, зокрема для моделювання деформації пружної пластини [109]. Для апроксимації в FPM використовується комбінація методу колокації та зваженого методу найменших квадратів у поєднанні з ваговою функцією Гауса.

В 1998 р. Атлурі та Чжу [110] розробили безсітковий локальний метод Петрова-Гальоркіна (meshless local Petrov-Galerkin method – MLPGM), який був заснований на використанні локальної симетричної слабкої форми в поєднанні з функціями форми з MLS-апроксимації. Спочатку даний метод використовував функції форми з MLS-апроксимації, однак пізніше Атлурі розширив формулювання MLPGM на інші схеми апроксимації. Подібна свобода вибору функцій форми в MLPGM породила низку його варіацій [111]. MLPGM та його варіації застосовувалися для вирішення широкого кола задач, таких як конвекції-дифузії [112], магнітогідродинаміки [113], теплопровідності [114], пружності [115], при моделюванні хвильових процесів [116], при аналізі вібрацій [117] та інших.

Окремий клас безсіткових схем складають методи, які засновані на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) з глобальним носієм. В даних методах РБФ з глобальним носієм використовуються для апроксимації диференціальних рівнянь із частинними похідними. В 1991 р. Канза розробив безсіткову схему, яка була заснована на методі колокації та мультіквадратичних РБФ з глобальним носієм [29, 30]. Даний метод був застосований Канзою при розв'язанні задач гідродинаміки. З того часу ця безсіткова схема приваблює все більший інтерес дослідників завдяки своїй простоті реалізації, швидкій збіжності та високій точності. Незважаючи на це, використання РБФ з глобальним носієм в задачах апроксимації призводить до щільної та погано обумовленої інтерполяційної матриці.

У 1995 р. Ву [31] та Вендланд [32] розробили новий тип РБФ з компактним носієм, використання яких допомогло усунути проблеми, які були пов'язані із поганою обумовленістю та щільністю інтерполяційної матриці. Натомість РБФ з компактним носієм мали значно нижчий порядок точності в порівнянні з РБФ з глобальним носієм.

Безсіткові схеми на основі використання радіальних базисних функцій застосовувалися при розв'язанні задач теплопровідності [118], акустики [119],

гідродинаміки [120], механіки руйнування [121], задач дифузії [122], при аналізі вібрацій [123], при моделюванні хвильових процесів [124] та багатьох інших.

В 2003 р. Лі та інші [125] запропонували альтернативний безсітковий підхід, заснований на використанні радіальних базисних функцій із глобальним носієм. Дана схема має назву «локальна мультіквадратична апроксимація» (local multiquadric approximation – LMQA). Основна ідея LMQA полягає в розбитті початкової області крайової задачі на скінченне число підобластей, кожна з яких містить набір вузлів із розміщеними в них РБФ. Мультіквадратична радіальна базисна функція усікається на границях кожної з підобластей, що призводить до локальної апроксимації та розрідженої інтерполяційної матриці.

В 2001 р. Лю [126] розробив метод точкової інтерполяції (point interpolation method – PIM), який був альтернативою методу ковзних найменших квадратів. Метод точкової інтерполяції, заснований від самого початку на методі Гальоркіна, призводив до виродженої інтерполяційної матриці, а також не гарантував безперервність апроксимуючої функції. Лю дослідив кілька підходів у спробі подолати ці проблеми [127]. Використання локального методу Петрова-Гальоркіна та мультіквадратичних радіальних базисних функцій сприяло створенню методу локальної радіальної точкової інтерполяції (local radial point interpolation method – LRPIM) [128]. В 2005 р., PIM отримав свій розвиток у методі колокації радіальної точкової інтерполяції (radial point interpolation collocation method – RPICM) [129].

У 1971 р. В. Л. Рвачов та В. О. Рвачов відкрили новий клас атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ), побудувавши найпростішу одновимірну атомарну функцію $ur(x)$ [33]. Характерні властивості АРБФ, а саме нескінченна диференційовність і фінітність, тобто наявність компактного носія, дали змогу побудувати алгоритмічно прості обчислювальні схеми для розв'язання задач інтерполяції й апроксимації функцій [34]. В роботах В. М. Колодяжного, В. О. Рвачова та О. Ю. Лісіной [35-39] було проведено узагальнення атомарних радіальних базисних функцій на випадок багатьох

незалежних змінних, а саме були побудовані АРБФ, що породжені операторами Лапласа, Гельмгольца, Клейна-Гордона, бігармонічним оператором та іншими. Відкриття класу атомарних функцій посприяло розробці нових ефективних числових методів та підходів до розв'язання задач нестационарної теплопровідності в ізотропних твердих тілах [40, 41].

1.2.2 Використання безсіткових методів при моделюванні теплових процесів в анізотропних матеріалах

Безсіткові схеми є відносно новим класом ефективних числових методів розв'язання крайових задач, що активно розвивається та привертає значну увагу як наукових, так і інженерних спільнот. Безсіткові методи успішно застосовуються для моделювання різних фізичних процесів, зокрема теплових процесів, що протікають в анізотропних матеріалах. Розглянемо деякі приклади використання безсіткових схем для числового розв'язання задач теплопровідності в анізотропних та неоднорідних матеріалах.

Ахмаді та інші [130] розробили безсітковий метод для моделювання задач стаціонарної теплопровідності в анізотропних композиційних волокнистих матеріалах. Даний безсітковий підхід базується на рівнянні балансу енергії в інтегральній формі в поєднанні з MLS-апроксимацією.

Фу [131] в своїй роботі застосував іншу безсіткову схему, засновану на комбінації методу граничного вузла (boundary knot method – ВКМ) та перетворення Кірхгофа для числового розв'язання задач теплопровідності в нелінійних функціонально-градієнтних матеріалах. Метод граничного вузла є ефективним безсітковим методом, який у своїй концепції використовує несингулярні загальні розв'язки диференціального оператора в поєднанні з методом подвійного заміщення (dual reciprocity method – DRM) та радіальними базисними функціями. Метод подвійного заміщення та радіальні базисні функції використовуються для апроксимації частинного розв'язку крайової задачі, а несингулярні загальні розв'язки – для апроксимації однорідного розв'язку. Оскільки загальні розв'язки є несингулярними, на відміну від

фундаментальних розв'язків, це робить можливим їх розташування безпосередньо в вузлах на границі області крайової задачі, що в свою чергу дозволяє уникнути використання фіктивних границь.

Гу та інші [132] провели серію числових розрахунків обернених задач теплопровідності в анізотропних матеріалах із застосуванням методу сингулярних границь (singular boundary method – SBM). SBM заснований на комбінації методу граничних елементів та методу фундаментальних розв'язків. Оскільки процес дискретизації в SBM призводить до погано обумовленої системи лінійних алгебраїчних рівнянь, Гу використовував різні алгоритми регуляризації, такі як метод регуляризації Тихонова та усічений сингулярний розклад, при цьому оптимальний параметр регуляризації визначався за допомогою критерію L-кривої.

В іншій роботі Гу [133] застосовав узагальнений метод скінченних різниць (generalized finite difference method – GFDM) для моделювання задач нестационарної теплопровідності в анізотропних композиційних матеріалах. Дискретизація за часом в безсітковій схемі здійснюється з використанням методу відкладеної корекції Крилова (Krylov deferred correction method – KDC method). Для отримання наближеного розв'язку крайової задачі використовувався метод декомпозиції області, згідно з яким початкова область крайової задачі розбивається на скінченне число підобластей з подальшою апроксимацією розв'язку в кожній із них.

Лі та інші [16] застосували метод SPH для моделювання процесу нестационарної теплопровідності в функціонально-градієнтних матеріалах різної геометричної форми. У своїй роботі Лі використав модифіковану версію методу SPH, засновану на розкладанні функції в ряд Тейлора. Внесені зміни дозволили отримати невироджену симетричну інтерполяційну матрицю, що покращило стабільність методу SPH та підвищило точність апроксимації.

Реутський [51] запропонував безсітковий метод, який заснований на використанні радіальних базисних функцій, для числового розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності в анізотропних неоднорідних

матеріалах. Ключова ідея методу полягає в використанні базисних функцій, які задовольняють однорідним граничним умовам задачі. Кожна базисна функція, що використовується в безсітковій схемі, представляється у вигляді комбінації радіальної базисної функції та спеціальної функції корекції, яка обирається таким чином, щоб задовольняти однорідним граничним умовам крайової задачі. В якості базисних функцій Реутський використовував конічну та мультиквадратичну радіальні базисні функції, а також сплайни Дюшона.

Такур [134] провів моделювання нелінійних теплових процесів, які протікають у шипах різної геометричної форми, за допомогою безсіткового локального методу Петрова-Гальоркіна. У цьому підході нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними розв'язується за допомогою схеми предиктор-коректор і MLPGM. Метод ковзних найменших квадратів використовується для апроксимації невідомої функції, а метод штрафних функцій використовується для обробки граничних умов.

Сінгх та інші [135] в своїй роботі застосували локальний метод Петрова-Гальоркіна для дослідження впливу границі розділу на теплопровідність полімерних композиційних матеріалів із вуглецевими нанотрубками.

Чжан та інші [136] застосували безелементний метод Гальоркіна для моделювання процесу нестационарної теплопровідності в диску парової турбіни, виготовленого з анізотропного матеріалу.

Висновки до розділу 1

В даний час одним з перспективних напрямів у галузі обчислювальної фізики є дослідження нестационарних теплових процесів, які протікають в твердих анізотропних тілах. Насамперед це пов'язано з широким використанням анізотропних матеріалів у сучасних наукових та інженерних розробках, при створенні різноманітних приладів та пристроїв, а також із застосуванням їх в якості конструкційних матеріалів. Це сприяло розробці великої кількості числових методів та підходів до розв'язання задач

теплопровідності в анізотропних матеріалах, які в свою чергу потребували детального вивчення.

У даний час існують різні підходи до моделювання теплових процесів в анізотропних матеріалах, що засновані на використанні як методів сіток, так і безсіткових схем. Незважаючи на різноманітність числових методів, найбільш широко використовуваними серед них залишаються методи сіток, а саме метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів і метод граничних елементів, які були розроблені ще у минулому столітті. Методи сіток мають ряд істотних недоліків, до яких можна віднести великі обчислювальні та часові витрати, що виникають в процесі дискретизації області крайової задачі, порушення гладкості представлення заокруглених границь об'єкта, труднощі використання в задачах, в яких слід враховувати зміну геометричної форми досліджуваного об'єкта і це лише деякі з них.

Даних недоліків позбавлені безсіткові методи розв'язання крайових задач, які належать до широкого класу ефективних числових методів, що не використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку. За останні декілька десятиліть було розроблено ряд безсіткових схем для числового розв'язання задач теплопровідності в анізотропних матеріалах. Порівняльний аналіз існуючих безсіткових підходів до розв'язання задач теплопровідності в анізотропних матеріалах показав, що дані методи застосовувалися, в основному, або для розв'язання двовимірних задач стаціонарної теплопровідності в анізотропних матеріалах, або їх застосування обмежувалося тестовими задачами на областях найпростішої геометричної форми без урахування реальних теплофізичних характеристик анізотропних матеріалів.

На підставі проведеного аналізу було встановлено, що необхідно розробити безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності, який характеризувався би високим рівнем точності, обчислювальною ефективністю та простотою реалізації, для подальшого дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах.

РОЗДІЛ 2

БЕЗСІТКОВИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ

Процедура моделювання різноманітних фізичних явищ, у тому числі нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, в багатьох випадках, заснована на числовому розв'язанні диференціальних рівнянь із частинними похідними, що описують ці явища.

Широке застосування анізотропних матеріалів при виготовленні великої кількості сучасних приладів та пристроїв сприяло активній розробці числових методів розв'язання задач теплопровідності в матеріалах з анізотропією [16, 51, 66-69, 71, 72, 82-85]. Найбільш популярними серед них є методи, засновані на використанні інтерполяційної сітки, а саме метод скінченних елементів [65], метод скінченних об'ємів [70] та метод граничних елементів [81]. В цих методах геометрична область крайової задачі розбивається на скінченне число підобластей, на кожній з яких безперервна величина апроксимується функцією спеціального виду. Схеми, що використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку, характеризуються значними обчислювальними витратами, особливо при моделюванні теплових процесів в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми.

Окремий клас ефективних числових підходів до розв'язання задач математичної фізики складають безсіткові методи [130-136]. У безсіткових схемах апроксимація диференціальних рівнянь з частинними похідними заснована виключно на наборі довільно розташованих вузлів, в яких розміщуються базисні функції. Вузли з базисними функціями не утворюють інтерполяційну сітку, що в свою чергу, дозволяє проводити числові розрахунки на однаковому наборі вузлів для областей різної геометричної форми.

В цьому розділі розглядається розроблений безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних

твердих тілах [137-140]. Безсіткова схема заснована на комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі.

2.1 Радіальні базисні функції

Радіальні базисні функції (РБФ) знайшли своє застосування при реалізації великої кількості числових методів та підходів до розв'язання задач математичної фізики. Перше застосування радіальних базисних функцій було представлено Харді [141] в 1971 р. в задачах картографії та геодезії, а саме для інтерполяції даних при побудові цифрової моделі місцевості. Згодом, в 1991 р., Канза застосував РБФ для апроксимації диференціальних рівнянь з частинними похідними в задачах гідродинаміки [29, 30].

Безсіткові схеми, засновані на використанні радіальних базисних функцій, характеризуються швидкою збіжністю, простотою реалізації та поліпшеними апроксимаційними властивостями. Оскільки радіальні базисні функції будуються виключно в термінах змінної відстані та не залежать від розмірності простору, на відміну від тригонометричних та поліноміальних функцій, їх використання призводить до значного зниження обчислювальних витрат при розв'язанні крайових задач на тривимірних областях складної геометричної форми.

2.1.1 Радіальні базисні функції з глобальним носієм

Нехай задана деяка множина точок $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^N$ розташованих в довільній обмеженій області $\Omega \subset R^n$. Радіальна базисна функція – це функція дійсної

змінної, значення якої залежить тільки від відстані від точки відліку $\vec{x}$ до деякої іншої точки $\vec{x}_i$.

Інакше кажучи, радіальною базисною функцією називається функція дійсної змінної, яка задовольняє наступній властивості [142]

$$\varphi_i(\vec{x}) = \varphi(\|\vec{x} - \vec{x}_i\|) = \varphi(r_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

де $r_i = \|\vec{x} - \vec{x}_i\|$ – евклідова відстань між вузлами.

У Таблиці 2.1 представлені часто використовувані типи радіальних базисних функцій з глобальним носієм [142].

Таблиця 2.1

Перелік поширених РБФ з глобальним носієм

Назва РБФ з глобальним носієм	$\varphi(r)$
Гаусова (GA)	$e^{-(\varepsilon r)^2}$
Мультиквадратична (MQ)	$\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$
Зворотна квадратична (IQ)	$\frac{1}{1 + (\varepsilon r)^2}$
Зворотна мультиквадратична (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$
Полігармонічний сплайн (PHS)	$r^k, \quad k = 1, 3, 5, \dots$ $r^k \ln(r), \quad k = 2, 4, 6, \dots$
Тонкий пластинчатий сплайн (TPS)	$r^2 \ln(r)$

де r – евклідова відстань між вузлами; $\varepsilon \neq 0$ – параметр форми радіальної базисної функції, який обирається довільно.

На Рис. 2.1 наведена візуалізація деяких радіальних базисних функцій з глобальним носієм.

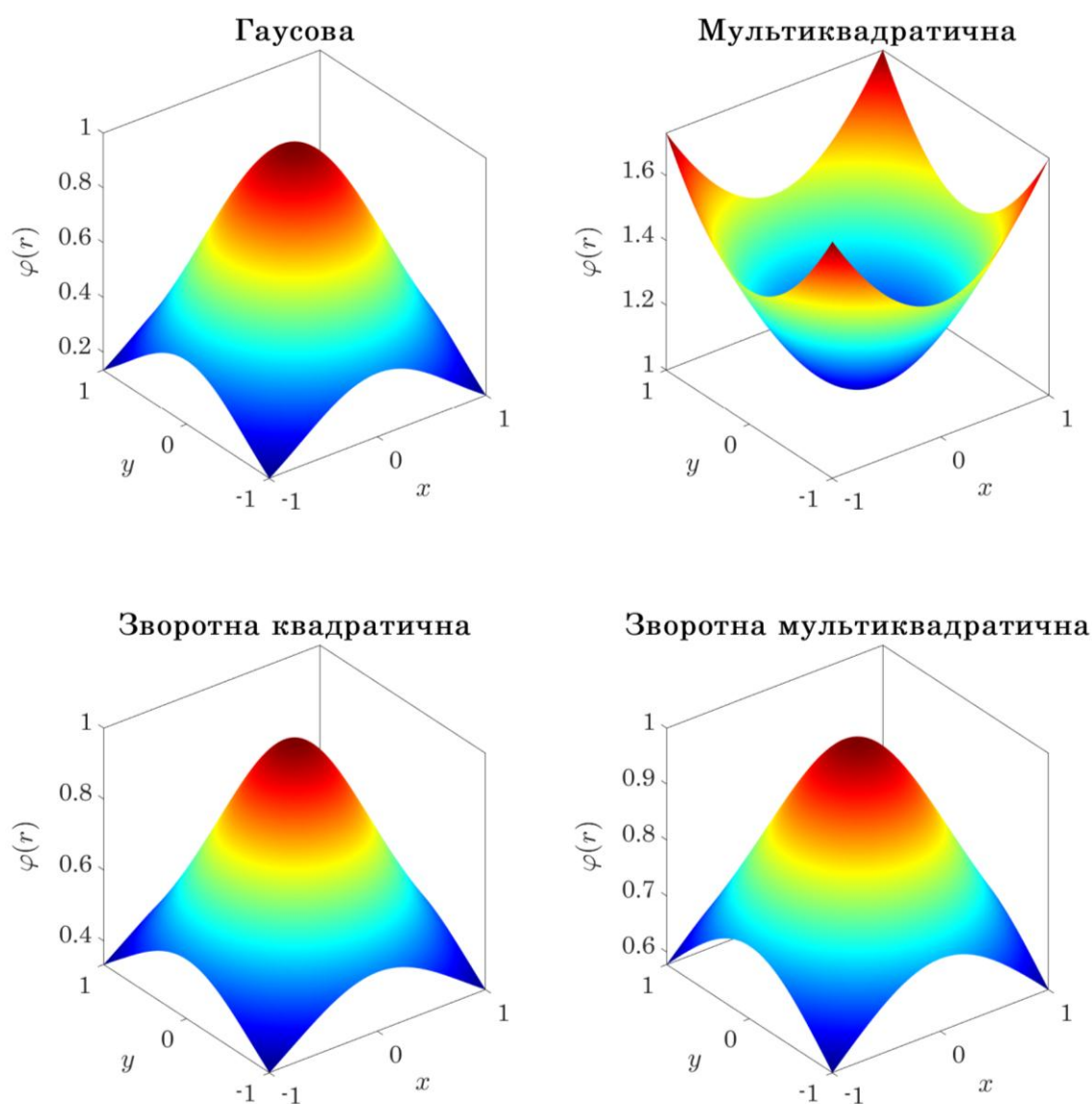


Рис. 2.1 Візуалізація РБФ з глобальним носієм

Радіальні базисні функції зазвичай використовуються в задачах апроксимації й інтерполяції функцій. Нехай дано множину значень $\{y_i\}_{i=1}^N \in R$, заданих на відповідному наборі точок $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^N \in \Omega \subset R^n$, де Ω – деяка обмежена область. Тоді безперервна багатовимірна функція $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega \subset R^n$ може бути

апроксимована за допомогою лінійної комбінації радіальних базисних функцій наступним чином:

$$f(\bar{x}) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(\|\bar{x} - \bar{x}_j\|), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (2.2)$$

де α_j – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Застосувавши метод колокації, приходимо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$y_i = f(\bar{x}_i) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(\|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Систему алгебраїчних рівнянь (2.3) можна переписати в наступній матричній формі:

$$A\alpha = b, \quad (2.4)$$

де $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$ – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню;

$b = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ – вектор-стовпець правої частини рівняння; $A = [\varphi(r_{ij})]_{1 \leq i, j \leq N}$

– інтерполяційна матриця.

Невідомі коефіцієнти α в рівнянні (2.4) можуть бути визначені наступним чином:

$$\alpha = A^{-1}b.$$

Слід зазначити, що ефективність використання глобальних радіальних базисних функцій в задачах апроксимації та інтерполяції залежить від вибору значення параметра форми ε . Наприклад, число обумовленості інтерполяційної матриці, в разі використання мультиквадратичної глобальної РБФ, швидко

зростає зі збільшенням значення ε . Оптимальним значенням параметра форми, в даному випадку, є найбільше значення ε , при якому воно може бути використано до настання нестабільності обчислень. Вибір оптимального значення параметра форми ε наразі залишається нерозв'язаною проблемою.

2.1.2 Радіальні базисні функції з компактним носієм

Ву [31] та Вендланд [32] у 1995 р. запропонували новий тип радіальних базисних функцій з компактним носієм, використання яких призводить до розрідженої інтерполяційної матриці та допомагає ефективно уникнути поганої обумовленості. РБФ з компактним носієм використовують в своїй концепції функцію відсічення $(r)_+$, яка визначається наступним чином:

$$(r)_+ = \begin{cases} r, & \text{якщо } 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

В Таблиці 2.2 представлені деякі радіальні базисні функції Ву та Вендланда з компактним носієм.

Таблиця 2.2

Радіальні базисні функції з компактним носієм

Назва РБФ	$\varphi(r)$
Функції Ву (Wu's CS-RBFs)	$(1-r)_+^7 (5r^6 + 35r^5 + 101r^4 + 147r^3 + 101r^2 + 35r + 5)$
	$(1-r)_+^6 (5r^5 + 30r^4 + 72r^3 + 82r^2 + 36r + 6)$
	$(1-r)_+^5 (5r^4 + 25r^3 + 48r^2 + 40r + 8)$
	$(1-r)_+^4 (5r^3 + 20r^2 + 29r + 16)$

Назва РБФ	$\varphi(r)$
Функції Вендланда (Wendland's CS-RBFs)	$(1-r)_+^8 (32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$
	$(1-r)_+^6 (35r^2 + 18r + 3)$
	$(1-r)_+^4 (4r + 1)$

На Рис. 2.2 наведена візуалізація радіальних базисних функцій Ву та Вендланда з компактним носієм.

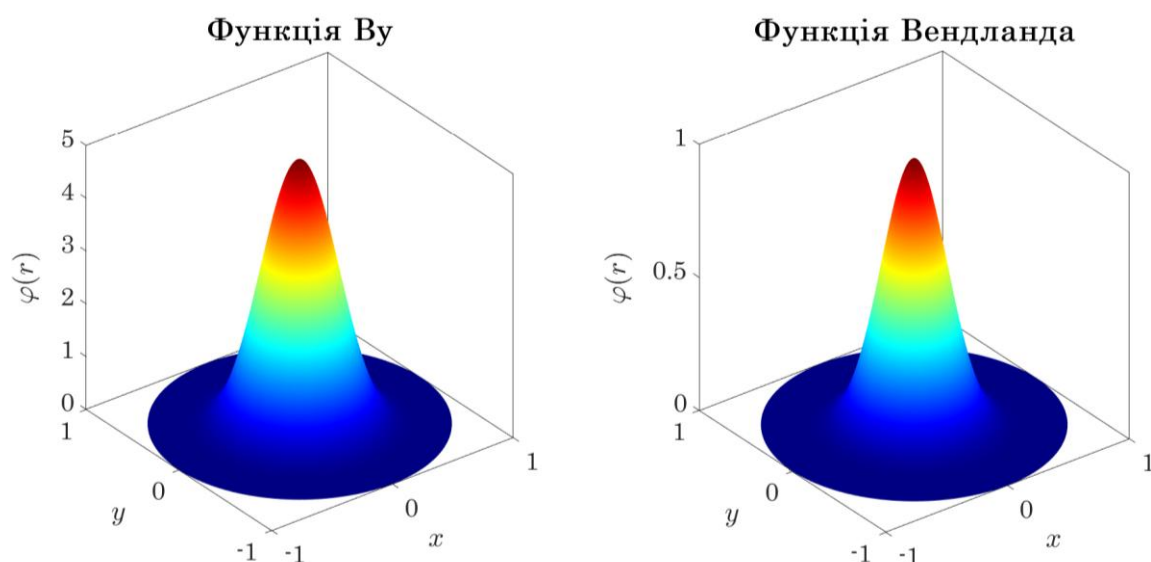


Рис. 2.2 Візуалізація РБФ з компактним носієм

В 1998 р. Бухман [143] побудував ще одне сімейство радіальних базисних функцій з компактним носієм, які нагадують популярні тонкі пластинчаті сплайни. Нижче наведено три приклади радіальних базисних функцій Бухмана з компактним носієм:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \left(2r^4 \log(r) - 7r^4 / 2 + 16r^3 / 3 - 2r^2 + 1/6\right)_+, \\ \varphi(r) &= \left(112r^{9/2} / 45 + 16r^{7/2} / 3 - 7r^4 - 14r^2 / 15 + 1/9\right)_+, \\ \varphi(r) &= \left(1/18 - r^2 + 4r^3 / 9 + r^4 / 2 - 4r^3 \log(r) / 3\right)_+.\end{aligned}$$

Використання радіальних базисних функцій з компактним носієм дозволяє отримати розріджену інтерполяційну матрицю, що в свою чергу призводить до зменшення обчислювальних витрат, але низький порядок точності створює серйозну перешкоду для їх практичного застосування.

2.1.3 Анізотропні радіальні базисні функції

Безсіткові методи, що засновані на використанні радіальних базисних функцій, продемонстрували свою ефективність при моделюванні різних фізичних процесів, які протікають в ізотропних середовищах. Однак, Карлсон і Фоулі [144] виявили, що ізотропні РБФ, наприклад такі як мультиквадратична радіальна базисна функція та тонкий пластинчатий сплайн, є непридатними для розв'язання крайових задач в анізотропних середовищах, тобто в таких, в яких існують виділені напрямки. Одним із таких прикладів є моделювання теплових процесів в анізотропних твердих тілах. Рівняння стаціонарної теплопровідності в анізотропному середовищі має наступний вигляд:

$$\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (2.5)$$

де d – розмірність крайової задачі; $K = [K_{ij}]_{1 \leq i,j \leq d}$ – симетричний, позитивно визначений тензор другого рангу, що характеризує анізотропію матеріалу.

Наприклад, для випадку $d = 2$, коефіцієнти тензора теплопровідності задовольняють наступним співвідношенням $K_{12} = K_{21}$ та $\Delta_K = \det(K) = K_{11}K_{22} - K_{12}^2 > 0$.

Зазвичай, існує два підходи до побудови анізотропних радіальних базисних функцій. Перший з них – метод відображення областей (domain mapping method – DMM) [145].

Ідея методу відображення областей полягає у перетворенні початкової системи координат для зведення диференціального рівняння з частинними похідними для анізотропного середовища до його ізотропного аналогу. Нижче наведені співвідношення для перетворення систем координат у двовимірному та тривимірному випадках:

$$\begin{pmatrix} X_1 - X_{k1} \\ X_2 - X_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta_K} / K_{11} & 0 \\ -K_{12} / K_{11} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{k1} \\ x_2 - x_{k2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_1 - X_{k1} \\ X_2 - X_{k2} \\ X_3 - X_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta_K} / K_{11} & 0 & 0 \\ -K_{12} / K_{11} & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{k1} \\ x_2 - x_{k2} \\ x_3 - x_{k3} \end{pmatrix},$$

де $\beta_1 = (K_{12}K_{13} - K_{23}K_{11}) / \sqrt{\omega}$; $\beta_2 = (K_{12}K_{23} - K_{13}K_{22}) / \sqrt{\omega}$; $\beta_3 = \Delta_K / \sqrt{\omega}$;
 $\omega = K_{11}K_{33}\Delta_K - K_{11}K_{22}K_{13}^2 + 2K_{11}K_{12}K_{13}K_{23} - K_{23}^2K_{11}^2$.

Інший підхід полягає у використанні геодезичної відстані [146]. В даному випадку стандартна евклідова відстань $r_k = \|\vec{x} - \vec{x}_k\|$ замінюється геодезичною відстанню між вузлами $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ та $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kd})$, яка визначається за наступною формулою

$$r_k^2 = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d K^{ij} (x_i - x_{ki})(x_j - x_{kj}) = (\vec{x} - \vec{x}_k)^T K^{-1} (\vec{x} - \vec{x}_k), \quad (2.6)$$

де $K^{-1} = [K^{ij}]_{1 \leq i, j \leq d}$ – обернений тензор теплопровідності.

У випадку ізотропного середовища тензор теплопровідності K є одиничною матрицею, а геодезична відстань зводиться до евклідової відстані.

Таким чином, два описані підходи використовуються для побудови анізотропних радіальних базисних функцій з відповідних ізотропних радіальних базисних функцій.

2.2 Постановка тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах

Диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності у довільній замкненій області $\Omega \subset R^3$, що обмежена $\partial\Omega$, має наступний вигляд [147]:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)) + g, \quad (2.7)$$

де $\rho = \rho(x, y, z)$ – щільність; $c_p = c_p(x, y, z)$ – питома теплоємність при постійному тиску; $u = u(x, y, z, t)$ – температура; $K = [K_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ – симетричний, позитивно визначений тензор теплопровідності; $g = g(x, y, z, t)$ – внутрішнє джерело тепла.

У покоординатному записі рівняння (2.7) отримає такий вигляд [137, 140]:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{13} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{23} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{32} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{33} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + g. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Нехай $\partial\Omega = \sum_{i=1}^3 \partial\Omega_i$ та $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Граничні умови для такої

задачі можна визначити за допомогою будь-якої комбінації такого типу:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \bar{u}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\
\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial \nu} &= -\bar{q}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \\
\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial \nu} &= -h(u_\infty(x, y, z, t) - u(x, y, z, t)), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega_3,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\text{де } \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \left(K_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{13} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(K_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{23} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, y) + \\
&+ \left(K_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{32} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{33} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, z); \quad n - \text{зовнішній вектор нормалі}; \quad h - \\
&\text{коефіцієнт тепловіддачі}; \quad u_\infty(x, y, z, t) - \text{температура навколишнього} \\
&\text{середовища.}
\end{aligned}$$

Початкові умови задаються у вигляді

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega. \tag{2.10}$$

Перепишемо рівняння (2.8) в наступній формі:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial K_{11}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial K_{12}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial K_{13}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + K_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \\
&+ \frac{\partial K_{21}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial K_{22}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial K_{23}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + K_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \\
&+ \frac{\partial K_{31}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial K_{32}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + K_{32} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial K_{33}}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + K_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для однорідного середовища, коли теплофізичні характеристики постійні, анізотропне рівняння теплопровідності (2.11) з урахуванням симетричності тензора теплопровідності K спрощується до вигляду [137, 140]

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = K_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +$$

$$+ 2 \left(K_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + K_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) + g. \quad (2.12)$$

Нехай

$$L(K)u = K_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \left(K_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + K_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + K_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right). \quad (2.13)$$

З урахуванням (2.13), рівняння (2.12) перепишеться в наступному вигляді:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = L(K)u + g. \quad (2.14)$$

Застосовуючи процедуру дискретизації, рівняння (2.14) може бути зведене до послідовності неоднорідних модифікованих рівнянь типу Гельмгольца.

2.3 Дискретизація рівняння нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах

Дискретизація за часом диференціального рівняння нестационарної теплопровідності (2.14) здійснюватиметься з використанням θ -схеми методу скінченних різниць [148].

Згідно з θ -схемою, диференціальне рівняння виду

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \Re \{ u(x, y, z, t) \},$$

де $\Re$ – деякий диференціальний оператор, може бути представлено у наступному вигляді

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \theta \Re(u^n) + (1 - \theta) \Re(u^{n-1}),$$

де Δt – крок за часом, $u^n = u(x, y, z, n\Delta t)$, n – номер ітерації, $0 \leq \theta \leq 1$ – ваговий коефіцієнт.

Важливою особливістю θ -схеми дискретизації за часом є можливість варіювання вагового коефіцієнта. Вибір різних значень коефіцієнта θ призводить до сімейства широко використовуваних різницевих схем:

- при $\theta = 0$, отримуємо прямий метод Ейлера (явна схема);
- при $\theta = 1$, отримуємо зворотний метод Ейлера (неявна схема);
- при $\theta = 0.5$, отримуємо метод Кранка-Ніколсона (напівнеявна схема).

Отже, застосовуючи θ -схему дискретизації за часом до рівняння (2.14), отримуємо [137, 140]:

$$\rho_{c_p} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} = \theta (L(K)u^n + g^n) + (1 - \theta) (L(K)u^{n-1} + g^{n-1}), \quad (2.15)$$

де Δt – крок за часом, $u^n = u(x, y, z, n\Delta t)$, $g^n = g(x, y, z, n\Delta t)$, n – номер ітерації, $0 < \theta \leq 1$.

Позначимо змінену температуру

$$g^n = u^n + \frac{1 - \theta}{\theta} u^{n-1}, \quad (2.16)$$

де $g^n = g(x, y, z, n\Delta t)$.

Використовуючи співвідношення (2.16), перепишемо рівняння (2.15) у вигляді [137-140]

$$L(K)g^n - \delta^2 g^n = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n, \quad (2.17)$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{\rho c_p}{\theta \Delta t}.$$

Рівняння (2.17) представляє собою рекурсивну формулу. На кожному часовому кроці будемо розв'язувати задачу теплопровідності з диференціальним рівнянням типу Гельмгольца (2.17) крок за кроком, починаючи з початкових умов (2.10), застосовуючи комбінацію методу подвійного заміщення [56] з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків [60]. Метод фундаментальних розв'язків використовуватиметься для отримання однорідного розв'язку, а метод подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій – для отримання частинного розв'язку крайової задачі [137, 140].

Розв'язок рівняння (2.17) можна представити у вигляді суми однорідного розв'язку $\mathcal{G}_h^n$ та частинного розв'язку $\mathcal{G}_p^n$: $\mathcal{G}^n = \mathcal{G}_h^n + \mathcal{G}_p^n$.

Рівняння для отримання частинного розв'язку $\mathcal{G}_p^n$ має вигляд

$$L(K)\mathcal{G}_p^n - \delta^2 \mathcal{G}_p^n = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n. \quad (2.18)$$

Для побудови частинного розв'язку $\mathcal{G}_p^n$ не потрібно задовольняти граничним умовам (2.9) крайової задачі. Частинний розв'язок $\mathcal{G}_p^n$ можна знайти, використовуючи метод подвійного заміщення.

Систему для отримання однорідного розв'язку $\mathcal{G}_h^n$ представимо у такому вигляді:

$$\begin{cases} L(K) \mathcal{G}_h^n - \delta^2 \mathcal{G}_h^n = 0, & (x, y, z) \in \partial\Omega, \\ \mathcal{G}_h^n = \bar{u}^n - \mathcal{G}_p^n, & (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_h^n}{\partial \nu} = -\bar{q}^n - \frac{\partial \mathcal{G}_p^n}{\partial \nu}, & (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \\ h \mathcal{G}_h^n - \frac{\partial \mathcal{G}_h^n}{\partial \nu} = h u_\infty^n - h \mathcal{G}_p^n + \frac{\partial \mathcal{G}_p^n}{\partial \nu}, & (x, y, z) \in \partial\Omega_3, \end{cases} \quad (2.19)$$

де $\bar{u}^n = \bar{u}(x, y, z, n\Delta t)$, $\bar{q}^n = \bar{q}(x, y, z, n\Delta t)$ та $u_\infty^n = u_\infty(x, y, z, n\Delta t)$.

Однорідний розв'язок $\mathcal{G}_h^n$ будемо шукати з використанням методу фундаментальних розв'язків.

2.4 Метод подвійного заміщення

Частинний розв'язок $\mathcal{G}_p^n$ крайової задачі будемо шукати з використанням методу подвійного заміщення (dual reciprocity method – DRM) [137, 140]. Метод подвійного заміщення вперше був запропонований Нардіні та Бреббіа [149] в 1983 р. для розв'язання задач еластодинаміки та невдовзі знайшов своє застосування при розв'язанні широкого кола інженерних задач.

Нехай $F^n(x, y, z) = F(x, y, z, n\Delta t) = -\frac{\rho c_p}{\theta^2 \Delta t} u^{n-1} - \frac{1-\theta}{\theta} g^{n-1} - g^n$, тоді

рівняння (2.18) матиме вигляд [137, 140]

$$L(K) \mathcal{G}_p^n - \delta^2 \mathcal{G}_p^n = F^n(x, y, z). \quad (2.20)$$

Наближений частинний розв'язок $\mathcal{G}_p^n$ рівняння (2.20) на n -му часовому кроці можна сконструювати за допомогою анізотропних радіальних базисних функцій $\varphi_k(x, y, z) = \varphi(r_k)$, де r_k – геодезична відстань, яка визначається у такий спосіб:

$$r_k^2 = K^{11}(x - x_k)^2 + K^{22}(y - y_k)^2 + K^{33}(z - z_k)^2 + (K^{12} + K^{21})(x - x_k)(y - y_k) + \\ + (K^{13} + K^{31})(x - x_k)(z - z_k) + (K^{23} + K^{32})(y - y_k)(z - z_k),$$

$K^{-1} = [K^{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ – обернений тензор теплопровідності. У випадку ізотропного середовища геодезична відстань зводиться до евклідової відстані.

Апроксимуємо функцію $F^n(x, y, z)$ наступним чином:

$$F^n(x, y, z) \cong \hat{F}^n(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \Psi_k(x, y, z), \quad (2.21)$$

де N – загальна кількість інтерполяційних вузлів, α_k^n – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню, а функції $\Psi_k(x, y, z)$ – розв’язок рівняння

$$\Psi_k(x, y, z) = L(K) \varphi_k(x, y, z) - \delta^2 \varphi_k(x, y, z).$$

Рівняння (2.21) може бути розв’язане відносно невідомих коефіцієнтів α_k^n за допомогою будь-якого методу розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Після знаходження коефіцієнтів α_k^n , наближений частинний розв’язок $\mathcal{G}_p^n$ представляється у вигляді лінійної комбінації анізотропних радіальних базисних функцій $\varphi_k(x, y, z)$:

$$\mathcal{G}_p^n = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \varphi_k(x, y, z). \quad (2.22)$$

Отже, головна ідея методу подвійного заміщення полягає у застосуванні функцій $\Psi_k(x, y, z)$ в процесі знаходження невідомих коефіцієнтів α_k^n , а анізотропних радіальних базисних функцій $\varphi_k(x, y, z)$ – при конструюванні наближеного частинного розв’язку $\mathcal{G}_p^n$ крайової задачі.

2.5 Метод фундаментальних розв'язків

Однорідний розв'язок $\mathcal{G}_h^n$ крайової задачі будемо шукати з використанням методу фундаментальних розв'язків (method of fundamental solutions – MFS) [137, 140]. Метод фундаментальних розв'язків був запропонований Купрадзе та Алексідзе [59] в 1964 р., а своє перше практичне застосування при реалізації числового методу отримав в роботі Матона та Джонстона [150] в 1977 р.. За останні 30 років MFS широко використовувався при числовому розв'язанні великої кількості фізичних задач [151].

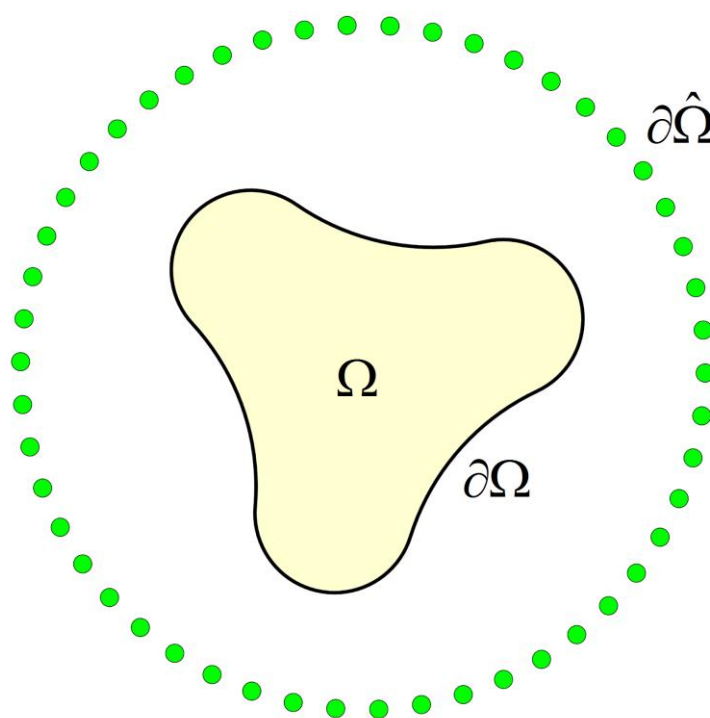


Рис. 2.3 Розміщення вузлів з фундаментальними розв'язками

Основна ідея методу фундаментальних розв'язків полягає в тому, що однорідний розв'язок крайової задачі апроксимується за допомогою лінійної комбінації фундаментальних розв'язків деякого диференціального оператора. Оскільки фундаментальні розв'язки диференціального оператора є сингулярними на початку координат, то вузли з фундаментальними розв'язками

розміщуються на фіктивній границі $\partial\hat{\Omega}$ поза межами області Ω крайової задачі, як показано на Рис. 2.3. У випадку багатозв'язних областей, вузли з фундаментальними розв'язками повинні розміщуватися також у кожному з отворів геометричної області (Рис. 2.4) [137, 140].

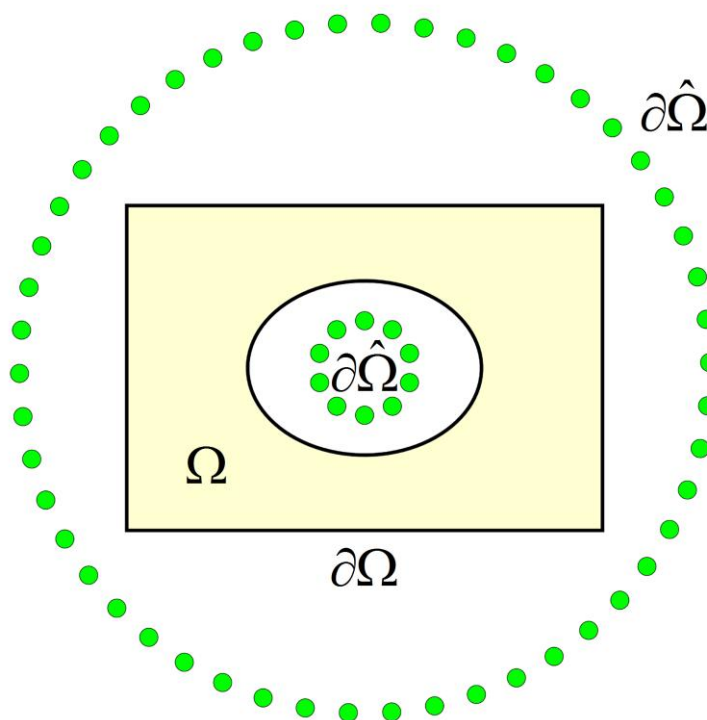


Рис. 2.4 Розміщення вузлів з фундаментальними розв'язками у випадку багатозв'язної області

Незважаючи на широке застосування MFS при реалізації великої кількості безсіткових схем, на даний час все ще залишається відкритим питання щодо оптимальної форми фіктивної границі, особливо у випадку областей складної геометричної форми. Наприклад, фіктивна границя може мати форму сфери, центр якої співпадає з геометричним центром фізичної області крайової задачі (Рис. 2.5а). Іншим можливим варіантом є побудова фіктивної границі у вигляді еквідистантної поверхні, як показано на Рис. 2.5б.

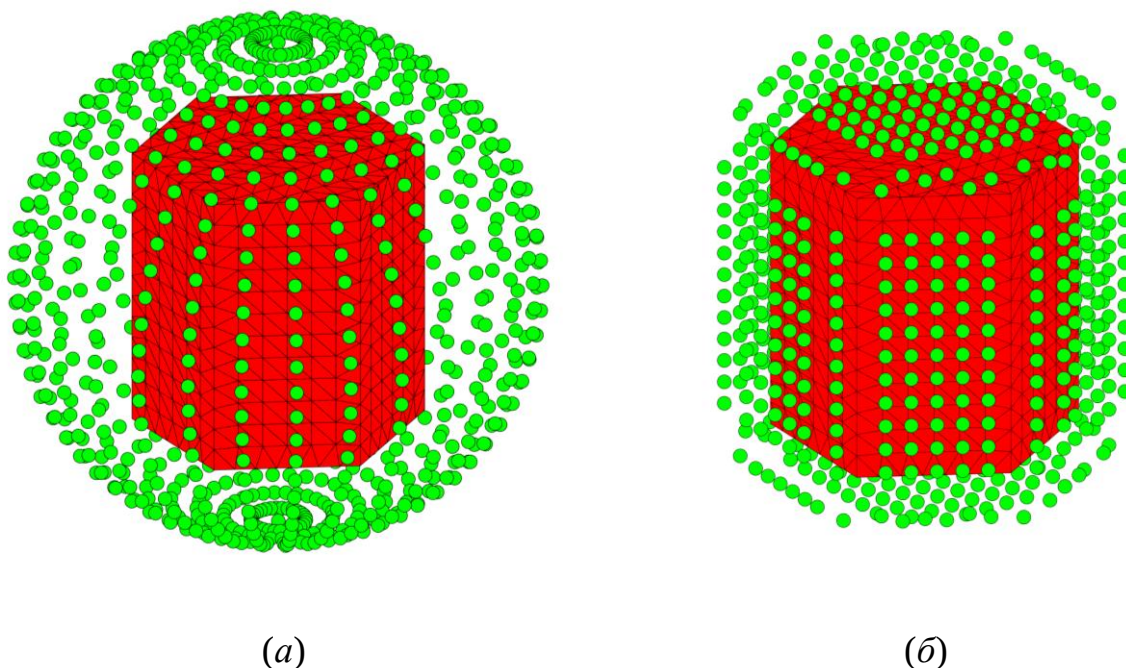


Рис. 2.5 Варіанти розміщення фіктивної поверхні

(зеленими кружками позначені вузли з фундаментальними розв'язками):

(а) – сферична поверхня, (б) – еквідистантна поверхня

Однорідний розв'язок $\mathcal{G}_h^n$ на n -му часовому кроці апроксимується наступним чином [137, 140]:

$$\mathcal{G}_h^n = \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x - x_i, y - y_i, z - z_i), \quad (2.23)$$

де M – загальна кількість вузлів с фундаментальними розв'язками на фіктивній поверхні $\partial\hat{\Omega}$, яка охоплює область Ω (див. Рис. 2.3); β_i^n – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню;

$$u^*(x - x_i, y - y_i, z - z_i) = \frac{1}{4\pi r_i \sqrt{\det(K)}} e^{-\delta r_i} \quad - \quad \text{фундаментальний розв'язок}$$

диференціального оператора типу Гельмгольца $L(K) - \delta^2$ [137, 140]; r_i – геодезична відстань між вузлами $(x, y, z) \in \partial\Omega$ і $(x_i, y_i, z_i) \in \partial\hat{\Omega}$.

Лінійна комбінація фундаментальних розв'язків $u^*(x - x_i, y - y_i, z - z_i)$ за визначенням задовольняє однорідному рівнянню типу Гельмгольца в усіх вузлах фізичної області. Коефіцієнти β_i^n обирають так, щоб задовольнити граничним умовам (2.9) крайової задачі в вузлах на границі області.

Оберемо довільно K вузлів колокації $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^K$ на границі області $\partial\Omega$. Тоді, з урахуванням рівняння (2.23), граничні умови з системи (2.19) переписуться наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i) = \bar{u}^n(x_j, y_j, z_j) - \mathcal{G}_p^n(x_j, y_j, z_j), \quad 1 \leq j \leq K_1, \\ \sum_{i=1}^M \beta_i^n \frac{\partial u^*(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)}{\partial \nu} = \\ \quad = -\bar{q}^n(x_j, y_j, z_j) - \frac{\partial \mathcal{G}_p^n(x_j, y_j, z_j)}{\partial \nu}, \quad K_1 + 1 \leq j \leq K_2, \\ \sum_{i=1}^M \beta_i^n \left(h - \frac{\partial}{\partial \nu} \right) u^*(x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i) = \\ \quad = h u_\infty^n(x_j, y_j, z_j) - h \mathcal{G}_p^n(x_j, y_j, z_j) + \frac{\partial \mathcal{G}_p^n(x_j, y_j, z_j)}{\partial \nu}, \quad K_2 + 1 \leq j \leq K, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

де $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^{K_1} \in \partial\Omega_1$, $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=K_1+1}^{K_2} \in \partial\Omega_2$, $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=K_2+1}^K \in \partial\Omega_3$,

$\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^M \in \hat{\partial\Omega}$.

Система (2.24) може бути розв'язана відносно невідомих коефіцієнтів β_i^n за допомогою будь-якого методу розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Слід зазначити, що зі збільшенням відстані між фіктивною границею та границею області, підвищується точність наближеного однорідного розв'язку $\mathcal{G}_h^n$, проте погіршується обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Таким чином, якщо відстань між фіктивною границею та границею області велика, то систему рівнянь (2.24) необхідно регуляризувати, використовуючи, наприклад, метод регуляризації Тихонова [152]. В якості альтернативи, замість регуляризації Тихонова, можна використовувати усічений сингулярний розклад (truncated singular value decomposition – TSVD) [153].

Після знаходження коефіцієнтів β_i^n , загальний розв'язок $\mathcal{G}^n$ на n -му часовому кроці може бути отриманий за формулою [137, 140]

$$\mathcal{G}^n = \mathcal{G}_p^n + \mathcal{G}_h^n = \sum_{k=1}^N \alpha_k^n \varphi_k(x, y, z) + \sum_{i=1}^M \beta_i^n u^*(x - x_i, y - y_i, z - z_i).$$

Висновки до розділу 2

Другий розділ присвячений розробці безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Обґрунтовано необхідність розробки безсіткової схеми, яка являє собою ефективний інструмент для моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла.

Наведені приклади радіальних базисних функцій з глобальним носієм, радіальних базисних функцій з компактним носієм та анізотропних радіальних базисних функцій. Описані алгоритми використання радіальних базисних функцій в задачах апроксимації та інтерполяції функцій.

Докладно описані основні концепції методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків. Розглянуто застосування методу фундаментальних розв'язків у випадку однозв'язних та багатозв'язних областей.

Розроблено безсіткову схему, яка заснована на комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Дискретизація за часом

диференціального рівняння нестационарної теплопровідності в описаному безсітковому методі здійснюється з використанням θ -схеми методу скінченних різниць. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора: [137-140].

РОЗДІЛ 3

СІМЕЙСТВО АТОМАРНИХ РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ПОРОДЖУЮТЬСЯ ОПЕРАТОРОМ ТИПУ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

У даний час активно ведеться розробка безсіткових методів числового розв'язання задач математичної фізики [14-28]. Зокрема, розвиваються числові методи, що реалізують апроксимацію диференціального рівняння з частинними похідними в сильній формі (методи колокації) із застосуванням радіальних функцій з компактним носієм в якості базисних [154-158]. Використання радіальних базисних функцій із компактним носієм призводить до розрідженої інтерполяційної матриці та допомагає ефективно уникнути поганої обумовленості, що в свою чергу дозволяє знизити обчислювальні витрати. Незважаючи на це, головним недоліком РБФ з компактним носієм є дуже низький порядок точності, що створює серйозну перешкоду для їх практичного застосування.

Даних недоліків позбавлені атомарні радіальні базисні функції. Атомарні функції являють собою новий математичний апарат конструктивної теорії функцій, за допомогою яких можна будувати поліноми, що поєднують переваги класичних степеневих та тригонометричних поліномів (нескінченну диференційовність та апроксимаційну універсальність) та сплайнів (існування локального базису). Своїм становленням в якості апарату теорії наближення теорія атомарних функцій зобов'язана дослідженням В. Л. Рвачова та В. О. Рвачова, а також його учнів, які розробили цілу низку основоположних методик їх застосування у числовому аналізі, які в подальшому здобули широку популярність та визнання [35-39]. Серед широкого кола можливих варіантів використання атомарних функцій, насамперед, слід виділити можливість застосування АРБФ під час розв'язання крайових задач. Атомарні функції багатьох незалежних змінних були успішно застосовані в якості базисних при числовому розв'язанні задач нестационарної теплопровідності в ізотропних матеріалах, про що свідчить ряд робіт, присвячених цій темі [40, 41].

В даний час існує безліч природних та синтетичних матеріалів, теплофізичні властивості яких залежать від напрямку; їх називають анізотропними матеріалами. Поширеними прикладами анізотропних матеріалів є кристали та монокристали, метали, які зазнали потужного холодного пресування, ламіновані листи, волокнисті та композиційні матеріали, армовані пластики, п'єзокварц, графіт та інші. При цьому диференціальне рівняння з частинними похідними, яке описує процес теплопровідності в анізотропних твердих тілах, в процесі числового розв'язання зводиться до рівняння, яке містить диференціальний оператор спеціального виду (оператор типу Гельмгольца), який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу [137, 140].

Даний розділ присвячений побудові сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які породжуються оператором типу Гельмгольца, що використовуються в якості базисних при реалізації безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах [159, 160].

3.1 Алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій

Розглянемо алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які є розв'язком функціонально-диференціального рівняння наступного виду:

$$\begin{aligned} L(K)u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) = \\ = \lambda \iint_{\partial\Omega} u(k(x_1 - \xi_1), k(x_2 - \xi_2), k(x_3 - \xi_3)) d\omega + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3), \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $L(K) - \delta^2 = \sum_{i,j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta^2$ – диференціальний оператор типу Гельмгольца;

$K = [K_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ – симетричний, позитивно визначений тензор другого рангу,

який характеризує анізотропію матеріалу; $\partial\Omega$ – границя сфери радіусу r_k : $\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = r_k^2$, $r_k = r_k(k) = \frac{k+1}{2k}$; k – параметр форми; λ , μ – параметри, значення яких знаходяться з умови забезпечення фінітного розв’язку рівняння (3.1); δ^2 – відомий параметр диференціального оператора типу Гельмгольца.

Застосувавши тривимірне перетворення Фур’є до функціонально-диференціального рівняння (3.1), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[L(K)u(x_1, x_2, x_3) - \delta^2 u(x_1, x_2, x_3) \right] e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint_{\partial\Omega} u(k(x_1 - \xi_1), k(x_2 - \xi_2), k(x_3 - \xi_3)) d\omega + \mu u(kx_1, kx_2, kx_3) \right\} \times \\ \times e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Позначимо за допомогою $U(t_1, t_2, t_3)$ результат застосування тривимірного перетворення Фур’є до функції $u(x_1, x_2, x_3)$:

$$U(t_1, t_2, t_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Для спрощення представлення подальших математичних викладок введемо наступну заміну змінних $k(x_i - \xi_i) = \eta_i$, $i = 1, 2, 3$, звідки $x_i = \frac{\eta_i}{k} + \xi_i$. Наступним кроком змінимо порядок інтегрування у правій частині рівняння (3.2). З урахуванням вищенаведених заміन, рівняння (3.2) може бути переписане у такому вигляді

$$\begin{aligned}
& -\left(K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3\right)U(t_1, t_2, t_3) - \\
& \quad - \delta^2 U(t_1, t_2, t_3) = \\
& = \lambda \iint_{\partial\Omega} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(k \frac{\eta_1}{k}, k \frac{\eta_2}{k}, k \frac{\eta_3}{k}\right) e^{-i\left[t_1\left(\frac{\eta_1}{k} + \xi_1\right) + t_2\left(\frac{\eta_2}{k} + \xi_2\right) + t_3\left(\frac{\eta_3}{k} + \xi_3\right)\right]} d\frac{\eta_1}{k} d\frac{\eta_2}{k} d\frac{\eta_3}{k} \right\} d\omega + \\
& \quad + \frac{\mu}{k^3} U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Обчисливши інтеграли у тривимірному перетворенні Фур'є, які входять в праву частину рівняння (3.3), дане рівняння перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
& -\left(K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 + \delta^2\right)U(t_1, t_2, t_3) = \\
& \quad = \frac{1}{k^3} U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right) \left[\lambda \iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + t_3\xi_3)} d\omega + \mu \right]. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Для подальшого розв'язання необхідно розглянути інтеграл по сфері $\partial\Omega$: $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r_k^2$ в правій частині рівняння (3.4). Слід зазначити, що в показнику степеня підінтегральної функції представлено скалярний добуток двох векторів $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$ і $\vec{\Xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Нехай вектор $\vec{T}$ спрямований вздовж осі z декартової системи координат, в якій визначено сферу $\partial\Omega$, а вектор $\vec{\Xi}$ спрямований вздовж радіуса-вектора, який описує дану сферу. Для обчислення поверхневого інтегралу в рівнянні (3.4), перейдемо до сферичних координат $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Це дозволить переписати поверхневий інтеграл у наступному вигляді

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + t_3\xi_3)} d\omega & = r_k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-i\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = \\
& = r_k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ir_k \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Здійснення процедури інтегрування в (3.5) дозволяє звести поверхневий інтеграл до елементарної функції:

$$\iint_{\partial\Omega} e^{-i(t_1\xi_1+t_2\xi_2+t_3\xi_3)} d\omega = 4\pi r_k^2 \frac{\sin r_k \sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{r_k \sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}.$$

На підставі вищевикладеного, рівняння (3.4) можна переписати наступним чином

$$U(t_1, t_2, t_3) = - \frac{U\left(\frac{t_1}{k}, \frac{t_2}{k}, \frac{t_3}{k}\right) \left[\lambda 4\pi r_k^2 \frac{\sin r_k \sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}}{r_k \sqrt{t_1^2+t_2^2+t_3^2}} + \mu \right]}{k^3 (K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 + \delta^2)}. \quad (3.6)$$

Для того щоб вираз у квадратних дужках в рівнянні (3.6) був цілою функцією, виберемо параметр μ за умов, що $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow 0$,

$$K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 \rightarrow 0. \text{ Тоді } \mu = -\frac{4\pi}{i\delta} \lambda r_k \sin(r_k i\delta).$$

Структура рівняння (3.6), а саме його вид $f(x) = C(x) f\left(\frac{x}{a}\right)$, дозволяє представити дане співвідношення у вигляді нескінченного добутку [36]

$$f(x) = \prod_{h=0}^{+\infty} C\left(\frac{x}{a^h}\right),$$

де $f\left(\frac{x}{a}\right)$, $C(x)$ – функції, що є аналітичними всюди на числовій вісі; $a > 0$,

$$a = \text{const}, \quad C(0) = 1, \quad f(0) = 1.$$

Таким чином, рівняння (3.6) можна записати у вигляді

$$U(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - 4\pi r_k^2 \lambda \frac{\sin \frac{r_k}{k^h} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{r_k}{k^h} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{k^3 \left(\frac{K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3}{k^{2h}} + \delta^2 \right)}. \quad (3.7)$$

Для гарантування збіжності нескінченного добутку в рівнянні (3.7), виберемо параметр λ із наступних умов: $h=0$, $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow 0$, $K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 \rightarrow 0$, звідки

$$\lambda = -\frac{(k\delta)^3 i}{4\pi r_k (\sin(r_k i\delta) + r_k i\delta)}.$$

Виходячи з теореми Поліа-Планшереля [161] та теореми Вінера-Пелі [162] для багатовимірного випадку, можна встановити, що функція $u(x_1, x_2, x_3)$ є нескінченно диференційованою функцією з компактним носієм, для якої перетворення Фур'є $U(t_1, t_2, t_3)$ описується швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$, $K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 \rightarrow \infty$ цілою функцією експоненціального типу. Отже, застосувавши зворотне перетворення Фур'є до рівняння (3.7), отримаємо фінітну функцію (носієм цієї функції буде куля одиничного радіусу). Дану функцію позначимо $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$ і вважатимемо її атомарною радіальною базисною функцією.

Виходячи з вищевикладеного очевидно, що перетворення Фур'є від функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$ має наступний вигляд

$$AN\tilde{or}_p(t_1, t_2, t_3) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\mu - 4\pi r_k^2 \lambda \frac{\sin \frac{r_k}{k^h} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}{\frac{r_k}{k^h} \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}}}{k^3 \left(\frac{K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3}{k^{2h}} + \delta^2 \right)}. \quad (3.8)$$

Функція $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ є парною і може бути розкладена в трикратний ряд Фур'є

$$AHorp_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} a_{pqr} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2) \cos(r\pi x_3), \quad (3.9)$$

в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} a_{000} &= \frac{1}{8}; \\ a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(\xi_1, 0, 0) \cos(p\pi \xi_1) d\xi_1; \\ a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(\xi_1, \xi_2, 0) \cos(p\pi \xi_1) \cos(q\pi \xi_2) d\xi_1 d\xi_2; \\ a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(0, \xi_2, 0) \cos(q\pi \xi_2) d\xi_2; \\ a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(0, \xi_2, \xi_3) \cos(q\pi \xi_2) \cos(r\pi \xi_3) d\xi_2 d\xi_3; \\ a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(\xi_1, 0, \xi_3) \cos(p\pi \xi_1) \cos(r\pi \xi_3) d\xi_1 d\xi_3; \\ a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(0, 0, \xi_3) \cos(r\pi \xi_3) d\xi_3; \\ a_{pqr} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cos(p\pi \xi_1) \cos(q\pi \xi_2) \cos(r\pi \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де $p, q, r = 1, 2, \dots$

Оскільки функція $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ є фінітною ($\text{supp } AHorp_k \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$) та парною відносно змінних x_1, x_2, x_3 , то у виразах для коефіцієнтів Фур'є (3.10) можна невластні інтеграли замінити визначеними, а тригонометричні функції під знаками інтегралів замінити

експоненціальними. Виконавши дані перетворення, перепишемо коефіцієнти Фур'є (3.10) ряду (3.9) в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 a_{000} &= \frac{1}{8}; \\
 a_{p00} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 AHorp_k(\xi_1, 0, 0) e^{-ip\pi\xi_1} d\xi_1 = \frac{1}{4} AH\tilde{or}p_k(p\pi, 0, 0); \\
 a_{pq0} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 AHorp_k(\xi_1, \xi_2, 0) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2} AH\tilde{or}p_k(p\pi, q\pi, 0); \\
 a_{0q0} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 AHorp_k(0, \xi_2, 0) e^{-iq\pi\xi_2} d\xi_2 = \frac{1}{4} AH\tilde{or}p_k(0, q\pi, 0); \\
 a_{0qr} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 AHorp_k(0, \xi_2, \xi_3) e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_2 d\xi_3 = \frac{1}{2} AH\tilde{or}p_k(0, q\pi, r\pi); \\
 a_{p0r} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 AHorp_k(\xi_1, 0, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_3 = \frac{1}{2} AH\tilde{or}p_k(p\pi, 0, r\pi); \\
 a_{00r} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 AHorp_k(0, 0, \xi_3) e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_3 = \frac{1}{4} AH\tilde{or}p_k(0, 0, r\pi); \\
 a_{pqr} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 AHorp_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-ip\pi\xi_1} e^{-iq\pi\xi_2} e^{-ir\pi\xi_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = AH\tilde{or}p_k(p\pi, q\pi, r\pi),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

де $p, q, r = 1, 2, \dots$

Функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ утворюють сімейство підкласу атомарних функцій, що породжуються диференціальним оператором $L(K) - \delta^2$.

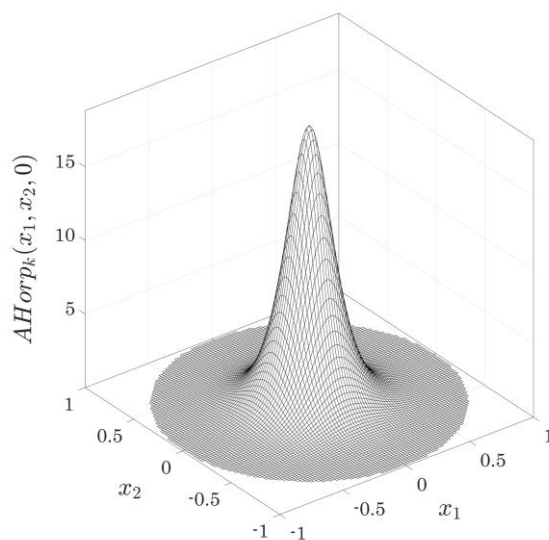
Теорема 3.1. Сімейство атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, які є розв'язками функціонально-диференціального рівняння (3.1) зі значеннями коефіцієнтів

$$\mu = -\frac{4\pi}{i\delta} \lambda r_k \sin(r_k i\delta); \quad \lambda = -\frac{(k\delta)^3 i}{4\pi r_k (\sin(r_k i\delta) + r_k i\delta)}$$

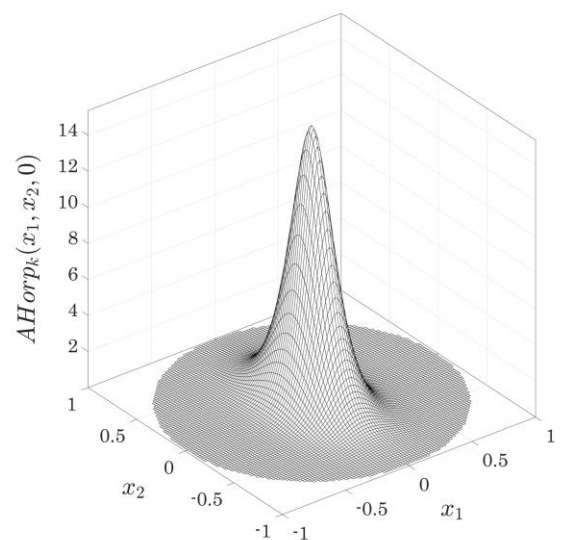
будуть фінітними нескінченно диференційованими функціями з носіями у формі кулі одиничного радіусу, нормованими умовою

$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AHorp_k(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$, які представляються в кубі: $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ рядом Фур'є (3.9) з коефіцієнтами (3.11). Перетворення Фур'є функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ (3.8), є швидкоспадною при $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \rightarrow \infty$, $K_{11}t_1^2 + K_{22}t_2^2 + K_{33}t_3^2 + 2K_{12}t_1t_2 + 2K_{13}t_1t_3 + 2K_{23}t_2t_3 \rightarrow \infty$ цілою функцією експоненціального типу.

На Рис. 3.1 представлена візуалізація функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного (а) та анізотропного ($K_{11} = 0.5, K_{22} = 1.5, K_{33} = 2.0, K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$) (б) випадків.



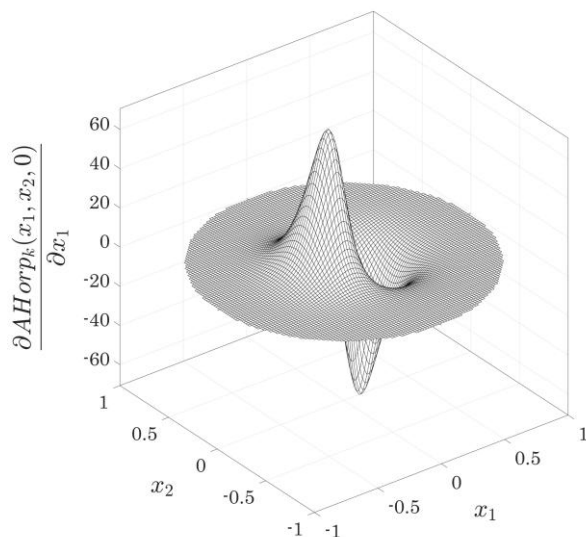
(а) Ізотропний випадок



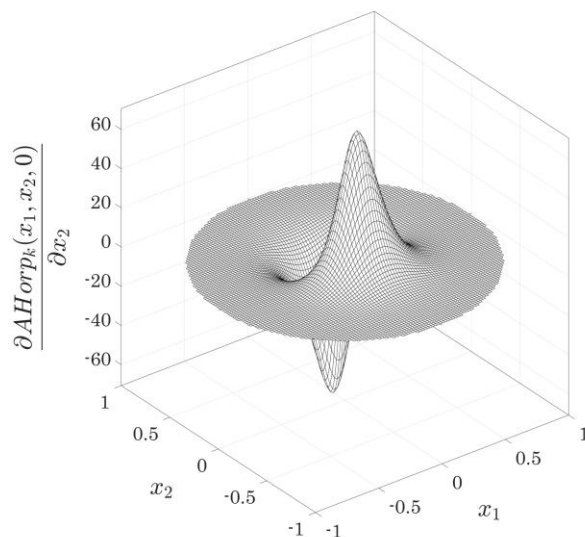
(б) Анізотропний випадок

Рис. 3.1 Візуалізація функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного (а) та анізотропного (б) випадків

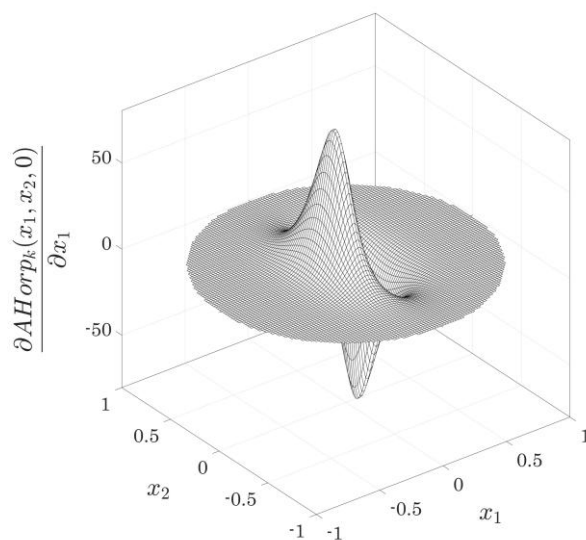
На Рис. 3.2 представлена візуалізація перших похідних функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного (а)-(б) та анізотропного ($K_{11} = 0.5, K_{22} = 1.5, K_{33} = 2.0, K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$) (в)-(г) випадків.



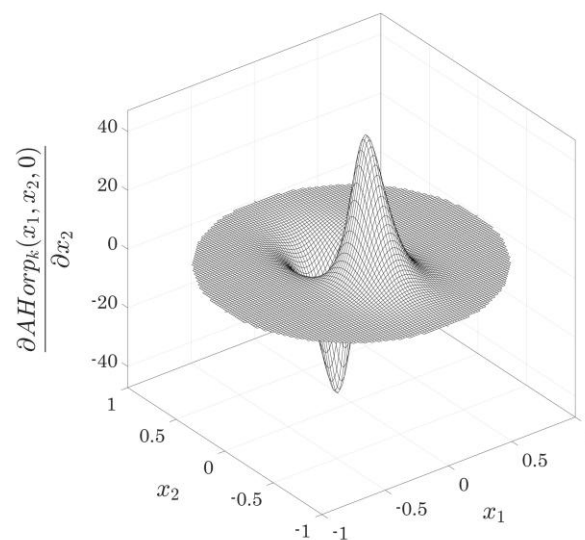
(а) Ізотропний випадок



(б) Ізотропний випадок



(в) Анізотропний випадок

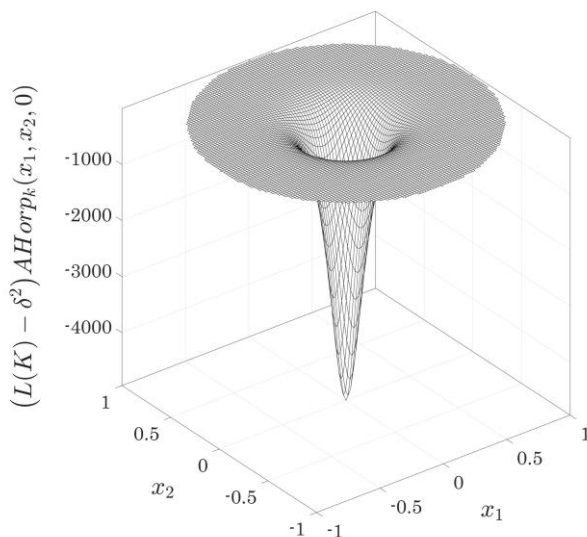


(г) Анізотропний випадок

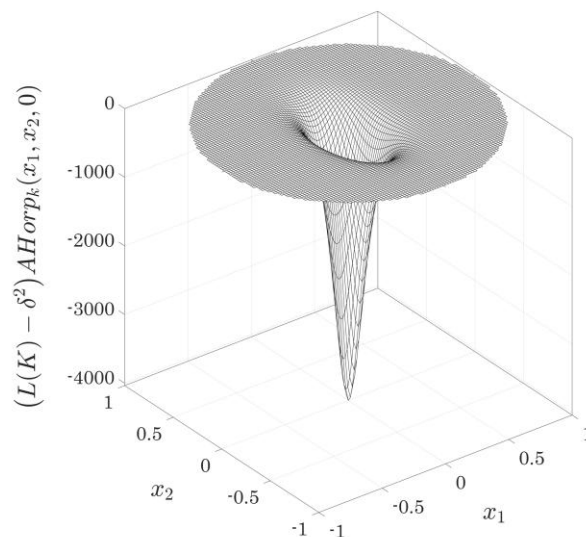
Рис. 3.2 Візуалізація перших похідних функції $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$ за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного (а)-(б) та анізотропного (в)-(г) випадків

На Рис. 3.3 представлена візуалізація функції $(L(K) - \delta^2)ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для

ізотропного (а) та анізотропного ($K_{11} = 0.5, K_{22} = 1.5, K_{33} = 2.0, K_{12} = K_{13} = K_{23} = 0$) (б) випадків.



(а) Ізотропний випадок



(б) Анізотропний випадок

Рис. 3.3 Візуалізація функції $(L(K) - \delta^2) AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного (а) та анізотропного (б) випадків

Висновки до розділу 3

Третій розділ присвячений розгляду алгоритму побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, які породжуються оператором типу Гельмгольца. Функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ розширюють підклас функцій, які використовуються в якості базисних при реалізації безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Сімейство функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ є нескінченно диференційованими фінітними розв'язками функціонально-диференціального рівняння спеціального виду. Вибір фінітних функцій в якості базисних дає можливість розглядати крайові задачі на областях зі складною геометричною

конфігурацією. Функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ містять параметр форми k , який дозволяє варіювати розмір носія та може уточнюватися в процесі розв'язку крайової задачі.

Отримано явні формули для обчислення функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перетворення Фур'є. Представлено візуалізацію атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перших похідних за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків. Представлено візуалізацію функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора: [159, 160].

РОЗДІЛ 4

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В АНІЗОТРОПНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ БЕЗСІТКОВОГО ПІДХОДУ

Числові розрахунки теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах є перспективним напрямом досліджень у галузі обчислювальної фізики. В першу чергу це пов'язано з широким застосуванням анізотропних матеріалів у різних областях, таких як електроніка, аерокосмічна техніка, машинобудування, суднобудування, енергетика, медицина тощо.

У різних технологічних процесах і пристроях дані матеріали піддаються тепловому впливу, внаслідок чого в них відбуваються фізико-хімічні явища, зокрема зміна геометричних розмірів. Неконтрольоване теплове розширення конструкційних матеріалів може призвести до погіршення експлуатаційних характеристик пристрою, а також до аварійних ситуацій. Тому при створенні та використанні таких матеріалів необхідно враховувати анізотропію їх теплофізичних властивостей, а також досліджувати теплові процеси, які в них протікають.

У цьому розділі демонструються результати числових розрахунків нестационарних теплових процесів, що протікають в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла, а також різними початковими та граничними умовами [137, 140, 159, 170]. Всі числові розрахунки проводяться з використанням розробленого безсіткового методу розв'язання задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

В якості базисних функцій для апроксимації диференціального рівняння нестационарної теплопровідності використовуються як анізотропні радіальні базисні функції з глобальним носієм, так і атомарні радіальні базисні функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$. Для оцінки точності апроксимації використовуються середня відносна похибка $gerg(u)$, середня абсолютна похибка $aerg(u)$ і максимальна похибка $merg(u)$.

4.1 Тривимірна задача нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла

4.1.1 Ізотропний випадок

Розглянемо тривимірну задачу нестационарної теплопровідності на одиничній області в формі куба $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, яка зображена на Рис. 4.1 [137, 140].

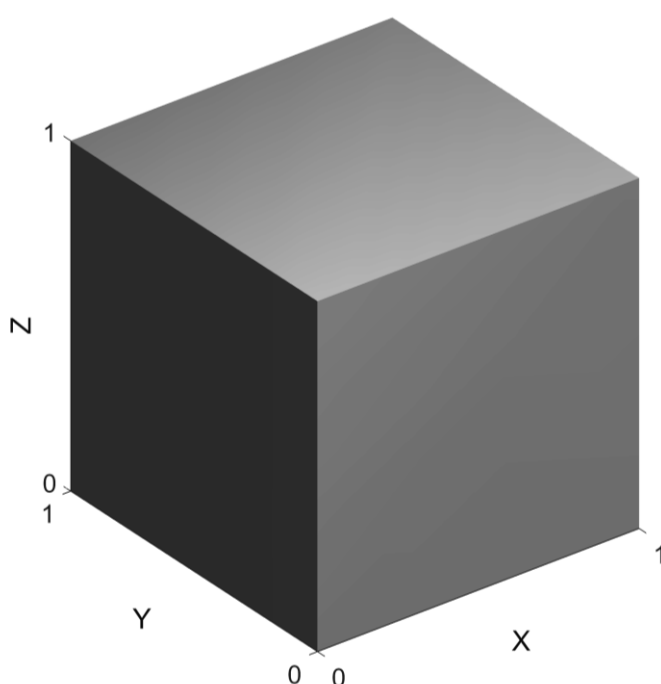


Рис. 4.1 Візуалізація геометричної області крайової задачі

Нестационарне рівняння теплопровідності в замкненій області $\Omega \subset R^3$, що обмежена $\partial\Omega$, має вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)) + g,$$

де $\rho=1$; $c_p=1$; $\theta=1$; $t \in [0,1]$; $\Delta t=0.01$; N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Компоненти тензора теплопровідності задано наступним чином:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Граничні умови для цієї задачі мають вид:

$$u(x, y, z, t) = 0, (x, y, z) \in \partial\Omega.$$

Початкові умови задані у вигляді

$$u(x, y, z, 0) = 0, (x, y, z) \in \Omega.$$

Внутрішнє джерело тепла задано як

$$g(x, y, z, t) = 5, (x, y, z) \in \Omega.$$

Базисною функцією для апроксимації частинного розв'язку визначено анізотропну мультиквадратичну радіальну базисну функцію $\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ з параметром форми $\varepsilon = 1$.

Для отримання оцінки точності апроксимації використовується середня відносна похибка $\text{rerr}(u)$, середня абсолютна похибка $\text{aerr}(u)$ і максимальна похибка $\text{terr}(u)$, які обчислюються за формулами

$$\text{rerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\sum_{j=1}^N u_j^2}}, \quad (4.1)$$

$$\text{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2}, \quad (4.2)$$

$$\text{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j|, \quad (4.3)$$

де u_j та $\tilde{u}_j$ є відповідно аналітичними та наближеними розв'язками, а N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

На Рис. 4.2 наведено візуалізацію наближеного розв'язку даної задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t=1$.

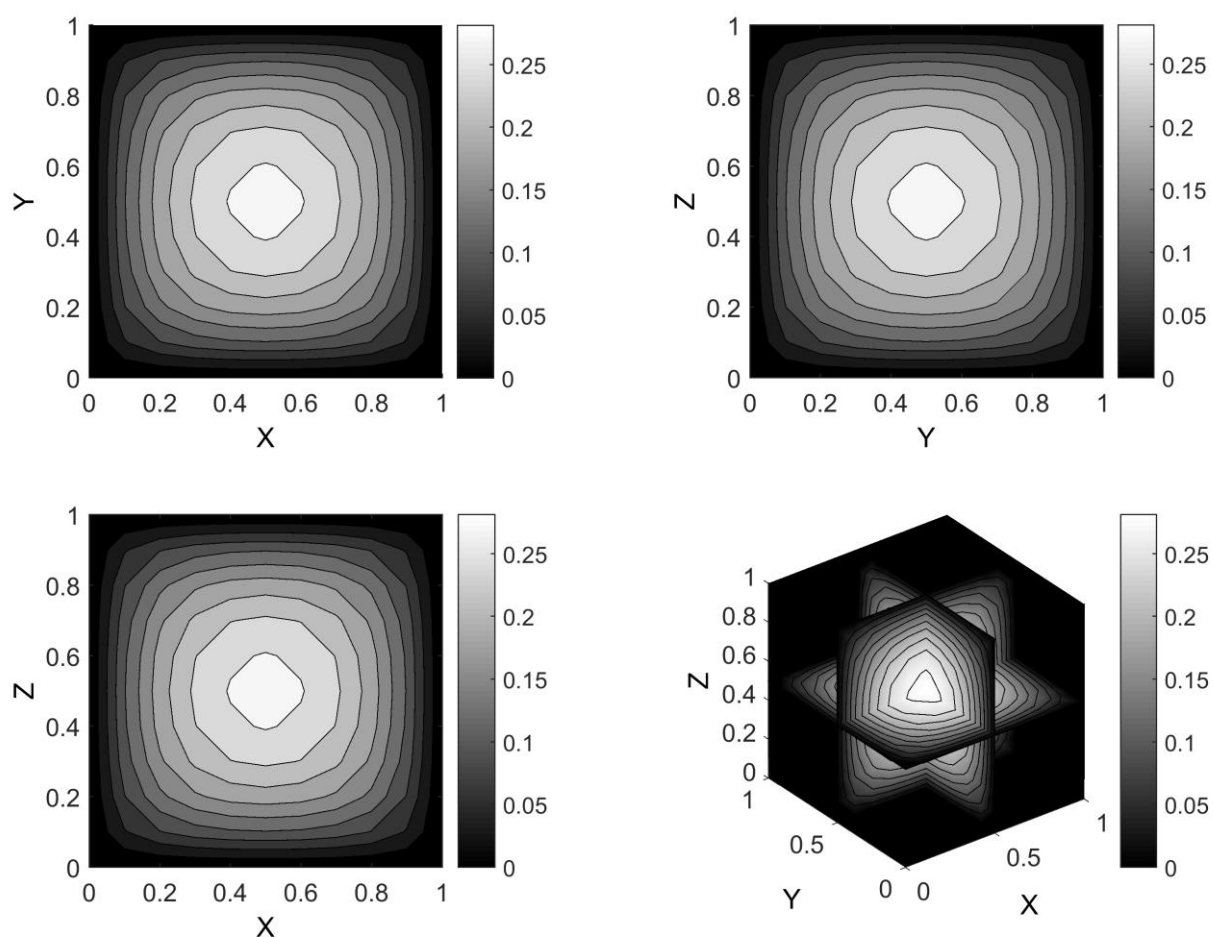


Рис. 4.2 Візуалізація наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t=1$ (ізотропний випадок)

Аналітичний розв'язок для цієї крайової задачі має вигляд:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{m,n,k}(t) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l_3} z\right), \quad (4.4)$$

де

$$u_{m,n,k}(t) = \int_0^t \left[\frac{8}{l_1 l_2 l_3 \rho c_p} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} g(\xi, \eta, \zeta, t) \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} \xi\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} \eta\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l_3} \zeta\right) d\xi d\eta d\zeta \right] \times \\ \times \exp(-A_{m,n,k}(t-\tau)) d\tau; \quad A_{m,n,k} = a_{11} \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + a_{22} \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 + a_{33} \left(\frac{\pi k}{l_3}\right)^2; \quad a_{11} = \frac{K_{11}}{\rho c_p}, \\ a_{22} = \frac{K_{22}}{\rho c_p}, \quad a_{33} = \frac{K_{33}}{\rho c_p}; \quad \{l_i\}_{i=1}^3 - \text{геометричні розміри прямокутного}$$

паралелепіпеда (в даному випадку – куба); $g(\xi, \eta, \zeta, t)$ – функція внутрішнього джерела тепла.

Точність підсумовування потрібного ряду Фур'є в рівнянні (4.4) для кожного коефіцієнта m, n, k обмежується 100 ітераціями. Причина вибору такої точності підсумовування потрібного ряду Фур'є полягає в наступних факторах. По-перше, в разі підсумовування такої кількості членів ряду досягається точність машинного обчислення. По-друге, під час обрахунку більшої кількості членів ряду накопичується значна похибка округлення.

В Таблиці 4.1 наведено похибки наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t=1$ відносно аналітичного розв'язку (4.4) для різної кількості інтерполяційних вузлів N .

Таблиця 4.1

Похибки наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності

N	$\text{terr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
27	9.252489×10^{-1}	2.600300×10^{-1}	1.351155
125	2.191730×10^{-2}	2.146430×10^{-2}	4.680613×10^{-2}

Продовження таблиці 4.1

N	$\text{rerr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
216	9.835198×10^{-3}	1.361558×10^{-2}	2.588780×10^{-2}
1331	1.178247×10^{-4}	4.652063×10^{-4}	2.073421×10^{-3}

На Рис. 4.3 наведено графік залежності середніх відносних похибок $\text{rerr}(u)$ від кількості інтерполяційних вузлів N для даної крайової задачі.

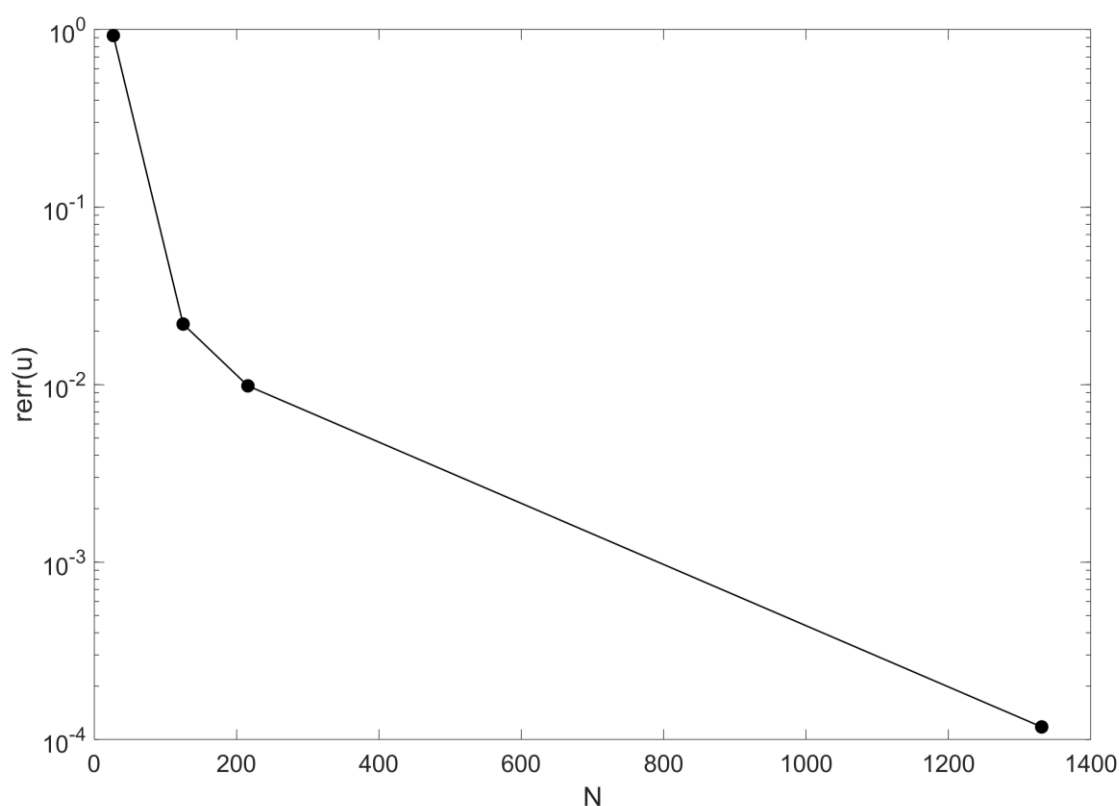


Рис. 4.3 Графік залежності середніх відносних похибок $\text{rerr}(u)$ від кількості інтерполяційних вузлів N (ізотропний випадок)

4.1.2 Анізотропний випадок

Розглянемо тривимірну задачу нестационарної теплопровідності на одиничній області в формі куба $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ (див. Рис. 4.1) [137, 140].

Нестационарне рівняння теплопровідності в замкненій області $\Omega \subset R^3$, що обмежена $\partial\Omega$, має вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)) + g,$$

де $\rho=1$; $c_p=1$; $\theta=1$; $t \in [0,1]$; $\Delta t=0.01$; N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Компоненти тензора теплопровідності задано наступним чином:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Граничні умови для цієї задачі мають вид:

$$u(x, y, z, t) = 0, (x, y, z) \in \partial\Omega.$$

Початкові умови задані у вигляді

$$u(x, y, z, 0) = 0, (x, y, z) \in \Omega.$$

Внутрішнє джерело тепла задано як

$$g(x, y, z, t) = 5, (x, y, z) \in \Omega.$$

Базисною функцією для апроксимації частинного розв'язку визначено анізотропну мультіквадратичну радіальну базисну функцію $\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ з параметром форми $\varepsilon=1$.

На Рис. 4.4 наведено візуалізацію наближеного розв'язку даної задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t=1$.

Аналітичний розв'язок для цієї крайової задачі задається рівнянням (4.4).

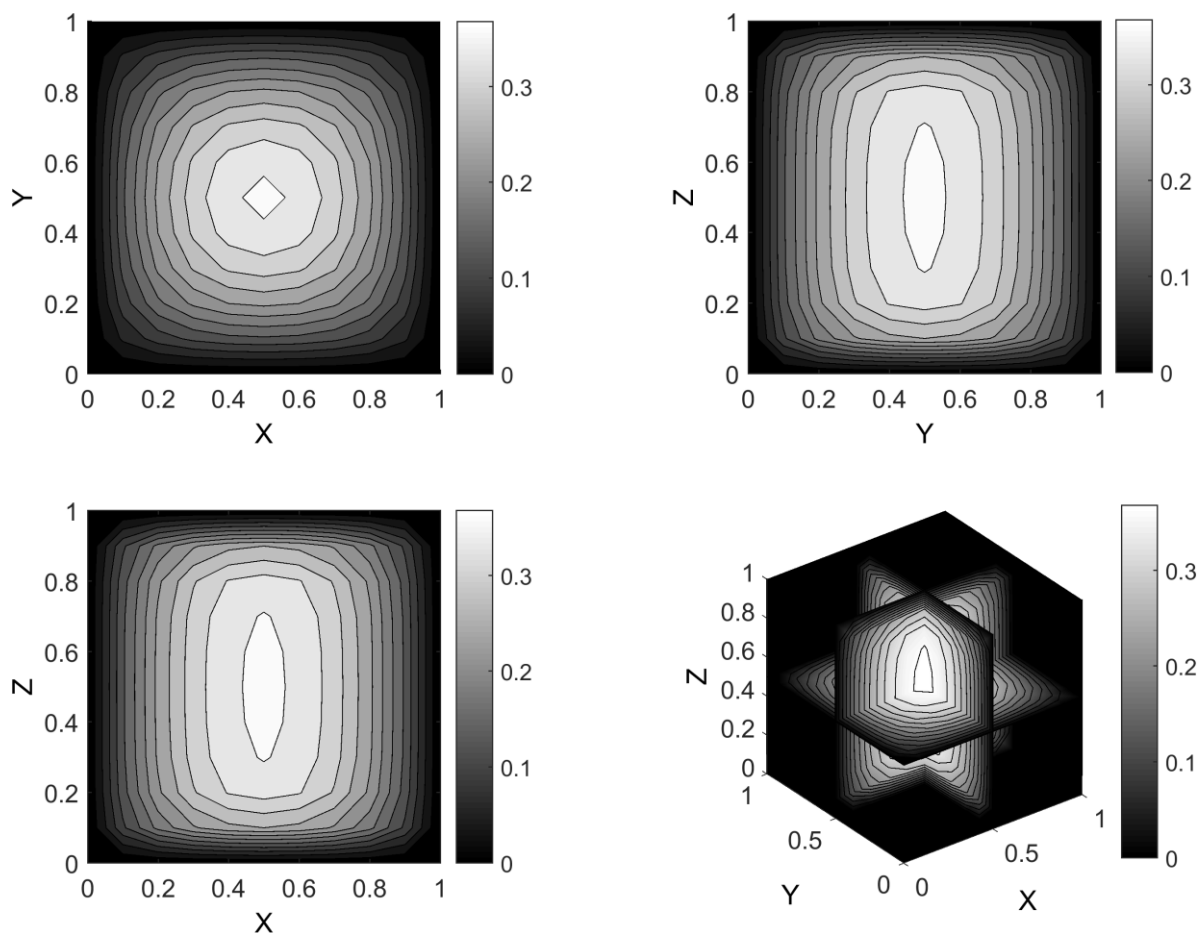


Рис. 4.4 Візуалізація наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t = 1$ (анізотропний випадок)

В Таблиці 4.2 наведено похибки наближеного розв'язку даної задачі нестационарної теплопровідності в момент часу $t = 1$ відносно аналітичного розв'язку (4.4) для різної кількості інтерполяційних вузлів N .

Таблиця 4.2

Похибки наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності

N	$\text{rerr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
27	1.859792×10^{-1}	6.837013×10^{-2}	3.552616×10^{-1}
125	1.483728×10^{-2}	2.059828×10^{-2}	5.096209×10^{-2}

Продовження таблиці 4.2

N	$\text{rerr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
216	6.734991×10^{-3}	1.340875×10^{-2}	2.806351×10^{-2}
1331	1.095657×10^{-3}	6.326208×10^{-3}	3.034338×10^{-2}

На Рис. 4.5 наведено графік залежності середніх відносних похибок $\text{rerr}(u)$ від кількості інтерполяційних вузлів N для даної крайової задачі.

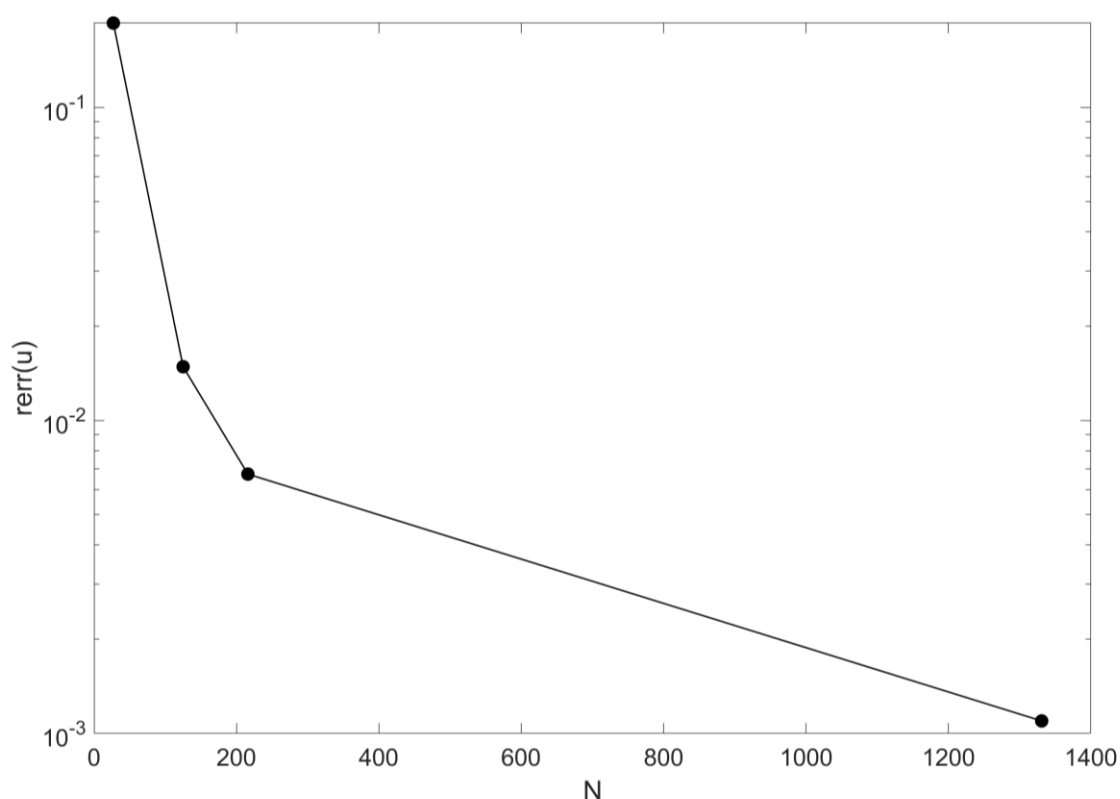


Рис. 4.5 Графік залежності середніх відносних похибок $\text{rerr}(u)$ від кількості інтерполяційних вузлів N (анізотропний випадок)

З наведених вище графіків, зображених на Рис. 4.3 та Рис. 4.5 видно, що відносно невелике збільшення кількості інтерполяційних вузлів N призводить до значного підвищення точності наближених розв'язків розглянутих задач нестационарної теплопровідності.

4.2 Використання атомарних радіальних базисних функцій при моделюванні теплового процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла

Проілюструємо застосування атомарних функцій $ANor_{p_k}(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при реалізації безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Розглянемо тривимірну задачу нестационарної теплопровідності в замкнутій області в формі прямокутного паралелепіпеда $\Omega = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 0.5]$ обмежений $\partial\Omega$, яка зображена на Рис. 4.6 [159].

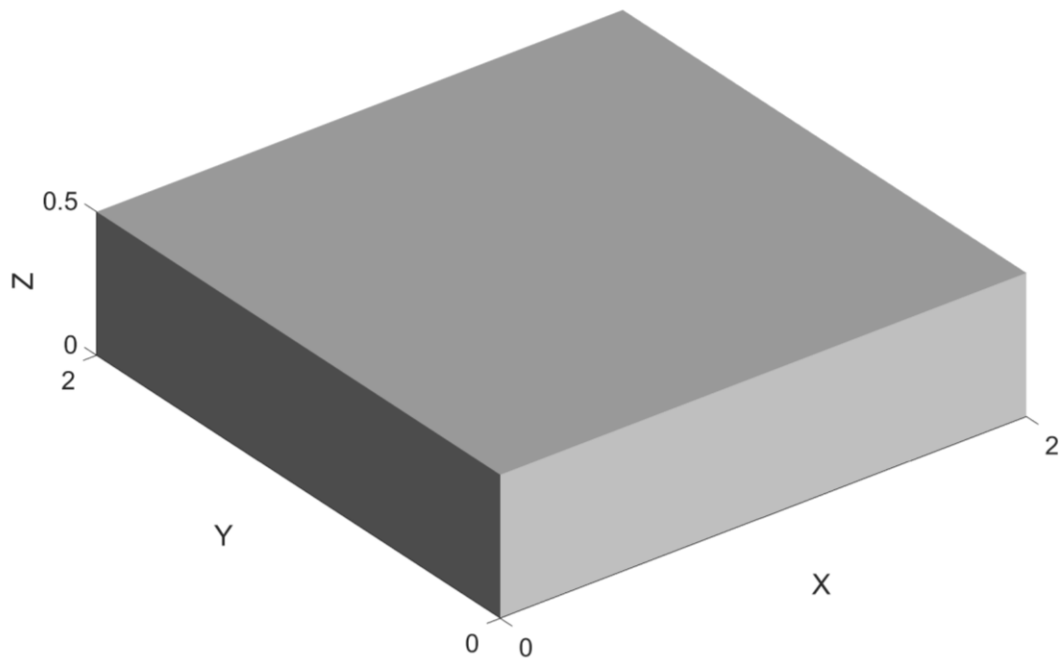


Рис. 4.6 Візуалізація геометричної області крайової задачі

Рівняння нестационарної теплопровідності для анізотропних твердих тіл має наступний вигляд:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)) + g,$$

де $\rho=1$ – щільність; $c_p=1$ – питома теплоємність при постійному тиску; $u=u(x,y,z,t)$ – температура; $K=\left[K_{ij}\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ – симетричний, позитивно визначений тензор теплопровідності; $g=g(x,y,z,t)$ – внутрішнє джерело тепла; $\theta=1$; $t\in[0,2]$; $\Delta t=0.01$ – крок за часом; $N=2646$ – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Граничні умови для цієї задачі мають вид:

$$u(x,y,z,t)=0, (x,y,z)\in\partial\Omega.$$

Початкові умови задані у вигляді

$$u(x,y,z,0)=0, (x,y,z)\in\Omega.$$

Всередині пластини діє рухоме точкове джерело тепла, яке задається рівнянням

$$g(x,y,z,t)=\exp\left(-80\left[\left(x-\frac{1}{2}(2+\sin(\pi t))\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}(2+\cos(\pi t))\right)^2\right]\right), (x,y,z)\in\Omega.$$

Тензор теплопровідності для даної крайової задачі має вид

$$K=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Для отримання оцінки точності апроксимації використовується середня відносна похибка $\text{err}(u)$, середня абсолютна похибка $\text{aerr}(u)$ і максимальна похибка $\text{terr}(u)$, які обчислюються за формулами (4.1)-(4.3).

На Рис. 4.7 представлена візуалізація зрізів наближеного розв'язку площиною $z=0.3$ в різні моменти часу.

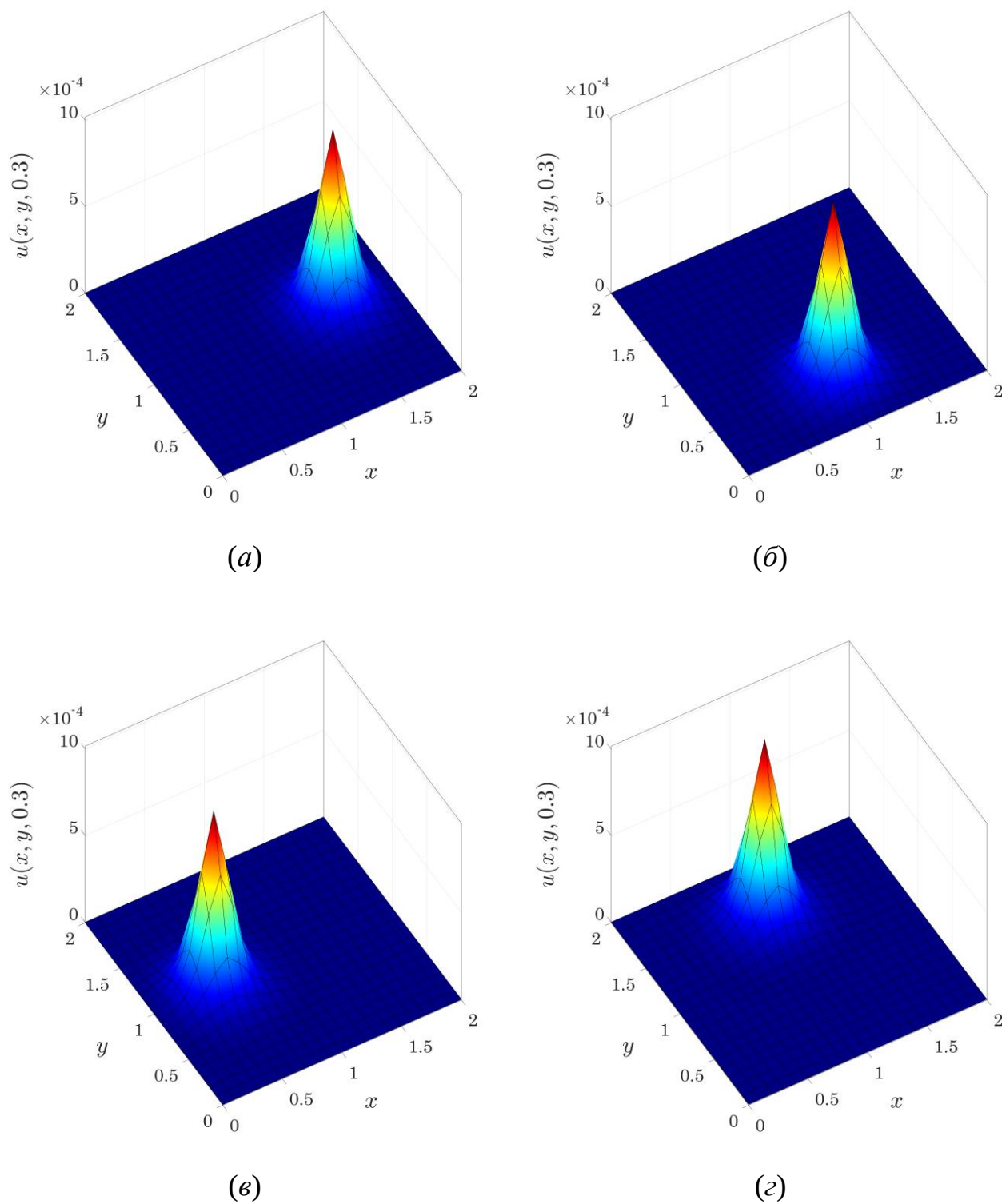


Рис. 4.7 Візуалізація зрізів наближеного розв'язку площиною $z = 0.3$
в моменти часу $t = 0.5$ (а), $t = 1$ (б), $t = 1.5$ (в), $t = 2$ (г)

Аналітичний розв'язок для цієї крайової задачі задається рівнянням (4.4).

В Таблиці 4.3 наведено похибки наближених розв'язків цієї задачі нестационарної теплопровідності відносно аналітичного розв'язку, які отримані з використанням атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ та анізотропних мультіквадратичних радіальних базисних функцій (MQ) в різні моменти часу.

Таблиця 4.3

Похибки наближених розв'язків крайової задачі

Базисні функції	t	$rerr(u)$	$aerr(u)$	$merr(u)$
АРБФ	0.5	$1.20529052 \times 10^{-3}$	$4.44930401 \times 10^{-6}$	$7.16979247 \times 10^{-5}$
	1	$1.16163349 \times 10^{-3}$	$4.28814625 \times 10^{-6}$	$6.90741195 \times 10^{-5}$
	1.5	$1.12912489 \times 10^{-3}$	$4.16814019 \times 10^{-6}$	$6.71658645 \times 10^{-5}$
	2	$1.16305499 \times 10^{-3}$	$4.29339239 \times 10^{-6}$	$6.93488164 \times 10^{-5}$
MQ	0.5	$3.41366269 \times 10^{-3}$	$1.26014623 \times 10^{-5}$	$1.05639294 \times 10^{-4}$
	1	$3.27575942 \times 10^{-3}$	$1.20923987 \times 10^{-5}$	$1.10745011 \times 10^{-4}$
	1.5	$2.98933244 \times 10^{-3}$	$1.10350563 \times 10^{-5}$	$1.04590253 \times 10^{-4}$
	2	$2.99707792 \times 10^{-3}$	$1.10636484 \times 10^{-5}$	$1.07216618 \times 10^{-4}$

Використання атомарних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних, призводить до розрідженої інтерполяційної матриці, що в свою чергу дозволяє знизити обчислювальні витрати в порівнянні з анізотропними радіальними базисними функціями з глобальним носієм, а також підвищує точність числових розрахунків, отриманих із застосуванням розробленого безсіткового методу.

Варто відзначити, що параметр форми k , що входить до атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, дозволяє варіювати розмір носія та може уточнюватися в процесі розв'язку крайової задачі. Збільшення

параметра k , призводить до зменшення розміру носія базисної функції і до збільшення розрідженості інтерполяційної матриці, і навпаки. Вибір оптимального параметра форми k залишається предметом подальших досліджень.

4.3 Моделювання теплового процесу в монокристалі ніобату літію при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням

Монокристал ніобату літію (LiNbO_3) – це сегнетоелектричний кристал ромбоєдричної сингонії. Ніобат літію є фазою змінного складу, що дозволяє вирощувати монокристали з різним співвідношенням $[\text{Li}]/[\text{Nb}]$. Номінально чисті монокристали LiNbO_3 зазвичай вирощуються з конгруентного розплаву ($[\text{Li}]/[\text{Nb}] = 48.6/51.4$) методом Чохральського [163, 164].

Як і в інших сегнетоелектриках, в ніобаті літію виникають п'єзоелектричний ефект, нелінійно-оптичні ефекти, ефект пружності та ефект Покельса (лінійний електрооптичний ефект). Винятковою особливістю ніобату літію є те, що він має чудові фізичні властивості, такі як великий електрооптичний, п'єзоелектричний та нелінійно-оптичний коефіцієнти, що робить його затребуваним матеріалом для різних застосувань.

Завдяки великим значенням електрооптичних коефіцієнтів, ніобат літію використовується для створення оптичних амплітудних/фазових модуляторів [4-6], осередків Покельса [7], модуляторів добротності для лазерів [8, 9], а також механоелектричних резистивних перетворювачів [10] та сенсорів [11]. Нелінійно-оптичні властивості ніобату літію дозволяють створювати на його основі оптичні параметричні осцилятори [165, 166] та параметричні підсилювачі в широкому діапазоні довжин хвиль [167], а також використовувати його для генерації другої гармоніки лазерного випромінювання з довжиною хвилі > 1 мкм [168, 169].

Відомо, що взаємодія лазерного випромінювання з кристалами в широкому діапазоні густин світлових потоків добре описується тепловою моделлю, згідно з якою весь процес в цілому може бути умовно поділений на

декілька стадій: 1) поглинання світла та передача енергії тепловим коливанням кристалічної решітки твердого тіла; 2) нагрівання кристала без руйнування; 3) руйнування кристала; 4) остигання після закінчення взаємодії.

Монокристали LiNbO_3 широко використовуються в лазерній техніці, тому питання, які пов'язані з вивченням стійкості даних кристалів до впливу лазерного випромінювання, становлять значний інтерес.

Розглянемо монокристал LiNbO_3 в формі циліндра діаметром $D_{LN} = 40$ мм та висотою $H = 60$ мм із наступними фізичними характеристиками [170]: щільність $\rho = 4659 \text{ кг/м}^3$; теплопровідність вздовж напрямку $[001]$ $k_{\parallel} = 4.61 \text{ Вт/(м}\times\text{К)}$; теплопровідність у площині (001) $k_{\perp} = 4.19 \text{ Вт/(м}\times\text{К)}$; питома теплоємність при постійному тиску $c_p = 601 \text{ Дж/(кг}\times\text{К)}$. Оптична вісь монокристала LiNbO_3 спрямована вздовж координатної осі z .

Через монокристал проходить лазерний пучок з потужністю випромінювання $P = 50 \text{ Вт}$ та радіусом $r_0 = 5 \text{ мм}$, як показано на Рис. 4.8. Довжина хвилі лазерного випромінювання становить $\lambda = 1064 \text{ нм}$, коефіцієнт поглинання $\text{LiNbO}_3 - \alpha \sim 0.1 \text{ \%/см @ } 1064 \text{ нм}$.

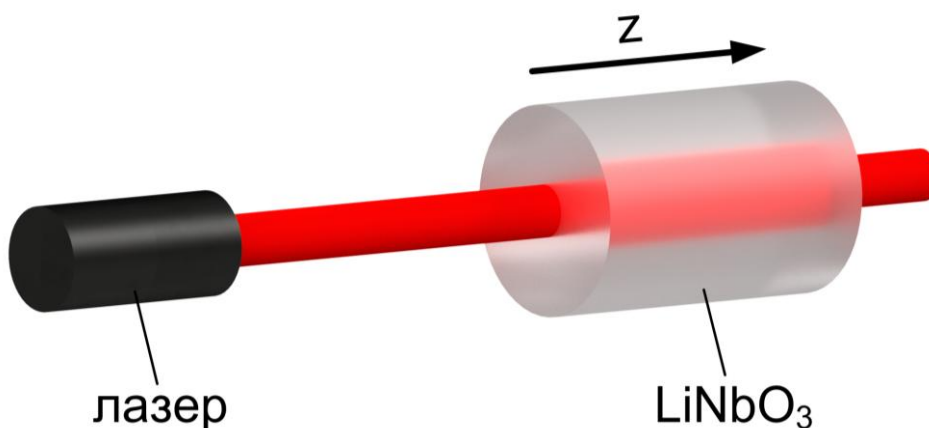


Рис. 4.8 Проходження лазерного пучка через монокристал LiNbO_3

При взаємодії безперервного лазерного випромінювання з монокристалом LiNbO_3 , відбувається поглинання світла і перехід поглиненої енергії в теплову.

Диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності для анізотропного твердого тіла в замкненій області має наступний вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)) + g,$$

де ρ – щільність; c_p – питома теплоємність при постійному тиску; $u = u(x, y, z, t)$ – температура; $K = [K_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ – симетричний, позитивно визначений тензор теплопровідності; $g = g(x, y, z, t)$ – внутрішнє джерело тепла.

У початковий момент часу монокристал LiNbO_3 знаходиться при температурі $u_0 = 25^\circ\text{C}$. На поверхні монокристала відбувається теплообмін із навколишнім середовищем. Граничні умови для цього випадку можуть бути записані у такому вигляді:

$$q = -h(u_\infty - u),$$

де $q = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ – тепловий потік в анізотропному випадку (2.9); $h \sim 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \times \text{К})$ – коефіцієнт тепловіддачі; $u_\infty = 25^\circ\text{C}$ – температура навколишнього середовища.

Інтенсивність внутрішнього джерела тепла на глибині z визначається за законом Бугера-Ламберта

$$g(x, y, z) = \frac{2P\alpha}{\pi r_0^2} \exp\left(-2\left(\frac{x^2 + y^2}{r_0^2}\right)\right) \exp(-\alpha z),$$

де x, y, z – декартові координати; P – потужність випромінювання; r_0 – радіус лазерного пучка; α – коефіцієнт поглинання.

На Рис. 4.9 представлена візуалізація інтенсивності внутрішнього джерела тепла на глибині $z = 0.03$ м.

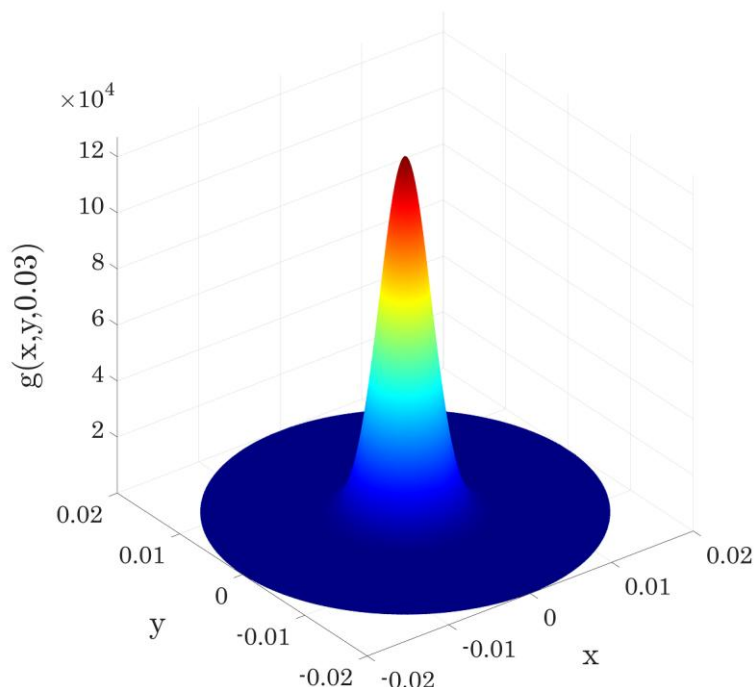


Рис. 4.9 Візуалізація інтенсивності внутрішнього джерела тепла на глибині $z = 0.03$ м

Кількість інтерполяційних вузлів всередині області крайової задачі та на границі області у всіх розрахунках приймається рівними $N_d = 7393$ і $N_b = 7808$, відповідно. Часовий інтервал, на якому розв'язується задача нестационарної теплопровідності, становить 2 год 30 хв з кроком 1 с.

На Рис. 4.10 представлені результати числових розрахунків розподілу температурного поля на поверхні монокристалу LiNbO_3 при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням в різні моменти часу.

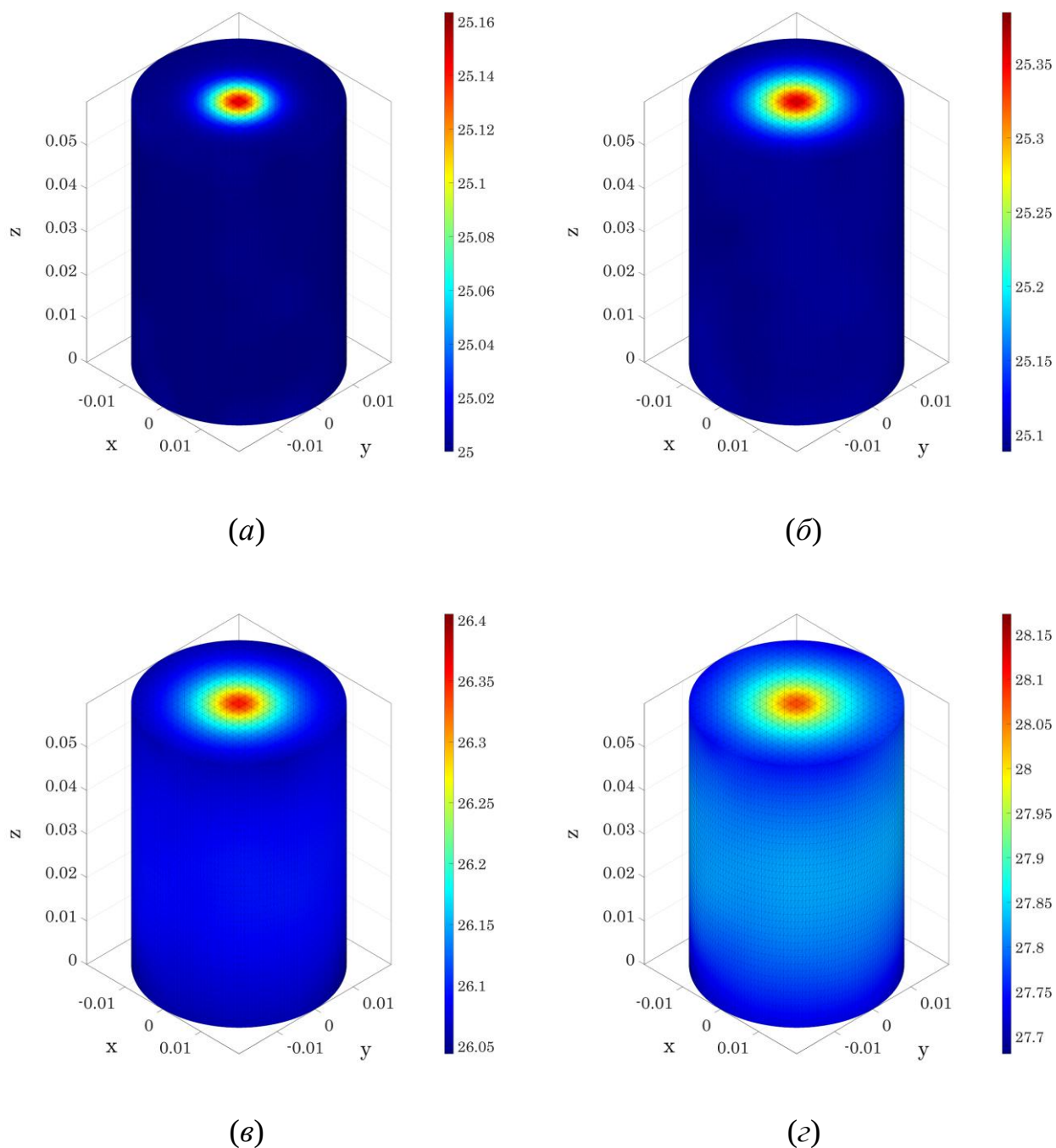


Рис. 4.10 Візуалізація розподілу температурного поля на поверхні монокристалу LiNbO_3 в моменти часу $t = 10$ с (а), $t = 100$ с (б), $t = 1000$ с (в), $t = 7000$ с (г)

На Рис. 4.11 представлені результати числових розрахунків розподілу температурного поля всередині монокристалу LiNbO_3 при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням в різні моменти часу.

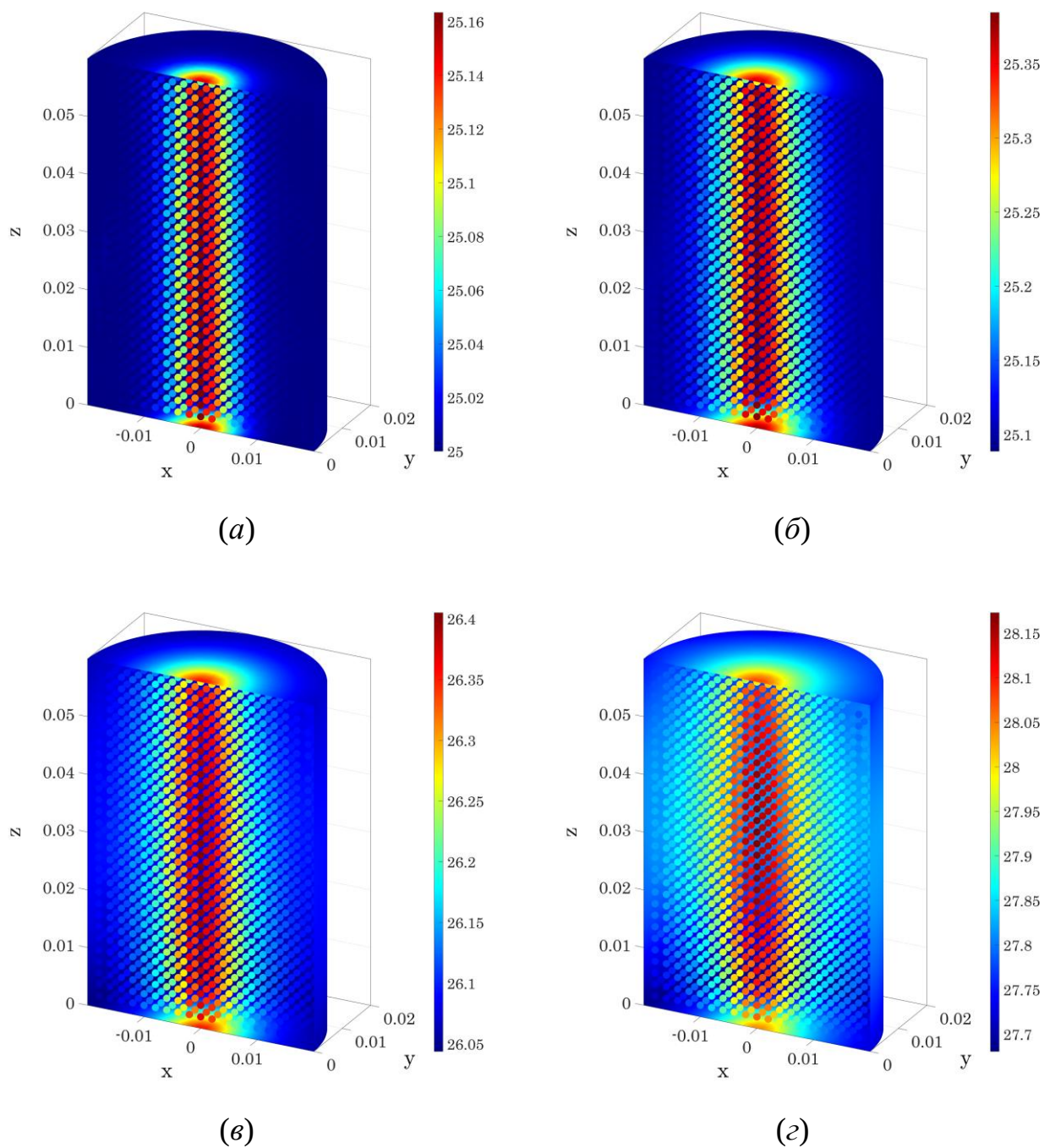


Рис. 4.11 Візуалізація розподілу температурного поля
всередині монокристалу LiNbO_3 в моменти часу
 $t = 10$ с (а), $t = 100$ с (б), $t = 1000$ с (в), $t = 7000$ с (г)

Як видно з Рис. 4.11, зі збільшенням часу дії лазерного випромінювання на монокристал LiNbO_3 , відбувається розширення нагрітої зони в центрі

монокристалу, а також підвищення його температури. Цей процес триває до досягнення сталого теплового режиму.

На Рис. 4.12 представлено графік процесу нагріву монокристалу LiNbO_3 на всьому часовому інтервалі.

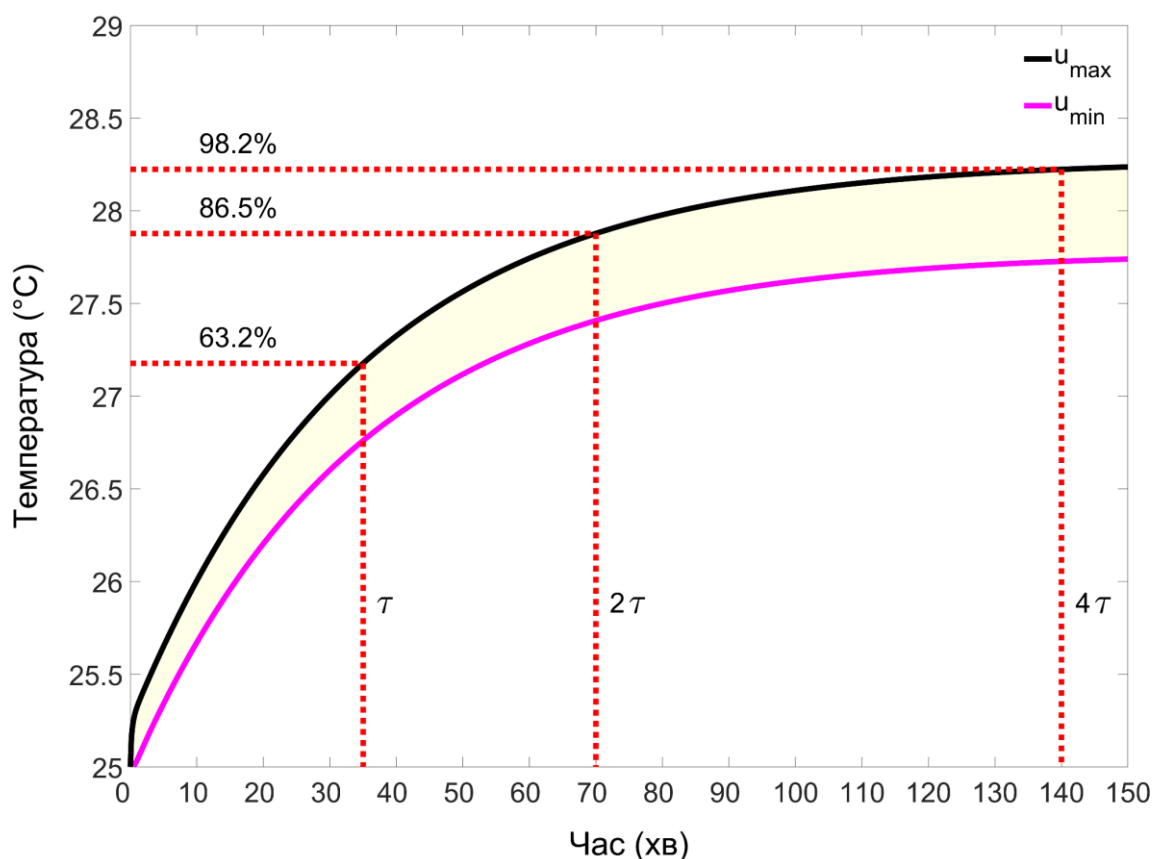


Рис. 4.12 Графік процесу нагріву монокристалу LiNbO_3 , де u_{max} – максимальна температура монокристалу, u_{min} – мінімальна температура монокристалу, τ – теплова постійна часу

З Рис. 4.12 видно, що спочатку температура монокристалу збільшується дуже швидко, а потім швидкість збільшення уповільнюється, і приблизно через 2 год 30 хв переходить в сталий стан. Момент часу 35 хв, коли температура монокристалу досягає 63.2% від сталого значення, є тепловою постійною часу τ .

Значення теплової постійної часу τ може бути розраховане за такою формулою:

$$\tau = \frac{\rho V c_p}{h A_s},$$

де ρ – щільність монокристала; V – об'єм монокристала; c_p – питома теплоємність при постійному тиску; h – коефіцієнт тепловіддачі; A_s – площа поверхні монокристала.

Для оцінки точності отриманого розв'язку на n -му кроці обчислимо норму відносної нев'язки:

$$\|\mathbf{r}\|_{\infty} = \max_{i=1,\dots,N} |r_i|, \quad (4.5)$$

де $N = N_d + N_b$ – загальна кількість інтерполяційних вузлів; $|r_i|$ – відносна нев'язка наближеного розв'язку в i -му вузлі, яка обчислюється за формулою

$$|r_i| = \left| \frac{u^n(x_i, y_i, z_i) - \frac{\Delta t}{\rho c_p} (L(K)u^n(x_i, y_i, z_i) + g^n(x_i, y_i, z_i)) - u^{n-1}(x_i, y_i, z_i)}{u^{n-1}(x_i, y_i, z_i)} \right| \ll 1.$$

На Рис. 4.13 наведено графік зміни норми відносної нев'язки наближеного розв'язку даної задачі нестационарної теплопровідності.

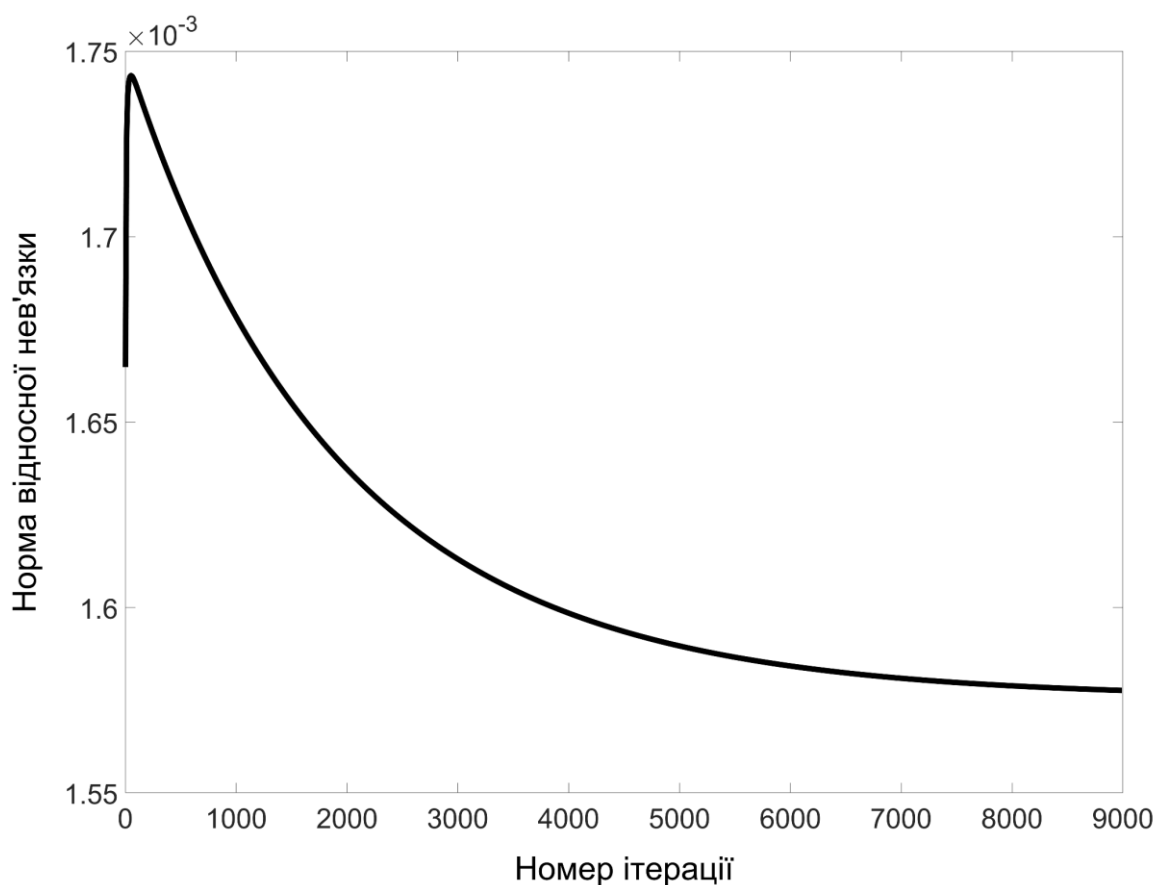


Рис. 4.13 Графік зміни норми відносної нев'язки

Точність наближеного розв'язку крайової задачі на заданому часовому інтервалі в гіршому випадку становить 1.74348×10^{-3} . Нижні значення границь відносної нев'язки лежать у діапазоні від 2.05119×10^{-14} до 1.25433×10^{-9} .

Загальний розрахунковий час моделювання задачі нестационарної теплопровідності безсітковим методом становить 2303 с, що співпадає з часом моделювання при використанні інших числових методів розв'язання крайових задач.

4.4 Моделювання теплового процесу в перфорованій графітовій пластині

Розглянемо перфоровану графітову пластину в формі прямокутного паралелепіпеда розміром $20 \times 20 \times 3$ мм з діаметром отворів $\varnothing = 4$ мм, яка зображена на Рис. 4.14.

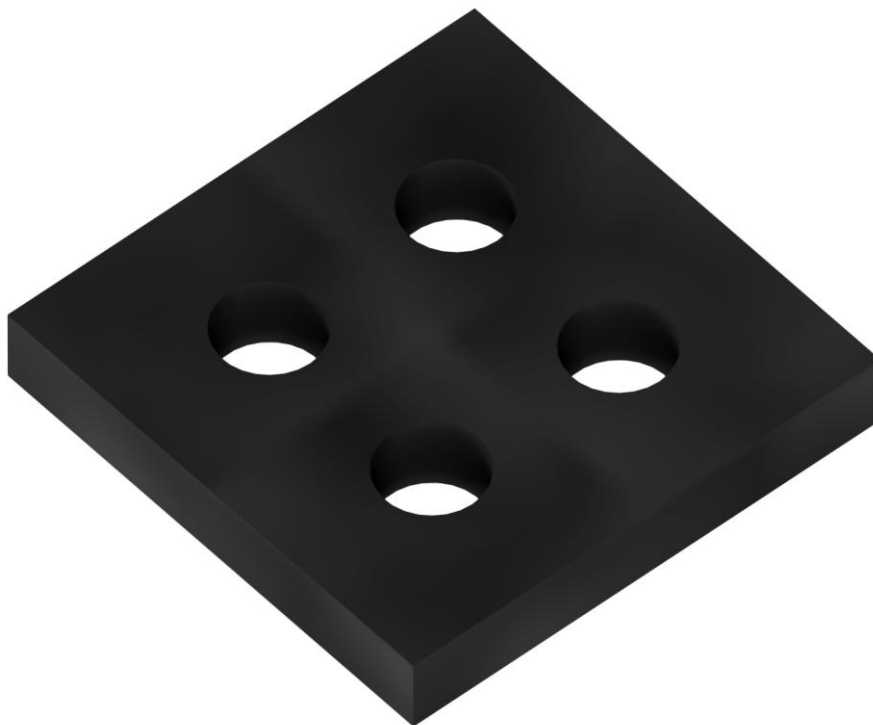


Рис. 4.14 Візуалізація геометричної області крайової задачі

Фізичні характеристики пластини: щільність $\rho = 1650$ кг/м³; теплопровідність вздовж напрямку [001] $k_{\parallel} = 151.2$ Вт/(м×К); теплопровідність у площині (001) $k_{\perp} = 98.9$ Вт/(м×К); питома теплоємність при постійному тиску $c_p = 720$ Дж/(кг×К). Оптична вісь спрямована вздовж координатної осі z .

Диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності для анізотропного твердого тіла в замкненій області має наступний вигляд

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(K \operatorname{grad}(u)),$$

де ρ – щільність; c_p – питома теплоємність при постійному тиску; $u = u(x, y, z, t)$ – температура; $K = [K_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ – симетричний, позитивно визначений тензор теплопровідності.

У початковий момент часу перфорована графітова пластина знаходиться при температурі $u_0 = 298.15$ К. На поверхні кожного з отворів пластини заданий постійний тепловий потік $q_0 = 1000$ Вт/м². На інших частинах поверхні пластини відбувається теплообмін із навколишнім середовищем. Граничні умови для даної задачі нестационарної теплопровідності можуть бути записані у такому вигляді:

$$\text{тепловий потік: } q = -q_0,$$

$$\text{теплообмін: } q = -h(u_\infty - u),$$

де $q = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ – тепловий потік в анізотропному випадку (2.9); $h \sim 15$ Вт/(м²×К) – коефіцієнт тепловіддачі; $u_\infty = 298.15$ К – температура навколишнього середовища.

Кількість інтерполяційних вузлів всередині області крайової задачі та на границі області у всіх розрахунках приймається рівними $N_d = 6225$ і $N_b = 3536$, відповідно. Часовий інтервал, на якому розв'язується задача нестационарної теплопровідності, становить 60 с з кроком 0.1 с.

Базисною функцією для апроксимації частинного розв'язку визначено анізотропну мультиквадратичну радіальну базисну функцію $\varphi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$ з параметром форми $\varepsilon = 1$.

На Рис. 4.15 представлені результати числових розрахунків розподілу температурного поля на поверхні перфорованої графітової пластини в різні моменти часу.

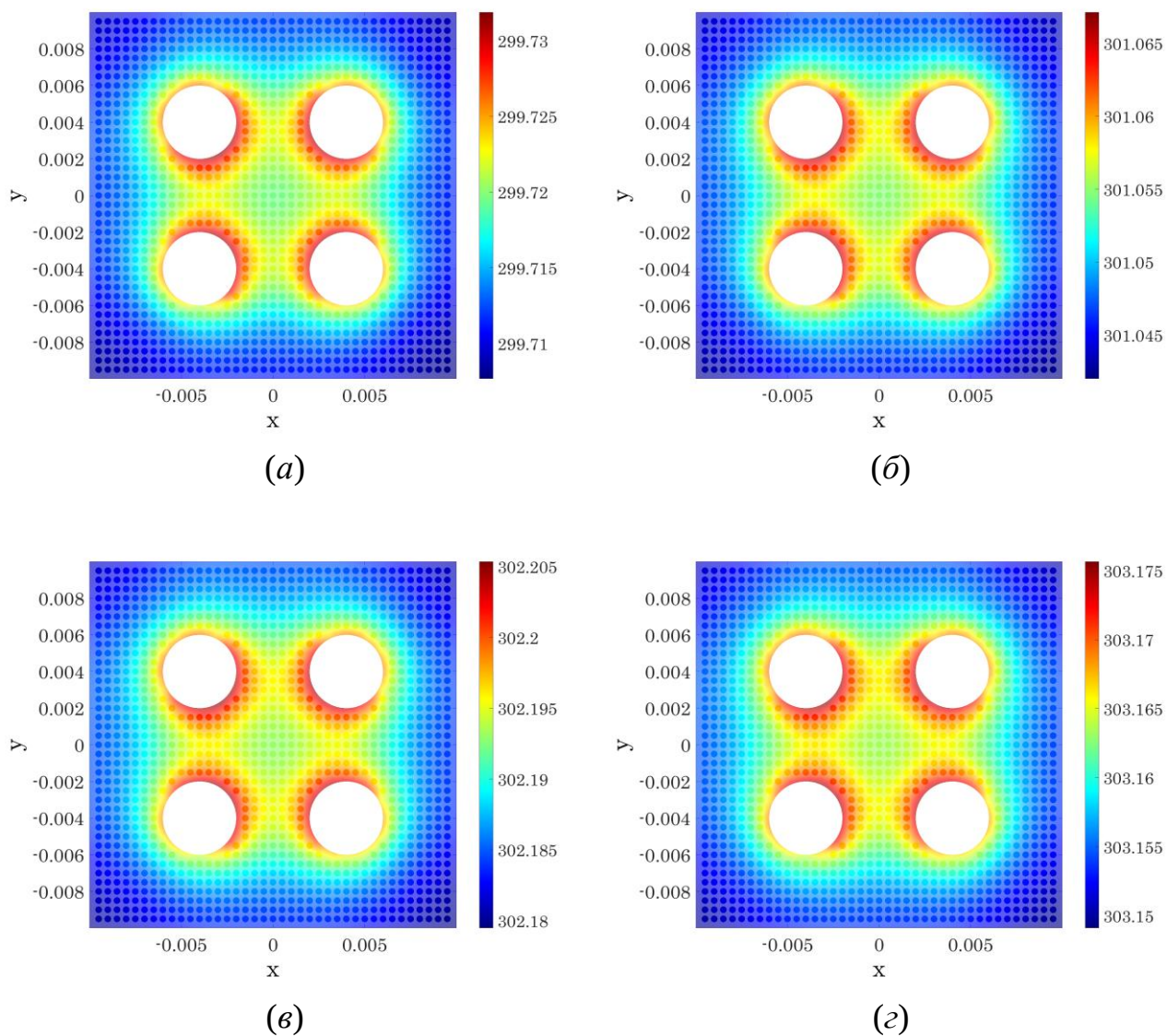


Рис. 4.15 Візуалізація розподілу температурного поля на поверхні перфорованої графітової пластини в моменти часу $t = 15$ c (а), $t = 30$ c (б), $t = 45$ c (в), $t = 60$ c (г)

На Рис. 4.16 представлені результати числових розрахунків розподілу температурного поля у всьому об'ємі перфорованої графітової пластини в різні моменти часу.

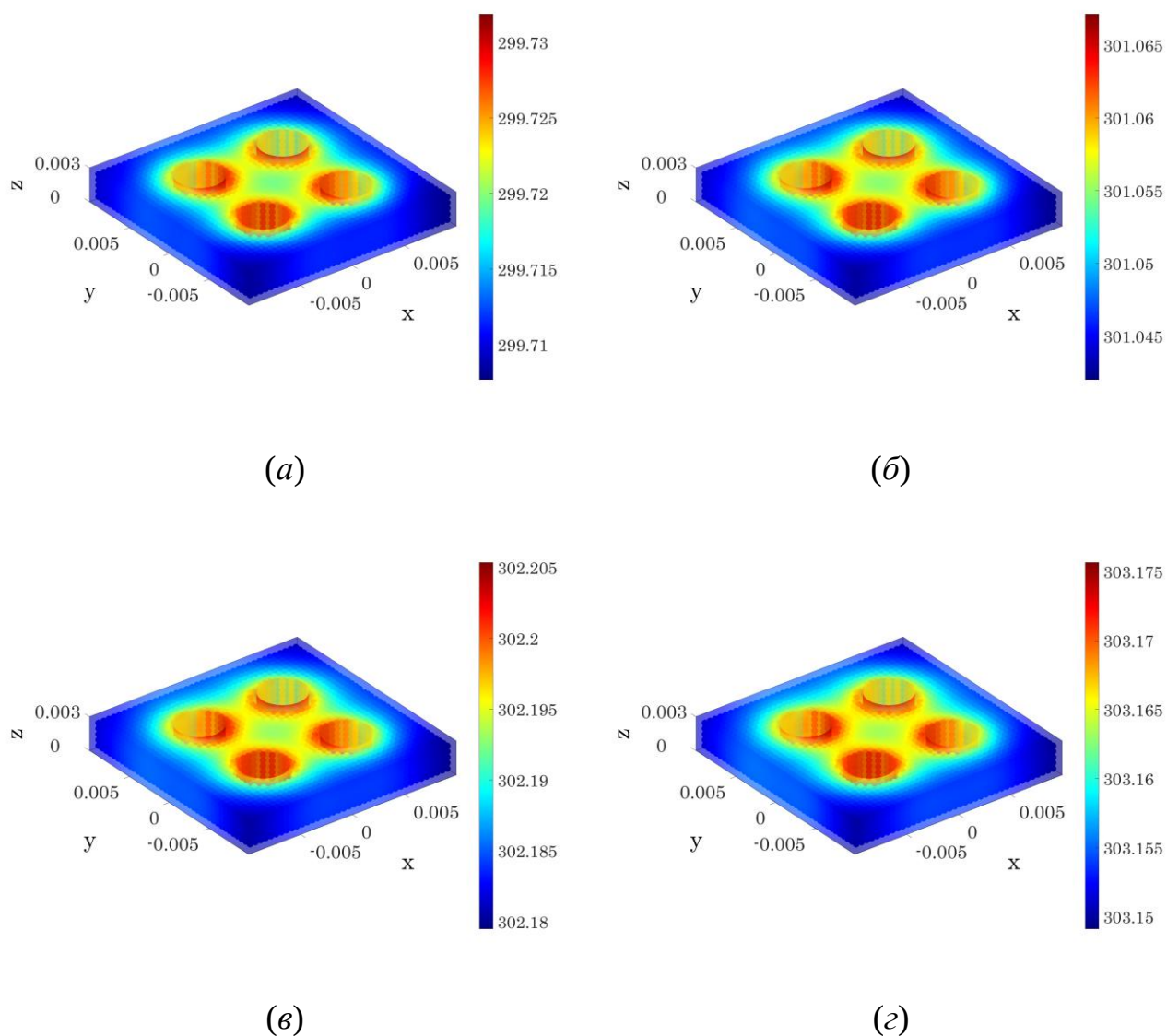


Рис. 4.16 Візуалізація розподілу температурного поля у всьому об'ємі перфорованої графітової пластини в моменти часу $t = 15$ c (а), $t = 30$ c (б), $t = 45$ c (в), $t = 60$ c (г)

Для оцінки точності отриманого розв'язку на n -му кроці обчислимо норму відносної нев'язки, яка розраховується за формулою (4.5). На Рис. 4.17

наведено графік зміни норми відносної нев'язки наближеного розв'язку даної задачі нестационарної теплопровідності.

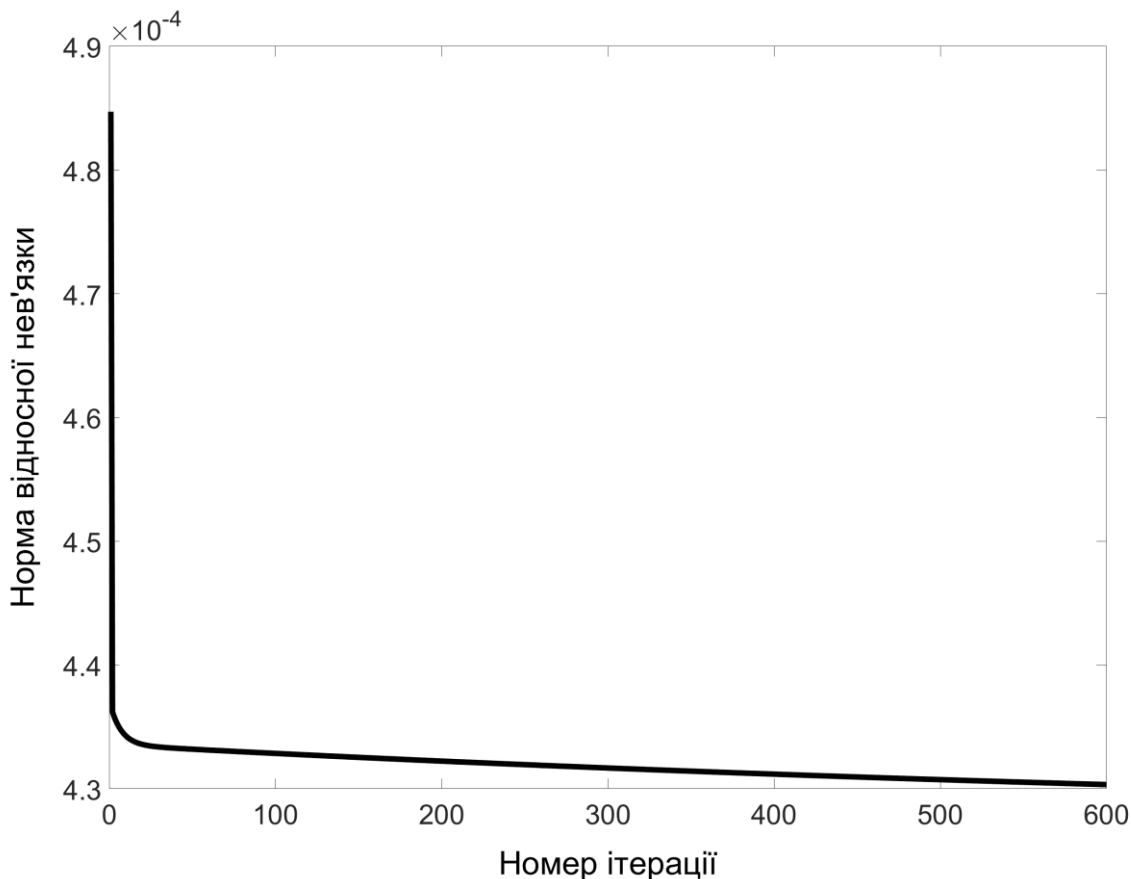


Рис. 4.17 Графік зміни норми відносної нев'язки

Точність наближеного розв'язку крайової задачі на заданому часовому інтервалі в гіршому випадку становить 4.84714×10^{-4} . Нижні значення границь відносної нев'язки лежать у діапазоні від 9.82228×10^{-12} до 2.67739×10^{-8} .

Загальний розрахунковий час моделювання задачі нестационарної теплопровідності безсітковим методом становить 1315 с.

Всі числові розрахунки виконувалися на персональному комп'ютері, оснащеному центральним процесором Intel® Core™ i9-9900K CPU 3.60 GHz та об'ємом оперативної пам'яті 32 GB за допомогою розробленого програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D».

4.5 Опис програмного комплексу

4.5.1 Функціональне призначення

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» призначений для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за безсітковим методом [171-173].

Розв'язання задачі нестационарної теплопровідності в програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі.

В програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» в якості базисних функцій для апроксимації диференціального рівняння теплопровідності передбачено використання наступних анізотропних радіальних базисних функцій:

- Гаусова;
- мультиквадратична;
- зворотна мультиквадратична.

Крім вищенаведених анізотропних радіальних базисних функцій, в програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» реалізована можливість використання сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, які породжуються оператором типу Гельмгольца, для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Створений програмний комплекс дозволяє проводити моделювання нестационарних теплових процесів як в ізотропних так і в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми.

Для опису граничних умов задачі нестационарної теплопровідності в програмному комплексі передбачено налаштування трьох типів граничних умов, а саме Діріхле (першого роду), Неймана (другого роду) та Робена (третього роду), а також їх комбінації. Крім задання граничних умов, у програмному комплексі реалізовано можливість налаштування початкових умов, а також внутрішнього джерела тепла.

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» дозволяє налаштовувати такі фізичні параметри твердого тіла, як коефіцієнти тензора теплопровідності, щільність та питома теплоємність при постійному тиску.

Для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності, в програмному комплексі передбачено налаштування низки параметрів, таких як відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал крайової задачі, крок за часом та інші.

В програмному комплексі реалізовано можливість налаштування параметра форми анізотропних радіальних базисних функцій, а також низки параметрів, необхідних для побудови атомарної радіальної базисної функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$.

Наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в «AnisotropicHeatTransfer3D» візуалізується у вигляді комбінації тривимірної поверхні на границі області та хмари точок всередині області, які задають розподіл температурного поля в твердому тілі в заданий момент часу.

В процесі числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності програмний комплекс формує файл журналу зі службовою інформацією, який, в подальшому, може бути збережений у вигляді текстового файлу.

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» дозволяє зберігати отриманий наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в

заданий момент часу у вигляді растрових та векторного зображень, а також експортувати наближений розв'язок в бінарний файл.

4.5.2 Опис архітектури

До складу програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» входять такі модулі:

- інтерфейсний модуль;
- модуль завантаження вхідних даних;
- модуль налаштування граничних умов;
- модуль налаштування початкових умов;
- модуль налаштування внутрішнього джерела тепла;
- модуль налаштування фізичних параметрів;
- модуль налаштування параметрів розв'язання;
- модуль побудови анізотропних радіальних базисних функцій;
- модуль побудови атомарної радіальної базисної функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$;
- розрахунковий модуль;
- модуль візуалізації геометричної області крайової задачі;
- модуль візуалізації результатів моделювання;
- модуль візуалізації атомарної радіальної базисної функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$;
- модуль аналізу результатів моделювання;
- модуль збереження результатів моделювання.

Інтерфейсний модуль реалізує інтерфейс програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» у вигляді графічного інтерфейсу користувача, який дозволяє здійснювати взаємодію між користувачем та програмним комплексом на рівні візуалізованої інформації.

Модуль завантаження вхідних даних здійснює зчитування тривимірної моделі об'єкта із файлу з розширенням .stl, в якому міститься інформація про геометрію поверхні твердого тіла.

Модуль налаштування граничних умов здійснює задання трьох типів граничних умов задачі нестационарної теплопровідності, а саме першого роду (Діріхле), другого роду (Неймана) та третього роду (Робена), а також їх комбінацій, які можуть бути задані у вигляді константного числового значення або у вигляді функції, що залежить від координат та часу.

Модуль налаштування початкових умов здійснює задання початкових умов задачі нестационарної теплопровідності у вигляді константного числового значення або у вигляді функції, що залежить від координат.

Модуль налаштування внутрішнього джерела тепла здійснює задання внутрішнього джерела тепла задачі нестационарної теплопровідності у вигляді константного числового значення або у вигляді функції, що залежить від координат та часу.

Модуль налаштування фізичних параметрів здійснює задання фізичних параметрів твердого тіла, а саме коефіцієнтів тензора теплопровідності, щільності та питомої теплоємності при постійному тиску.

Модуль налаштування параметрів розв'язання здійснює налаштування низки параметрів, необхідних для моделювання задачі нестационарної теплопровідності, а саме відстань між інтерполяційними вузлами всередині області, відстань до еквідистантної поверхні, параметр, який відповідає за розміщення інтерполяційних вузлів за межами геометричної області, часовий інтервал нестационарної крайової задачі, крок за часом, метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів.

Модуль побудови анізотропних радіальних базисних функцій здійснює побудову обраного користувачем типу анізотропної РБФ відповідно до заданого параметру форми базисної функції.

Модуль побудови атомарної радіальної базисної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ здійснює побудову атомарної функції відповідно до заданих параметрів її налаштування.

Розрахунковий модуль здійснює числове розв'язання тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в твердому тілі за безсітковим методом.

Модуль візуалізації геометричної області крайової задачі здійснює візуалізацію тривимірної моделі об'єкта твердого тіла у вигляді тривимірної поверхні, а також відображає інформацію про кількість інтерполяційних вузлів, які наразі використовуються.

Модуль візуалізації результатів моделювання здійснює візуалізацію наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності у вигляді комбінації тривимірної поверхні на границі області та хмари точок всередині області, які задають розподіл температурного поля в твердому тілі в заданий момент часу. Даний модуль дозволяє керувати процесом візуалізації результатів моделювання за допомогою спеціального блоку управління, який складається з кнопок «Previous iteration», «Start», «Pause», «Stop», «Next iteration».

Модуль візуалізації атомарної радіальної базисної функції здійснює візуалізацію атомарної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді тривимірних поверхонь при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$.

Модуль аналізу результатів моделювання здійснює розрахунок відносної нев'язки наближеного розв'язку на кожному часовому кроці та будує відповідний графік, а також формує файл журналу зі службовою інформацією, який, в подальшому, може бути збережений у вигляді текстового файлу.

Модуль збереження результатів моделювання здійснює збереження отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу у вигляді растрових та векторного зображень, а також експортує наближений розв'язок в бінарний файл.

На Рис. 4.18 представлено блок-схему взаємодії модулів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D».

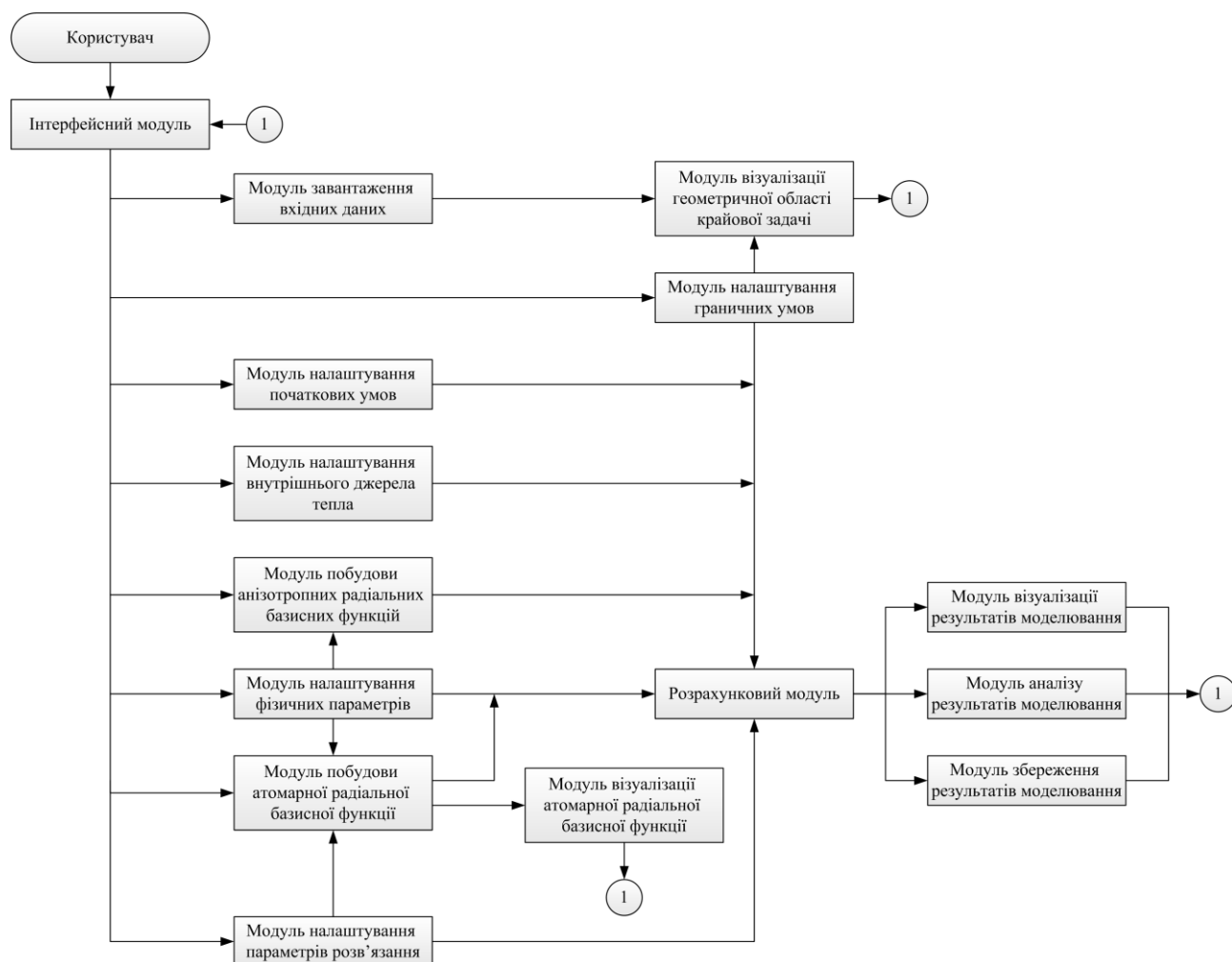


Рис. 4.18 Блок-схема взаємодії модулів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D»

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» написаний мовою програмування MATLAB.

На Рис. 4.19 представлено загальну блок-схему алгоритму роботи програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D».

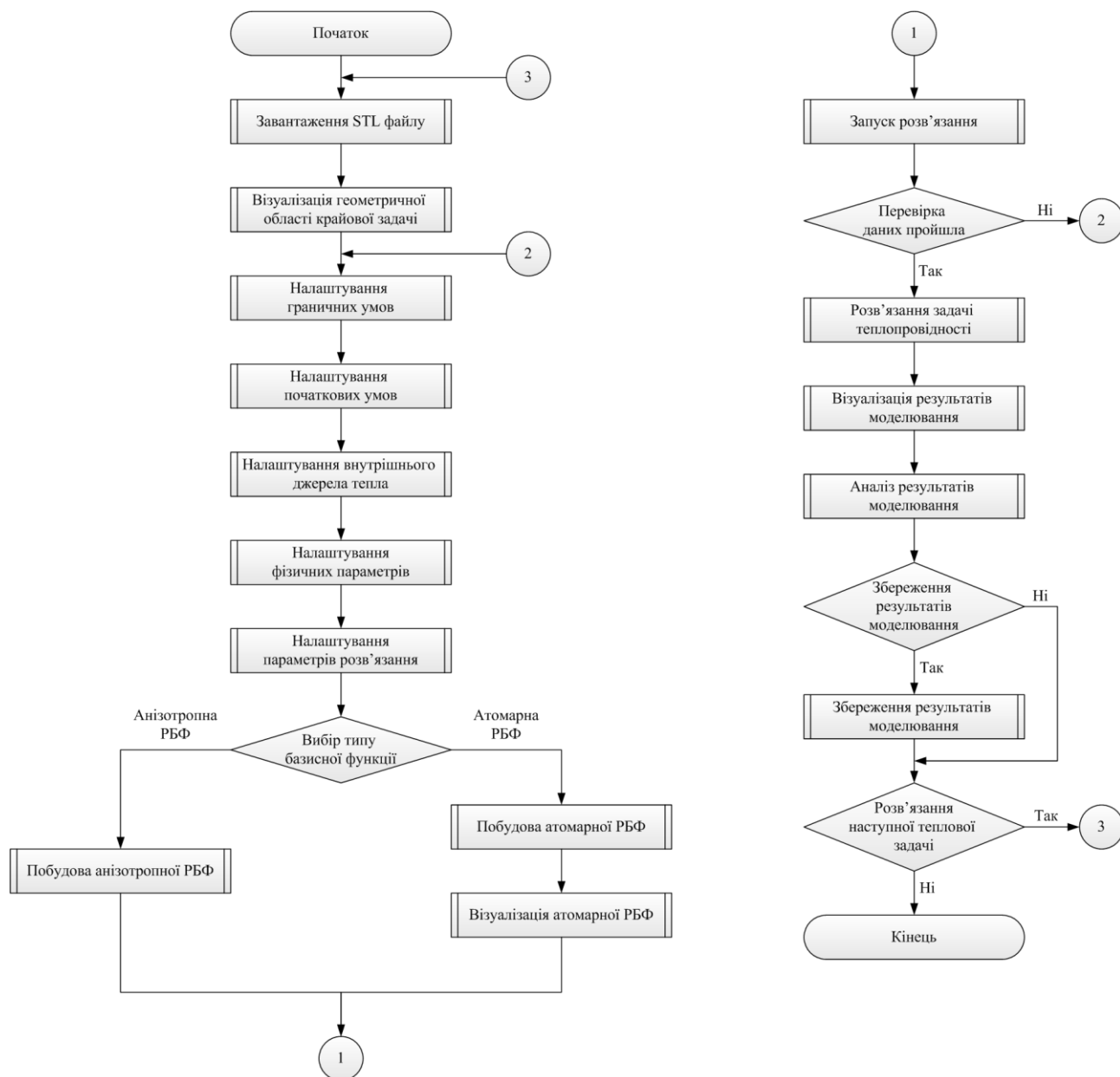


Рис. 4.19 Загальна блок-схема алгоритму роботи програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D»

Вхідними даними для програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» є файл з розширенням .stl, в якому міститься інформація про геометрію поверхні твердого тіла.

Вихідними даними для програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» є:

- графічна та текстова інформація, яка виводиться на екран;

- растрові та векторне зображення в форматах .jpg, .png та .svg, які містять графічну інформацію про наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу;
- текстовий файл журналу з розширенням .txt, в якому накопичується службова інформація, яка виникає в процесі розв'язання задачі нестационарної теплопровідності;
- бінарний файл з розширенням .mat, в якому містяться координати вузлів з результатами наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності та значення відносної нев'язки на кожному часовому кроці.

4.5.3 Опис інтерфейсу

На Рис. 4.20 зображено головне вікно програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D».

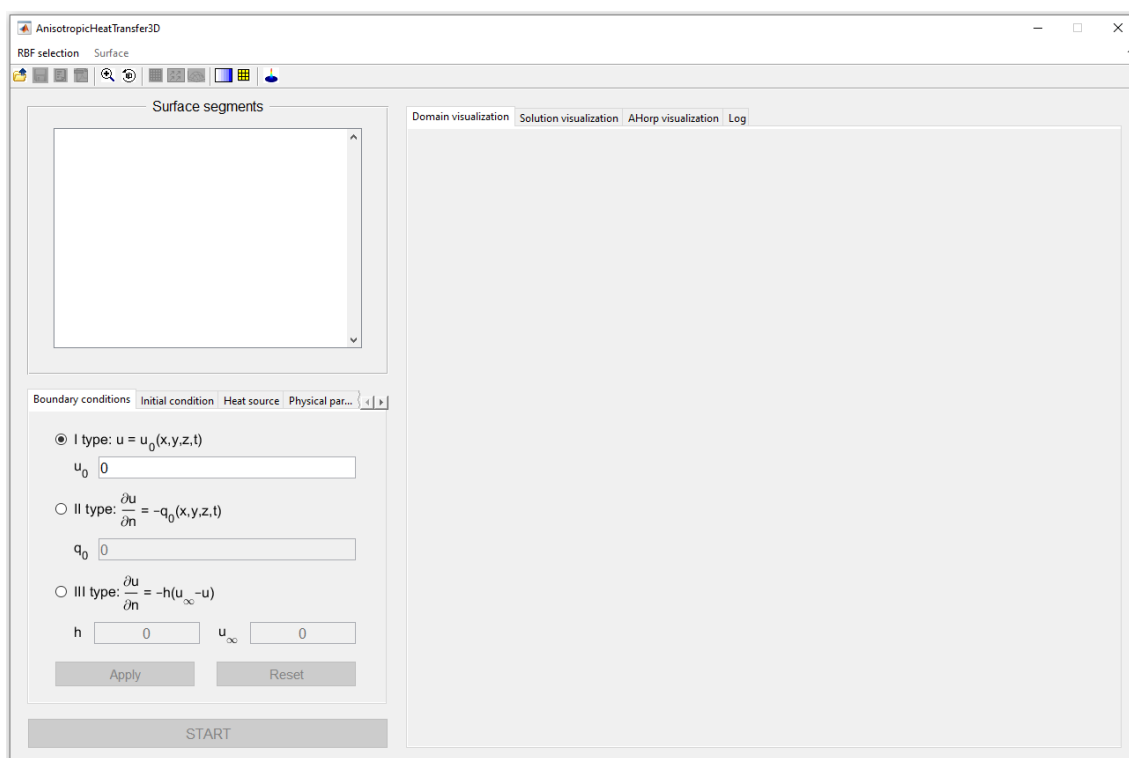


Рис. 4.20 Головне вікно програмного комплексу
«AnisotropicHeatTransfer3D»

В верхній частині головного вікна програмного комплексу розміщено меню (Рис. 4.21).

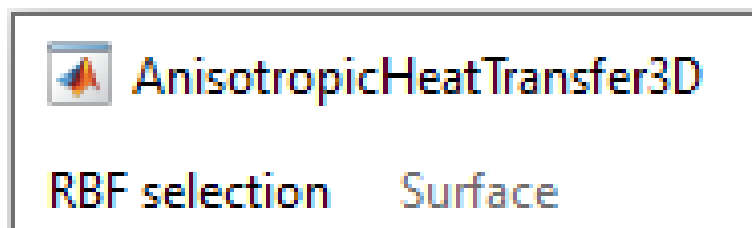


Рис. 4.21 Меню програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D»

Меню програмного комплексу складається із двох вкладок:

- «RBF selection» – містить поля «Gaussian function», «Multiquadric», «Inverse multiquadric» та «AHorp», які відповідають за вибір типу базисної функції, а саме Гаусова, мультіквадратична, зворотна мультіквадратична анізотропні радіальні базисні функції та атомарна функція $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$;
- «Surface» – містить поля «Select all» та «Unselect all», які відповідають за вибір та зняття вибору всіх ділянок поверхні геометричної області крайової задачі, відповідно.

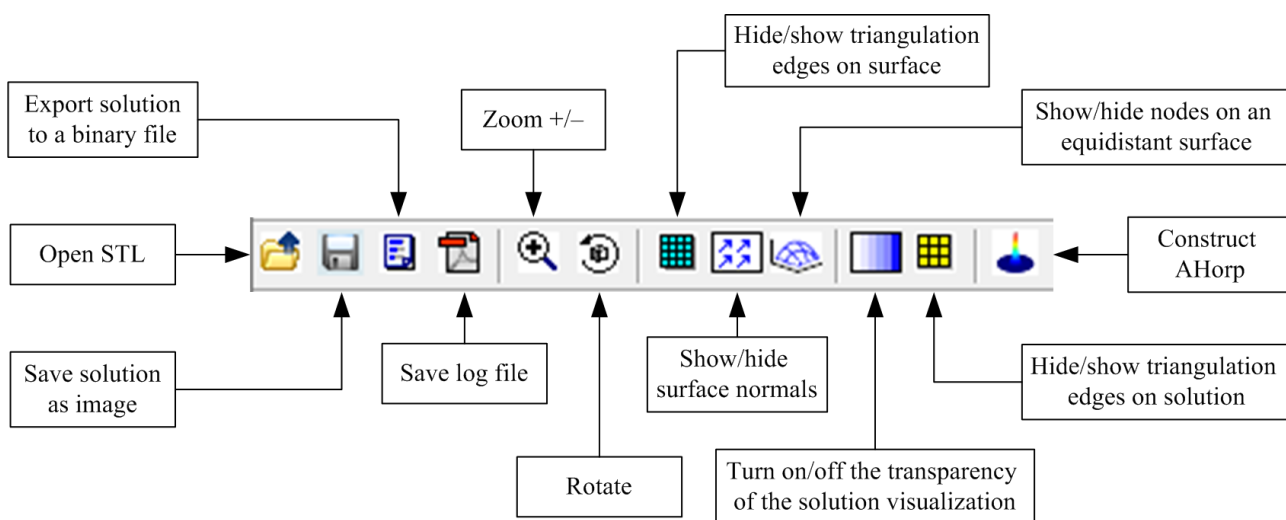


Рис. 4.22 Панель інструментів

Нижче, під меню, розташована панель інструментів (Рис. 4.22). Панель інструментів складається з наступних кнопок:

- «Open STL» – здійснює зчитування тривимірної моделі об'єкта із файлу з розширенням .stl, в якому міститься інформація про геометрію поверхні твердого тіла;
- «Save solution as image» – здійснює збереження отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу в один із доступних графічних форматів, а саме .jpg, .png або .svg;
- «Export solution to a binary file» – здійснює збереження отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності у вигляді бінарного файлу з розширенням .mat, в якому містяться координати вузлів з результатами наближеного розв'язку крайової задачі та значення відносної нев'язки на кожному часовому кроці;
- «Save log file» – здійснює збереження накопичуваної службової інформації, яка виникає в процесі розв'язання задачі нестационарної теплопровідності у вигляді текстового файлу журналу з розширенням .txt;
- «Zoom +/-» – активує та деактивує режим масштабування 3D моделі об'єкта твердого тіла;
- «Rotate» – активує та деактивує режим обертання 3D моделі об'єкта твердого тіла в тривимірному просторі;
- «Hide/show triangulation edges on surface» – приховує та відображає ребра тріангуляції на поверхні 3D моделі об'єкта твердого тіла при його візуалізації;
- «Show/hide surface normals» – відображає та приховує нормалі до вузлів на поверхні 3D моделі об'єкта твердого тіла при його візуалізації;
- «Show/hide nodes on an equidistant surface» – відображає та приховує вузли на еквідистантній поверхні;
- «Turn on/off the transparency of the solution visualization» – активує та деактивує прозорість тривимірної поверхні з розподілом температурного поля

на границі твердого тіла в заданий момент часу при візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності;

- «Hide/show triangulation edges on solution» – приховує та відображає ребра тріангуляції на тривимірній поверхні з розподілом температурного поля на границі твердого тіла в заданий момент часу при візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності;

- «Construct $ANor_p$ » – здійснює побудову сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$.

Під панеллю інструментів розташована робоча область програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D». Робоча область програмного комплексу складається з двох частин, а саме з області з розміщеними на ній елементами управління (ліворуч) та графічної області (праворуч) (див. Рис. 4.20).

У верхній лівій частині робочої області програмного комплексу розташований список «Surface segments», в якому відображаються номери ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, що утворюють геометричну область крайової задачі. На Рис. 4.23 представлена візуалізація списку «Surface segments» після завантаження тривимірної моделі об'єкта із файлу з розширенням .stl до програмного комплексу.

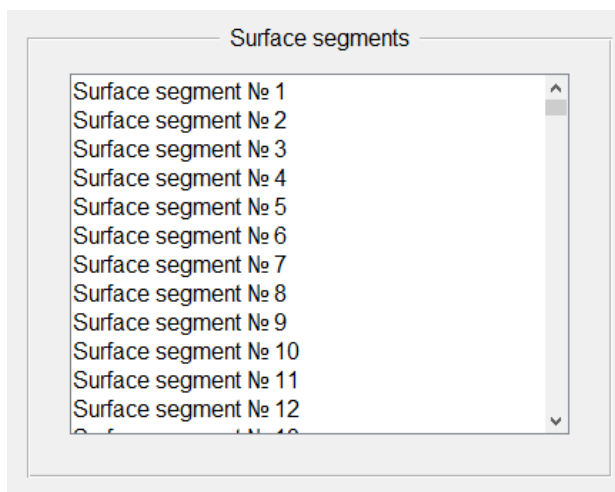


Рис. 4.23 Список «Surface segments»

Нижче, під списком «Surface segments», розташовано 8 вкладок з розміщеними на них основними елементами управління:

- «Boundary conditions»;
- «Initial condition»;
- «Heat source»;
- «Physical parameters»;
- «Solution parameters»;
- «RBF parameters»;
- «Visualization parameters»;
- «Surface parameters».

Нижче наведено опис елементів управління кожної з вкладок.

Вкладка «Boundary conditions» призначена для налаштування граничних умов задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.24 представлений інтерфейс вкладки «Boundary conditions».

The screenshot shows a software window with four tabs: "Boundary conditions", "Initial condition", "Heat source", and "Physical par...". The "Boundary conditions" tab is active. It contains three radio button options for boundary conditions:

- ☒ I type: $u = u_0(x,y,z,t)$
Below this is an input field for u_0 with the value 0.
- ☐ II type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -q_0(x,y,z,t)$
Below this is an input field for q_0 with the value 0.
- ☐ III type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u_\infty - u)$
Below this are two input fields: one for h with the value 0, and one for u_∞ with the value 0.

At the bottom of the tab are two buttons: "Apply" and "Reset".

Рис. 4.24 Інтерфейс вкладки «Boundary conditions»

Для опису граничних умов задачі нестационарної теплопровідності в програмному комплексі передбачено налаштування трьох типів граничних умов, а саме Діріхле (першого роду), Неймана (другого роду) та Робена (третього роду), а також їх комбінації. Вибір типу граничних умов здійснюється за допомогою трьох радіокнопок, а саме «I type: $u = u_0(x, y, z, t)$ », «II type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -q_0(x, y, z, t)$ » та «III type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u_\infty - u)$ », кожна з яких активує відповідні поля введення. Поле введення « u_0 » призначене для налаштування граничних умов першого роду. Поле введення « q_0 » призначене для налаштування граничних умов другого роду. Поля введення « h » та « u_∞ » призначені для налаштування граничних умов третього роду, а саме для налаштування коефіцієнта тепловіддачі та температури навколишнього середовища відповідно. Кнопка «Apply» здійснює застосування граничних умов. Кнопка «Reset» здійснює скидання граничних умов.

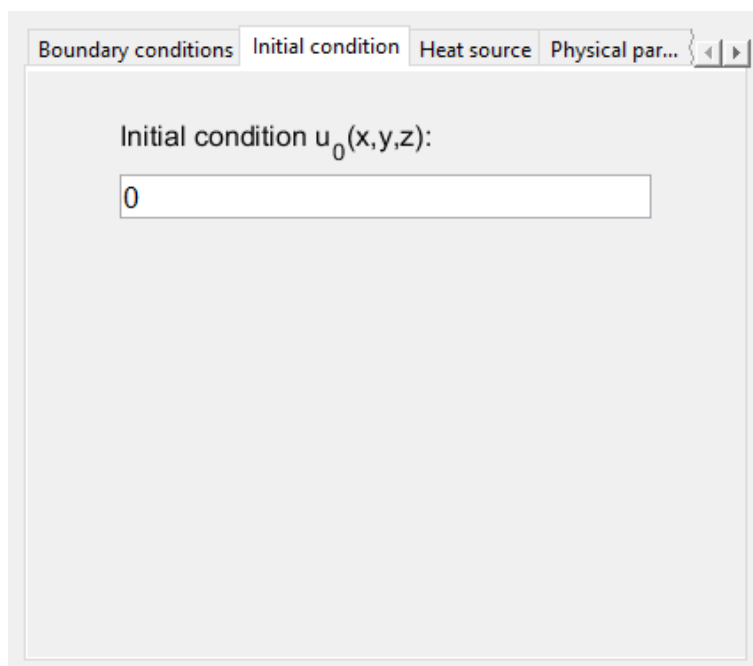


Рис. 4.25 Інтерфейс вкладки «Initial condition»

Вкладка «Initial condition» призначена для налаштування початкових умов задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.25 представлений інтерфейс вкладки «Initial condition». В даній вкладці розташоване єдине поле введення «Initial condition $u_0(x,y,z)$ », призначене для налаштування початкових умов.

Вкладка «Heat source» призначена для налаштування внутрішнього джерела тепла задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.26 представлений інтерфейс вкладки «Heat source».

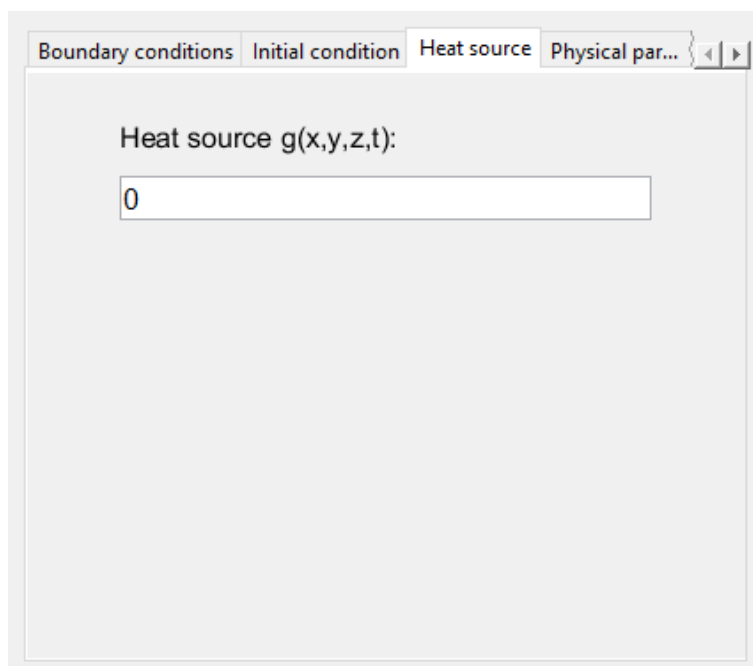


Рис. 4.26 Інтерфейс вкладки «Heat source»

В даній вкладці розташоване єдине поле введення «Heat source $g(x,y,z,t)$ », призначене для налаштування внутрішнього джерела тепла.

Вкладка «Physical parameters» призначена для налаштування фізичних параметрів твердого тіла. На Рис. 4.27 представлений інтерфейс вкладки «Physical parameters». Дев'ять полів введення «Thermal conductivity coefficient K » призначені для налаштування коефіцієнтів тензора теплопровідності. Поле введення «Density ρ » призначене для налаштування щільності твердого тіла. Поле введення «Specific heat c_p » призначене для налаштування питомої

теплоємності при постійному тиску твердого тіла. Кнопка «Apply» здійснює застосування фізичних параметрів твердого тіла.

Heat source Physical parameters Solution parameters RBF para... {<|>}

Thermal conductivity coefficient K:

1	0	0
0	1	0
0	0	1

Density ρ 1

Specific heat c_p 1

Apply

Рис. 4.27 Інтерфейс вкладки «Physical parameters»

Вкладка «Solution parameters» призначена для налаштування параметрів розв’язання задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.28 представлений інтерфейс вкладки «Solution parameters».

Поле введення «Distance between nodes» призначене для налаштування відстані між інтерполяційними вузлами всередині області крайової задачі. Поле введення «Distance to equidistant surface» призначене для налаштування відстані до еквідистантної поверхні. Поле введення «Going outside of the domain» призначене для налаштування розміщення інтерполяційних вузлів за межами геометричної області крайової задачі. Поле введення «Time step» призначене для налаштування кроку за часом. Поле введення «Time interval» призначене для налаштування часового інтервалу нестационарної крайової задачі. В текстовому полі «Parameter δ^2 » відображається значення числового параметру, який входить до диференціального оператора типу Гельмгольца. Радіокнопки

«Matrix decomposition», «Moore-Penrose pseudoinverse» та «Least-squares method» відповідають за вибір методу, який буде застосовуватися при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів α_k^n та β_i^n . Радіокнопка «Matrix decomposition» активує розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням LDL розкладу, QR розкладу та LU розкладу. Радіокнопка «Moore-Penrose pseudoinverse» активує розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням псевдообернення Мура-Пенроуза. Радіокнопка «Least-squares method» активує розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням методу найменших квадратів. Кнопка «Apply» здійснює застосування параметрів розв'язання задачі нестационарної теплопровідності.

Parameter	Value
Distance between nodes	0.0015
Distance to equidistant surface	0.01
Going outside of the domain	2
Time step	0.01
Time interval	10
Parameter δ^2	100

☒ Matrix decomposition
☐ Moore-Penrose pseudoinverse
☐ Least-squares method

Apply

Рис. 4.28 Інтерфейс вкладки «Solution parameters»

Вкладка «RBF parameters» призначена для налаштування параметрів анізотропних радіальних базисних функцій та атомарної радіальної базисної функції $ANor_p(x_1, x_2, x_3)$. На Рис. 4.29 представлений інтерфейс вкладки «RBF parameters».

The image shows a software window with four tabs: 'Solution parameters', 'RBF parameters', 'Visualization parameters', and 'S...'. The 'RBF parameters' tab is active. It contains two main sections: 'RBF' and 'ANorp'. The 'RBF' section has a 'Shape parameter' input field with the value '1' and an 'Apply' button below it. The 'ANorp' section has five input fields: 'Distance between nodes' (0.05), 'Support radius' (1), 'Shape parameter' (1.5), 'Size of Fourier matrix' (20), and 'Number of iterations' (100).

Рис. 4.29 Інтерфейс вкладки «RBF parameters»

Елементи управління, що знаходяться у вкладці «RBF parameters», згруповані в два окремі блоки, а саме елементи управління для налаштування параметрів анізотропних РБФ (блок «RBF»), та елементи управління для налаштування параметрів атомарної функції $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$ (блок «ANorp»). Розглянемо елементи управління кожного з цих блоків.

Блок «RBF». Поле введення «Shape parameter» призначене для налаштування параметра форми анізотропних радіальних базисних функцій. Кнопка «Apply» здійснює застосування встановленого значення параметра форми анізотропних радіальних базисних функцій.

Блок «ANorp». Поле введення «Distance between nodes» призначене для налаштування відстані між вузлами, які використовуються для побудови атомарної радіальної базисної функції $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$. Поле введення «Support radius» призначене для налаштування радіусу носія атомарної функції $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$. Поле введення «Shape parameter» призначене для налаштування параметра форми атомарної радіальної базисної функції. Поле введення «Size of Fourier matrix» призначене для налаштування обмеження

кількості ітерацій для кожного коефіцієнта p , q , r в трикратному ряді Фур'є (3.9). Поле введення «Number of iterations» призначене для налаштування обмеження кількості ітерацій у нескінченному добутку (3.8).

Вкладка «Visualization parameters» призначена для налаштування параметрів візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.30 представлений інтерфейс вкладки «Visualization parameters».

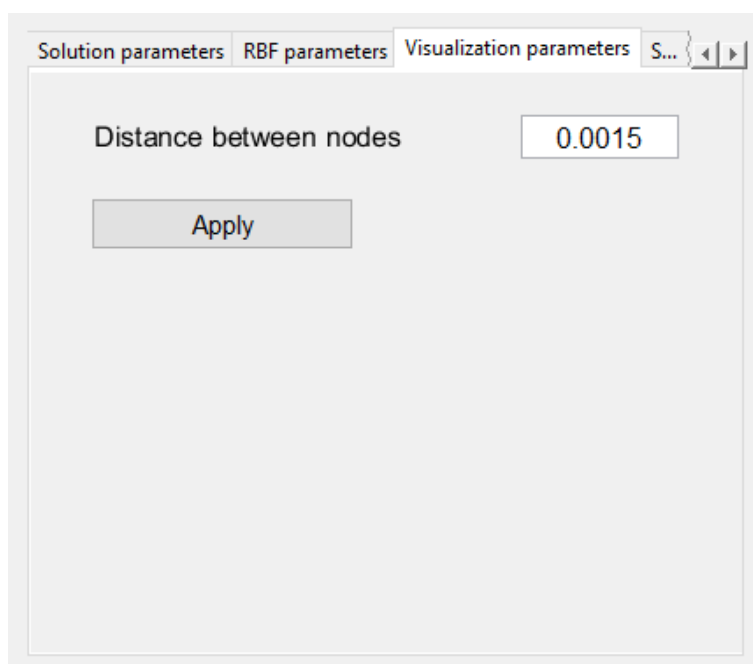


Рис. 4.30 Інтерфейс вкладки «Visualization parameters»

Поле введення «Distance between nodes» призначене для налаштування відстані між вузлами всередині області, які використовуються для візуалізації наближеного розв'язку крайової задачі. Кнопка «Apply» здійснює застосування встановленого значення відстані між вузлами всередині області.

Вкладка «Surface parameters» призначена для налаштування параметрів вибору окремих ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, що утворюють геометричну область крайової задачі. На Рис. 4.31 представлений інтерфейс вкладки «Surface parameters».

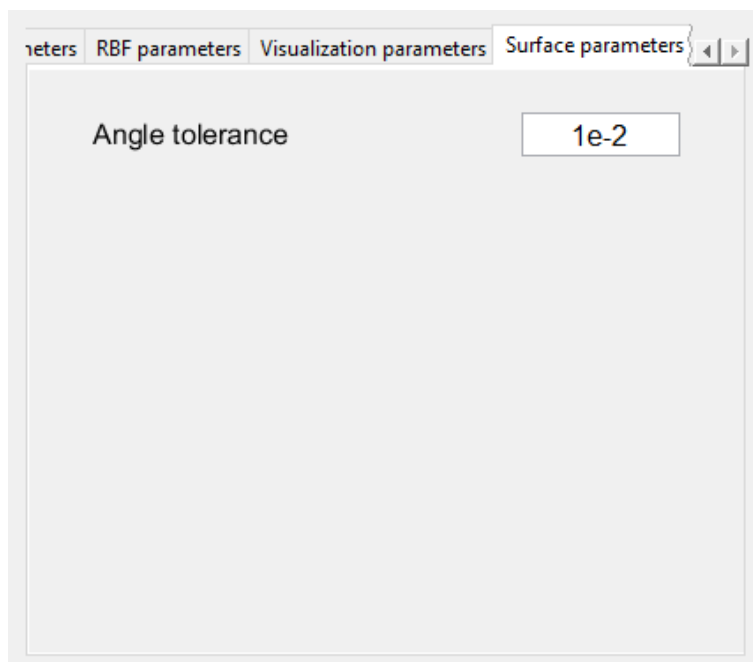


Рис. 4.31 Інтерфейс вкладки «Surface parameters»

Поле введення «Angle tolerance» призначене для налаштування допуску кута між сусідніми ділянками поверхні тривимірної моделі об'єкта.

У нижній лівій частині робочої області програмного комплексу розташована кнопка «START», яка запускає процес числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності (див. Рис. 4.20).

Графічна область програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» складається з наступних вкладок:

- «Domain visualization»;
- «Solution visualization»;
- «AnOrp visualization»;
- «Log».

Нижче описаний інтерфейс кожної з вкладок.

Вкладка «Domain visualization» призначена для візуалізації геометричної області крайової задачі в тривимірному просторі у вигляді тривимірної поверхні. На Рис. 4.32 представлено інтерфейс вкладки «Domain visualization»

після завантаження тривимірної моделі об'єкта із файлу з розширенням .stl до програмного комплексу.

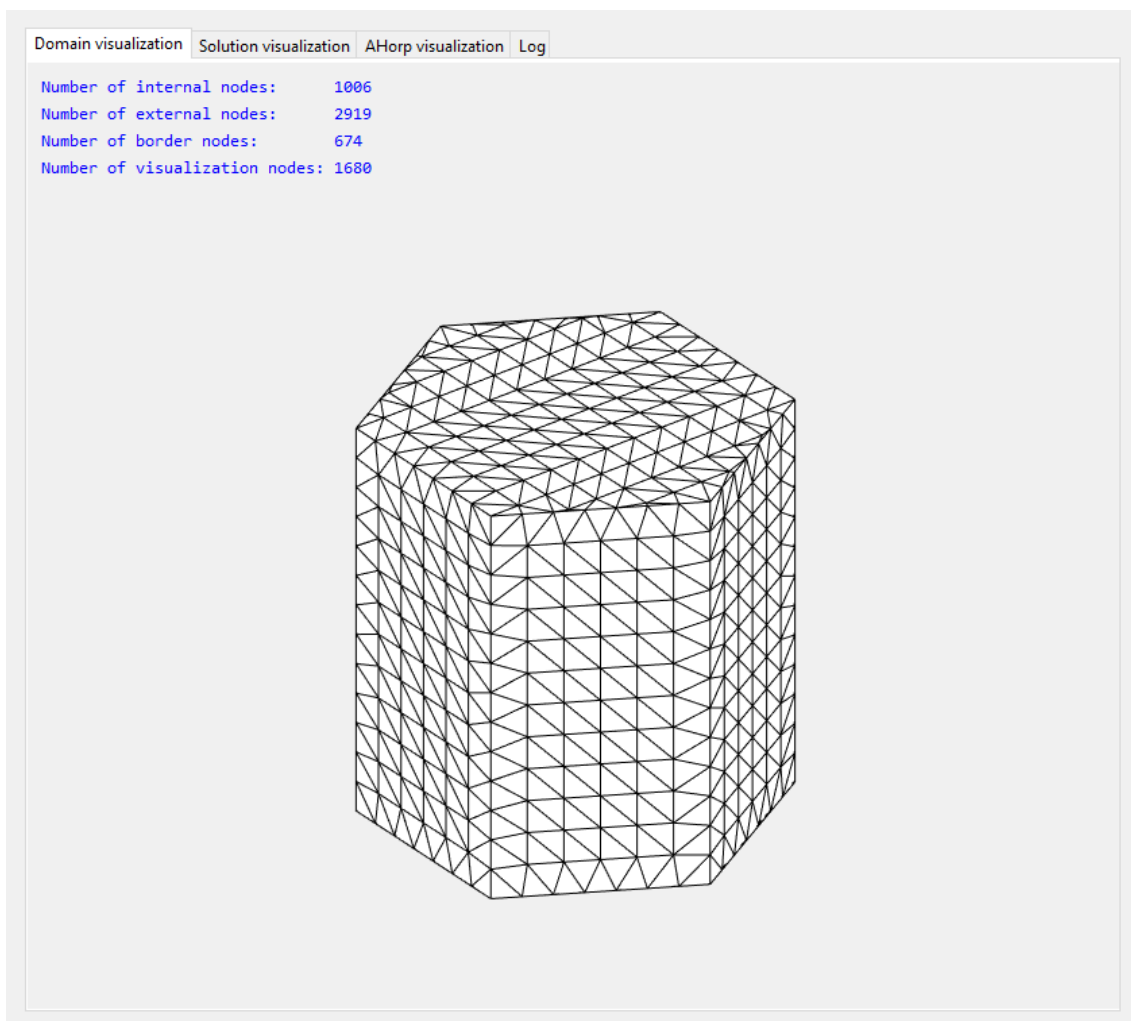


Рис. 4.32 Інтерфейс вкладки «Domain visualization»

У верхній лівій частині вкладки «Domain visualization» відображається інформація про кількість інтерполяційних вузлів, які наразі використовуються, а саме:

- кількість інтерполяційних вузлів всередині області крайової задачі;
- кількість інтерполяційних вузлів за межами області крайової задачі;
- кількість інтерполяційних вузлів на границі області крайової задачі;

- загальна кількість інтерполяційних вузлів, які використовуються для візуалізації наближеного розв'язку.

Вкладка «Solution visualization» призначена для візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.33 представлено інтерфейс вкладки «Solution visualization» після завершення процесу числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності.

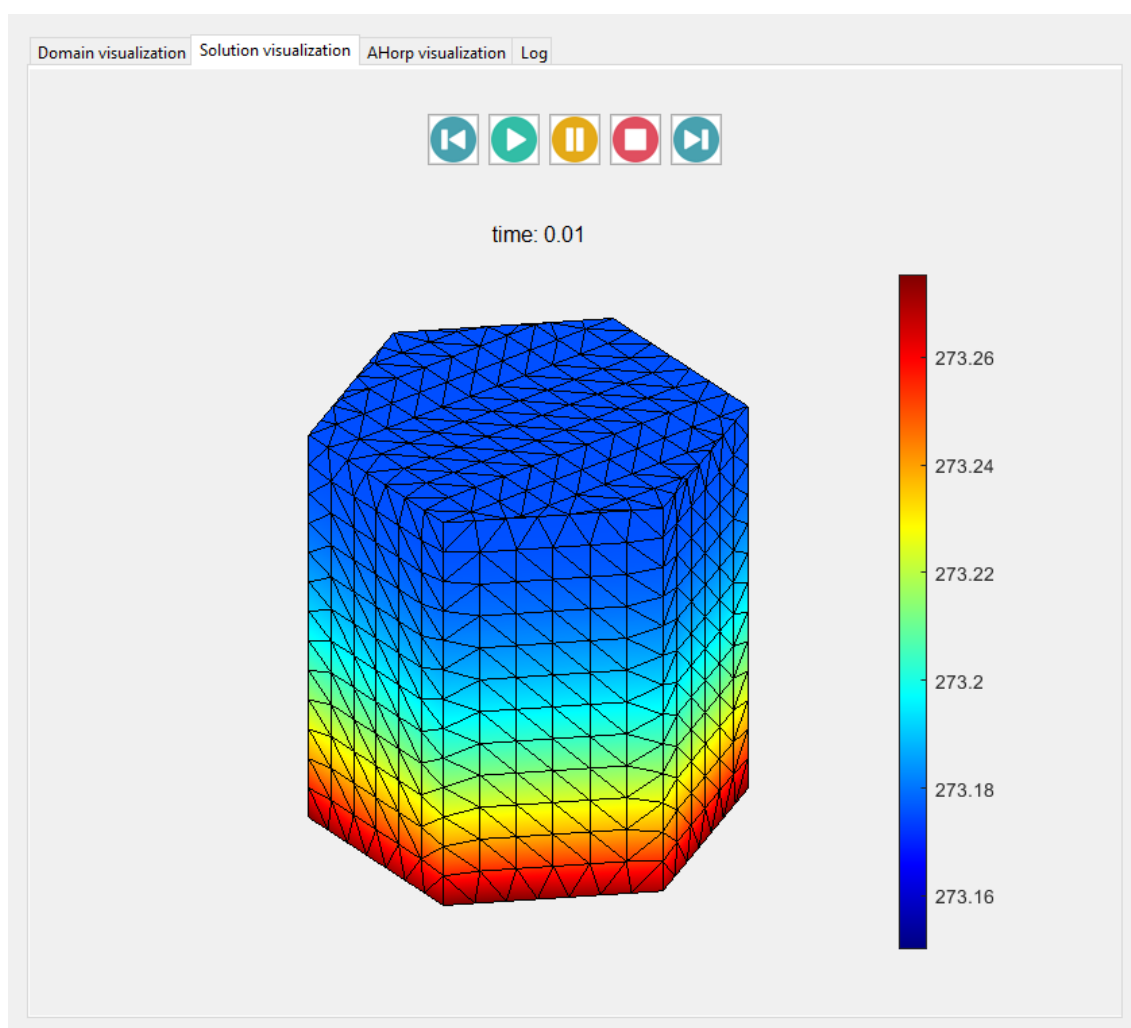


Рис. 4.33 Інтерфейс вкладки «Solution visualization»

Наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності візуалізується у вигляді комбінації тривимірної поверхні на границі області та хмари точок всередині області, які задають розподіл температурного поля в

твердому тілі в заданий момент часу. Зверху, над візуалізацією наближеного розв'язку, розташоване текстове поле, що містить інформацію про момент часу, який відповідає поточному розподілу температурного поля в твердому тілі. Праворуч розташована вертикальна шкала, яка встановлює відповідність між палітрою кольорів, які використовуються при візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності, та числовими значеннями цього розв'язку.

В верхній частині вкладки «Solution visualization» розташований блок управління процесом візуалізації наближеного розв'язку (Рис. 4.34).

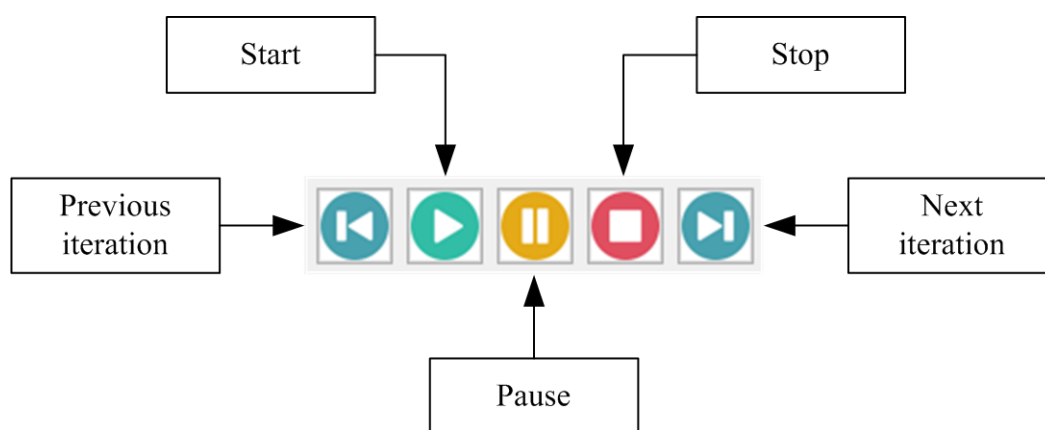


Рис. 4.34 Блок управління процесом візуалізації наближеного розв'язку

Даний блок складається з наступних кнопок:

- «Previous iteration» – здійснює перехід до візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності на попередньому проміжку часу;
- «Start» – здійснює запуск анімованої візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності з поточного проміжку часу;
- «Pause» – здійснює переривання процесу анімованої візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності на поточному проміжку часу;

- «Stop» – здійснює переривання процесу анімованої візуалізації наближеного розв’язку задачі нестационарної теплопровідності та перехід до початкового проміжку часу;

- «Next iteration» – здійснює перехід до візуалізації наближеного розв’язку задачі нестационарної теплопровідності на наступному проміжку часу.

Вкладка «AHorp visualization» призначена для візуалізації атомарної радіальної базисної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді тривимірних поверхонь при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$. На Рис. 4.35 представлено інтерфейс вкладки «AHorp visualization» після побудови атомарної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ відповідно до заданих параметрів налаштування.

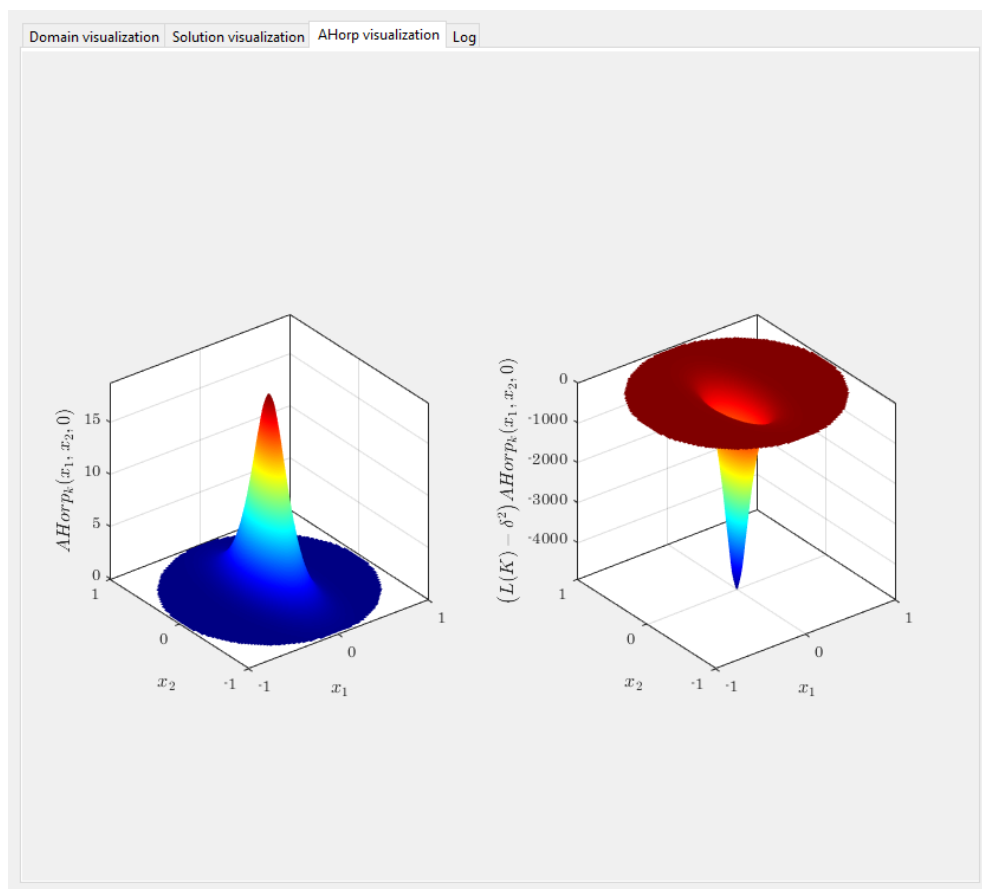


Рис. 4.35 Інтерфейс вкладки «AHorp visualization»

Вкладка «Log» призначена для аналізу результатів моделювання задачі нестационарної теплопровідності. На Рис. 4.36 представлено інтерфейс вкладки «Log» після завершення процесу числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності.

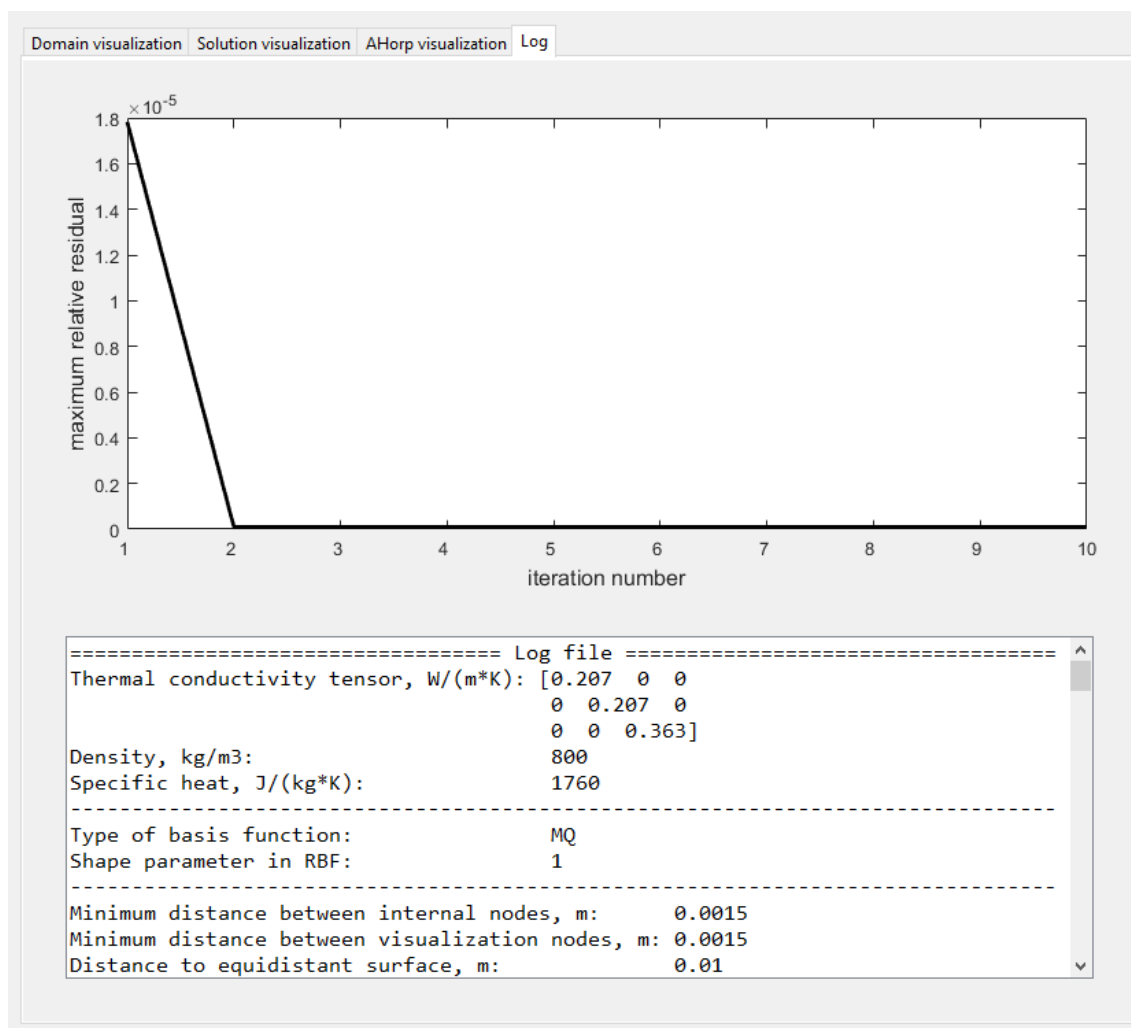


Рис. 4.36 Інтерфейс вкладки «Log»

В верхній частині вкладки «Log» відображається графік зміни норми відносної нев'язки наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності, значення якої обчислюються за формулою (4.5). Нижче, під графіком, розташоване текстове поле, в якому накопичується службова інформація, яка виникає в процесі розв'язання крайової задачі.

4.5.4 Умови експлуатації

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» має експлуатуватися на персональному комп'ютері. Системні вимоги:

- Процесор Intel або AMD x86-64 з чотирма логічними ядрами, який підтримує набір команд AVX2;
- Мінімум 3.1 Гб вільного місця на жорсткому диску;
- Мінімум 4 Гб оперативної пам'яті;
- Операційна система Microsoft Windows 10, Microsoft Windows 7 Service Pack 1, Microsoft Windows Server 2019, Microsoft Windows Server 2016.

4.5.5 Інструкція користувача

Запустіть виконуваний файл «AnisotropicHeatTransfer3D.exe».

Дотримуючись вказівок інсталятора, встановіть програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» на персональний комп'ютер.

Запустіть програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» після закінчення процесу його установки. На екрані відобразиться головне вікно програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.20).

Завантажте до програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» тривимірну модель об'єкта із файлу з розширенням .stl, в якому міститься інформація про геометрію поверхні твердого тіла. Для цього натисніть лівою кнопкою миші (ЛКМ) на кнопку «Open STL», яка розташована на панелі інструментів (див. Рис. 4.22). На екрані з'явиться стандартне діалогове вікно вибору файлів «Open STL» (Рис. 4.37).

Оберіть необхідний файл з розширенням .stl та натисніть ЛКМ на кнопку «Открыть» (див. Рис. 4.37). Обрана тривимірна модель об'єкта твердого тіла, що міститься в файлі з розширенням .stl, завантажиться до програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» та відобразиться у його графічній області у вкладці «Domain visualization» (див. Рис. 4.32).

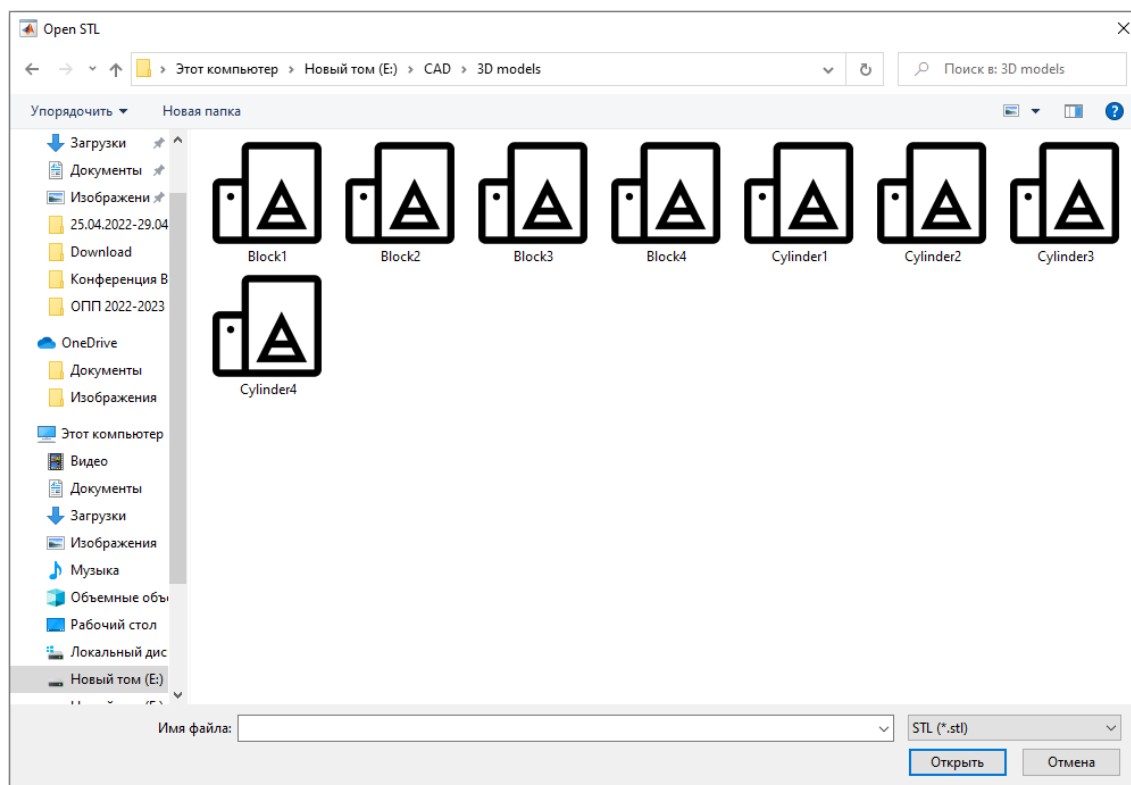


Рис. 4.37 Стандартне діалогове вікно вибору файлів «Open STL»

В меню програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» натисніть ЛКМ на вкладці «RBF selection». На екрані відобразяться поля з типами базисних функцій (Рис. 4.38).

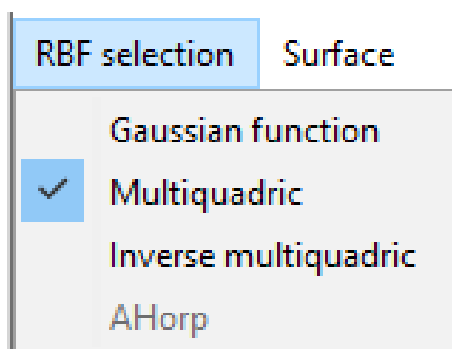


Рис. 4.38 Вкладка «RBF selection»

Галочкою, в лівій частині поля, відзначено тип базисної функції, яка наразі використовується в програмному комплексі. Для зміни типу базисної функції, натисніть ЛКМ на одному з доступних полів.

Для налаштування граничних умов задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Boundary conditions», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.24).

Оберіть ділянки поверхні твердого тіла, до яких будуть застосовані граничні умови одного з трьох доступних типів. Вибір ділянок поверхні здійснюється декількома способами.

Вибір окремих ділянок поверхні за допомогою списку «Surface segments» (див. Рис. 4.23). Натисніть ЛКМ на один із доступних елементів списку «Surface segments». Праворуч від напису «Surface segment №» з обраним номером ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла з'явиться мітка «(selected)», а у вкладці «Domain visualization» відповідна ділянка поверхні у формі трикутника набуде блакитного кольору (Рис. 4.39).

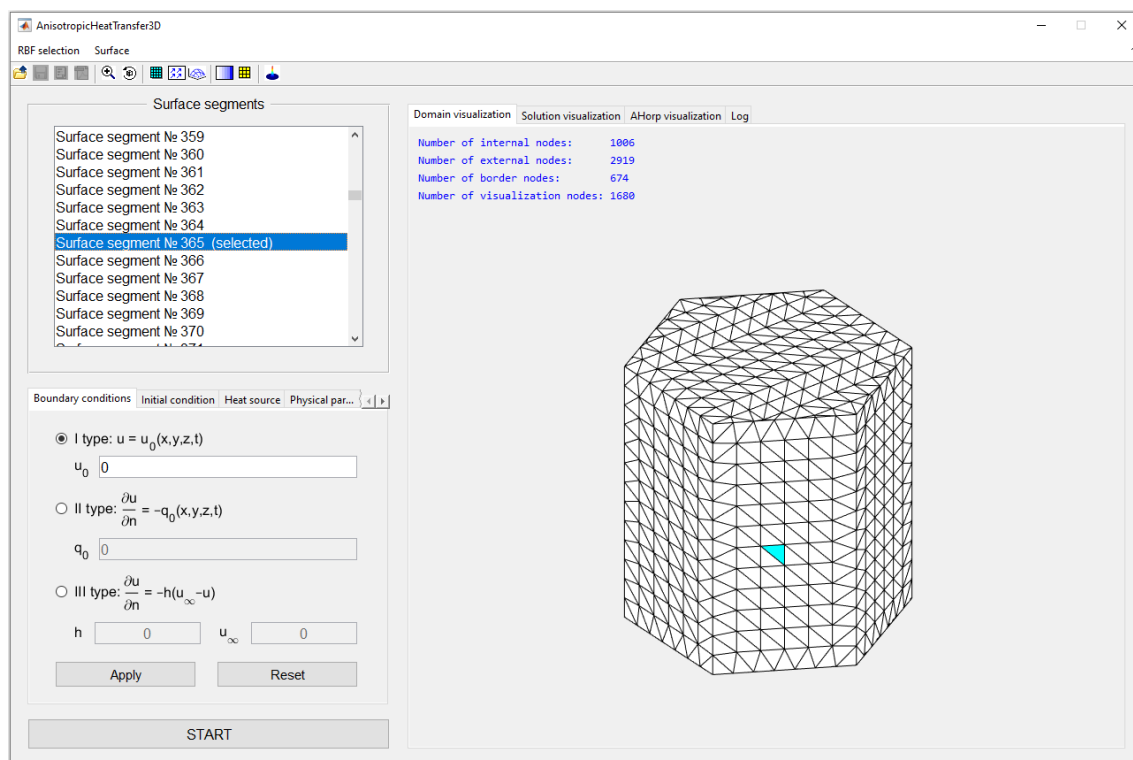


Рис. 4.39 Обрання окремих ділянок поверхні твердого тіла

Вибір окремих ділянок поверхні за допомогою тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. У вкладці «Domain visualization» натисніть ЛКМ на необхідну трикутну ділянку поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла (див. Рис. 4.32). Дана ділянка поверхні набуде блакитного кольору, а в списку «Surface segments» у відповідному елементі з номером ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», з'явиться мітка «(selected)» (див. Рис. 4.39).

Обрання ділянок поверхні в межах однієї грані за допомогою тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. У вкладці «Domain visualization» натисніть Shift + ЛКМ в межах необхідної грані поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. Дана грань поверхні набуде блакитного кольору, а в списку «Surface segments» у відповідних елементах з номерами ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», з'явиться мітка «(selected)» (Рис. 4.40).

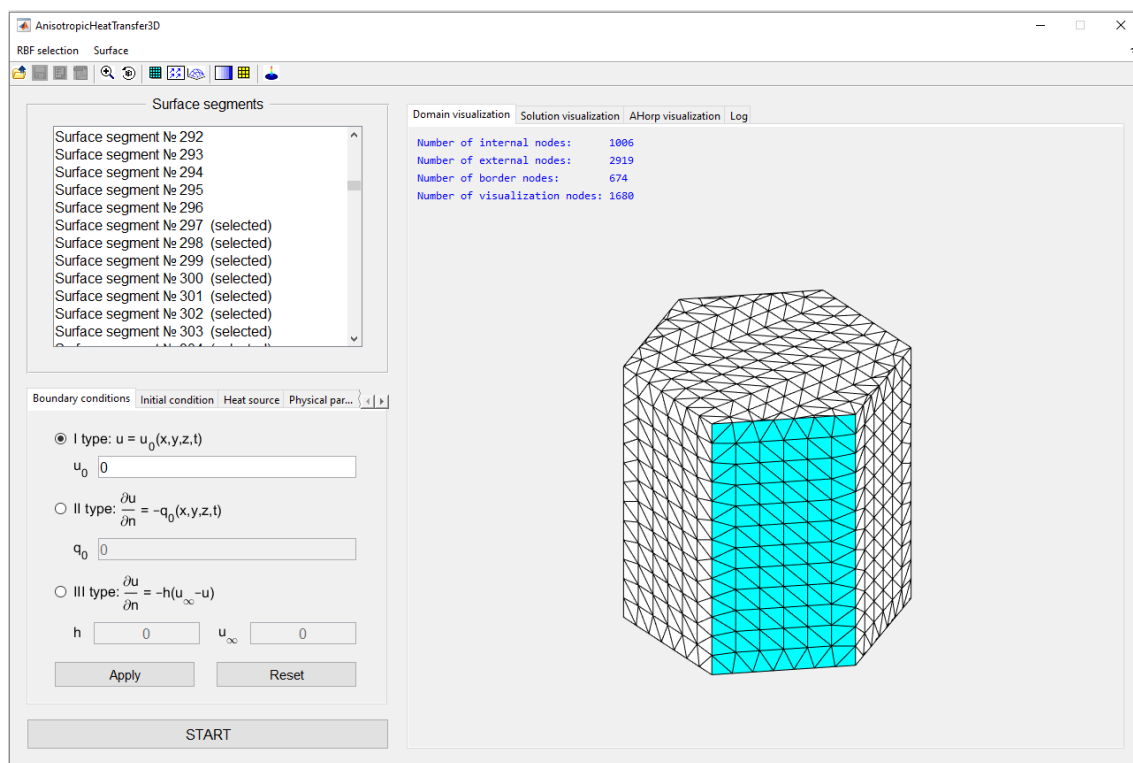


Рис. 4.40 Обрання ділянок поверхні твердого тіла в межах однієї грані

Обрання всіх ділянок поверхні геометричної області крайової задачі.

В меню програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» натисніть ЛКМ на вкладці «Surface». На екрані відобразяться поля «Select all» та «Unselect all» (Рис. 4.41).

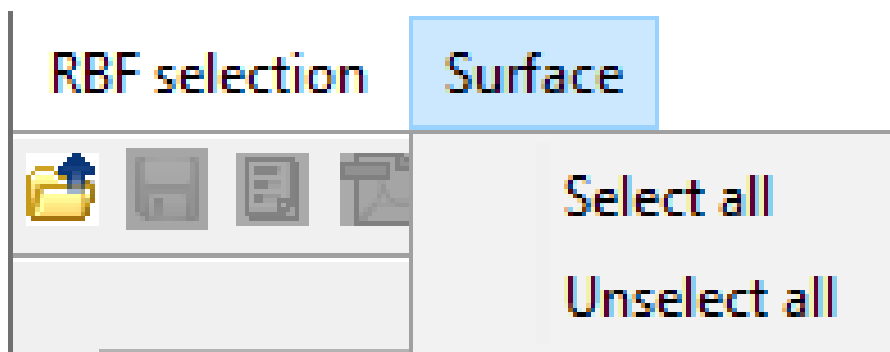


Рис. 4.41 Вкладка «Surface»

Натисніть ЛКМ на полі «Select all» для обрання всіх ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. В списку «Surface segments» у всіх елементах з номерами ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», з'явиться мітка «(selected)», а у вкладці «Domain visualization» всі трикутні ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла набудуть блакитного кольору, як показано на Рис. 4.42.

Зняття вибору раніше обраних ділянок поверхні здійснюється декількома способами.

Зняття вибору окремих ділянок поверхні за допомогою списку «Surface segments» (див. Рис. 4.23). Для зняття вибору окремої раніше обраної ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла натисніть ЛКМ на необхідний елемент списку «Surface segments» (див. Рис. 4.39). У даному елементі з номером ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», зникне мітка «(selected)», а у вкладці

«Domain visualization» відповідна ділянка поверхні у формі трикутника набуде білого кольору.

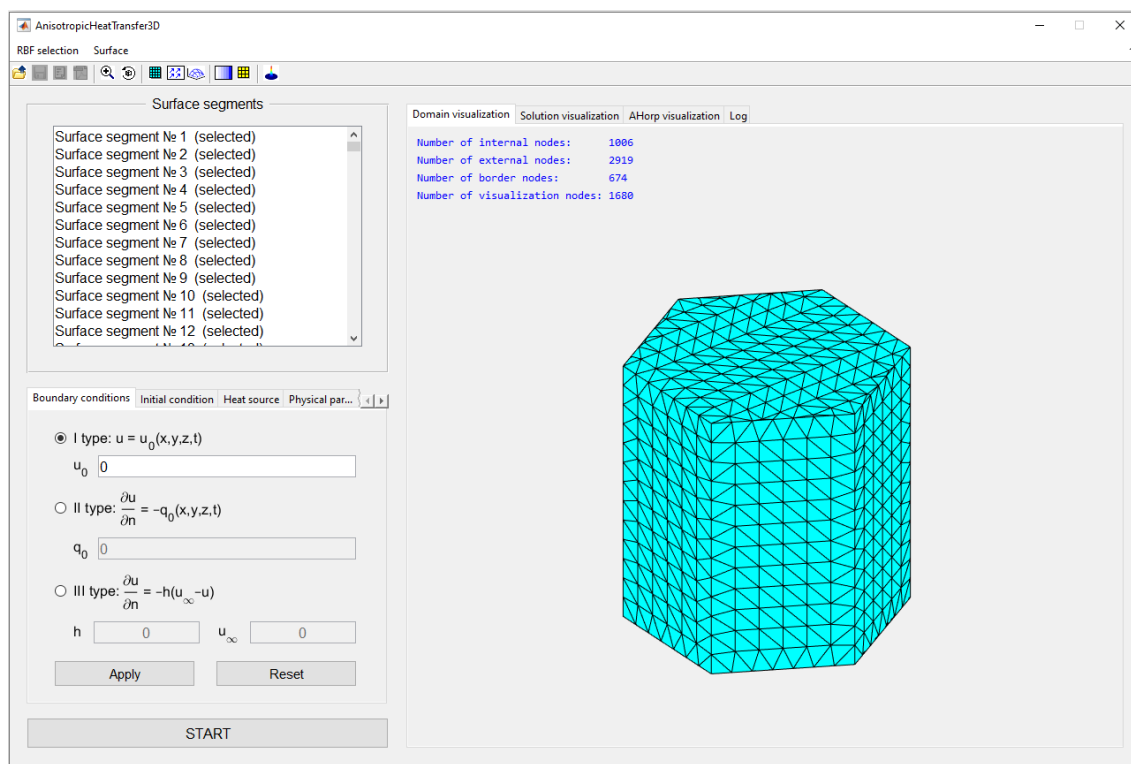


Рис. 4.42 Обрання всіх ділянок поверхні твердого тіла

Зняття вибору окремих ділянок поверхні за допомогою тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. Для зняття вибору окремої раніше обраної ділянки поверхні геометричної області крайової задачі, у вкладці «Domain visualization» натисніть ЛКМ на необхідну трикутну ділянку поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. Дана ділянка поверхні набуде білого кольору, а в списку «Surface segments» у відповідному елементі з номером ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», зникне мітка «(selected)».

Зняття вибору ділянок поверхні в межах однієї грані за допомогою тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. У вкладці «Domain visualization» натисніть Shift + ЛКМ в межах необхідної грані поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. Дана грань поверхні набуде білого кольору, а в списку

«Surface segments» у відповідних елементах з номерами ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», зникне мітка «(selected)».

Зняття вибору всіх ділянок поверхні геометричної області крайової задачі.

В меню програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» натисніть ЛКМ на вкладці «Surface». На екрані відобразяться поля «Select all» та «Unselect all» (див. Рис. 4.41).

Натисніть ЛКМ на полі «Unselect all» для зняття вибору всіх ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла. В списку «Surface segments» у всіх елементах з номерами ділянок поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла, праворуч від напису «Surface segment №», зникне мітка «(selected)», а у вкладці «Domain visualization» всі трикутні ділянки поверхні тривимірної моделі об'єкта твердого тіла набудуть білого кольору.

Оберіть тип граничних умов.

Налаштування граничних умов першого роду. Для налаштування граничних умов першого роду натисніть ЛКМ на радіокнопку «I type: $u = u_0(x, y, z, t)$ », яка знаходиться у вкладці «Boundary conditions» (див. Рис. 4.24). В полі введення « u_0 » задайте значення температури на поверхні твердого тіла у вигляді функції, яка залежить від координат та часу або у вигляді константного числового значення.

Налаштування граничних умов другого роду. Для налаштування граничних умов другого роду натисніть ЛКМ на радіокнопку «II type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -q_0(x, y, z, t)$ », яка знаходиться у вкладці «Boundary conditions» (див. Рис. 4.24). В полі введення « q_0 » задайте значення щільності теплового потоку на границі області крайової задачі у вигляді функції, яка залежить від координат та часу або у вигляді константного числового значення.

Налаштування граничних умов третього роду. Для налаштування граничних умов третього роду натисніть ЛКМ на радіокнопку

«III type: $\frac{\partial u}{\partial n} = -h(u_{\infty} - u)$ », яка знаходиться у вкладці «Boundary conditions»

(див. Рис. 4.24). В полі введення «h» задайте значення коефіцієнта тепловіддачі у вигляді константного числового значення. В полі введення « u_{∞} » задайте значення температури навколишнього середовища у вигляді константного числового значення.

Для застосування граничних умов натисніть ЛКМ на кнопці «Apply», яка знаходиться у вкладці «Boundary conditions» (див. Рис. 4.24).

Для скидання граничних умов натисніть ЛКМ на кнопці «Reset», яка знаходиться у вкладці «Boundary conditions» (див. Рис. 4.24).

На Рис. 4.43 представлений приклад налаштування граничних умов у вкладці «Boundary conditions».

Рис. 4.43 Приклад налаштування граничних умов

Для налаштування початкових умов задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Initial condition», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.25).

В полі введення «Initial condition $u_0(x,y,z)$ » задайте значення початкових умов крайової задачі у вигляді функції, яка залежить від координат або у вигляді константного числового значення.

На Рис. 4.44 представлений приклад налаштування початкових умов у вкладці «Initial condition».

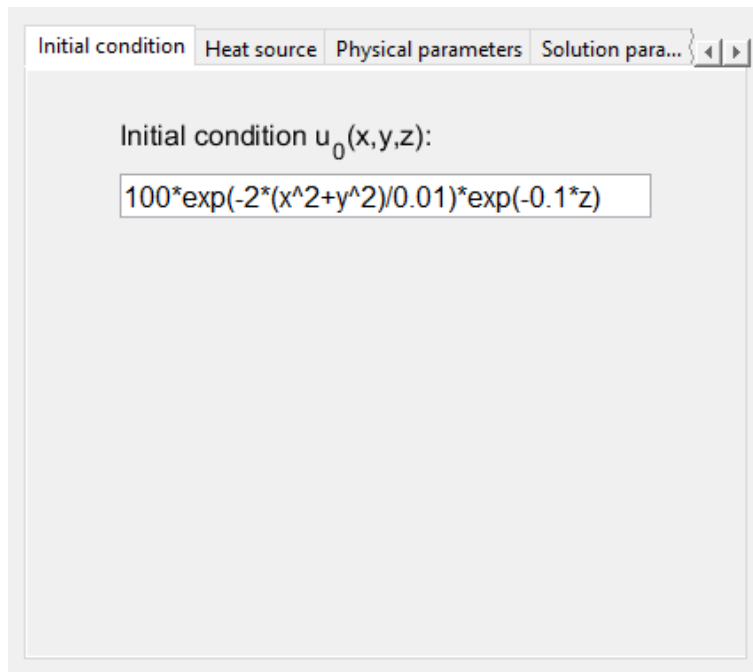


Рис. 4.44 Приклад налаштування початкових умов

Для налаштування внутрішнього джерела тепла задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Heat source», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.26).

В полі введення «Heat source $g(x,y,z,t)$ » задайте значення внутрішнього джерела тепла крайової задачі у вигляді функції, яка залежить від координат та часу або у вигляді константного числового значення.

На Рис. 4.45 представлений приклад налаштування внутрішнього джерела тепла у вкладці «Heat source».



Рис. 4.45 Приклад налаштування внутрішнього джерела тепла

Для налаштування фізичних параметрів твердого тіла перейдіть у вкладку «Physical parameters», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.27).

В дев'яти полях введення «Thermal conductivity coefficient K» задайте значення коефіцієнтів тензора теплопровідності у вигляді константних числових значень. В полі введення «Density ρ » задайте значення щільності твердого тіла у вигляді позитивного константного числового значення. В полі введення «Specific heat c_p » задайте значення питомої теплоємності при постійному тиску твердого тіла у вигляді позитивного константного числового значення.

Для застосування фізичних параметрів твердого тіла натисніть ЛКМ на кнопці «Apply», яка знаходиться у вкладці «Physical parameters» (див. Рис. 4.27).

На Рис. 4.46 представлений приклад налаштування фізичних параметрів анізотропного твердого тіла у вкладці «Physical parameters».

Physical parameters | Solution parameters | RBF parameters | Visual... |

Thermal conductivity coefficient K:

0.207	0	0
0	0.207	0
0	0	0.363

Density ρ 800

Specific heat c_p 1760

Apply

Рис. 4.46 Приклад налаштування фізичних параметрів
анізотропного твердого тіла

Для налаштування параметрів розв'язання задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Solution parameters», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.28).

В полі введення «Distance between nodes» задайте значення відстані між інтерполяційними вузлами всередині області крайової задачі у вигляді позитивного константного числового значення, яке не перевищує геометричні розміри твердого тіла. В полі введення «Distance to equidistant surface» задайте значення відстані до еквідистантної поверхні у вигляді позитивного константного числового значення. В полі введення «Going outside of the domain» задайте значення виходу інтерполяційних вузлів за межі геометричної області крайової задачі у вигляді невід'ємного цілого константного числового значення. В полі введення «Time step» задайте значення кроку за часом у вигляді позитивного константного числового значення, яке не перевищує значення часового інтервалу нестационарної крайової задачі. В полі введення

«Time interval» задайте значення часового інтервалу нестационарної крайової задачі у вигляді позитивного константного числового значення.

Оберіть метод, який буде застосовуватися при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів α_k^n та β_i^n .

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням LDL розкладу, QR розкладу та LU розкладу, натисніть ЛКМ на радіокнопку «Matrix decomposition», яка знаходиться у вкладці «Solution parameters» (див. Рис. 4.28).

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням псевдообернення Мура-Пенроуза, натисніть ЛКМ на радіокнопку «Moore-Penrose pseudoinverse», яка знаходиться у вкладці «Solution parameters» (див. Рис. 4.28).

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь із використанням методу найменших квадратів, натисніть ЛКМ на радіокнопку «Least-squares method», яка знаходиться у вкладці «Solution parameters» (див. Рис. 4.28).

Для застосування параметрів розв'язання задачі нестационарної теплопровідності натисніть ЛКМ на кнопці «Apply», яка знаходиться у вкладці «Solution parameters» (див. Рис. 4.28).

Для відображення та приховання вузлів на еквідистантній поверхні натисніть ЛКМ на кнопці «Show/hide nodes on an equidistant surface», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

На Рис. 4.47 представлена вкладка «Domain visualization» з візуалізацією тривимірної моделі об'єкта твердого тіла разом із вузлами, що розташовані на еквідистантній поверхні. Червоними маркерами позначені вузли на еквідистантній поверхні.

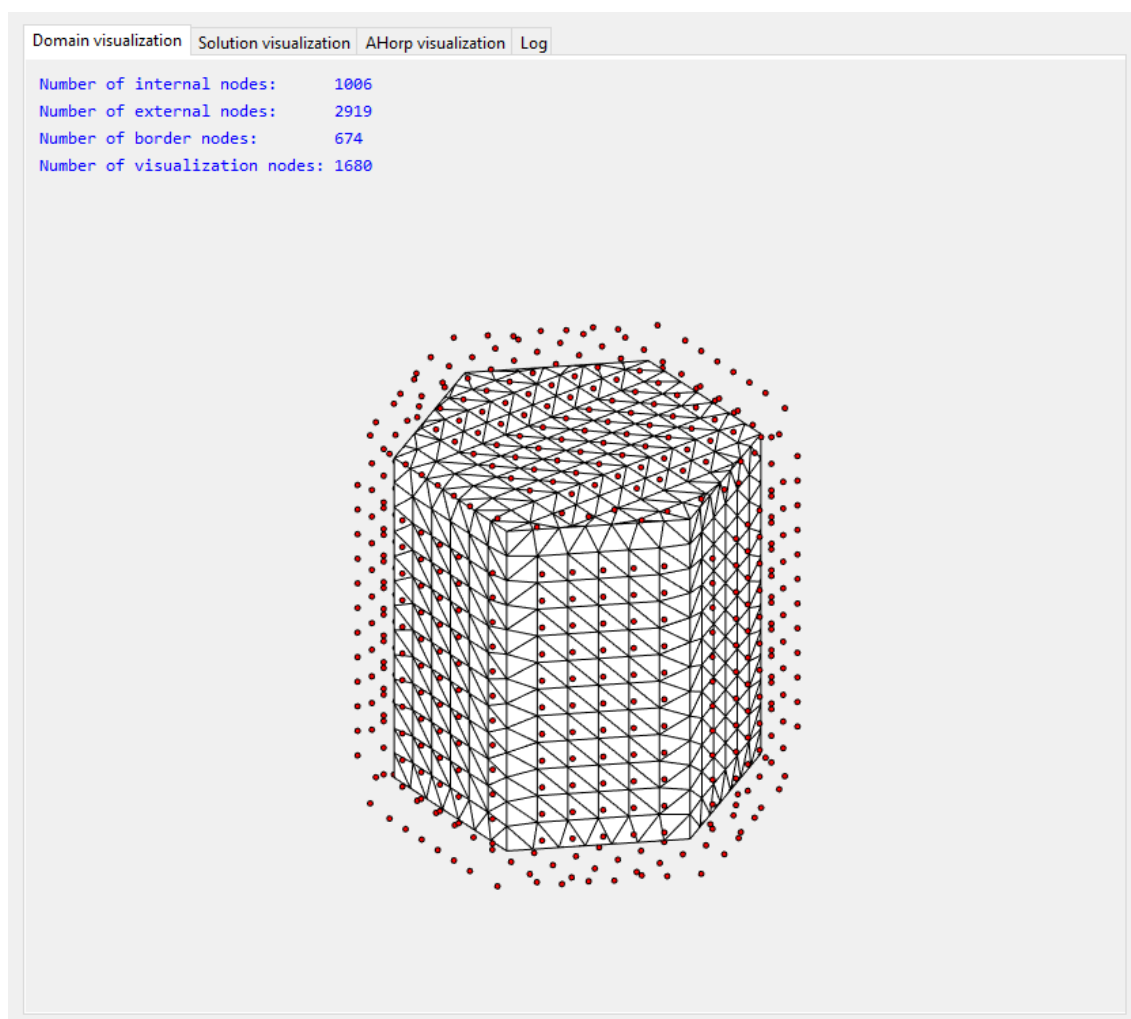


Рис. 4.47 Візуалізація тривимірної моделі об'єкта твердого тіла разом із вузлами на еквідистантній поверхні

На Рис. 4.28 представлений приклад налаштування параметрів розв'язання задачі нестационарної теплопровідності у вкладці «Solution parameters».

Для налаштування параметрів анізотропних радіальних базисних функцій та атомарної радіальної базисної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ перейдіть у вкладку «RBF parameters», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.29).

Налаштування параметрів анізотропних радіальних базисних функцій.

В полі введення «Shape parameter» задайте значення параметра форми анізотропних радіальних базисних функцій у вигляді позитивного константного

числового значення. Для застосування параметра форми анізотропних радіальних базисних функцій натисніть ЛКМ на кнопці «Apply», яка знаходиться у вкладці «RBF parameters» (див. Рис. 4.29).

Налаштування параметрів атомарної радіальної базисної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$.

В полі введення «Distance between nodes» задайте значення відстані між вузлами, що використовуються для побудови атомарної радіальної базисної функції у вигляді позитивного константного числового значення, яке не перевищує значення радіусу носія атомарної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$. В полі введення «Support radius» задайте значення радіусу носія атомарної радіальної базисної функції у вигляді позитивного константного числового значення. В полі введення «Shape parameter» задайте значення параметра форми атомарної радіальної базисної функції у вигляді позитивного константного числового значення. В полі введення «Size of Fourier matrix» задайте значення кількості ітерацій для кожного коефіцієнта p , q , r в трикратному ряді Фур'є (3.9) у вигляді позитивного цілого константного числового значення. В полі введення «Number of iterations» задайте значення кількості ітерацій у нескінченному добутку (3.8) у вигляді позитивного цілого константного числового значення.

Для побудови атомарної радіальної базисної функції трьох незалежних змінних $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ натисніть ЛКМ на кнопці «Construct AHorp», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

Після завершення процедури побудови атомарної радіальної базисної функції, у вкладці «AHorp visualization» відобразяться візуалізації функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді тривимірних поверхонь при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ (див. Рис. 4.35).

На Рис. 4.29 представлений приклад налаштування параметрів анізотропних радіальних базисних функцій та атомарної радіальної базисної функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ у вкладці «RBF parameters».

Для налаштування параметрів візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Visualization parameters», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.30).

В полі введення «Distance between nodes» задайте значення відстані між вузлами всередині області, що використовуються для візуалізації наближеного розв'язку крайової задачі у вигляді позитивного константного числового значення, яке не перевищує геометричні розміри твердого тіла.

Для застосування встановленого значення відстані між вузлами всередині області натисніть ЛКМ на кнопці «Apply», яка знаходиться у вкладці «Visualization parameters» (див. Рис. 4.30).

На Рис. 4.30 представлений приклад налаштування параметрів візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності у вкладці «Visualization parameters».

Натисніть кнопку «START», яка розташована в нижній лівій частині робочої області програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» для запуску процесу числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності (див. Рис. 4.20).

На екрані відобразиться немодальне діалогове вікно, що містить індикатор виконання та текстове поле з написом «Simulation running... Please wait...» (Рис. 4.48).

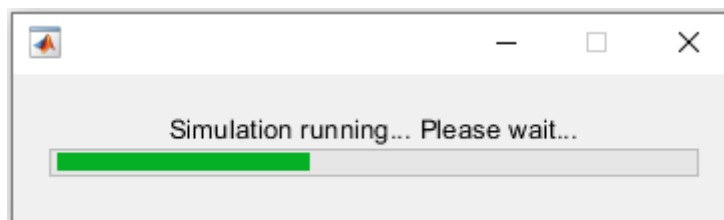


Рис. 4.48 Діалогове вікно з індикатором виконання процесу моделювання

Дочекайтеся закінчення процесу числового розв'язання задачі нестационарної теплопровідності.

Для перегляду результатів моделювання нестационарного теплового процесу, який протікає в анізотропному твердому тілі, перейдіть у вкладку «Solution visualization», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.33).

Для управління процесом візуалізації наближеного розв'язку скористайтесь блоком кнопок, які знаходяться в верхній частині вкладки «Solution visualization» (див. Рис. 4.34).

Для активації та деактивації режиму масштабування тривимірної моделі об'єкта твердого тіла натисніть ЛКМ на кнопці «Zoom +/-», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

Для активації та деактивації режиму обертання тривимірної моделі об'єкта твердого тіла натисніть ЛКМ на кнопці «Rotate», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

Для активації та деактивації режиму прозорості тривимірної поверхні з розподілом температурного поля на границі твердого тіла натисніть ЛКМ на кнопці «Turn on/off the transparency of the solution visualization», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

Для приховування та відображення ребер тріангуляції на тривимірній поверхні з розподілом температурного поля на границі твердого тіла натисніть ЛКМ на кнопці «Hide/show triangulation edges on solution», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22).

На Рис. 4.49 представлено приклад візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу з активованим режимом прозорості та прихованими ребрами тріангуляції на тривимірній поверхні з розподілом температурного поля на границі твердого тіла.

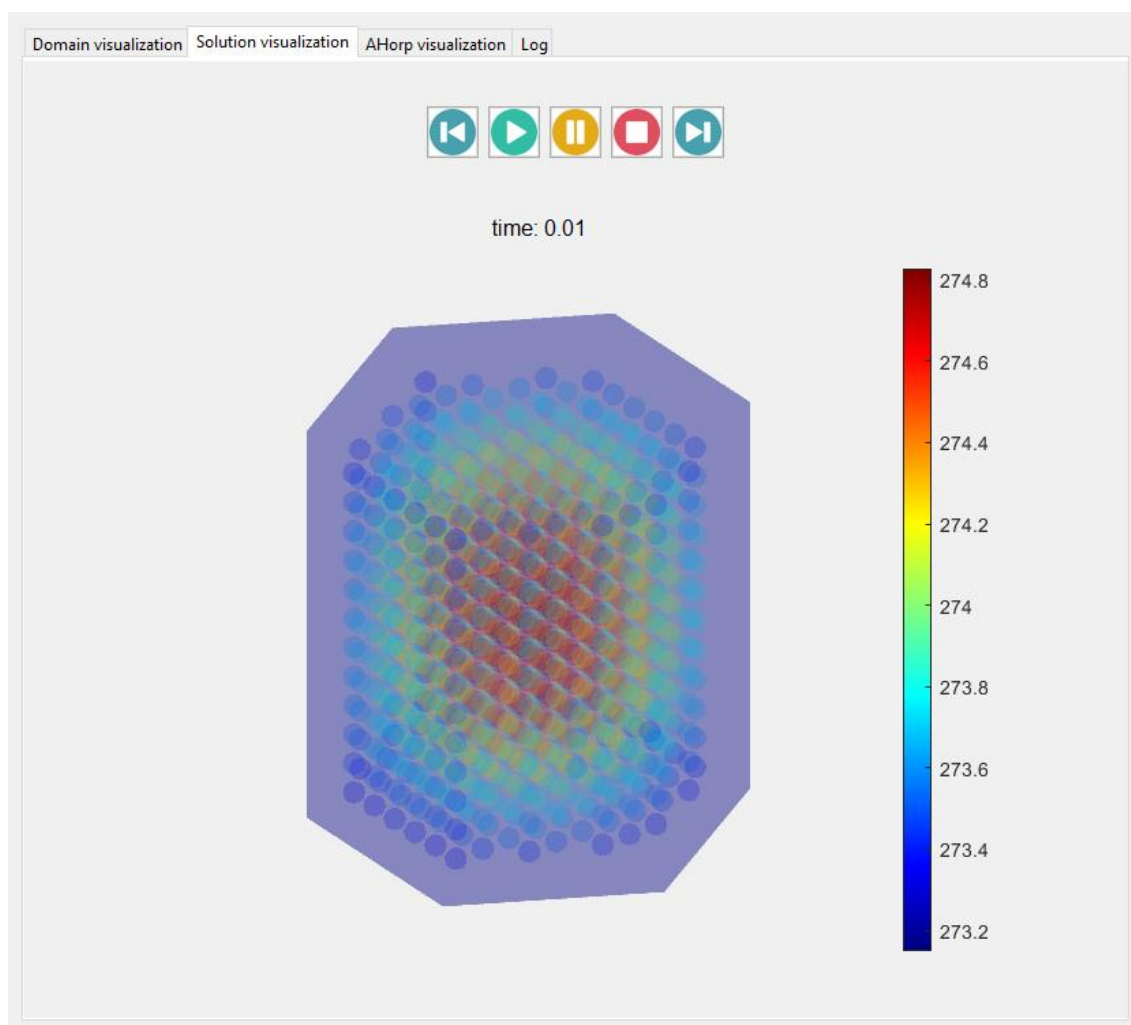


Рис. 4.49 Візуалізації наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності з активованим режимом прозорості

Для відображення аналізу результатів моделювання задачі нестационарної теплопровідності перейдіть у вкладку «Log», натиснувши ЛКМ на відповідному заголовку (див. Рис. 4.36).

Для збереження отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу в один із доступних графічних форматів, натисніть ЛКМ на кнопці «Save solution as image», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22). На екрані з'явиться стандартне діалогове вікно збереження файлів «Save Image» (Рис. 4.50).

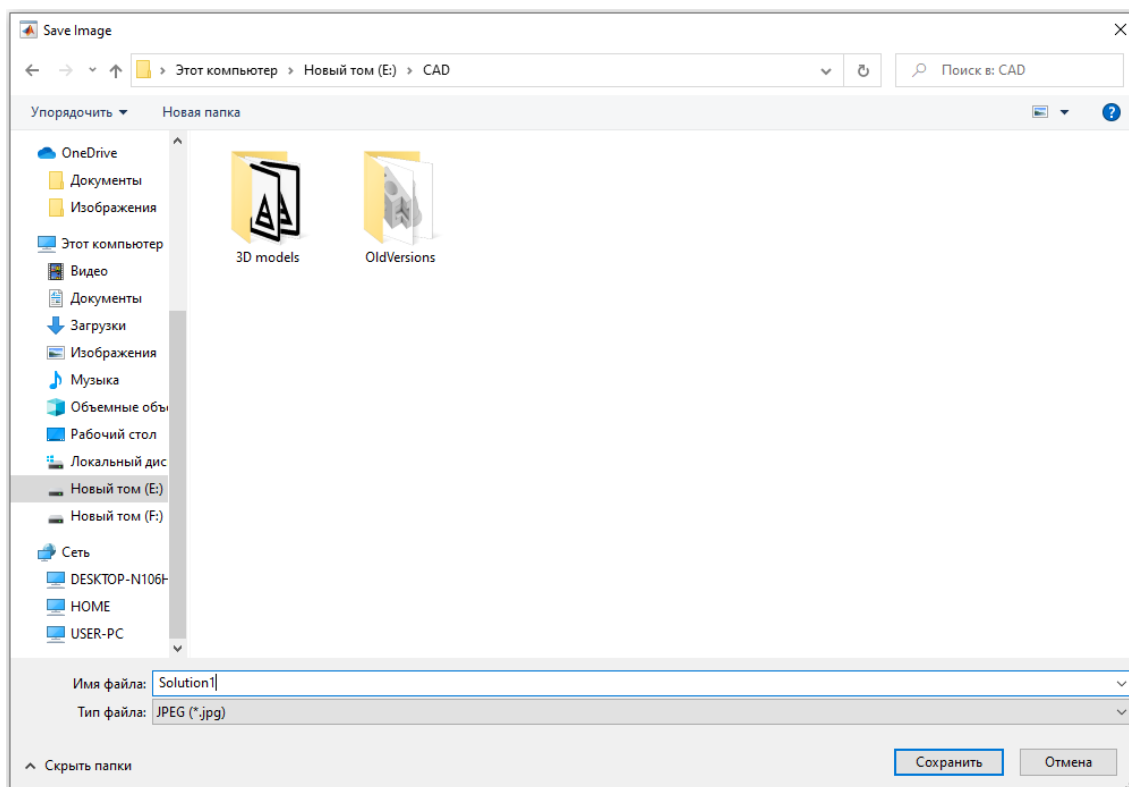


Рис. 4.50 Стандартне діалогове вікно збереження файлів «Save Image»

В полі введення «Имя файла» введіть назву файлу, оберіть в випадному списку «Тип файла» один з доступних графічних форматів і натисніть ЛКМ на кнопку «Сохранить» (див. Рис. 4.50).

Для збереження результатів моделювання нестационарного теплового процесу в анізотропному твердому тілі у вигляді бінарного файлу з розширенням .mat, натисніть ЛКМ на кнопці «Export solution to a binary file», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22). На екрані з'явиться стандартне діалогове вікно збереження файлів «Export solution» (Рис. 4.51).

В полі введення «Имя файла» введіть назву файлу і натисніть ЛКМ на кнопку «Сохранить» (див. Рис. 4.51).

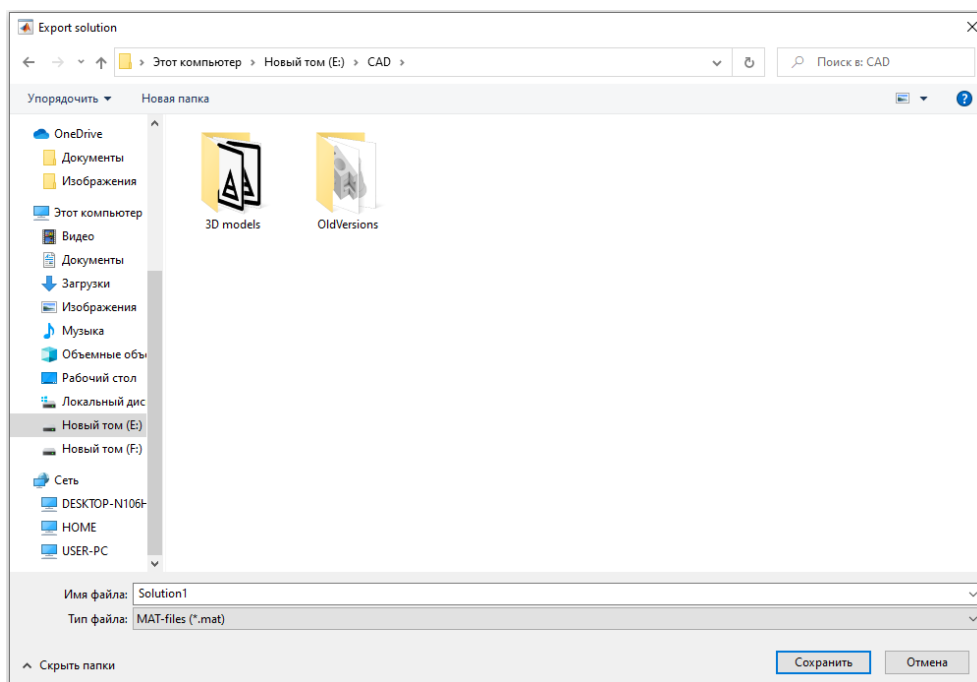


Рис. 4.51 Стандартне діалогове вікно збереження файлів «Export solution»

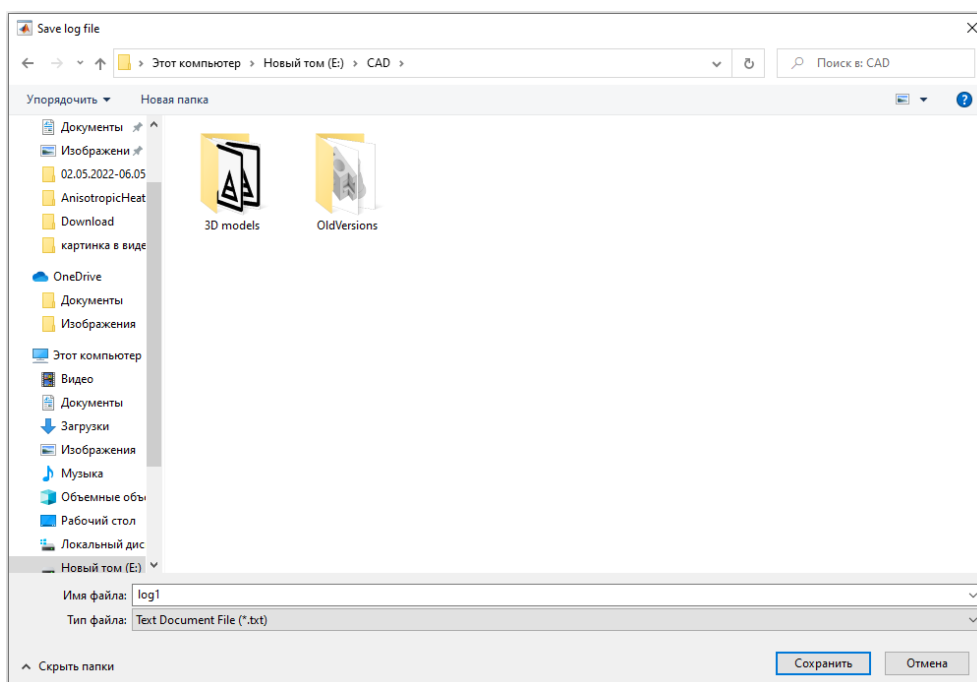


Рис. 4.52 Стандартне діалогове вікно збереження файлів «Save log file»

Для збереження накопичуваної службової інформації, яка виникає в процесі розв'язання задачі нестационарної теплопровідності у вигляді

текстового файлу журналу з розширенням .txt, натисніть ЛКМ на кнопці «Save log file», яка розташована на панелі інструментів програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» (див. Рис. 4.22). На екрані з'явиться стандартне діалогове вікно збереження файлів «Save log file» (Рис. 4.52).

В полі введення «Имя файла» введіть назву текстового файлу і натисніть ЛКМ на кнопку «Сохранить» (див. Рис. 4.52).

Висновки до розділу 4

Четвертий розділ присвячений демонстрації результатів числових розрахунків нестационарних теплових процесів, що протікають в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла, які отримані із використанням розробленого безсіткового методу.

Отримано наближені розв'язки тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла для ізотропного та анізотропного випадків. Проілюстровано застосування атомарних функцій $ANor_{p_k}(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при моделюванні нестационарного теплового процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла. Знайдено аналітичні розв'язки даних задач нестационарної теплопровідності. Оцінено точність наближених розв'язків крайових задач за величиною значень середньої відносної похибки $ger(u)$, середньої абсолютної похибки $aer(u)$ і максимальної похибки $mer(u)$. Проведено порівняльний аналіз ефективності апроксимації задач нестационарної теплопровідності анізотропними радіальними базисними функціями з глобальним носієм та атомарними радіальними базисними функціями $ANor_{p_k}(x_1, x_2, x_3)$.

Представлено результати моделювання теплового процесу, що протікає в монокристалі $LiNbO_3$ в формі циліндра при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням потужністю 50 Вт та довжиною хвилі 1064 нм. Визначено, що приблизно через 4 постійних часу температура монокристала переходить в

сталий стан, і знаходиться в діапазоні від 27.74 до 28.24 °C. Наведено результати числових розрахунків розподілу температурного поля всередині та на поверхні монокристалу LiNbO_3 в різні моменти часу, та оцінено точність отриманих наближених розв'язків за величиною норми відносної нев'язки.

Проілюстровано ефективність застосування розробленого безсіткового методу при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності на багатозв'язній області, а саме при моделюванні теплового процесу в перфорованій графітовій пластині за наявності комбінації різних типів граничних умов.

Результати числових розрахунків, отримані з використанням безсіткового методу, добре узгоджуються з результатами, отриманими при використанні методу скінченних елементів (МСЕ), що свідчить про високу ефективність розробленої безсіткової схеми вже на невеликій кількості інтерполяційних вузлів.

Всі числові розрахунки виконувалися на персональному комп'ютері, оснащеному центральним процесором Intel® Core™ i9-9900K CPU 3.60 GHz та об'ємом оперативної пам'яті 32 GB. Для числових розрахунків нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом використовувався розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D».

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» призначений для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом.

Наведено функціональне призначення розробленого програмного комплексу. Описана його архітектура, а саме взаємодія модулів та алгоритм роботи програми. Докладно описано інтерфейс програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D», умови його експлуатації та інструкцію користувача.

Розв'язання задачі нестационарної теплопровідності в програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» реалізується на основі комбінації

методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі.

В програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» в якості базисних функцій для апроксимації диференціального рівняння теплопровідності використовуються анізотропні радіальні базисні функції та сімейство атомарних радіальних базисних функцій $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$.

Програмний комплекс дозволяє налаштовувати граничні та початкові умови задачі нестационарної теплопровідності, внутрішнє джерело тепла, фізичні параметри анізотропного твердого тіла, параметри базисних функцій, параметри розв'язання та параметри візуалізації наближеного розв'язку.

Наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в «AnisotropicHeatTransfer3D» візуалізується у вигляді комбінації тривимірної поверхні на границі області та хмари точок всередині області, які задають розподіл температурного поля в твердому тілі в заданий момент часу.

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» дозволяє зберігати отриманий наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу у вигляді растрових та векторного зображень, а також експортувати наближений розв'язок в бінарний файл.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора: [137, 140, 159, 170-173]. Отримано свідоцтво про державну реєстрацію авторського права на твір, що являє собою комп'ютерну програму “Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D»” № 112945 від 16 травня 2022 р. [174].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено теплові процеси в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності. Безсіткова схема заснована на комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі.

Описано алгоритм використання анізотропних радіальних базисних функцій в задачах апроксимації та інтерполяції функцій. Докладно описані основні концепції методу подвійного заміщення та методу фундаментальних розв'язків. Розглянуто застосування методу фундаментальних розв'язків у випадку однозв'язних та багатозв'язних областей.

Розроблений безсітковий метод являє собою ефективний інструмент для моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла.

Представлено алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, які породжуються оператором типу Гельмгольца. Функції $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ розширюють підклас функцій, які використовуються в якості базисних при реалізації безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Вибір фінитних функцій в якості базисних дає можливість розглядати крайові задачі на областях зі складною геометричною конфігурацією. Функції $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ містять параметр форми k , який дозволяє варіювати розмір носія та може уточнюватися в процесі розв'язку крайової задачі.

Отримано явні формули для обчислення функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перетворення Фур'є. Представлено візуалізацію атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перших похідних за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків. Представлено візуалізацію функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків.

Продемонстровано результати числових розрахунків нестационарних теплових процесів, що протікають в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла, а також різними початковими та граничними умовами, які отримані із використанням розробленого безсіткового методу.

Отримано наближені розв'язки тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла для ізотропного та анізотропного випадків. Проілюстровано застосування атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при моделюванні нестационарного теплового процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла. Знайдено аналітичні розв'язки даних задач нестационарної теплопровідності. Оцінено точність наближених розв'язків крайових задач за величиною значень середньої відносної похибки $err(u)$, середньої абсолютної похибки $aerr(u)$ і максимальної похибки $max(u)$. Проведено порівняльний аналіз ефективності апроксимації задач нестационарної теплопровідності анізотропними радіальними базисними функціями з глобальним носієм та атомарними радіальними базисними функціями $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$.

Представлено результати моделювання теплового процесу, що протікає в монокристалі $LiNbO_3$ в формі циліндра при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням потужністю 50 Вт та довжиною хвилі 1064 нм. Визначено, що приблизно через 4 постійних часу температура монокристала переходить в

сталий стан, і знаходиться в діапазоні від 27.74 до 28.24 °C. Наведено результати числових розрахунків розподілу температурного поля всередині та на поверхні монокристалу LiNbO_3 в різні моменти часу, та оцінено точність отриманих наближених розв'язків за величиною норми відносної нев'язки.

Проілюстровано ефективність застосування розробленого безсіткового методу при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності на багатозв'язній області, а саме при моделюванні теплового процесу в перфорованій графітовій пластині за наявності комбінації різних типів граничних умов.

Результати числових розрахунків, отримані з використанням безсіткового методу, добре узгоджуються з результатами, отриманими при використанні методу скінченних елементів, що свідчить про високу ефективність розробленої безсіткової схеми вже на невеликій кількості інтерполяційних вузлів.

Представлено розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D», який призначено для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом. Описана архітектура програмного комплексу, його інтерфейс та умови експлуатації. Докладно викладено інструкцію користувача.

Розв'язання задачі нестационарної теплопровідності в програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» реалізується на основі комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків.

В програмному комплексі «AnisotropicHeatTransfer3D» в якості базисних функцій для апроксимації диференціального рівняння теплопровідності використовуються анізотропні радіальні базисні функції та сімейство атомарних радіальних базисних функцій $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$.

Програмний комплекс дозволяє налаштовувати граничні та початкові умови задачі нестационарної теплопровідності, внутрішнє джерело тепла,

фізичні параметри анізотропного твердого тіла, параметри базисних функцій, параметри розв'язання та параметри візуалізації наближеного розв'язку.

Наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в «AnisotropicHeatTransfer3D» візуалізується у вигляді комбінації тривимірної поверхні на границі області та хмари точок всередині області, які задають розподіл температурного поля в твердому тілі в заданий момент часу.

Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» дозволяє зберігати отриманий наближений розв'язок задачі нестационарної теплопровідності в заданий момент часу у вигляді растрових та векторного зображень, а також експортувати наближений розв'язок в бінарний файл.

Проведено тестування розробленого програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» при числовому розв'язанні розглянутих тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає у наступному:

1. Вперше розроблено безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах, який засновано на комбінації методу подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків.

2. Вперше проведено моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою розробленого безсіткового методу.

3. Вперше побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

4. Вперше програмно реалізовано алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних

$ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу.

5. Вперше застосовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при реалізації безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах.

6. Вперше проведено моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання атомарних радіальних базисних функцій $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$.

7. Вперше, за допомогою розробленого безсіткового методу, досліджено модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом $LiNbO_3$ у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановлено час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу $LiNbO_3$.

8. Вперше розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні розробленого безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $ANorp_k(x_1, x_2, x_3)$, що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір [174].

Практичне значення отриманих результатів:

Розроблена безсіткова схема моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах може бути використана при реалізації нових ефективних підходів до моделювання теплового стану тіла за наявності процесів плавлення, випаровування або затвердіння, а також методів

розв'язання задач нестационарної теплопровідності в композиційних матеріалах з довільним числом рухомих границь фазових перетворень (задача Стефана).

Сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $ANor p_k(x_1, x_2, x_3)$, які враховують анізотропію матеріалу, являють собою новий підклас функцій, які можуть використовуватися в якості базисних при реалізації безсіткових методів та підходів к моделюванню теплових процесів в анізотропних матеріалах.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, були впроваджені у навчальний процес:

1. Кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Безсіткові методи в задачах фізики» і «Обчислювальні методи в фізиці» для студентів 3 курсу бакалаврату та «Наближені методи розв'язання задач математичної фізики» і «Наближені обчислення у фізиці» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» (Додаток Б);

2. Кафедри інформаційних технологій електронних засобів факультету радіоелектроніки та телекомунікацій НУ «Запорізька політехніка» при проведенні лекційних та лабораторних практичних занять з курсів «Фізичні основи мікро- і наносистемної техніки» для студентів 3 курсу і «Тепломасообмін у радіоелектронних апаратах» для студентів 4 курсу бакалаврату спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» (Додаток Б);

3. Кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Фізико-теоретичні основи конструювання електронної апаратури» для студентів 2 курсу і

«Конструювання електронних пристроїв» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 171 – «Електроніка» (Додаток Б);

4. Кафедри інформатики та прикладної математики дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсу «Комп'ютерні математичні технології» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 275.03 – «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» (Додаток Б).

Результати дисертаційної роботи використовуються в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, про що свідчить відповідна довідка про використання результатів дисертаційного дослідження (Додаток Б).

Дисертаційна робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна відповідно до плану науково-дослідних робіт навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики, зокрема, в межах науково-дослідної роботи «Математичне моделювання теплових процесів в анізотропних наноматеріалах» № держреєстрації 0122U001482, при виконанні якої здобувач приймав участь як виконавець.

Результати дисертаційної роботи Протектора Д. О., а саме теоретичний матеріал та створений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D», були використані при виконанні вищезазначеної науково-дослідної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Yang Yz., Yang Jl., Fang Dn. Research progress on thermal protection materials and structures of hypersonic vehicles // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 29, No. 1. P. 51-60. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-008-0107-1>
2. Le V. T., Ha N. S., Goo N. S. Advanced sandwich structures for thermal protection systems in hypersonic vehicles: A review // *Composites Part B: Engineering*. 2021. Vol. 226. P. 109301. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109301>
3. Glass D. E., Dirling R., Croop H., Fry T. J., Frank G. J. Materials Development for Hypersonic Flight Vehicles // 14th AIAA/AHI International Space Planes and Hypersonics Systems and Technologies Conference : Conference Paper, 6-9 Nov. 2006, Canberra, 2006. P. 1-13.
4. Kaminow I. P., Sharpless W. M. Performance of LiTaO_3 and LiNbO_3 Light Modulators at 4 GHz // *Applied Optics*. 1967. Vol. 6, No. 2. P. 351-352. DOI: <https://doi.org/10.1364/AO.6.000351>
5. Zhang M., Wang C., Kharel P., Zhu D., Lončar M. Integrated lithium niobate electro-optic modulators: when performance meets scalability // *Optica*. 2021. Vol. 8, No. 5. P. 652-667. DOI: <https://doi.org/10.1364/OPTICA.415762>
6. Sakamoto T., Kawanishi T., Izutsu M. Optoelectronic oscillator using a LiNbO_3 phase modulator for self-oscillating frequency comb generation // *Optics Letters*. 2006. Vol. 31, No. 6. P. 811-813. DOI: <https://doi.org/10.1364/OL.31.000811>
7. Nelson K. A., Edwards N., Harrison M. J., Kargar A., McNeil W. J., Rojeski R. A., McGregor D. S. Investigation of CdZnTe and LiNbO_3 as electro-optic neutron detectors // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2010. Vol. 620. P. 363-367. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2009.12.042>

8. Pang C., Li R., Li Z., Sun X., Dong N., Wang J., Zhou S., Chen F. Q-switched mode-locked laser generation by Au nanoparticles embedded in LiTaO₃ crystals // Optical Materials. 2021. Vol. 122. P. 111714. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2021.111714>
9. Jelínková H., Šulc J., Koranda P., Němec M., Čech M., Jelínek M., Škoda V. LiNbO₃ Pockels cell for Q-switch of Er:YAG laser // Laser Physics Letters. 2004. Vol. 1, No. 2. P. 59-64. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/lapl.200310020>
10. Wang Z., Xu Y., Gu Y. Lithium niobate ultrasonic transducer design for Enhanced Oil Recovery // Ultrasonics Sonochemistry. 2015. Vol. 27. P. 171-177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2015.05.017>
11. Ismangil A., Jenie R. P., Irmansyah, Irzaman Development of Lithium Tantalite (LiTaO₃) for Automatic Switch on LAPAN-IPB Satellite Infra-red Sensor // Procedia Environmental Sciences. 2015. Vol. 24. P. 329-334. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proenv.2015.03.043>
12. Reddy J. N. Introduction To Finite Element Method, 4th ed. New York, 2019. 816 p.
13. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. Cham, 2016. 791 p.
14. Wu X., Tao W.-Q. Meshless method based on the local weak-forms for steady-state heat conduction problems // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 51. P. 3103-3112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.08.021>
15. Divo E., Kassab A. A meshless method for conjugate heat transfer problems // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2005. Vol. 29, No. 2. P. 136-149. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.10.001>
16. Li J., Wang G., Zhan J., Liu S., Guan Y., Naceur H., Coutellier D., Lin J. Meshless SPH analysis for transient heat conduction in the functionally graded structures // Composites Communications. 2021. Vol. 24. P. 100664. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coco.2021.100664>

17. Lin J., Yu H., Reutskiy S., Wang Y. A meshless radial basis function based method for modeling dual-phase-lag heat transfer in irregular domains // *Computers & Mathematics with Applications*. 2021. Vol. 85. P. 1-17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.12.018>
18. Granados J. M., Bustamante C. A., Florez W. F. Extending meshless method of approximate particular solutions (MAPS) to two-dimensional convection heat transfer problems // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 390. P. 125484. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125484>
19. Bourantas G. C., Loukopoulos V. C., Joldes G. R., Wittek A., Miller K. An explicit meshless point collocation method for electrically driven magnetohydrodynamics (MHD) flow // *Applied Mathematics and Computation*. 2019. Vol. 348. P. 215-233. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.11.054>
20. Dehghan M., Mirzaei D. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity // *Applied Numerical Mathematics*. 2009. Vol. 59, No. 5. P. 1043-1058. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2008.05.001>
21. Dehghan M., Mirzaei D. Meshless local boundary integral equation (LBIE) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow in rectangular and circular pipes // *Computer Physics Communications*. 2009. Vol. 180, No. 9. P. 1458-1466. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.03.007>
22. Li J., Sladek J., Sladek V., Wen P. H. Hybrid meshless displacement discontinuity method (MDDM) in fracture mechanics: Static and dynamic // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2020. Vol. 83. P. 104023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104023>
23. Brighenti R. Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems // *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. Vol. 72, No. 18. P. 2808-2820. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.06.002>
24. Shahane S., Radhakrishnan A., Vanka S. P. A high-order accurate meshless method for solution of incompressible fluid flow problems // *Journal of*

Computational Physics. 2021. Vol. 445. P. 110623. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110623>

25. Li X. Development of a meshless Galerkin boundary node method for viscous fluid flows // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2011. Vol. 82, No. 2. P. 258-280. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2011.07.004>

26. Lashckarbolok M., Jabbari E. Collocated Discrete Least Squares (CDLS) meshless method for the simulation of power-law fluid flows // *Scientia Iranica*. 2013. Vol. 20, No. 2. P. 322-328. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2013.02.010>

27. Fihri-Fassi H., Elahrach K., Lotfi M., Ourihi R. Modeling of nonlinear behavior in solid mechanics by the EFG meshless method and the bipotential approach // *Future Learning Aspects of Mechanical Engineering : Proceedings of 2nd International Conference*, 5-7 Aug., Noida. Vol. 38, Part 1. Noida, 2020. P. 129-134.

28. Fooladi M., Golbakhshi H., Mohammadi M., Soleimani A. An improved meshless method for analyzing the time dependent problems in solid mechanics // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011. Vol. 35, No. 12. P. 1297-1302. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2011.05.012>

29. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates // *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 127-145. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)

30. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations // *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 147-161. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K)

31. Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions // *Advances in Computational Mathematics*. 1995. Vol. 4. P. 283. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03177517>

32. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree // *Advances in Computational Mathematics*. 1995. Vol. 4. P. 389-396. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02123482>
33. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Теория приближений и атомарные функции. Москва, 1978. 64 с.
34. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев, 1979. 196 с.
35. Колодяжний В. М., Рвачов В. О. Фінітні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь з частинними похідними // *Доповіді НАН України*. 2004. № 5. С. 17-22.
36. Колодяжний В. М., Рвачов В. О. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // *Доповіді НАН України*. 2005. № 1. С. 12-20.
37. Колодяжний В. М., Рвачев В. А. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // *Кибернетика и системный анализ*. 2007. Т. 43, № 6. С. 155-177.
38. Лісіна О. Ю. Побудова 3D атомарних радіальних базисних функцій, що породжуються оператором Гельмгольца // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2009. № 21. С. 53-59. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKNU_Mat_2009_21_15
39. Колодяжний В. М., Лісіна О. Ю. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій // *Доповіді НАН України*. 2011. № 8. С. 21-27. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/38513>
40. Протектор Д. О. Безсітковий підхід при комп'ютерному моделюванні двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій // *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. № 1. С. 89-98.
41. Kolodyazhny V. M., Lisin D. O. Meshless method to solve nonstationary heat conduction problems using atomic radial basis functions // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, No. 3. P. 434-440. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9526-z>

42. Shivanian E., Khodabandehlo H. R. Application of meshless local radial point interpolation (MLRPI) on a one-dimensional inverse heat conduction problem // *Ain Shams Engineering Journal*. 2016. Vol. 7, No. 3. P. 993-1000. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asej.2015.07.009>
43. Zhang X., Xiang H. A fast meshless method based on proper orthogonal decomposition for the transient heat conduction problems // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 84. P. 729-739. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.008>
44. Zhang X., Zhang P., Zhang L. An improved meshless method with almost interpolation property for isotropic heat conduction problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37, No. 5. P. 850-859. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.03.004>
45. Sun Y. A meshless method based on the method of fundamental solution for solving the steady-state heat conduction problems // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016. Vol. 97. P. 891-907. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.03.002>
46. Cheng R. J., Ge H. X. Meshless analysis of three-dimensional steady-state heat conduction problems // *Chinese Physics B*. 2010. Vol. 19, No. 9. P. 090201. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/9/090201>
47. Karagiannakis N. P., Bali N., Skouras E. D., Burganos V. N. An Efficient Meshless Numerical Method for Heat Conduction Studies in Particle Aggregates // *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, No. 3. P. 739-757. DOI: <https://doi.org/10.3390/app10030739>
48. Tadeu A., Chen C., António J., Simões N. A Boundary Meshless Method for Solving Heat Transfer Problems Using the Fourier Transform // *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. Vol. 3, No. 5, P. 572-585. DOI: <https://doi.org/10.4208/aamm.10-m1039>
49. Wang H., Qin Q.-H., Kang Y. L. A new meshless method for steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media // *Archive*

of Applied Mechanics. 2005. Vol. 74, No. 5. P. 563-579. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-005-0375-8>

50. Sladek J., Sladek V., Atluri S. Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Heat Conduction Problem in an Anisotropic Medium // CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2004. Vol. 6, No. 3, P. 309-318. DOI: <https://www.techscience.com/CMES/v6n3/24851>

51. Reutskiy S. Y. A meshless radial basis function method for 2D steady-state heat conduction problems in anisotropic and inhomogeneous media // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2016. Vol. 66. P. 1-11. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.01.013>

52. Wang H., Qin Q.-H., Kang Y. L. A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials // Computational Mechanics. 2006. Vol. 38, No. 1. P. 51-60. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0720-3>

53. Zhang Y., Sun F. L., Qu W., Gu Y., Young D. L. A meshless average source boundary node method for steady-state heat conduction in general anisotropic media // Computers & Mathematics with Applications. 2018. Vol. 75, No. 5. P. 1739-1755. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.11.036>

54. Skouras E. D., Bourantas G. C., Loukopoulos V. C., Nikiforidis G. C. Truly meshless localized type techniques for the steady-state heat conduction problems for isotropic and functionally graded materials // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35, No. 3. P. 452-464. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.09.007>

55. Partridge P. W., Brebbia C. A., Wrobel L. C. The Dual Reciprocity Boundary Element Method. Dordrecht, 1991. 284 p.

56. Chen C. S., Brebbia C. A. The Dual Reciprocity Method For Helmholtz-Type Operators // WIT Transactions on Modelling and Simulation. Boundary Elements XX. 1998. Vol. 21. P. 495-504. DOI: <https://doi.org/10.2495/BE980461>

57. Partridge P. W. Radial Basis Approximation Functions In The Boundary Element Dual Reciprocity Method // WIT Transactions on Modelling and Simulation.

Boundary Element Technology XIII. 1999. Vol. 23. P. 325-334. DOI: <https://doi.org/10.2495/BT990301>

58. Partridge P. W. Towards criteria for selecting approximation functions in the Dual Reciprocity Method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2000. Vol. 24. P. 519-529. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(00\)00032-1](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(00)00032-1)

59. Kupradze V. D., Aleksidze M. A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1964. Vol. 4, No. 4. P. 82-126. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90006-0)

60. Golberg M. A., Chen C. S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. *Boundary Integral Methods: Numerical and Mathematical Aspects* / ed. by M. A. Golberg. Boston, 1999. P. 103-176.

61. Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures // Journal of the Aeronautical Sciences. 1956. Vol. 23, No. 9. P. 805-824. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.3664>

62. Argyris J. H. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non- Linear Stress- Strain Relations Part I. General Theory // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1954. Vol. 26, No. 10. P. 347-356. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032482>; 1954. Vol. 26, No. 11. P. 383-394. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032491>; 1955. Vol. 27, No. 2. P. 42-58. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032525>; 1955. Vol. 27, No. 3. P. 80-94. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032535>; 1955. Vol. 27, No. 4. P. 125-134. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032545>; 1955. Vol. 27, No. 5. P. 145-158.

63. Argyris J. H., Kelsey S. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non- Linear Stress- Strain Relations Part II. Applications to Thermal Stress Problems and St. Venant Torsion // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 1954. Vol. 26, No. 12. P. 410-422. DOI: <https://doi.org/10.1108/eb032502>

64. Argyris J. H., Kelsey S. Energy Theorems and Structural Analysis. Boston, 1960. 85 p.
65. Clough R. W. The finite element method in plane stress analysis // Conference on Electronic Computation : Proceedings of Second ASCE, 8-9 Sept. 1960. : abstr. Pittsburgh, 1960. P. 345-378.
66. Yang K. M., Ma Y. C., Zhang Z. Y., Zhu J., Sun Z. B., Chen J. S., Zhao H. H., Song J., Li Q., Chen N. Q., Ma H. Y., Zhou J., Liu Y., Fan T. X. Anisotropic thermal conductivity and associated heat transport mechanism in roll-to-roll graphene reinforced copper matrix composites // *Acta Materialia*. 2020. Vol. 197. P. 342-354. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.07.021>
67. Ishii S., Higashino M., Goya S., Shkondin E., Tanaka K., Nagao T., Takayama O., Murai S. Extreme thermal anisotropy in high-aspect-ratio titanium nitride nanostructures for efficient photothermal heating // *Nanophotonics*. 2021. Vol. 10, No. 5. P. 1487-1494. DOI: <https://doi.org/10.1515/nanoph-2020-0569>
68. Sun Y., Zhou L., Han Y., Cui L., Chen L. A new anisotropic thermal conductivity equation for h-BN/polymer composites using finite element analysis // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2020. Vol. 160. P. 120157. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120157>
69. She Z., Wang K., Liu H. Thermal analysis of elliptical fiber-reinforced composites by the hybrid Trefftz finite element method // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 144. P. 118596. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118596>
70. McDonald P. W. The Computation of Transonic Flow Through Two-Dimensional Gas Turbine Cascades // *ASME 1971 International Gas Turbine Conference and Products Show*, 28 Mar. – 1 Apr. 1971. : abstr. Houston, 1971. P. 71-GT-89.
71. Vessakosol P., Chareonsuk J., Teschareon T. A finite volume method for an analysis of transient heat conduction in functionally graded materials // *2009 International Conference on Computer Engineering & Systems : Proceedings of ICCES'09*, 14-16 Dec., Cairo, 2009. P. 4-19.

72. Ji R., Wang Z., Ding C., Wang H., Bai J. Three-dimensional numerical study of the directional heat transfer in an L-shaped carbon/carbon composite thermal protection system // *International Journal of Thermal Sciences*. 2021. Vol. 168. P. 107018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.107018>
73. Fredholm I. Sur une classe d'équations fonctionnelles // *Acta Mathematica*. 1903. Vol. 27. P. 365-390. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421317>
74. Hess J. L., Smith A. M. O. Calculation of Nonlifting Potential Flow About Arbitrary Three-Dimensional Bodies // *Journal of Ship Research*. 1964. Vol. 8, No. 4. P. 22-44. DOI: <https://doi.org/10.5957/jsr.1964.8.4.22>
75. Jaswon M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory. I // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1963. Vol. 275, No. 1360. P. 23-32. URL: <http://www.jstor.org/stable/2414369>
76. Jaswon M. A., Symm G. T. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. London, 1977. 287 p.
77. Cruse T. A. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. II // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1968. Vol. 22, No. 2. P. 341-355. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(68\)90177-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90177-7)
78. Cruse T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics // *International Journal of Solids and Structures*. 1969. Vol. 5, No. 12. P. 1259-1274. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90071-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90071-7)
79. Rizzo F. J., Shippy D. J. A method of solution for certain problems of transient heat conduction // *AIAA Journal*. 1970. Vol. 8, No. 11. P. 2004-2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6038>
80. Shaw R. P. Diffraction of Acoustic Pulses by Obstacles of Arbitrary Shape with a Robin Boundary Condition // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1967. Vol. 41, No. 4A. P. 855-859. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1910417>
81. Brebbia C. A. *The Boundary Element Method for Engineers*. London, 1978. 189 p.

82. Shiah Y. C., Hwang P.-W., Yang R.-B. Heat Conduction in Multiply Adjoined Anisotropic Media with Embedded Point Heat Sources // *Journal of Heat Transfer*. 2006. Vol. 128, No. 2. P. 207-214. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2137765>
83. Tuan N. A., Shiah Y. C. Bem Study of 3D Heat Conduction in Multiply Adjoined Anisotropic Media with Quadratic Domain Heat Generation // *Journal of Mechanics*. 2019. Vol. 35, No. 2. P. 225-231. DOI: <https://doi.org/10.1017/jmech.2018.47>
84. Gu, Y., He X., Chen W., Zhang C. Analysis of three-dimensional anisotropic heat conduction problems on thin domains using an advanced boundary element method // *Computers & Mathematics with Applications*. 2018. Vol. 75, No. 1. P. 33-44. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.08.030>
85. Mera N. S., Elliott L., Ingham D. B., Lesnic D. Use of the boundary element method to determine the thermal conductivity tensor of an anisotropic medium // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2001. Vol. 44, No. 21. P. 4157-4167. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(01\)00028-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(01)00028-X)
86. Gingold R. A., Monaghan J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1977. Vol. 181, No. 3. P. 375-389. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
87. Lucy L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astronomical Journal*. 1977. Vol. 82. P. 1013-1024. DOI: <https://doi.org/10.1086/112164>
88. Tang Y., Chen S., Jiang Q. A conservative SPH scheme using exact projection with semi-analytical boundary method for free-surface flows // *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 82. P. 607-635. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.073>
89. Price D. J. Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics // *Journal of Computational Physics*. 2012. Vol. 231, No. 3. P. 759-794. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.12.011>

90. Jeong J. H., Jhon M. S., Halow J. S., Van Osdol J. Smoothed particle hydrodynamics: Applications to heat conduction // Computer Physics Communications. 2003. Vol. 153, No. 1. P. 71-84. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(03\)00155-3](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(03)00155-3)
91. Afrasiabi M., Klippel H., Roethlin M., Wegener K. An improved thermal model for SPH metal cutting simulations on GPU // Applied Mathematical Modelling. 2021. Vol. 100. P. 728-750. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.010>
92. Abidou D., Yusoff N., Nazri N., Omar Awang M. A., Hassan M. A., Sarhan A. A. D. Numerical simulation of metal removal in laser drilling using symmetric smoothed particle hydrodynamics // Precision Engineering. 2017. Vol. 49. P. 69-77. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2017.01.012>
93. Gharehdash S., Barzegar M., Palymskiy I. B., Fomin P. A. Blast induced fracture modelling using smoothed particle hydrodynamics // International Journal of Impact Engineering. 2020. Vol. 135. P. 103235. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.02.001>
94. Nayroles B., Touzot G., Villon P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements // Computational Mechanics. 1992. Vol. 10. P. 307-318. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00364252>
95. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1994. Vol. 37, No. 2. P. 229-256. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
96. Wu Q., Peng M. J., Fu Y. D., Cheng Y. M. The dimension splitting interpolating element-free Galerkin method for solving three-dimensional transient heat conduction problems // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021. Vol. 128. P. 326-341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.04.016>
97. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L., Tabbara M. Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture // International Journal of Solids and Structures. 1995. Vol. 32. P. 2547-2570. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00282-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00282-2)

98. Wu S., Xiang Y., Yao J., Wang S. An Element-Free Galerkin Coupled with Improved Infinite Element Method for Exterior Acoustic Problem // *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2019. Vol. 27, No. 2. P. 1850021. DOI: <https://doi.org/10.1142/S2591728518500214>
99. Abbaszadeh M., Dehghan M., Khodadadian A., Noii N., Heitzinger C., Wick T. A reduced-order variational multiscale interpolating element free Galerkin technique based on proper orthogonal decomposition for solving Navier–Stokes equations coupled with a heat transfer equation: Nonstationary incompressible Boussinesq equations // *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 426. P. 109875. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109875>
100. Zhang L., Ouyang J., Wang X., Zhang X. Variational multiscale element-free Galerkin method for 2D Burgers' equation // *Journal of Computational Physics*. 2010. Vol. 229, No. 19. P. 7147-7161. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.06.004>
101. Wu Q., Liu F. B., Cheng Y. M. The interpolating element-free Galerkin method for three-dimensional elastoplasticity problems // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 115. P. 156-167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.03.009>
102. Liu W. K., Jun S., Zhang Y. F. Reproducing kernel particle methods // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1995. Vol. 20. P. 1081-1106. DOI: <https://doi.org/10.1002/fld.1650200824>
103. Liu W. K., Chen Y., Jun S., Chen J. S., Belytschko T., Pan C., Uras R. A., Chang C. T. Overview and applications of the reproducing Kernel Particle methods // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 1996. Vol. 3. P. 3-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02736130>
104. Liu W. K., Li S., Belytschko T. Moving least-square reproducing kernel methods (I) Methodology and convergence // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997. Vol. 143. P. 113-154. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01132-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01132-2)

105. Li S., Liu W. K. Moving least-square reproducing kernel method Part II: Fourier analysis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 159-193. P. 159-193. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01082-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01082-1)
106. Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996. Vol. 39, No. 22. P. 3839-3866. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19961130\)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19961130)39:22<3839::AID-NME27>3.0.CO;2-R)
107. Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 315-346. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01088-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01088-2)
108. Oñate E., Idelsohn S. A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems // *Computational Mechanics*. 1998. Vol. 21. P. 283-292. DOI: <https://doi.org/10.1007/s004660050304>
109. Oñate E., Perazzo F., Miquel J. A finite point method for elasticity problems // *Computers & Structures*. 2001. Vol. 79. P. 2151-2163. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00067-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00067-0)
110. Atluri S., Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics // *Computational Mechanics*. 1998. Vol. 22. P. 117-127. DOI: <https://doi.org/10.1007/s004660050346>
111. Atluri S. N., Shen S. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods // *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2002. Vol. 3, No. 1. P. 11-52. URL: <https://www.techscience.com/CMES/v3n1/24752>
112. Abbaszadeh M., Dehghan M., Azis M. I. The meshless local Petrov-Galerkin method based on moving Taylor polynomial approximation to investigate unsteady diffusion–convection problems of anisotropic functionally graded materials related to incompressible flow // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021. Vol. 132. P. 469-480. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.06.026>

113. Bahmani E., Shokri A. Numerical study of the unsteady 2D coupled magneto-hydrodynamic equations on regular/irregular pipe using direct meshless local Petrov-Galerkin method // *Applied Mathematics and Computation*. 2022. Vol. 417. P. 126769. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126769>
114. Singh R., Singh K. M. Interpolating meshless local Petrov-Galerkin method for steady state heat conduction problem // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019. Vol. 101. P. 56-66. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.12.012>
115. Dai B., Wei D., Ren H., Zhang Z. The complex variable meshless local Petrov-Galerkin method for elastodynamic analysis of functionally graded materials // *Applied Mathematics and Computation*. 2017. Vol. 309. P. 17-26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.042>
116. Shivanian E. Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for three-dimensional nonlinear wave equations via moving least squares approximation // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2015. Vol. 50. P. 249-257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.08.014>
117. Rashidi Moghaddam M., Baradaran G. H. Three-dimensional free vibrations analysis of functionally graded rectangular plates by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method // *Applied Mathematics and Computation*. 2017. Vol. 304. P. 153-163. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.049>
118. Li M., Jiang T., Hon Y. C. A meshless method based on RBFs method for nonhomogeneous backward heat conduction problem // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2010. Vol. 34, No. 9. P. 785-792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.03.010>
119. You X., Li W., Chai Y. A truly meshfree method for solving acoustic problems using local weak form and radial basis functions // *Applied Mathematics and Computation*. 2020. Vol. 365. P. 124694. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124694>
120. Yun-Xin Z., Yong-Ji T. Meshless schemes for unsteady Navier–Stokes equations in vorticity formulation using radial basis functions // *Journal of*

Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 192, No. 2. P. 328-338. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.05.011>

121. Memari A., Khoshrovan Azar M. R., Vakili-Tahami F. Meshless fracture analysis of 3D planar cracks with generalized thermo-mechanical stress intensity factors // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2019. Vol. 99. P. 169-194. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.12.001>

122. Reutskiy S., Lin J. A meshless radial basis function method for steady-state advection-diffusion-reaction equation in arbitrary 2D domains // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2017. Vol. 79. P. 49-61. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.03.004>

123. Hosseini S., Rahimi G., Anani Y. A meshless collocation method based on radial basis functions for free and forced vibration analysis of functionally graded plates using FSDT // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021. Vol. 125. P. 168-177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.12.016>

124. Hariachevska I. V., Protektor D. O. Computer Simulation System for Nonlinear Processes Described by the Korteweg–de Vries–Burgers Equation // Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57, No. 6. P. 998-1007. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00425-y>

125. Lee C., Liu X., Fan S. Local multiquadric approximation for solving boundary value problems // Computational Mechanics. 2003. Vol. 30. P. 396-409. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0416-5>

126. Liu G. R., Gu Y. T. A point interpolation method for two-dimensional solids // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2001. Vol. 50, No. 4. P. 937-951. DOI: [https://doi.org/10.1002/1097-0207\(20010210\)50:4<937::AID-NME62>3.0.CO;2-X](https://doi.org/10.1002/1097-0207(20010210)50:4<937::AID-NME62>3.0.CO;2-X)

127. Liu G. R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. Boca Raton, 2003. 691 p.

128. Liu G. R., Gu Y. T. A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-d solids // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 246, No. 1. P. 29-46. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3626>

129. Liu X., Liu G. R., Tai K., Lam K. Y. Radial point interpolation collocation method (RPICM) for partial differential equations // *Computers & Mathematics with Applications*. 2005. Vol. 50. P. 1425-1442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.02.019>
130. Ahmadi I., Sheikhi N., Aghdam M. M., Nourazar S. S. A new local meshless method for steady-state heat conduction in heterogeneous materials // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2010. Vol. 34, No. 12. P. 1105-1112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.06.012>
131. Fu Z., Chen W., Qin Q.-H. Boundary knot method for heat conduction in nonlinear functionally graded material // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011. Vol. 35, No. 5. P. 729-734. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.11.013>
132. Gu Y., Chen W., Zhang C., He X. A meshless singular boundary method for three-dimensional inverse heat conduction problems in general anisotropic media // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 84. P. 91-102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.003>
133. Gu Y., Hua Q., Zhang C., He X. The generalized finite difference method for long-time transient heat conduction in 3D anisotropic composite materials // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 71. P. 316-330. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.023>
134. Thakur H. Nonlinear heat transfer analysis of spines using MLPG method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021. Vol. 131. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.06.016>
135. Singh I. V., Tanaka M., Endo M. Effect of interface on the thermal conductivity of carbon nanotube composites // *International Journal of Thermal Sciences*. 2007. Vol. 46, No. 9. P. 842-847. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.11.003>
136. Zhang J., Zhou G., Gong S., Wang S. Transient heat transfer analysis of anisotropic material by using Element-Free Galerkin method // *International*

Communications in Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 84. P. 134-143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2017.04.003>

137. Protektor D. O., Kolodyazhny V. M., Lisin D. O., Lisina O. Yu. A Meshless Method of Solving Three-Dimensional Nonstationary Heat Conduction Problems in Anisotropic Materials // Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57, No. 3. P. 470-480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00372-8>

138. Протектор Д. О., Лісін Д. О. Безсітковий підхід для розв'язку тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 20-21.

139. Protektor D. O. A Meshless Approach for Solving Heat Conduction Problems in Anisotropic Solids Using Radial Basis Functions // Sectoral research XXI : characteristics and features : collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the I International Scientific and Theoretical Conference, 26 Mar. 2021. : abstr. Chicago, 2021. P. 67-68.

140. Протектор Д. О., Колодяжний В. М., Лісін Д. О., Лісіна О. Ю. Безсітковий метод розв'язування тривимірних нестационарних задач теплопровідності в матеріалах з анізотропією // Кібернетика та системний аналіз. 2021. Т. 57, № 3. С. 152-163.

141. Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces // Journal of Geophysical Research. 1971. Vol. 76, No. 8. P. 1905-1915. DOI: <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01905>

142. Chen W., Fu Z., Chen C. S. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. Heidelberg, 2014. 90 p.

143. Buhmann M. D. Radial functions on compact support // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1998. Vol. 41, No. 1. P. 33-46. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0013091500019416>

144. Carlson R. E., Foley T. A. Interpolation of track data with radial basis methods // *Computers & Mathematics with Applications*. 1992. Vol. 24, No. 12. P. 27-34. DOI: [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(92\)90169-I](https://doi.org/10.1016/0898-1221(92)90169-I)
145. Shiah Y. C., Tan C. L. BEM treatment of three-dimensional anisotropic field problems by direct domain mapping // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2004. Vol. 28, No. 1. P. 43-52. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(03\)00114-0](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00114-0)
146. Jin B., Chen W. Boundary knot method based on geodesic distance for anisotropic problems // *Journal of Computational Physics*. 2006. Vol. 215, No. 2. P. 614-629. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.11.032>
147. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. London, 1959. 510 p.
148. Langtangen H. P., Linge S. *Finite Difference Computing with PDEs*. Cham, 2017. 507 p.
149. Nardini D., Brebbia C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Applied Mathematical Modelling*. 1983. Vol. 7, No. 3. P. 157-162. DOI: [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(83\)90003-3](https://doi.org/10.1016/0307-904X(83)90003-3)
150. Mathon R., Johnston R. L. The Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems by Fundamental Solutions // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1977. Vol. 14, No. 4. P. 638-650. DOI: <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/0714043>
151. Fairweather G., Karageorghis A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems // *Advances in Computational Mathematics*. 1998. Vol. 9. P. 69-95. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1018981221740>
152. Tikhonov A. N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1963. Vol. 151, No. 3. P. 501-504.
153. Hansen P. C. Truncated Singular Value Decomposition Solutions to Discrete Ill-Posed Problems with Ill-Determined Numerical Rank // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1990. Vol. 11, No. 3. P. 503-518. DOI: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0911028>

154. Chantasiriwan S. Investigation of the use of radial basis functions in local collocation method for solving diffusion problems // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 31, No. 8. P. 1095-1104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2004.08.007>
155. Šarler B., Vertnik R. Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems // Computers & Mathematics with Applications. 2006. Vol. 51, No. 8. P. 1269-1282. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.04.013>
156. Vertnik R., Šarler B. Meshless local radial basis function collocation method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2006. Vol. 16, No. 5. P. 617-640. DOI: <https://doi.org/10.1108/09615530610669148>
157. Šarler B. From Global to Local Radial Basis Function Collocation Method for Transport Phenomena // V. M. A. Leitão, C. J. S. Alves, C. A. Duarte. Advances in Meshfree Techniques. Computational Methods in Applied Sciences. Dordrecht, 2007. P. 257-282. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6095-3>
158. Kosec G., Šarler B. Local RBF Collocation Method for Darcy Flow // CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences. 2008. Vol. 25, No. 3. P. 197-208. DOI: <https://www.techscience.com/CMES/v25n3/25100>
159. Protektor D. O. Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-Type Operator // East European Journal of Physics. 2021. No. 4. P. 49-58. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2021-4-05>
160. Protektor D. O. Constructing Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-type Operator // Problemas y perspectivas de la aplicación de la investigación científica innovadora : Colección de documentos científicos «ΛΟΓΟΣ» con actas de la Conferencia Internacional Científica y Práctica, 11 Jun. 2021. : abstr. Panama, 2021. P. 117-119.
161. Ронкин Л. И. Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, 1977. 167 с.

162. Wiener N., Paley R. C. Fourier Transforms in the Complex Domain. New York, 1934. 183 p.
163. Kusuma H. H., Made D. P. N., Sudin M. R., Rohani M. S. The Growth and Growth Mechanism of Congruent LiNbO_3 Single Crystals by Czochralski Method // AIP Conference Proceedings. 2010. Vol. 1217, No. 1. P. 182-186. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3377808>
164. Kosmyna M., Nazarenko B., Puzikov V., Shekhovtsov A. Development of Growth Technologies for the Photonic Single Crystals by the Czochralski Method at Institute for Single Crystals, NAS of Ukraine // Acta Physica Polonica A. 2013. Vol. 124. P. 305-313. DOI: <http://dx.doi.org/10.12693/APhysPolA.124.305>
165. Michael D. W., Kolenbrander K., Lisy J. M. New cavity design for a LiNbO_3 optical parametric oscillator // Review of Scientific Instruments. 1986. Vol. 57, No. 6. P. 1210-1212. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1138632>
166. Yu C., Kung A. H. Grazing-incidence periodically poled LiNbO_3 optical parametric oscillator // Journal of the Optical Society of America B. 1999. Vol. 16, No. 12. P. 2233-2238. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.16.002233>
167. Andreou D. A LiNbO_3 optical parametric amplifier // Optics Communications. 1978. Vol. 27, No. 1. P. 171-176. DOI: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(78\)90200-6](https://doi.org/10.1016/0030-4018(78)90200-6)
168. Ahn B. H., Clark III W. W., Shurtz II R. R., Bates C. D. Second harmonic generation in LiNbO_3 and LiTaO_3 in the millimeter wave region // Journal of Applied Physics. 1983. Vol. 54, No. 3. P. 1251-1255. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.332187>
169. Sánchez-Dena O., Behel Z., Salmon E., Benichou E., Reyes-Esqueda J.-A., Brevet P.-F., Jonin C. Polarization-resolved second harmonic generation from LiNbO_3 powders // Optical Materials. 2020. Vol. 107. P. 110169. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2020.110169>
170. Protektor D. O., Lisin D. O. Simulation of Heat Transfer in Single-Crystal Lithium Niobate in Interaction with Continuous-Wave Laser Radiation // East

European Journal of Physics. 2022. No. 1. P. 10-15. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2022-1-02>

171. Протектор Д. О., Лісін Д. О., Лісіна О. Ю. Система комп'ютерного моделювання для розв'язку тривимірних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Радіоелектроніка та інформатика. 2019. Т. 84, № 1. С. 20-27. DOI: [https://doi.org/10.30837/1563-0064.1\(84\).2019.184712](https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712)

172. Protektor D. O., Hariachevska I. V. Software for simulation of non-stationary heat transfer in anisotropic solid // An integrated approach to science modernization: methods, models and multidisciplinarity : Proceedings of the III Correspondence International Scientific and Practical Conference, 29 Apr. 2022. : abstr. Vienna, 2022. P. 356-358.

173. Протектор Д. О., Гарячевська І. В. Програмний комплекс для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом // Комп'ютерні технології і мехатроніка : збірник наукових праць за матеріалами IV Міжнародної науково-методичної конференції, 26 трав. 2022 р., Харків, 2022. С. 67-71.

174. А. с. 112945 Україна, Комп'ютерна програма "Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D»" / Д. О. Протектор. № с202201916 ; заявл. 11.05.22 ; опубл. 16.05.22.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові
результати дисертації:**

Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. Protektor D. O. Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-Type Operator // East European Journal of Physics. 2021. No. 4. P. 49-58. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2021-4-05> (Scopus, Web of Science)

2. Protektor D. O., Lisin D. O. Simulation of Heat Transfer in Single-Crystal Lithium Niobate in Interaction with Continuous-Wave Laser Radiation // East European Journal of Physics. 2022. No. 1. P. 10-15. DOI: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2022-1-02> (Scopus, Web of Science)

(Особистий внесок здобувача: здійснив моделювання теплового процесу, який протікає в монокристалі ніобату літію при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням з використанням безсіткового методу; визначив час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання кристала LiNbO_3 , а також його температурний діапазон на всьому часовому інтервалі; обчислив норму відносної нев'язки отриманого наближеного розв'язку задачі нестационарної теплопровідності)

Публікація у періодичному науковому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science держави, яка входить до Організації економічного співробітництва та розвитку та Європейського Союзу (Нідерланди):

3. Protektor D. O., Kolodyazhny V. M., Lisin D. O., Lisina O. Yu. A Meshless Method of Solving Three-Dimensional Nonstationary Heat Conduction Problems in Anisotropic Materials // Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol.

57, No. 3. P. 470-480. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00372-8> (Scopus, Web of Science)

(Особистий внесок здобувача: розробив безсітковий метод розв'язання тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропних твердих тілах, заснований на комбінації методу подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків; застосував розроблений безсітковий метод для моделювання теплового процесу в анізотропному та ізотропному твердих тілах у формі куба зі сталим джерелом тепла)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Протектор Д. О., Лісін Д. О. Безсітковий підхід для розв'язку тривимірних нестационарних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Фізико-технічні проблеми енергетики та шляхи їх вирішення 2019 (ФТПЕШВ-2019) : матеріали Міжнародної науково-технічної конференції, 19 черв. 2019 р., Харків, 2019. С. 20-21.

5. Protektor D. O. A Meshless Approach for Solving Heat Conduction Problems in Anisotropic Solids Using Radial Basis Functions // Sectoral research XXI : characteristics and features : collection of scientific papers «SCIENTIA» with Proceedings of the I International Scientific and Theoretical Conference, 26 Mar. 2021. : abstr. Chicago, 2021. P. 67-68.

6. Protektor D. O. Constructing Family of the Atomic Radial Basis Functions of Three Independent Variables Generated by Helmholtz-type Operator // Problemas y perspectivas de la aplicación de la investigación científica innovadora : Colección de documentos científicos «ΛΟΓΟΣ» con actas de la Conferencia Internacional Científica y Práctica, 11 Jun. 2021. : abstr. Panama, 2021. P. 117-119.

7. Protektor D. O., Hariachevska I. V. Software for simulation of non-stationary heat transfer in anisotropic solid // An integrated approach to science modernization: methods, models and multidisciplinary : Proceedings of the III

Correspondence International Scientific and Practical Conference, 29 Apr. 2022. : abstr. Vienna, 2022. P. 356-358.

8. Протектор Д. О., Гарячевська І. В. Програмний комплекс для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом // Комп'ютерні технології і мехатроніка : збірник наукових праць за матеріалами IV Міжнародної науково-методичної конференції, 26 трав. 2022 р., Харків, 2022. С. 67-71.

**Наукові праці, які додатково відображають
наукові результати дисертації, авторські свідоцтва:**

9. Протектор Д. О., Лісін Д. О., Лісіна О. Ю. Система комп'ютерного моделювання для розв'язку тривимірних задач теплопровідності в анізотропному середовищі // Радіоелектроніка та інформатика. 2019. Т. 84, № 1. С. 20-27. DOI: [https://doi.org/10.30837/1563-0064.1\(84\).2019.184712](https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712)

(Особистий внесок здобувача: створив програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, який заснований на використанні розробленого безсіткового методу)

10. А. с. 112945 Україна, Комп'ютерна програма “Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D»” / Д. О. Протектор. № с202201916 ; заявл. 11.05.22 ; опубл. 16.05.22.

ДОДАТОК Б

АКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор навчально-наукового інституту
комп'ютерної фізики та енергетики
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна
к.т.н. Ірина ГАРЯЧЕВСЬКА
«28» травня 2022 р.



АКТ

з впровадження результатів дисертаційної роботи
Протектора Дениса Олеговича

Комісія у складі: заступник директора з наукової роботи ННІ КФЕ – к.ф.-м.н., доц. Марушенко Ілля Миколайович, заступник директора з навчальної роботи ННІ КФЕ – к.ф.-м.н., доц. Лісіна Ольга Юліївна, завідувач кафедри Інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах – к.ф.-м.н., доц. Сухов Руслан Володимирович, склали акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Протектора Д. О. на тему «Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах», подану на здобуття наукового ступеню доктора філософії за спеціальністю 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» у навчальний процес навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

Склад впровадження:

- безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах;
- сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу;
- програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом.

Комісія встановила, що результати дисертаційної роботи Протектора Д. О. були впроваджені у навчальний процес кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Безсіткові методи в задачах фізики» і «Обчислювальні методи в фізиці» для студентів 3 курсу бакалаврату та «Наближені методи розв'язання задач математичної фізики» і «Наближені обчислення у фізиці» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали».

Голова комісії

Ілля МАРУЩЕНКО

Члени комісії

Ольга ЛІСІНА

Руслан СУХОВ



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи та
міжнародної діяльності
НУ «Запорізька політехніка»
д.т.н., професор Валерій НАУМИК

» _____ 20__ р.

АКТ

з впровадження результатів дисертаційної роботи
Протектора Дениса Олеговича

Комісія у складі: заступник декана факультету радіоелектроніки та телекомунікацій – к.т.н., доц. Фурманова Наталія Іванівна, завідувач кафедри інформаційних технологій електронних засобів – д.т.н., доц. Єфименко Микола Володимирович, доцент кафедри інформаційних технологій електронних засобів – к.т.н. Малий Олександр Юрійович склали акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Протектора Д. О. на тему «Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах», подану на здобуття наукового ступеню доктора філософії за спеціальністю 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» у навчальний процес факультету радіоелектроніки та телекомунікацій Національного університету «Запорізька політехніка».

Склад впровадження:

– програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом.

Комісія встановила, що результати дисертаційної роботи Протектора Д. О. були впроваджені у навчальний процес кафедри інформаційних технологій електронних засобів факультету радіоелектроніки та телекомунікацій НУ «Запорізька політехніка» при проведенні лекційних та лабораторних практичних занять з курсів «Фізичні основи мікро- і наносистемної техніки» для студентів 3 курсу і «Тепломасообмін у радіоелектронних апаратах» для студентів 4 курсу бакалаврату спеціальності 172– «Телекомунікації та радіотехніка».

Голова комісії

Наталія ФУРМАНОВА

Члени комісії

Микола СФИМЕНКО

Олександр МАЛИЙ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник директора ІЕПТ

Саньков С.В.

« 01 ЛЕН » 06 2022 р.

АКТ

з впровадження результатів дисертаційної роботи
Протектора Дениса Олеговича

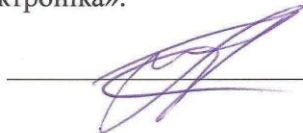
Комісія у складі: заступник директора Інституту електричної інженерії та інформаційних технологій – Санькова С.В., доцента кафедри КІЕ – Кухаренко Д.В., доцента кафедри КІЕ – Юрка О.О., доцента кафедри КІЕ – Мосьпана Д.В. склали акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Протектора Д. О. на тему «Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах», подану на здобуття наукового ступеню доктора філософії за спеціальністю 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» у навчальний процес Навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.

Склад впровадження:

- безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах;
- програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом.

Комісія встановила, що результати дисертаційної роботи Протектора Д. О. були впроваджені у навчальний процес кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки Навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Фізико-теоретичні основи конструювання електронної апаратури» студентів 2 курсу і «Конструювання електронних пристроїв» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 171 – «Електроніка».

Голова комісії



Кухаренко Д.В.

Члени комісії



Юрко О.О.



Мосьпан Д.В.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Декан дорожньо-будівельного факультету
Харківського національного автомобільно-
дорожнього університету
к.т.н. Володимир МАЛІЯР

«___» _____ 20__ р.

АКТ

з впровадження результатів дисертаційної роботи
Протектора Дениса Олеговича

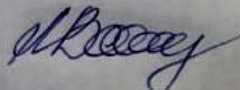
Комісія у складі: декан дорожньо-будівельного факультету - кандидат технічних наук, доцент Малир Володимир Володимирович, професор кафедри інформатики та прикладної математики Колодяжний Володимир Максимович, доцент кафедри інформатики та прикладної математики Шевченко Вікторія Олександрівна, склали акт про впровадження результатів дисертаційної роботи Протектора Д. О. на тему «Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах», подану на здобуття наукового ступеню доктора філософії за спеціальністю 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» у навчальний процес дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Склад впровадження:

– програмний комплекс «Anisotropic Heat Transfer 3D» для чисельного розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом.

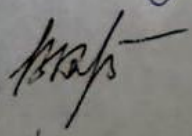
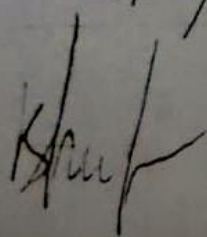
Комісія встановила, що результати дисертаційної роботи Протектора Д. О. були впроваджені у навчальний процес кафедри інформатики та прикладної математики дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсу «Комп'ютерні математичні технології» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 275.03 – «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)».

Голова комісії



Володимир МАЛІЯР

Члени комісії

Володимир
КОЛОДЯЖНИЙ

Вікторія ШЕВЧЕНКО

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційного дослідження
«Нестаціонарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах»

Протектора Дениса Олеговича

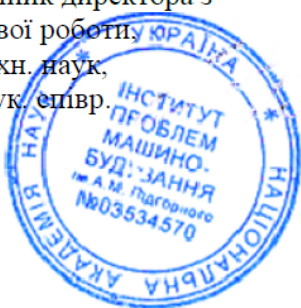
на здобуття наукового ступеню доктора філософії
за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Дисертаційна робота аспіранта кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Протектора Дениса Олеговича спрямована на дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестаціонарної теплопровідності.

В наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України можуть використовуватися такі результати дисертаційного дослідження, які мають практичну значущість:

1. Безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестаціонарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах;
2. Сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу;
3. Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для чисельного розв'язання тривимірних задач нестаціонарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу.

Заступник директора з
наукової роботи
д-р техн. наук,
ст. наук. співр.



Кирило МАКСИМЕНКО-ШЕЙКО

ДОДАТОК В
СВІДОЦТВО ПРО РЕЄСТРАЦІЮ АВТОРСЬКОГО ПРАВА

УКРАЇНА



СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 112945

Комп'ютерна програма «Програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D»

(вид, назва твору)

Автор(и) Протектор Денис Олегович

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 16 травня 2022 р.

Т.в.о. Генерального директора
Державного підприємства
«Український інститут
інтелектуальної власності»





Петро ІВАНЕНКО

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:05:11 03.11.2022

Назва файлу з підписом: Protektor_diss.pdf
Розмір файлу з підписом: 7.1 МБ

Назва файлу без підпису: Protektor_diss.pdf
Розмір файлу без підпису: 7.1 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Протектор Денис Олегович

П.І.Б.: Протектор Денис Олегович

Країна: Україна

РНОКПП: 3442007638

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 17:57:44 25.10.2022

Сертифікат виданий: КНЕДП АТ "УКРСИББАНК"

Серійний номер: 4454624186E4B18704000000BB970200FDAE0800

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підписаний PDF-файл (PAdES)

Формат підпису: З позначкою часу від ЕП (PAdES-B-T)

Сертифікат: Кваліфікований