

АНОТАЦІЯ

Протектор Д. О. Нестационарні теплові процеси в анізотропних твердих тілах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 – Прикладна фізика та наноматеріали (галузь знань 10 – Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2022.

Дисертацію присвячено дослідженню теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв’язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності.

Серед великого розмаїття задач математичної фізики, які нині успішно вирішуються, особливу роль займають задачі теплопровідності в анізотропних матеріалах. Насамперед це пов’язано з активним використанням анізотропних матеріалів при виготовленні великої кількості сучасних приладів та пристроїв, деталей конструкцій та машин – наприклад, трансформаторів із сердечниками з текстурованої сталі (в електротехніці), лопаток газотурбінних двигунів із жароміцних нікелевих сплавів з монокристалічною структурою (в авіації), п’єзоперетворювачів, електрооптичних модуляторів та рідкокристалічних індикаторів (в електронному приладобудуванні). Сучасні анізотропні матеріали зі складною структурою (наприклад, композитні матеріали, багат шарові матеріали, покриття, нанесені на підкладки) все частіше використовуються в новітніх інженерних розробках, а також в якості конструкційних матеріалів.

У різних технологічних процесах і пристроях дані матеріали піддаються тепловому впливу, внаслідок чого в них відбуваються фізико-хімічні явища, зокрема зміна геометричних розмірів. Неконтрольоване теплове розширення конструкційних матеріалів може призвести до погіршення експлуатаційних характеристик пристрою, а також до аварійних ситуацій. Тому при створенні та використанні таких матеріалів необхідно враховувати анізотропію їх теплофізичних властивостей, а також досліджувати теплові процеси, які в них протікають.

Розробка нових ефективних підходів до моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах є актуальною та перспективною задачею. В даний час існують різні підходи до моделювання теплових процесів в анізотропних матеріалах, що засновані на використанні як методів сіток, так і безсіткових схем. Незважаючи на різноманітність числових методів, найбільш широко використовуваними серед них залишаються методи сіток, а саме метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів та метод граничних елементів, які були розроблені ще у минулому столітті. Методи сіток мають ряд істотних недоліків, до яких можна віднести великі обчислювальні та часові витрати, що виникають в процесі дискретизації області крайової задачі, порушення гладкості представлення заокруглених границь об'єкта, труднощі використання в задачах, в яких слід враховувати зміну геометричної форми досліджуваного об'єкта і це лише деякі з них.

Даних недоліків позбавлені безсіткові методи розв'язання крайових задач, які відносяться до широкого класу ефективних числових методів, що не використовують у своїй концепції інтерполяційну сітку. У безсіткових методах апроксимація диференціальних рівнянь з частинними похідними заснована виключно на наборі довільно розташованих вузлів в яких розміщуються базисні функції. Відсутність зв'язків між вузлами позбавляє потреби в проведенні трудомісткої процедури генерації інтерполяційної сітки. Попередні дослідження показали, що безсіткові методи продемонстрували свою ефективність при розв'язанні задач теплопровідності в ізотропних матеріалах, а також при розв'язанні двовимірних задач стаціонарної теплопровідності в матеріалах з анізотропією. Це стимулювало розробку безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності, який характеризувався би високим рівнем точності, обчислювальною ефективністю та простотою реалізації, для подальшого дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах.

Метою дисертаційної роботи є дослідження теплових процесів в анізотропних твердих тілах за допомогою безсіткового методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності.

Основні завдання дисертаційного дослідження: дослідити теоретичні аспекти в області числового моделювання теплових процесів із застосуванням безсіткових підходів; розробити безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах; провести моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних радіальних базисних функцій; оцінити точність результатів моделювання безсітковим методом, заснованим на використанні анізотропних радіальних базисних функцій, шляхом зіставлення отриманих результатів моделювання з аналітичними розв'язками крайових задач або за допомогою обчислення відносних нев'язок; провести аналіз існуючих схем побудови атомарних радіальних базисних функцій багатьох незалежних змінних, що породжені різними диференціальними операторами; побудувати сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, породжених диференціальним оператором спеціального типу, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; розробити методику використання сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних, які враховують анізотропію матеріалу, при моделюванні нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах з використанням безсіткового методу; провести моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла, за допомогою безсіткового методу на основі використання анізотропних і атомарних радіальних базисних функцій; здійснити порівняльний аналіз точності отриманих результатів моделювання нестационарного теплового процесу в твердому анізотропному тілі в формі пластини безсітковим методом при

використанні анізотропних і атомарних радіальних функцій в якості базисних; дослідити модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом ніобату літію LiNbO_3 у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановити час, протягом якого досягається сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 ; розробити програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $AH_{orp}_k(x_1, x_2, x_3)$; провести тестування розробленого програмного комплексу.

В дисертаційній роботі представлено розроблений безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах [137-140]. Дана безсіткова схема заснована на комбінації методу подвійного заміщення з використанням анізотропних радіальних базисних функцій з методом фундаментальних розв'язків. Метод подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями використовується для отримання частинного розв'язку, а метод фундаментальних розв'язків використовується для отримання однорідного розв'язку крайової задачі. Розглянуто застосування методу фундаментальних розв'язків у випадку однозв'язних та багатозв'язних областей. Дискретизація за часом диференціального рівняння нестационарної теплопровідності в описаному безсітковому методі здійснюється з використанням θ -схеми методу скінченних різниць. Розроблений безсітковий метод являє собою ефективний інструмент для моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах складної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла.

Побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AH_{orp}_k(x_1, x_2, x_3)$, які породжуються оператором типу Гельмгольца [159, 160]. Функції $AH_{orp}_k(x_1, x_2, x_3)$ розширюють підклас функцій, які використовуються в якості базисних при реалізації безсіткового

методу розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах. Характерні властивості функції $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ (нескінченна диференційовність та фінітність, тобто наявність компактного носія) дозволили підвищити точність та обчислювальну ефективність розробленого безсіткового методу. Використання фінітних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних дало змогу розв'язувати крайові задачі на областях зі складною геометричною конфігурацією. Отримано явні формули для обчислення функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перетворення Фур'є. Представлено візуалізацію атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ та їх перших похідних за змінними x_1 і x_2 при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків. Представлено візуалізацію функції $(L(K) - \delta^2)AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ при фіксованому значенні змінної $x_3 = 0$ для ізотропного та анізотропного випадків.

Продемонстровано результати числових розрахунків нестационарних теплових процесів, що протікають в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми за наявності внутрішніх джерел або стоків тепла, а також різними початковими та граничними умовами, які отримані із використанням розробленого безсіткового методу.

Отримано наближені розв'язки тривимірної задачі нестационарної теплопровідності в твердому тілі в формі куба за наявності внутрішнього джерела тепла для ізотропного та анізотропного випадків [137, 140]. Проілюстровано застосування атомарних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при моделюванні нестационарного теплового процесу в анізотропному твердому тілі в формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла [159]. Знайдено аналітичні розв'язки даних задач нестационарної теплопровідності. Оцінено точність наближених розв'язків крайових задач за величиною значень середньої відносної похибки $\text{avg}(u)$, середньої абсолютної похибки $\text{aavg}(u)$ і максимальної похибки $\text{max}(u)$. Проведено порівняльний

аналіз ефективності апроксимації задач нестационарної теплопровідності анізотропними радіальними базисними функціями з глобальним носієм та атомарними радіальними базисними функціями $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$. Використання атомарних радіальних базисних функцій $ANor_p_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних, дозволило підвищити точність отриманих розв'язків.

Представлено результати моделювання теплового процесу, що протікає в монокристалі $LiNbO_3$ в формі циліндра при взаємодії з безперервним лазерним випромінюванням потужністю 50 Вт та довжиною хвилі 1064 нм [170]. Визначено, що приблизно через 4 постійних часу температура монокристала переходить в сталий стан, і знаходиться в діапазоні від 27.74 до 28.24 °С. Наведено результати числових розрахунків розподілу температурного поля всередині та на поверхні монокристалу $LiNbO_3$ в різні моменти часу, та оцінено точність отриманих наближених розв'язків за величиною норми відносної нев'язки.

Проілюстровано ефективність застосування розробленого безсіткового методу при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності на багатозв'язній області, а саме при моделюванні теплового процесу в перфорованій графітовій пластині за наявності комбінації різних типів граничних умов.

Результати числових розрахунків, отримані з використанням безсіткового методу, добре узгоджуються з результатами, отриманими при використанні методу скінченних елементів (МСЕ), що свідчить про високу ефективність розробленої безсіткової схеми вже на невеликій кількості інтерполяційних вузлів.

Розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D», який призначено для числового розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах за безсітковим методом [171-173], що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір [174]. Проведено тестування розробленого програмного комплексу «AnisotropicHeatTransfer3D» при числовому розв'язанні розглянутих

тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає у наступному: вперше розроблено безсітковий метод розв'язання тривимірних задач нестационарної теплопровідності в анізотропних твердих тілах, який засновано на комбінації методу подвійного заміщення в поєднанні з анізотропними радіальними базисними функціями та методу фундаментальних розв'язків; вперше проведено моделювання розподілу нестационарних температурних полів в анізотропних твердих тілах різної геометричної форми при наявності внутрішніх джерел або стоків тепла за допомогою розробленого безсіткового методу; вперше побудовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; вперше програмно реалізовано алгоритм побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$, породжених диференціальним оператором типу Гельмгольца, який включає в себе компоненти тензора другого рангу, що визначає анізотропію матеріалу; вперше застосовано сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$ в якості базисних при реалізації безсіткового методу числового розрахунку теплових процесів, які протікають в анізотропних твердих тілах; вперше проведено моделювання розподілу нестационарного температурного поля в анізотропному твердому тілі у формі пластини при наявності рухомого точкового джерела тепла за допомогою безсіткового методу на основі використання атомарних радіальних базисних функцій $AHorp_k(x_1, x_2, x_3)$; вперше за допомогою розробленого безсіткового методу досліджено модель взаємодії безперервного лазерного випромінювання з довжиною хвилі 1064 нм з монокристалом $LiNbO_3$ у формі циліндра на часовому інтервалі 2 год 30 хв і встановлено час, протягом якого досягається

сталий режим нагрівання монокристалу LiNbO_3 ; вперше розроблено програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах у вигляді додатка з графічним інтерфейсом користувача, який засновано на використанні розробленого безсіткового методу та атомарних радіальних базисних функцій $AH_{orp_k}(x_1, x_2, x_3)$, що підтверджується свідоцтвом про державну реєстрацію авторського права на твір.

Розроблена безсіткова схема моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах може бути використана при реалізації нових ефективних підходів до моделювання теплового стану тіла за наявності процесів плавлення, випаровування або затвердіння, а також методів розв'язання задач нестационарної теплопровідності в композиційних матеріалах з довільним числом рухомих границь фазових перетворень (задача Стефана).

Сімейство атомарних радіальних базисних функцій трьох незалежних змінних $AH_{orp_k}(x_1, x_2, x_3)$, які враховують анізотропію матеріалу, являють собою новий підклас функцій, які можуть використовуватися в якості базисних при реалізації безсіткових методів та підходів к моделюванню теплових процесів в анізотропних матеріалах.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та розроблений програмний комплекс «AnisotropicHeatTransfer3D» для моделювання нестационарних теплових процесів в анізотропних твердих тілах, були впроваджені у навчальний процес:

1. Кафедри інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Безсіткові методи в задачах фізики» і «Обчислювальні методи в фізиці» для студентів 3 курсу бакалаврату та «Наближені методи розв'язання задач математичної фізики» і «Наближені обчислення у фізиці» для студентів 1 курсу магістратури спеціальності 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали» (Додаток Б);

2. Кафедри інформаційних технологій електронних засобів факультету радіоелектроніки та телекомунікацій НУ «Запорізька політехніка» при проведенні лекційних та лабораторних практичних занять з курсів «Фізичні основи мікро- і наносистемної техніки» для студентів 3 курсу і «Тепломасообмін у радіоелектронних апаратах» для студентів 4 курсу бакалаврату спеціальності 172 – «Телекомунікації та радіотехніка» (Додаток Б);

3. Кафедри комп'ютерної інженерії та електроніки навчально-наукового інституту електричної інженерії та інформаційних технологій Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсів «Фізико-теоретичні основи конструювання електронної апаратури» для студентів 2 курсу і «Конструювання електронних пристроїв» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 171 – «Електроніка» (Додаток Б);

4. Кафедри інформатики та прикладної математики дорожньо-будівельного факультету Харківського національного автомобільно-дорожнього університету при проведенні лекційних, лабораторних та практичних занять з курсу «Комп'ютерні математичні технології» для студентів 3 курсу бакалаврату спеціальності 275.03 – «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» (Додаток Б).

Результати дисертаційної роботи використовуються в наукових дослідженнях Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, про що свідчить відповідна довідка про використання результатів дисертаційного дослідження (Додаток Б).

Ключові слова: задачі нестационарної теплопровідності, анізотропні тверді тіла, безсітковий метод, метод подвійного заміщення, метод фундаментальних розв'язків, анізотропні радіальні базисні функції, атомарні радіальні базисні функції, оператор типу Гельмгольца, ніобат літію, лазерне випромінювання.