

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Лотарець Ляна Андріївна

УДК: 514.7

ДИСЕРТАЦІЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ РОЗЩАРОВАНИХ
ПРОСТОРІВ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ МЕТРИКАМИ

Спеціальність 111 – Математика
(Галузь знань 11 – Математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії з математики. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Л. А. Лотарець

Науковий керівник: Ямпольський Олександр Леонідович,
доктор фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2025

Анотація

Лотарець Л. А. Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертацію присвячено дослідженню метрик розшарованих просторів, їхніх властивостей, та їх узагальнень на більш широкий клас метрик які призводять до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні.

Природною метрикою на дотичному розшаруванні є метрика Сасакі, геометричні властивості якої добре відомі. Насправді ж загалом метрика Сасакі має лише властивості загальної ріманової метрики, бо на шарах метрика Сасакі співпадає з метрикою базового многовиду. Але можна узагальнити визначення метрики Сасакі, дозволивши метриці на шарах відрізнятися від базової. Деформація метрики Сасакі призводить до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні. Головним питанням, яким займалися і займаються багато відомих математиків, є: як саме нова деформована метрика Сасакі змінює геометрію дотичного розшарування?

Метою дослідження є виявлення залежностей геометричних властивостей загальних векторних розшарувань від метрики на розшарованому просторі, а також знаходження зв'язку між властивостями базового многовиду і шарів загального розшарування, вивчення геометричних властивостей перерізів загального розшарування для різних типів узагальнених метрик.

Об'єктом дослідження є геометричні властивості дотичних розшарувань ріманових многовидів та їх перерізів з різними деформаціями метрики Сасакі.

Предметами дослідження є узагальнення метрики Сасакі, геодезичні лінії дотичного розшарування, особливості сасакієвого многовиду, а також гармоні-

чні, мінімальні та цілком геодезичні векторні поля.

Завданнями дослідження є:

- узагальнення сигар солітонної метрики на дотичне розшарування;
- дослідження геодезичних ліній дотичного розшарування з пошарово сигар солітонною метрикою;
- дослідження гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасаки;
- класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення у випадку вертикально масштабованої метрики на одиничному дотичному розшаруванні;
- знаходження виразу для другої основної форми підмноговиду, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою;
- знаходження умов, за яких відображення що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою може бути цілком геодезичним.

Для дослідження використано методи диференціальної геометрії, ріманової геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії груп та алгебр Лі.

Розділ 1 дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям з геометрії розшарованих просторів, а також огляду літератури. Наведено базові відомості з геометрії дотичного розшарування та одиничного дотичного розшарування, контактних многовидів, метрики Сасаки, векторних полів на рімановому многовиді як відображень та підмноговидів. Зроблено огляд таких понять, як гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність векторного поля та відображення.

Розділ 2 дисертаційної роботи присвячено узагальненню сигар солітонної метрики Річарда Гамільтона як деформації метрики Сасаки на дотичному розшаруванні ріманова многовиду.

Після доведення Річардом Гамільтоном та Григорієм Перельманом гіпотези Пуанкаре з'явилося багато публікацій щодо геометрії так званих *солітонів Річі*. Їх досліджували багато математиків (див., наприклад, [9, 11, 13]), серед яких є і українські [24]. Першим приклад некомпактного сталого солітона Річі на площині винайшов Р. Гамільтон [19]. Цей двовимірний многовид конформно еквівалентний площині з функцією конформності $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ і називається *сигар солітоном Гамільтона*. Конформно еквівалентні метрики та конформні відображення також вивчали інші математики [43]. За аналогією з двовимірним многовидом, природно можна визначити метрику на дотичному розшаруванні.

Введено поняття *пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки* або *пошарово (гамільтонової) сигар солітонної метрики* на дотичному розшаруванні ріманового многовиду. Вона є частковим, але вмотивованим, випадком метрики яку досліджували А. Загане і М. Джаа в роботах [51, 52].

Основною метою дослідження є вивчення *геодезичних* дотичного розшарування ріманового многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонною метрикою з фокусом на *локально симетричні многовиди* та *многовиди сталої кривини* у ролі бази розшарування. Властивості просторів зі сталою секційною кривиною також досліджували інші українські математики [20, 21, 22].

Отримано диференціальні рівняння натурально параметризованих геодезичних відносно зв'язності Леві-Чивіти пошарово сигар солітонної метрики. Доведено, що у випадку *локально симетричної бази* усі *геодезичні кривини* проєкції похилої геодезичної на базу є *сталими*, і у випадку *бази зі сталою кривиною* усі *геодезичні кривини* починаючи з третьої дорівнюють *нулю*. Отримано рівняння геодезичних на дотичних розшаруваннях просторів сталої кривини з пошарово (гамільтоновою) сигарою солітонною деформацією метрики Сасаки.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні. Було вперше введено поняття "пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки" (або "пошарово гамільтонової сигар солітонної метрики") і досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з такою метрикою.

Розділ 3 дисертаційної роботи присвячено вивченню *гармонічних одиничних векторних полів* на одиничному дотичному розшаруванні зі *скрученою метрикою Сасаки*.

Математики Л. Беларбі та Х. Ель Хенді [3] запропонували досить зрозумілу деформацію метрики Сасаки на TM . Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема *вертикально масштабовану метрику* [14, 10, 4]. Вертикально масштабована метрика потребує особливої уваги, бо така деформація є більш природним узагальненням метрики Сасаки, ніж скручена метрика Сасаки. А саме, геометрично вертикальна масштабована метрика здійснює поточкову гомотетичну деформацію у шарах. Саме цією метрикою Л. Беларбі та Х. Ель Хенді надихались при вивченні геометрії дотичного розшарування скрученої метрики Сасаки.

У своїй роботі ми вивчаємо скручену метрику Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні. Головною метою дослідження є пошук деформацій які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Li з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, використовуючи ортонормований репер і класифікацію Дж. Мілнора [33]. Більш того, ми хочемо описати і класифікувати таких векторних полів та відображень відповідно до класифікації Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] у випадку вертикально масштабованої метрики. Також ми розглядаємо гармонічні векторні поля та відображення у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду. Властивості ве-

кторних полів та відображень, які визначається одиничними векторними полями, також вивчали деякі українські математики [20, 23, 24, 25].

Отримано необхідні та достатні умови гармонічності лівоінваріантного одиничного векторного поля та відображення $M \rightarrow T_1M$, що задається цим полем. Отримано необхідні та достатні умови гармонічності лівоінваріантного одиничного векторного поля та відображення $M^2 \rightarrow T_1M^2$, що задається цим полем, відносно деякого ортонормованого репера. Описано лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля та гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, що задається цим полем, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, з використанням деякого ортонормованого репера. Зроблена класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, в окремому випадку скрученої метрики Сасакі, а саме у випадку *вертикально масштабованої метрики*.

У дисертаційній роботі вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, а також вперше було класифіковано такі векторні поля та відображень у випадку вертикально масштабованої метрики.

Розділ 4 дисертаційної роботи присвячено вивченню випадку, коли *непаралельне* одиничне векторне поле ξ на рімановому многовиді (M, g) визначає *ізометричне занурення* $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, де G є рімановою g -натуральною метрикою.

Математики М.Т.К. Аббассі і М. Саріх М. [1, 2] запропонували досить узагальнену деформацію метрики Сасакі на дотичному розшаруванні, а саме ріманову g -натуральну метрику. Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема метрику Чігера-Громолла [10, 44]. Ріманова g -натуральна ме-

трика, незважаючи на свою складну будову, має одну цікаву особливість яку досліджував Д. Перроне [36]. Розглядаючи метрику Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, відображення, яке задається одиничним векторним полем, є *ізометричним вкладенням* тільки якщо це векторне поле є *паралельним*. Однак, Д. Перроне показав, що існує випадок коли *непаралельне* одиничне векторне поле визначає *ізометричне занурення*. Він також досліджував *гармонічність* і *мінімальність відображень* [17, 46], що визначаються такими векторними полями. Він довів, що для ізометрії нам необхідно у якості непаралельного векторного поля взяти *рібовське* векторне поле на базовому многовиді і певну сім'ю ріманових g -натуральних метрик на одиничному дотичному розшаруванні. Також зауважимо, що метрика на одиничному дотичному розшаруванні, яка розглядається в теоремі, не включає в себе метрику Сасакі.

Природним доповнення до результатів Д. Перроне буде дослідження *цілком геодезичності* одиничних векторних полів, що визначають ізометричне вкладення. Основною метою є знаходження умов, за яких відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ може бути *цілком геодезичним*. Цілком геодезичні відображення є окремим випадком геодезичних відображень. Геодезичні відображення також досліджували інші українські математики [20, 22, 23, 25, 42, 43].

Доведено, що *рібовське векторне поле* K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M породжує цілком геодезичне відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ тоді і тільки тоді, коли ця структура є *сасакієвою*. Знайдено вираз для *другої основної форми* відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне вкладення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні. Також вперше було отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

Практичним значенням отриманих результатів є доповнення наявних результатів з геометрії розшарованих просторів.

Ключові слова: дотичне розшарування, метрика Сасаки, геодезичні, скручена метрика Сасаки, вертикально масштабована метрика, одиничне дотичне розшарування, група Лі, гармонічне векторне поле, гармонічне відображення, сасакиєв многовид, K -контактний многовид, рібовське векторне поле, ізометричне занурення, цілком геодезичний многовид.

Abstract

Liana A. Lotarets. Differential geometry of bundles with generalized metrics. – Qualification scientific work is as a manuscript. A thesis on the degree of Doctor of Philosophy: Speciality 111 – Mathematics (Mathematics and statistics). – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The thesis is devoted to the study of metrics of bundles, their properties, and their generalizations to a broader class of metrics that lead to different geometries in the fibers and the entire tangent bundle.

The standard metric on the tangent bundle is the Sasaki metric, whose geometric properties are well known. However, in general, the Sasaki metric possesses only the properties of a general Riemannian metric since, on the fibers, it coincides with the metric of the base manifold. Nevertheless, one can generalize the Sasaki metric definition allowing the fiber metric to be different from the base one. A deformation of the Sasaki metric brings another geometry to the fibers and the whole tangent bundle. The main question, which has been and continues to be studied by many renowned mathematicians, is: to what extent the new fiber-wise metric changes the geometry of the tangent bundle?

The aim of the study is to identify the dependence of the geometric properties of general vector bundles on the metric of the bundle, as well as to establish the relationship between the properties of the base manifold and the fibers of a general bundle. Additionally, the study explores the geometric properties of sections of a general bundle for different types of generalized metrics.

The object of the study is the geometric properties of tangent bundles of Riemannian manifolds and their sections with various deformations of the Sasaki metric.

The subjects of the study are generalizations of the Sasaki metric, geodesic lines of the tangent bundle, properties of the Sasakian manifold, as well as harmonic,

minimal, and totally geodesic vector fields.

The objectives of the study are:

- generalization of the cigar soliton metric to the tangent bundle;
- investigation of geodesic lines in the tangent bundle with a fiberwise cigar soliton metric;
- study of harmonic unit vector fields on the unit tangent bundle with a twisted Sasaki metric;
- classification of left-invariant harmonic unit vector fields that define harmonic maps in the case of a vertical rescaled metric on the unit tangent bundle;
- derivation of the expression for the second fundamental form of a submanifold defined by a unit vector field in the unit tangent bundle of a Riemannian manifold with a g -natural metric;
- determination of the conditions under which a map defined by a unit vector field in the unit tangent bundle of a Riemannian manifold with a g -natural metric can be totally geodesic.

The study employs methods of differential geometry, Riemannian geometry, differential equations, mathematical analysis, linear algebra, group theory, and Lie algebras.

Section 1 of the thesis is devoted to fundamental concepts in the geometry of bundles, as well as a literature review. It provides basic information on the geometry of the tangent bundle and the unit tangent bundle, contact manifolds, the Sasaki metric, and vector fields on a Riemannian manifold as maps and submanifolds. An overview of concepts such as harmonicity, minimality, and totally geodesicity of vector fields and maps is also given.

Section 2 of the thesis is devoted to the generalization of Richard Hamilton's cigar soliton metric as a deformation of the Sasaki metric on the tangent bundle of

a Riemannian manifold.

After the proof of the Poincaré conjecture by Richard Hamilton and Grigori Perelman, numerous publications appeared concerning the geometry of the so-called *Ricci solitons*. They have been studied by many mathematicians (see, for example, [9, 11, 13]), including Ukrainian researchers [24]. The first example of a noncompact steady Ricci soliton on a plane was found by R. Hamilton [19]. The first example of a noncompact steady Ricci soliton on the plane was discovered by R. Hamilton [19]. This two-dimensional manifold is conformally equivalent to the plane with the conformal function $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ and is called the *Hamilton's cigar soliton*. Conformally equivalent metrics and conformal mappings have also been studied by other mathematicians [43]. By analogy with the two-dimensional manifold, it is natural to define a corresponding metric on the tangent bundle.

The concept of a *fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton deformation of the Sasaki metric* or *fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton metric* on the tangent bundle of a Riemannian manifold is introduced. It represents a particular but well-motivated case of the metric studied by A. Zagane and M. Djaa in [51, 52].

The main objective of the study is to examine the *geodesics* of the tangent bundle of a Riemannian manifold with a fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton metric, focusing on *locally symmetric manifolds* and *manifolds of constant curvature* as the base of the bundle. The properties of spaces with constant sectional curvature have also been studied by other Ukrainian mathematicians [20, 21, 22].

Differential equations for naturally parameterized geodesics with respect to the Levi-Civita connection of the fiberwise cigar soliton metric have been obtained. It has been proven that in the case of a *locally symmetric base*, all *geodesic curvatures* of the projection of an oblique geodesic onto the base are *constant*, and in the case of a *base with constant curvature*, all *geodesic curvatures* starting from the third one are *zero*. The geodesic equations for tangent bundles of spaces with constant curvature under the fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton deformation of the Sasaki metric have been derived.

In the thesis, for the first time, a generalization of the Hamiltonian cigar soliton metric, which is a two-dimensional manifold, was studied as a metric on the tangent bundle. The concept of "fiberwise cigar soliton deformation of the Sasaki metric" (or "fiberwise Hamiltonian cigar soliton metric") was introduced for the first time, and the geodesic lines of the tangent bundle with this metric were investigated.

Section 3 of the thesis is devoted to the study of *harmonic unit vector fields* on the unit tangent bundle with the *twisted Sasaki metric*.

Mathematicians L. Belarbi and H. El Hendi [3] proposed a fairly intuitive deformation of the Sasaki metric on TM . This metric encompasses several other well-known metrics, including *vertical rescaled metric* [14, 10, 4]. The vertical rescaled metric requires special attention, as this deformation is a more natural generalization of the Sasaki metric than the twisted Sasaki metric. Specifically, geometrically, the vertical rescaled metric performs a pointwise homothetic deformation within the fibers. It was precisely this metric that inspired L. Belarbi and H. El Hendi in their study of the geometry of the tangent bundle with the twisted Sasaki metric.

In our work, we study the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle. The main goal of the research is to identify deformations that preserve the existence of harmonic left-invariant unit vector fields on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant metric, as well as harmonic maps defined by unit vector fields, in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle, using an orthonormal frame and the classification by J. Milnor [33]. Moreover, we aim to describe and classify such vector fields and maps according to the classification by J. C. González-Dávila and L. Vanhecke [18] in the case of the vertical rescaled metric. We also consider harmonic vector fields and maps in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle of a two-dimensional Riemannian manifold. The properties of vector fields and mappings defined by unit vector fields have also been studied by some Ukrainian mathematicians [20, 23, 24, 25].

Necessary and sufficient conditions for the harmonicity of a left-invariant unit vector field and a map $M \rightarrow T_1M$ defined by this field have been obtained. Necessary

and sufficient conditions for the harmonicity of a left-invariant unit vector field and the map $M^2 \rightarrow T_1M^2$, defined by this field with respect to a certain orthonormal frame, have also been established. Description of left-invariant harmonic unit vector fields and harmonic maps $G \rightarrow T_1G$, defined by such fields, has been provided, where G is a three-dimensional unimodular Lie group with a left-invariant metric, using a certain orthonormal frame. A classification of left-invariant harmonic unit vector fields that determine harmonic maps $G \rightarrow T_1G$, where G is a three-dimensional unimodular Lie group with a left-invariant metric, has been carried out in the special case of the twisted Sasaki metric, namely in the case of the *vertical rescaled metric*.

In the thesis, for the first time, deformations preserving the existence of harmonic left-invariant unit vector fields on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant metric and harmonic maps defined by a unit vector field in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle were described. Additionally, such vector fields and maps were classified for the first time in the case of the vertical rescaled metric.

Section 4 of the thesis is devoted to studying the case when a *non-parallel* unit vector field ξ on a Riemannian manifold (M, g) defines an *isometric immersion* $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, where G is a *Riemannian g -natural metric*.

Mathematicians M.T.K. Abbassi and M. Sarih [1, 2] proposed a rather general deformation of the Sasaki metric on the tangent bundle, namely the Riemannian g -natural metric. This metric includes several other well-known metrics, in particular the Cheeger-Gromoll metric [10, 44]. Despite its complicated formation, the Riemannian g -natural metric possesses an interesting property studied by D. Perrone [36]. When considering the Sasaki metric on the unit tangent bundle, a map defined by a unit vector field is an *isometric embedding* only if the vector field is *parallel*. However, D. Perrone demonstrated that there exists a case where a *non-parallel* unit vector field determines an *isometric embedding*. He also investigated the *harmonicity* and *minimality* of maps [17, 46] defined by such vector fields. Perrone proved that for an isometry, it is necessary to take the Reeb vector field on the base manifold as

the non-parallel vector field and consider a certain family of Riemannian g -natural metrics on the unit tangent bundle. Moreover, it should be noted that the metric on the unit tangent bundle considered in this theorem does not include the Sasaki metric.

A natural complement to D. Perrone's results would be the study of the *totally geodesic* nature of unit vector fields that define an isometric embedding. The main goal is to determine the conditions under which the map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ can be *totally geodesic*. Totally geodesic maps are a special case of geodesic maps. Geodesic maps have also been studied by other Ukrainian mathematicians [20, 22, 23, 25, 42, 43].

It has been proven that the *Reeb vector field* of a K -contact metric structure on a Riemannian manifold M induces a totally geodesic map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ if and only if this structure is *Sasakian*. An expression for the *second fundamental form* of the map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ has been obtained.

In the thesis, the total geodesicity of non-parallel unit vector fields defining an isometric embedding on a K -contact metric manifold with a g -natural metric on the unit tangent bundle was studied for the first time. Additionally, for the first time, an expression for the second fundamental form of the map defined by a unit vector field on a Riemannian manifold with a g -natural metric on the unit tangent bundle was obtained.

The practical significance of the obtained results lies in complementing the existing findings in the geometry of bundles.

Keywords: tangent bundle, Sasaki metric, geodesics, Twisted Sasaki metric, vertical rescaled metric, unit tangent bundle, Lie group, harmonic vector field, harmonic map, Sasakian manifold, K -contact manifold, Reeb vector field, isometric embedding, totally geodesic manifold.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

- L. Lotarets. A characteristic property of Sasakian manifolds. Proceedings of the International Geometry Center, 17(3):218–231, 2024.

DOI: 10.15673/pigc.v17i3.2866

Keywords: Sasakian manifold, K-contact manifold, unit tangent bundle, Reeb vector field, isometric embedding, totally geodesic manifold

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

- L. Lotarets. Geodesics of fiberwise cigar soliton deformation of the Sasaki metric. Turkish Journal of Mathematics, 46:130–144, 2022.

DOI: 10.3906/mat-2107-99

Keywords: Sasaki metric, tangent bundle, geodesics

- L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. Turkish Journal of Mathematics, 48:123–143, 2024.

DOI: 10.55730/1300-0098.3498

Keywords: harmonic map, harmonic vector field, Lie group, Twisted Sasaki metric, unit tangent bundle, vertical rescaled metric

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

- L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2023.
- Л. Лотарець. Геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. Семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України, 2024.

- L. Lotarets. Reeb vector field as isometric embedding. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2024.

Зміст

Вступ	19
1 Базові відомості	25
1.1 Дотичне розшарування. Метрика Сасаки	25
1.2 Векторні поля на рімановому многовиді як відображення і підмноговиди	27
1.3 Гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність вектор- ного поля та відображення	29
1.4 Контактні метричні многовиди	31
2 Пошарово сигар солітонна деформація метрики Сасаки та її гео- дезичні	35
2.1 Солітон Річі Гамільтона. Пошарово сигар солітонна метрика	35
2.2 Геодезичні пошарово сигар солітонної метрики	38
2.3 Похилі геодезичні на дотичних розшаруваннях многовидів з сталою секційною кривиною	44
2.4 Висновки до розділу	51
3 Скручена метрика Сасаки на одиничному дотичному розшаруван- ні і гармонічність	53
3.1 Скручена метрика Сасаки. Гармонічність векторних полів та їх відображень	53
3.2 Двовимірні ріманові многовиди	59
3.3 Тривимірні унімодулярні групи Лі	61
3.4 Висновки до розділу	76

4	Особливість ріманової g -натуральної метрики.	79
4.1	g -натуральна метрика. Дослідження Перроне	79
4.2	Цілком геодезичне ізометричне вкладення	81
4.3	Висновки до розділу	91
	Висновки до дисертації	93
	Список використаних джерел	100

Вступ

Обґрунтування вибору теми дослідження. Природною метрикою на дотичному розшаруванні є метрика Сасаки. Геометричні властивості метрики Сасаки добре відомі. Насправді ж загалом метрика Сасаки має лише властивості загальної ріманової метрики, бо на шарах метрика Сасаки співпадає з метрикою базового многовиду. Але *можна узагальнити визначення метрики Сасаки, дозволивши метриці на шарах відрізнятися від базової*. Деформація метрики Сасаки призводить до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванню. Головне питання: *Як саме нова деформована метрика Сасаки змінює геометрію дотичного розшарування?* Багато відомих математиків займалися і продовжують займатись цим питанням. Розглянемо декілька прикладів, що стали натхненням для вибору теми дисертаційної роботи.

Після доведення Річардом Гамільтоном та Григорієм Перельманом гіпотези Пуанкаре з'явилося багато публікацій щодо геометрії так званих *солітонів Річі*. Їх досліджували багато математиків (див., наприклад, [9, 11, 13]), серед яких є також українські [24]. Першим приклад некомпактного сталого солітона Річі на площині винайшов Р. Гамільтон [19]. Цей двовимірний многовид конформно еквівалентний площині з функцією конформності $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ і називається *сигар солітоном Гамільтона*. Конформно еквівалентні метрики та конформні відображення також вивчали українські математики [43]. За аналогією з двовимірним многовидом, природно можна визначити метрику на дотичному розшаруванні. Таку метрику було названо *пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки (або пошарово гамільтоновою сигар солітонною метрикою)* [27]. Вона є частковим, але вмотивованим, випадком метрики яку досліджували А. Загане і М. Джаа в роботах [51, 52]. У своїй роботі ми досліджуємо геодезичні лінії дотичного розшарування ріманового многовиду з пошарово сигар солітонною метрикою з фокусом на *локально симетричні многовиди та многовиди сталої секційної кривини* у ролі бази розшарування. Властивості

просторів зі сталою секційною кривиною вивчали також інші українські математики [20, 21, 22].

Математики Л. Беларбі та Х. Ель Хенді [3] запропонували досить зрозумілу деформацію метрики Сасаки на TM . Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема *вертикально масштабовану метрику* [14, 10, 4]. Вертикально масштабована метрика потребує особливої уваги, бо така деформація є більш природним узагальненням метрики Сасаки, ніж скручена метрика Сасаки. А саме, геометрично вертикальна масштабована метрика здійснює поточкову гомотетичну деформацію у шарах. Саме цією метрикою Л. Беларбі та Х. Ель Хенді надихались при вивченні геометрії дотичного розшарування скрученої метрики Сасаки.

У своїй роботі ми вивчаємо скручену метрику Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні. Головною метою дослідження є пошук деформацій які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Li з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, використовуючи ортонормований репер і класифікацію Дж. Мілнора [33]. Більш того, ми хочемо описати і класифікувати таких векторних полів та відображень відповідно до класифікації Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] у випадку вертикально масштабованої метрики. Також ми розглядаємо гармонічні векторні поля та відображення у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду. Властивості векторних полів та відображень, які визначається одиничними векторними полями, також вивчали інші українські математики [20, 23, 24, 25, 37].

Математики М.Т.К. Аббассі і М. Саріх [1, 2] запропонували досить узагальнену деформацію метрики Сасаки на TM і T_1M , а саме ріманову g -натуральну метрику. Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема метрику Чігера-Громолла [10, 44]. Ріманова g -натуральна метрика, незважаючи

на свою складну будову, має одну цікаву особливість яку досліджував Д. Перроне [36]. Розглядаючи метрику Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, відображення, яке задається одиничним векторним полем, є *ізометричним вкладенням* тільки якщо це векторне поле є *паралельним*. Однак, Д. Перроне показав, що існує випадок коли *непаралельне* одиничне векторне поле визначає *ізометричне вкладення*. Він також досліджував *гармонічність* і *мінімальність відображень* [17, 46], що визначаються такими векторними полями. Він довів, що для ізометрії нам необхідно у якості непаралельного векторного поля взяти рібовське векторне поле на базовому многовиді і певну сім'ю ріманових g -натуральних метрик на одиничному дотичному розшаруванні. Також зауважимо, що метрика на одиничному дотичному розшаруванні, яка розглядається в теоремі, не включає в себе метрику Сасакі.

Природним доповнення до результатів Д. Перроне буде дослідження *цілком геодезичності* одиничних векторних полів, що визначають ізометричне вкладення. У своїй роботі ми доповнили результати Д. Перроне, дослідивши цілком геодезичність рібовського векторного поля ріманового многовиду з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні. Цілком геодезичні відображення є окремим випадком геодезичних відображень. Геодезичні відображення також досліджували інші українські математики [20, 22, 23, 25, 42, 43].

Мета і завдання дослідження.

- *Мета* – дослідити залежність геометричних властивостей загальних векторних розшарувань від метрики на розшарованому просторі; зв'язок між властивостями базового многовиду і шарів загального розшарування; геометричні властивості перерізів загального розшарування для різних типів узагальнених метрик.
- *Об'єкт дослідження* – геометричні властивості дотичних розшарувань ріманових многовидів та їх перерізів з різними деформаціями метрики

Сасаки.

- *Предмет дослідження* – узагальнення метрики Сасаки, геодезичні дотичного розшарування, гармонічні, мінімальні та цілком геодезичні векторні поля, особливості сасакієвого многовиду.
- *Завдання дослідження:*
 1. Узагальнити сигар-солітонну метрику на дотичне розшарування.
 2. Дослідити геодезичні дотичного розшарування з пошарово сигар солітонною метрикою.
 3. Дослідити гармонічні одиничні векторні поля на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасаки.
 4. Класифікувати лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля, які визначають гармонічні відображення у випадку вертикально масштабованої метрики на одиничному дотичному розшаруванні.
 5. Знайти вираз для другої основної форми підмноговиду, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою.
 6. Знайти умови, за яких підмноговид що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою може бути цілком геодезичним.
- *Методи дослідження.* У дисертаційній роботі використано методи диференціальної геометрії, ріманової геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії груп та алгебр Лі.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі вперше було досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні. Було вперше введено поняття "пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки"(або

"пошарово гамільтонової сигар солітонної метрики") і досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з такою метрикою.

У дисертаційній роботі вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Li з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, а також вперше було класифіковано такі векторні поля та відображень у випадку вертикально масштабованої метрики.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні. Також вперше було отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, в рамках державної науково-дослідницької роботи за темою "Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок між геометрією, алгеброю, та топологією" (номер проекту: 2020.02/0096) та в рамках конкурсу математичних проєктів 2023 фонду імені Н.І. Ахієзера. Результати досліджень також були відзначені стипендією фонду імені Н.І. Ахієзера у 2025 році.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить теоретичний характер. Результати роботи доповнюють наявні результати з геометрії розшарованих просторів.

Особистий внесок здобувача. Постановка задачі належить професору

Ямпольському О. Л. Статті [27], [29], [31] написано здобувачем самостійно. Усі результати, включені до дисертації, було отримано автором особисто, проте постійно обговорювались із науковим керівником.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на наступних конференціях:

1. L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. In International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2023.
2. Л. Лотарець. Геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. Семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України, 2024. 27 березня 2024 року.
3. L. Lotarets. Reeb vector field as isometric embedding. In International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2024.

Публікації. Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковано у фахових журналах, пройшов апробацію на наукових конференціях. Результати дисертації містяться у трьох статтях [27], [29], [31], які написані без співавторів, в тезах доповідей на двох конференціях [28], [30] та на семінарі [53].

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, переліку використаних джерел та додатків. Її повний обсяг становить – 106 сторінок. Список використаних джерел налічує 53 найменування (на 4 сторінках).

1 Базові відомості

1.1 Дотичне розшарування. Метрика Сасаки

Нехай M – гладкий многовид вимірності n . *Простір дотичного розшарування* TM многовиду M утворюється як диз'юнктне об'єднання

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \{(x, \xi) \mid x \in M, \xi \in T_x M\}, \quad (1)$$

де $T_x M$ – дотичний простір до M в точці $x \in M$. *Точкою* дотичного розшарування є пара (x, ξ) , де $x \in M$, $\xi \in T_x M$. Многовид M називають *базою* дотичного розшарування, а дотичний простір $T_x M$ називають *шаром* дотичного розшарування над точкою $x \in M$.

Позначимо через $x = (x^1, \dots, x^n)$ локальні координати на базовому многовиді M . Позначимо через $\mathfrak{X}(M)$ алгебру Лі гладких векторних полів на M . Через $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ будемо позначати відповідний локальний координатний репер. У такому разі будь-який дотичний вектор $\xi \in T_x M$ можна представити у вигляді

$$\xi = \xi^i \partial_i(x). \quad (2)$$

Незалежні параметри $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ параметризують шар $T_x M$. Таким чином, набір $(x^1, \dots, x^n; \xi^1, \dots, \xi^n)$ параметризує дотичне розшарування TM і називається *природними індукованими локальними координатами* на TM . Позначемо $\partial_{n+i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$. Тоді будь-який вектор $\tilde{X} \in T_{(x, \xi)} TM$ можна представити у вигляді

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \partial_i + \tilde{X}^{n+i} \partial_{n+i}. \quad (3)$$

В кожній точці $(x, \xi) \in TM$ дотичний простір $T_{(x, \xi)} TM$ дотичного розшарування TM розкладається в пряму суму *вертикальної* та *горизонтальної* складових:

$$T_{(x, \xi)} TM = \mathcal{H}_{(x, \xi)} TM \oplus \mathcal{V}_{(x, \xi)} TM. \quad (4)$$

Вертикальна складова $\mathcal{V}_{(x, \xi)}$ є дотичною до шарів дотичного розшарування, а горизонтальна складова $\mathcal{H}_{(x, \xi)}$ є трансверсальною до них.

Позначимо через $\pi : TM \rightarrow M$ проєкцію дотичного розшарування. *Відобра-*

ження $\pi_* : T_{(x,\xi)}TM \rightarrow TM$ діє на $\tilde{X}$ за правилом $\pi_*\tilde{X} = \tilde{X}^i\partial_i$. Відображення π_* визначає поточковий лінійний ізоморфізм між $\mathcal{H}_{(x,\xi)}(TM)$ та T_xM . Зауважимо, що $\ker \pi_*|_{(x,\xi)} = \mathcal{V}_{(x,\xi)}$. Відображення зв'язності $\mathcal{K} : T_{(x,\xi)}TM \rightarrow T_xM$ діє на $\tilde{X}$ за правилом $\mathcal{K}\tilde{X} = (\tilde{X}^{n+i} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \tilde{X}^k)\partial_i$, де Γ_{jk}^i — це символи Крістофеля метрики g . Відображення зв'язності $\mathcal{K}$ визначає поточковий лінійний ізоморфізм між $\mathcal{V}_{(x,\xi)}(TM)$ та T_xM . Зауважимо, що $\ker \mathcal{K}|_{(x,\xi)} = \mathcal{H}_{(x,\xi)}$. Образи $\pi_*\tilde{X}$ та $\mathcal{K}\tilde{X}$ називаються відповідно *горизонтальною* та *вертикальною проєкціями* $\tilde{X}$.

Операції, обернені до проєкцій, називаються *ліфтами* (див. [15]). Якщо $X \in T_xM$, тоді

$$X^h = X^i\partial_i - \Gamma_{jk}^i \xi^j X^k \partial_{n+i} \quad (5)$$

належить $\mathcal{H}_{(x,\xi)}TM$ і називається *горизонтальним ліфтом* вектора X , а

$$X^v = X^i \partial_{n+i} \quad (6)$$

належить $\mathcal{V}_{(x,\xi)}TM$ і називається *вертикальним ліфтом* вектора X . Горизонтальні та вертикальні ліфти векторного поля X є векторними полями на TM . Важливим є те, що

$$\mathcal{H}_{(x,\xi)} = \text{Span}\{\partial_i^h\}_{i=1}^n, \quad \mathcal{V}_{(x,\xi)} = \text{Span}\{\partial_i^v\}_{i=1}^n, \quad (7)$$

тобто, для вивчення геометрії дотичного розшарування достатньо обмежитись ліфтами векторних полів з бази на дотичне розшарування.

Нехай M — ріманів многовид з метрикою g . Позначимо через $g(\cdot, \cdot)$ скалярний добуток векторів, дотичних до M . Класичною метрикою на дотичному розшаруванні ріманового многовиду є *метрика Сасаки* [39], яка має першу фундаментальну форму виду

$$d\sigma^2 = ds^2 + |D\xi|^2 = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}D\xi^i D\xi^j, \quad (8)$$

де ds^2 — перша фундаментальна форма базового многовиду M , а $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{ks}^i \xi^s dx^k$ — коваріантний диференціал координат "векторної складової".

Метрику Сасаки G на дотичному розшаруванні ріманова многовиду (M, g) в кожній точці $(x, \xi) \in TM$ можна визначити за допомогою горизонтальних та

вертикальних ліфтів наступними формулами

$$G_{(x,\xi)}(X^h, Y^h) = g_x(X, Y), \quad (9)$$

$$G_{(x,\xi)}(X^h, Y^v) = 0, \quad (10)$$

$$G_{(x,\xi)}(X^v, Y^v) = g_x(X, Y). \quad (11)$$

Одиничне дотичне розшарування T_1M [40] визначається як гіперповерхня в дотичному розшаруванні TM , що задається рівнянням $g_x(\xi, \xi) = 1$. Тобто,

$$T_1M = \{(x, \xi) \mid x \in M, \xi \in T_xM, g_x(\xi, \xi) = 1\}. \quad (12)$$

У такому випадку шаром є сфера одиничного радіусу. Метрикою Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні T_1M є метрика, що індукована метрикою Сасаки TM на гіперповерхні T_1M . Зауважимо, що горизонтальні підпростори TM і T_1M співпадають, а вертикальні – ні. В кожній точці $(x, \xi) \in T_1M$ вектор $\xi^v = \xi^i \partial_i(x)^v$ є вектором одиничної нормалі гіперповерхні T_1M . Вертикальний підпростір T_1M є ортогональним доповненням до ξ^v у вертикальному підпросторі TM . У зв'язку з цим, Е. Бекс і Л. Ванхеке [6, 8] ввели поняття тангенціального ліфту, що визначається формулою

$$X^t = X^v - g(X, \xi)\xi^v. \quad (13)$$

Вочевидь, якщо X ортогонально ξ , то тоді $X^t = X^v$.

1.2 Векторні поля на рімановому многовиді як відображення і підмноговиди

Якщо $\xi(x)$ – це одиничне векторне поле на M , то воно визначає відображення $\xi : M \rightarrow T_1M$, що задається формулою

$$\xi(x) = (x, \xi(x)). \quad (14)$$

Геометрично $\xi(M)$ є явно заданим підмноговидом в T_1M . Позначимо через $T\xi(M)$ дотичне розшарування $\xi(M) \subset T_1M$. Тоді $T\xi(M) = \xi_*(TM)$, де ξ_* –

диференціал $\xi : M \rightarrow T_1M$ який можна визначити формулою

$$\xi_*X = X^h + (\nabla_X\xi)^v, \quad (15)$$

де ∇ є зв'язністю *Леві-Чівіті* на M .

Для гладкого одиничного векторного поля ξ *оператором Номідзу* називається оператор $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \xi^\perp \subset \mathfrak{X}(M)$, що діє за правилом

$$A_\xi X = -\nabla_X\xi. \quad (16)$$

Зауважимо, що

$$\xi_*X = X^h - (A_\xi X)^t. \quad (17)$$

Норма оператора Номідзу дорівнює

$$\|A_\xi\|^2 = \sum_{k=1}^n g(A_\xi e_k, A_\xi e_k) \quad (18)$$

відносно деякого ортонормованого реперу $(e_1, \dots, e_n)$, де $n = \dim(M)$.

Грубим гессіаном [48] векторного поля ξ називається тензорне поле

$$Hess_\xi(X, Y) = \frac{1}{2}((\nabla_X A_\xi)Y + (\nabla_Y A_\xi)X), \quad (19)$$

де $(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y)$.

Тензором ξ -гармонічності [48] векторного поля ξ називається тензорне поле

$$Hm_\xi(X, Y) = \frac{1}{2}(R(\xi, A_\xi X)Y + R(\xi, A_\xi Y)X), \quad (20)$$

де R є *тензором кривини* M .

Грубим лапласіаном (або *лапласіаном Бохнера*) векторного поля ξ називається поле

$$\bar{\Delta}\xi = -trace\nabla^2\xi, \quad (21)$$

де $\nabla_{X,Y}^2 = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y}$. Також грубий лапласіан можна порахувати за формулою

$$\bar{\Delta}\xi = trace(Hess_\xi) \quad (22)$$

або

$$\bar{\Delta}\xi = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A_\xi)e_i \quad (23)$$

відносно деякого ортонормованого реперу $(e_1, \dots, e_n)$, де $n = \dim(M)$.

1.3 Гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність векторного поля та відображення

Нехай (M, g) і $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ріманові многовиди і $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$. Позначимо через $\phi_* : TM \rightarrow T\tilde{M}$ диференціал цього відображення. $\forall p \in M$ вектор $X_p \in T_p M$ переходить у вектор $\phi_* X_p \in T_{\phi(p)} \tilde{M}$.

Друга основна форма відображення $\phi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ між рімановими многовидами визначається як

$$B_\phi(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y) - \phi_*(\nabla_X Y), \quad (24)$$

де $\tilde{\nabla}$ — індукована зв'язність Леві-Чівіті на $\phi(M)$, а ∇ — зв'язність Леві-Чівіті на M .

Відображення $\phi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ називається *геодезичним*, якщо воно переводить геодезичні лінії многовида M у геодезичні лінії многовида $\tilde{M}$. Відображення $\phi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ називається *цілком геодезичним*, якщо воно є геодезичним ізометричним зануренням. Геодезичні відображення досліджували деякі українські математики у роботах [20, 22, 23, 25, 42, 43]. Цілком геодезичні відображення досліджував О. Ямпольський у [47, 48].

Якщо ϕ — ізометричне занурення, то друга основна форма відображення ϕ збігається з другою основною формою зануреного многовида (підмноговида) $\phi(M)$. Це означає, що дослідження цілком геодезичності відображення ϕ еквівалентно дослідженню цілком геодезичності підмноговида $\phi(M) \subset \tilde{M}$.

Поле напруженості відображення $\phi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ задається як

$$\tau(\phi) = \text{trace}(B_\phi). \quad (25)$$

Відображення $\phi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ називається *мінімальним*, якщо $\tau(\phi) = 0$. Проте, підмноговид $\phi(M) \subset \tilde{M}$ може не бути мінімальним. Розглянемо одينية векторне поле ξ як відображення $\xi : M \rightarrow T_1 M$. Тоді мінімальність від-

ображення ξ еквівалентна мінімальності підмноговида $\xi(M) \subset T_1M$. У цьому випадку, одиничне векторне поле ξ також називається *мінімальним*.

Означення 1.1 Нехай B_ξ і $\tau(\xi)$ – друга основна форма і поле напруженості відображення $\xi : M \rightarrow T_1M$ відповідно. Позначимо $hB_\xi(X, Y) = \pi_*(B_\xi(X, Y))$ і $vB_\xi(X, Y) = \mathcal{K}(B_\xi(X, Y))$. Тоді

$$\tau(\xi) = (\text{trace}(hB_\xi))^h + (\text{trace}(vB_\xi))^t. \quad (26)$$

Кажуть, що

- одиничне векторне поле ξ називається **гармонічним**, якщо

$$\exists \lambda \in C^\infty(M) : \text{trace}(vB_\xi) = \lambda \xi; \quad (27)$$

- одиничне векторне поле ξ визначає **гармонічне відображення** $\xi : M \rightarrow T_1M$, якщо

$$1. \ \xi \text{ є гармонічним, тобто } \exists \lambda \in C^\infty(M) : \text{trace}(vB_\xi) = \lambda \xi;$$

2.

$$\text{trace}(hB_\xi) = 0; \quad (28)$$

Саме такі означення використовуються у роботі. Розглянемо також інші еквівалентні означення гармонічності векторного поля та відображення.

Одиничне векторне поле ξ на компактному рімановому многовиді (M, g) називається *гармонічним* (див. [7, 46]), якщо ξ є критичною точкою функціоналу енергії (*total bending*) поля ξ

$$B(\xi) = \int_M \|A_\xi\|^2 dv_g, \quad (29)$$

де v_g – елемент об'єму M .

Г. Вігмінк [46] довід, що одиничне векторне поле ξ на компактному рімановому многовиді є *гармонічним* тоді і тільки тоді, коли

$$\bar{\Delta}\xi = \|A_\xi\|^2 \xi. \quad (30)$$

Ця умова еквівалентна умові (27) у випадку метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні.

Відображення $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ між рімановими многовидами називається *гармонічним*, якщо ϕ є критичною точкою функціоналу енергії відображення f

$$E(f) = \int_M e(f) dv_g, \quad (31)$$

де $e(f) = \frac{1}{2} \|f_*\|_h^2$ – це *густина енергії* f , а f_* – *диференціал (pushforward)* відображення f . А саме, $e(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h(f_* e_i, f_* e_i)$ відносно деякого ортонормованого реперу $(e_1, \dots, e_n)$, де $n = \dim(M)$, і dv_g – елемент об'єму M .

Доведено [16], що одиничне векторне поле ξ визначає *гармонічне відображення* $\xi : M \rightarrow T_1 M$ тоді і тільки тоді, коли поле ξ є *гармонічним* і

$$\text{trace}(Hm_\xi) = 0. \quad (32)$$

Ця умова еквівалентна умові (28) у випадку метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні.

Наступна теорема показує зв'язок між гармонічністю і мінімальністю відображення.

Теорема 1.2 *Якщо відображення $\xi : M \rightarrow T_1 M$ є ізометричним зануренням, то ξ є мінімальним тоді і тільки тоді, коли ξ є гармонічним.*

Наступна теорема показує зв'язок між цілком геодезичними векторними полями і гармонічністю та мінімальністю відображення.

Теорема 1.3 *Будь-яке відображення, що задається цілком геодезичним векторним полем є гармонічним і мінімальним.*

1.4 Контактні метричні многовиди

Диференційований многовид M вимірності $(2n + 1)$ має (ϕ, ξ, η) -структуру, якщо він допускає поле ϕ ендоморфізмів дотичних просторів, векторне поле ξ

та 1-форму η , які задовольняють такі умови:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad (33)$$

де I позначає тотожне перетворення. Звернемо увагу, що

$$\phi\xi = 0, \quad \eta \circ \phi = 0. \quad (34)$$

Якщо многовид M зі (ϕ, ξ, η) -структурою допускає ріманову метрику g , таку що

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (35)$$

для будь-яких векторних полів X, Y , тоді говорять, що M має (ϕ, ξ, η, g) -структуру, або *майже контактну метричну структуру*, а g називається *сумісною метрикою*. Якщо позначити $Y = \xi$, то негайним наслідком є те, що η є коваріантною формою для ξ , тобто

$$\eta(X) = g(X, \xi). \quad (36)$$

Визначимо 2-форму Φ на M як

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y). \quad (37)$$

Звернемо увагу, що

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y). \quad (38)$$

Будемо називати Φ *основною 2-формою* майже контактної метричної структури (ϕ, ξ, η, g) . Якщо $\Phi = d\eta$, то майже контактну метричну структуру (ϕ, ξ, η, g) називають *контактною метричною структурою*, а (M, ϕ, ξ, η, g) іє називають *контактним метричним многовидом*, де ξ називається *рібовським векторним полем*, а η однозначно визначає ξ за допомогою таких умов:

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, X) = 0. \quad (39)$$

Рібовське векторне поле відіграє фундаментальну роль у вивченні ріманової геометрії контактної метричної структури. Більш детальну інформацію про контактні метричні многовиди та рібовські векторні поля можна знайти у [5, 50]. Крім того, розглянемо кілька типів майже контактних метричних многовидів.

Означення 1.4 Диференційований $(2n+1)$ -вимірний контактний метричний многовид (M, g, η, ξ, ϕ) називається K -контактним многовидом, якщо ξ є кілінговим векторним полем.

Еквівалентно, $(M, g, \eta, \xi, \phi) \in K$ -контактним многовидом тоді і тільки тоді, коли

$$\mathcal{L}_\xi \phi = 0, \quad (40)$$

де $\mathcal{L}_\xi \phi$ — це похідна Лі ϕ уздовж векторного поля ξ . Основною властивістю K -контактного многовиду є те, що

$$\nabla_X \xi = -\phi X. \quad (41)$$

Іншими важливими властивостями K -контактного многовиду є:

$$\eta(R(\xi, X)Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (42)$$

$$(\nabla_X \phi)Y = R(\xi, X)Y, \quad (43)$$

$$R(\xi, X)\xi = -X + \eta(X)\xi. \quad (44)$$

Звернемо увагу, що рівняння (42) є прямим наслідком рівняння (44).

Означення 1.5 Контактний метричний многовид (M, g, η, ξ, ϕ) називається сасакієвим, якщо

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (45)$$

Звернемо увагу, що будь-який сасакієв многовид є K -контактним. Важливою властивістю сасакієвого многовиду є те, що

$$R(\xi, X)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \quad (46)$$

Означення 1.6 Контактний метричний многовид (M, g, η, ξ, ϕ) майже сасакієвим многовидом, якщо

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = 2g(X, Y)\xi - \eta(X)Y - \eta(Y)X. \quad (47)$$

Звернемо увагу, що сасакієв многовид є майже сасакієвим. З рівняння (47) ми отримуємо

$$\nabla_X \xi = -\phi X - HX, \quad (48)$$

де

$$HX = \phi(\nabla_\xi \phi)X. \quad (49)$$

Тензорне поле H має тип $(1, 1)$ і задовольняє рівнянням $H\xi = 0$, $\eta \circ H = 0$, а також

$$\nabla_\xi H = -\nabla_\xi \phi = \phi H = -\frac{1}{3}\mathcal{L}_\xi \phi. \quad (50)$$

Якщо H тотожно дорівнює нулю, то майже сасакієв многовид є сасакієвим. Звернемо увагу, що, використовуючи (40), (49) та (50), ми отримуємо наступний результат.

Теорема 1.7 *Майже сасакієв многовид є K -контактним тоді і тільки тоді, коли він є сасакієвим.*

Варто зауважити, що у випадку вимірності $2n + 1 > 5$ відомо, що кожен майже сасакієв многовид є сасакієвим [35]. Більш детальну інформацію про K -контактні, сасакієві та майже сасакієві многовиди можна знайти в [35, 5, 32, 50, 38, 12].

2 Пошарово сигар солітонна деформація метрики Сасакі та її геодезичні

2.1 Солітон Річі Гамільтона. Пошарово сигар солітонна метрика

Після доведення Р. Гамільтоном та Г. Перельманом гіпотези Пуанкаре з'явилося багато публікацій щодо геометрії так званих *солітонів Річі*.

Означення 2.1 *Ріманів многовид (M, g) називається солітоном Річі якщо існує таке векторне поле V та стала величина λ такі, що метричний тензор g задовольняє рівнянню*

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g + Ric = \lambda g, \quad (51)$$

де $\mathcal{L}_V g$ – похідна Лі метричного тензору g у напрямку поля V , а Ric – тензор Річі метричного тензору g .

Солітони Річі діляться на три класи відповідно до значень константи λ . А саме,

- якщо $\lambda < 0$, то солітон Річі називається *таким що розширюється*;
- якщо $\lambda > 0$, то солітон Річі називається *таким що скорочується*;
- якщо $\lambda = 0$, то солітон Річі називається *сталим*.

Якщо V є градієнтом деякої функції F (потенціалу солітону), то солітон Річі називається *градієнтним*. Для градієнтних солітонів Річі рівняння (51) може бути записано у вигляді

$$Hess(F) + Ric = \lambda g, \quad (52)$$

де $Hess(F)_{ij} = \nabla_i \nabla_j F$ позначає гессіан потенціальної функції F . Існує велика кількість публікацій о геометрії солітонів Річі. Їх досліджували багато математиків (див., наприклад, [9, 11, 13]), серед яких є і українські [24].

Першим приклад некомпактного сталого солітона Річі на площині винайшов Р. Гамільтон [19]. Цей двовимірний многовид конформно еквівалентний площині називається сигар солітоном Гамільтона і має першу фундаментальну форму виду

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}. \quad (53)$$

Сигар солітон Гамільтона є градієнтним з потенціалом $F = -\ln(1 + x^2 + y^2)$. і конформно еквівалентний площині з функцією конформності

$$f = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \quad (54)$$

яка є сталою в кожному колі $x^2 + y^2 = r^2 (= \text{const})$. Тобто, функція конформності є функцією відстані від початку координат, яка не залежить від параметризації площини. Конформно еквівалентні метрики та конформні відображення також вивчали деякі українські математики [43].

Для евклідової площини з декартовими координатами (x, y) перша фундаментальна форма метрики Сасакі має вигляд

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + d\xi_1^2 + d\xi_2^2. \quad (55)$$

Метрика

$$d\tilde{\sigma}^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{d\xi_1^2 + d\xi_2^2}{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (56)$$

є "здеформованою" метрикою Сасакі, яка на шарах збігається з сигар солітонною метрикою. За аналогією з двовимірним випадком, природно можна визначити метрику на дотичному розшаруванні наступним чином.

Означення 2.2 *Пошарово гамільтоновою сигар солітонною деформацією метрики Сасакі (або пошарово гамільтоновою сигар солітонною метрикою) [27] на дотичному розшаруванні ріманового многовиду (M, g) називається метри-*

ка G на TM така, що в кожній точці $(x, \xi) \in TM$ визначається формулами

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^h) = g_x(X, Y), \quad (57)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^v) = 0, \quad (58)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^v, Y^v) = \frac{1}{1 + |\xi|^2} \cdot g_x(X, Y). \quad (59)$$

Очевидно, що можна розглянути більш загальний випадок, а саме розглянемо наступну деформацію.

Означення 2.3 *Пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки (або пошарово сигар солітонною метрикою) [27] на дотичному розшаруванні ріманового многовиду (M, g) називається метрика G на TM така, що в кожній точці $(x, \xi) \in TM$ визначається формулами*

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^h) = g_x(X, Y), \quad (60)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^v) = 0, \quad (61)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^v, Y^v) = f(t)g_x(X, Y), \quad (62)$$

де $t = |\xi|^2$ і $f(t)$ є гладкою функцією з властивостями $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, $f(t) > 0$, $f'(t) < 0$.

Тобто функція $f(t)$ має властивості, схожі з властивостями деформуючої функції пошарово гамільтонової сигар солітонної деформації $f = \frac{1}{1+t}$.

Пошарово сигар солітонна деформація є частковим, але вмотивованим, випадком метрики яку вивчали А. Загане і М. Джаа в роботах [51, 52]. Вона має назву *викривлена метрика Сасаки (warped Sasaki metric)* та визначається наступним чином:

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^h) = g_x(X, Y), \quad (63)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^h, Y^v) = 0, \quad (64)$$

$$G_{(x, \xi)}(X^v, Y^v) = f(x, t)g_x(X, Y), \quad (65)$$

де $t = |\xi|^2$ і $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ є гладкою функцією.

У своїй роботі ми досліджуємо геодезичні лінії дотичного розшарування

ріманового многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонною метрикою з фокусом на *локально симетричні многовиди та многовиди сталої кривини* у ролі бази розшарування.

2.2 Геодезичні пошарово сигар солітонної метрики

Нехай (M, g) є рімановим многовидом з пошарово сигар солітонною метрикою G на дотичному розшаруванні TM . Нехай R є тензором кривини зв'язності Леві-Чивіті ∇ на M . Позначимо через $\tilde{\nabla}$ зв'язність Леві-Чивіті пошарово сигар солітонної метрики G . Наступна лема містить *формули Ковальського* [26] у випадку пошарово сигар солітонної метрики на TM . Вони є головним інструментом для подальших міркувань (див. також [52]).

Лема 2.4 [27] *Нехай (M, g) є рімановим многовидом з пошарово сигар солітонною метрикою G на TM . Зв'язність Леві-Чивіті $\tilde{\nabla}$ пошарово сигар солітонної метрики G на TM повністю визначається наступними формулами*

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = \left(\nabla_X Y \right)^h - \frac{1}{2} \left(R(X, Y) \xi \right)^v, \quad (66)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v = \frac{1}{2} f(t) \left(R(\xi, Y) X \right)^h + \left(\nabla_X Y \right)^v, \quad (67)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \frac{1}{2} f(t) \left(R(\xi, X) Y \right)^h, \quad (68)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = \left(\ln f(t) \right)' \left(g(X, \xi) Y + g(Y, \xi) X - g(X, Y) \xi \right)^v, \quad (69)$$

де ∇ зв'язність Леві-Чивіті на (M, g) , R тензор кривини ∇ .

Доведення. Зверніть увагу, по-перше, що наступні формули не залежать від вибору метрики дотичного розшарування і відомі як формули Домбровського [15]: у кожній точці $(x, \xi) \in TM$ дужки ліфлів векторних полів із M до TM

визначаються формулами

$$[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - (R(X, Y)\xi)^v, \quad (70)$$

$$[X^h, Y^v] = (\nabla_X Y)^v, \quad (71)$$

$$[X^v, Y^v] = 0. \quad (72)$$

Доведемо тепер, що похідна функції $f(t)$ вздовж ліфтів векторних полів із M до TM визначається формулами (див. [45])

$$X^h(f) = 0, \quad X^v(f) = 2f'(t)g(X, \xi). \quad (73)$$

Дійсно, враховуючи, що $X^h = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma_{jk}^i X^j \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ і $X^v = X^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$, маємо

$$\begin{aligned} X^h(f) &= X^i \frac{\partial}{\partial u^i}(f) - \Gamma_{jk}^i X^j \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^i}(f) \\ &= f'_t \left(X^i \frac{\partial}{\partial u^i}(g_{sp} \xi^s \xi^p) - \Gamma_{jk}^i X^j \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^i}(g_{sp} \xi^s \xi^p) \right) \\ &= f'_t \left(X^i (\Gamma_{pi}^m g_{ms} + \Gamma_{si}^m g_{mp}) \xi^s \xi^p - 2\Gamma_{jk}^i X^j \xi^k g_{ip} \xi^p \right) \\ &= f'_t \left(\Gamma_{ip,s} X^i \xi^s \xi^p + \Gamma_{is,p} X^i \xi^s \xi^p - 2\Gamma_{jk,p} X^j \xi^k \xi^p \right) \\ &= f'_t \left(2\Gamma_{ip,s} X^i \xi^s \xi^p - 2\Gamma_{jk,p} X^j \xi^k \xi^p \right) = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

$$X^v(f) = X^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}(f) = f'_t X^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}(g_{sp} \xi^s \xi^p) = 2f'_t g_{ip} X^i \xi^p = 2f'_t g(X, \xi). \quad (75)$$

Нарешті, похідна пошарово сигар солітонної метрики G , вздовж ліфтів векторних полів із M до TM визначається формулами

$$X^h G(Y^h, Z^h) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (76)$$

$$X^h G(Y^v, Z^v) = f(t) \left(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \right), \quad (77)$$

$$X^v G(Y^h, Z^h) = 0, \quad (78)$$

$$X^v G(Y^v, Z^v) = 2f'(t)g(X, \xi)g(Y, Z). \quad (79)$$

Тепер ми можемо використати формулу Кошуля. Маємо

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h, Z^h) &= X^h G(Y^h, Z^h) + Y^h G(X^h, Z^h) - Z^h G(X^h, Y^h) \\
&\quad + G([X^h, Y^h], Z^h) - G([X^h, Z^h], Y^h) - G([Y^h, Z^h], X^h) \\
&= Xg(Y^h, Z^h) + Yg(X^h, Z^h) - Zg(X^h, Y^h) \\
&\quad + G([X, Y]^h, Z^h) - G([X, Z]^h, Y^h) - G([Y, Z]^h, X^h) \\
&= Xg(Y^h, Z^h) + Yg(X^h, Z^h) - Zg(X^h, Y^h) \\
&\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) = 2G((\nabla_X Y)^h, Z^h); \quad (80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h, Z^v) &= X^h G(Y^h, Z^v) + Y^h G(X^h, Z^v) - Z^v G(X^h, Y^h) \\
&\quad + G([X^h, Y^h], Z^v) - G([X^h, Z^v], Y^h) - G([Y^h, Z^v], X^h) \\
&= -G((R(X, Y)\xi)^v, Z^v) \quad (81)
\end{aligned}$$

і отримуємо (66). Тоді

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^h) &= X^h G(Y^v, Z^h) + Y^v G(X^h, Z^h) - Z^h G(X^h, Y^v) \\
&\quad + G([X^h, Y^v], Z^h) - G([X^h, Z^h], Y^v) - G([Y^v, Z^h], X^h) \\
&= G((R(X, Z)\xi)^v, Y^v) = fg(R(X, Z)\xi, Y) = fg(R(\xi, Y)X, Z) \\
&= g(fR(\xi, Y)X, Z) = G(f(R(\xi, Y)X)^h, Z^h); \quad (82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^v) &= X^h G(Y^v, Z^v) + Y^v G(X^h, Z^v) - Z^h G(X^h, Y^v) \\
&\quad + G([X^h, Y^v], Z^v) - G([X^h, Z^v], Y^v) - G([Y^v, Z^v], X^h) \\
&= f(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)) + G((\nabla_X Y)^v, Z^v) - G((\nabla_X Z)^v, Y^v) \\
&= f(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X Z, Y)) \\
&= 2fg(\nabla_X Y, Z) = 2G((\nabla_X Y)^v, Z^v) \quad (83)
\end{aligned}$$

і отримаємо (67). Подібним чином

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^h) &= X^vG(Y^h, Z^h) + Y^hG(X^v, Z^h) - Z^hG(X^v, Y^h) \\
&\quad + G([X^v, Y^h], Z^h) - G([X^v, Z^h], Y^h) - G([Y^h, Z^h], X^v) \\
&= G((R(Y, Z)\xi)^v, X^v) = fg(R(Y, Z)\xi, X) = fg(R(\xi, X)Y, Z) \\
&= g(fR(\xi, X)Y, Z) = G(f(R(\xi, X)Y)^h, Z^h); \quad (84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^h, Z^v) &= X^vG(Y^h, Z^v) + Y^hG(X^v, Z^v) - Z^vG(X^v, Y^h) \\
&\quad + G([X^v, Y^h], Z^v) - G([X^v, Z^v], Y^h) - G([Y^h, Z^v], X^v) \\
&= f(g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z)) - G((\nabla_Y X)^v, Z^v) - G((\nabla_Y Z)^v, X^v) \\
&= f(g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Y Z, X)) = 0 \quad (85)
\end{aligned}$$

і отримуємо (68). Нарешті,

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^h) &= X^vG(Y^v, Z^h) + Y^vG(X^v, Z^h) - Z^hG(X^v, Y^v) \\
&\quad + G([X^v, Y^v], Z^h) - G([X^v, Z^h], Y^v) - G([Y^v, Z^h], X^v) \\
&= -f(g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)) + G((\nabla_Z X)^v, Y^v) + G((\nabla_Z Y)^v, X^v) \\
&= f(-g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Z Y, X)) = 0; \quad (86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G(\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v, Z^v) &= X^vG(Y^v, Z^v) + Y^vG(X^v, Z^v) - Z^vG(X^v, Y^v) \\
&\quad + G([X^v, Y^v], Z^v) - G([X^v, Z^v], Y^v) - G([Y^v, Z^v], X^v) \\
&= 2f'_t(g(X, \xi)g(Y, Z) + g(Y, \xi)g(X, Z) - g(Z, \xi)g(X, Y)) \\
&= 2f'_t(g(g(X, \xi)Y, Z) + g(g(Y, \xi)X, Z) - g(g(X, Y)\xi, Z)) \\
&= 2f'_t g(g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi, Z) \\
&= 2fg\left(\frac{f'_t}{f}(g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi), Z\right) \\
&= 2G\left(\frac{f'_t}{f}(g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X - g(X, Y)\xi)^v, Z^v\right) \quad (87)
\end{aligned}$$

і отримуємо (69). ■

Нехай $\Gamma = \{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$ — натурально параметризована крива на дотичному розшаруванні TM із пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасакі

G . Позначимо $x'_\sigma = \frac{dx}{d\sigma}$, $x''_\sigma = \nabla_{\frac{dx}{d\sigma}} x'_\sigma$, $\xi'_\sigma = \nabla_{\frac{dx}{d\sigma}} \xi$, $\xi''_\sigma = \nabla_{\frac{dx}{d\sigma}} \xi'_\sigma$. Тоді

$$\Gamma'_\sigma = (x'_\sigma)^h + (\xi'_\sigma)^v, \quad |\Gamma'_\sigma|^2 = |x'_\sigma|^2 + f(t)|\xi'_\sigma|^2 = 1. \quad (88)$$

Тепер виведемо диференціальні рівняння геодезичних (див. також [51]).

Теорема 2.5 [27] *Нехай (M, g) — ріманів многовид, а TM — його дотичне розшарування із пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки; R — оператор кривини базового многовиду M . Натурально параметризована крива $\Gamma = x(\sigma), \xi(\sigma)$ є геодезичною на TM тоді й лише тоді, коли $x(\sigma)$ та $\xi(\sigma)$ задовольняють рівнянням*

$$x''_\sigma + f(t)R(\xi, \xi'_\sigma)x'_\sigma = 0, \quad (89)$$

$$\xi''_\sigma + (\ln f(t))'(|\xi|^2)'_\sigma \xi'_\sigma - |\xi'_\sigma|^2 \xi = 0. \quad (90)$$

Відповідно, рівняння геодезичних ліній на дотичному розшаруванні із пошарово гамільтоновою сигар солітонною деформацією метрики Сасаки, мають вигляд

$$x''_\sigma + \frac{1}{1 + |\xi|^2} R(\xi, \xi'_\sigma)x'_\sigma = 0, \quad (91)$$

$$\xi''_\sigma - \frac{2g(\xi'_\sigma, \xi)}{1 + |\xi|^2} \xi'_\sigma + \frac{|\xi'_\sigma|^2}{1 + |\xi|^2} \xi = 0. \quad (92)$$

Доведення. Крива Γ є геодезичною тоді й лише тоді, коли $\tilde{\nabla}_{\Gamma'_\sigma} \Gamma'_\sigma = 0$. Оскільки

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\Gamma'_\sigma} \Gamma'_\sigma &= \tilde{\nabla}_{((x'_\sigma)^h + (\xi'_\sigma)^v)} ((x'_\sigma)^h + (\xi'_\sigma)^v) \\ &= \tilde{\nabla}_{(x'_\sigma)^h} (x'_\sigma)^h + \tilde{\nabla}_{(x'_\sigma)^h} (\xi'_\sigma)^v + \tilde{\nabla}_{(\xi'_\sigma)^v} (x'_\sigma)^h + \tilde{\nabla}_{(\xi'_\sigma)^v} (\xi'_\sigma)^v \\ &= (\nabla_{x'_\sigma} x'_\sigma)^h - \frac{1}{2} (R(x'_\sigma, x'_\sigma) \xi)^v + \frac{1}{2} f(R(\xi, \xi'_\sigma) x'_\sigma)^h + (\nabla_{x'_\sigma} \xi'_\sigma)^v \\ &\quad + \frac{1}{2} f(R(\xi, \xi'_\sigma) x'_\sigma)^h + (\ln f)'(g(\xi'_\sigma, \xi) \xi'_\sigma + g(\xi'_\sigma, \xi) \xi'_\sigma - g(\xi'_\sigma, \xi'_\sigma) \xi)^v \\ &= (x''_\sigma + fR(\xi, \xi'_\sigma)x'_\sigma)^h + (\xi''_\sigma + (\ln f)'(2g(\xi'_\sigma, \xi)\xi'_\sigma - |\xi'_\sigma|^2 \xi))^v = 0, \end{aligned} \quad (93)$$

то отримуємо (89) і (90). Покладемо $f = \frac{1}{1+t}$ у рівняннях (89) та (90). Оскільки $f'_t = -\frac{1}{(1+t)^2}$, $(\ln f(t))' = \frac{f'_t}{f} = -\frac{1}{1+t}$ і $t = |\xi|^2$, з цього випливає, що $x''_\sigma + \frac{1}{1+|\xi|^2} R(\xi, \xi'_\sigma)x'_\sigma = 0$, $\xi''_\sigma - \frac{1}{1+|\xi|^2} (2g(\xi'_\sigma, \xi)\xi'_\sigma - |\xi'_\sigma|^2 \xi) = 0$, і тоді ми отримуємо (91)

та (92). ■

Лема 2.6 [27] *Нехай (M, g) — ріманів многовид, а TM — його дотичне розшарування із сигар солітонною деформацією метрики Сасаки, $\Gamma = \{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$ — геодезична крива на TM . Тоді*

$$f(t)|\xi'_\sigma|^2 = c^2, \quad (94)$$

де $c = \text{const}$, $0 \leq c \leq 1$. Як наслідок,

$$|\xi'_\sigma|^2 = c^2(1 + |\xi|^2), \quad \text{де } 0 \leq c \leq 1, c = \text{const} \quad (95)$$

у випадку гамільтонової метрики.

Доведення. Оскільки s є параметром довжини дуги на $x(s)$, використовуючи (88) маємо

$$\frac{ds}{d\sigma} = |x'_\sigma| = \sqrt{1 - f|\xi'_\sigma|^2}. \quad (96)$$

Використовуючи (90), маємо

$$\xi''_\sigma = -\frac{f'_t}{f}(2g(\xi'_\sigma, \xi)\xi'_\sigma - |\xi'_\sigma|^2\xi). \quad (97)$$

З одного боку,

$$g(\xi'_\sigma, \xi''_\sigma) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} (|\xi'_\sigma|^2). \quad (98)$$

З іншого боку, використовуючи (97) ми отримуємо

$$g(\xi'_\sigma, \xi''_\sigma) = -\frac{f'_t}{f}g(\xi'_\sigma, \xi)|\xi'_\sigma|^2. \quad (99)$$

Тепер, якщо ми згадаємо, що $t = |\xi|^2$, отримаємо $f'_\sigma = f'_t \frac{dt}{d\sigma} = 2f'_t g(\xi'_\sigma, \xi)$. Отже, $g(\xi'_\sigma, \xi) = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{f'_t}$. Підставляючи це в (99) і використовуючи (98), ми отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} (|\xi'_\sigma|^2) &= -\frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{f} |\xi'_\sigma|^2 \Rightarrow \int \frac{d(|\xi'_\sigma|^2)}{|\xi'_\sigma|^2} = - \int \frac{f'_\sigma}{f} d\sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\xi'_\sigma|^2 = \frac{c^2}{f}. \end{aligned} \quad (100)$$

Комбінуючи (96) та (100), ми завершуємо доведення лема. ■

Означення 2.7 (Класифікація геодезичних) [27] *Згідно з лемою 2.6, множина геодезичних на TM з пошарово сигар солітонною деформацією метрики*

Сасаки, може бути природно розділена на 3 класи, а саме

- горизонтальні геодезичні ($c = 0$), що утворюються паралельними векторними полями вздовж геодезичних на базовому многовиді;
- вертикальні геодезичні ($c = 1$), що представлені геодезичними на фіксованому шарі, їх рівняння мають вигляд

$$\xi''_{\sigma} + (\ln f(t))'((|\xi|^2)'_{\sigma}\xi'_{\sigma} - \frac{1}{f(t)}\xi) = 0; \quad (101)$$

- похилі геодезичні ($0 < c < 1$) задовольняють рівнянням

$$x''_{\sigma} + f(t)R(\xi, \xi'_{\sigma})x'_{\sigma} = 0, \quad (102)$$

$$\xi''_{\sigma} + (\ln f(t))'((|\xi|^2)'_{\sigma}\xi'_{\sigma} - \frac{c^2}{f(t)}\xi) = 0. \quad (103)$$

Відповідно, якщо ми покладемо $f = \frac{1}{1+t}$ і $t = |\xi|^2$ в (101), (102), та (103), то вертикальні та похилі геодезичні на TM з пошарово гамільтоновою сигар солітонною деформацією метрики Сасаки можна виразити наступним чином

- вертикальні геодезичні ($c = 1$), що представлені геодезичними на фіксованому шарі, їх рівняння мають вигляд

$$\xi''_{\sigma} - \frac{2g(\xi'_{\sigma}, \xi)}{1 + |\xi|^2}\xi'_{\sigma} + \xi = 0; \quad (104)$$

- похилі геодезичні ($0 < c < 1$) задовольняють рівнянням

$$x''_{\sigma} + \frac{1}{1 + |\xi|^2}R(\xi, \xi'_{\sigma})x'_{\sigma} = 0, \quad (105)$$

$$\xi''_{\sigma} - \frac{2g(\xi'_{\sigma}, \xi)}{1 + |\xi|^2}\xi'_{\sigma} + c^2\xi = 0. \quad (106)$$

Надалі ми детальніше розглянемо похилі геодезичні.

2.3 Похилі геодезичні на дотичних розшаруваннях многовидів з сталою секційною кривиною

Розглянемо деякі властивості оператора кривини ріманового многовиду сталої секційної кривини. Властивості просторів зі сталою секційною кривиною вивча-

ли також деякі українські математики [20, 21, 22]. Визначимо степінь оператора кривини $R^p(X, Y)$ рекурсивно наступним чином:

$$R^p(X, Y)Z = R^{p-1}(X, Y)R(X, Y)Z \quad \text{для} \quad p \geq 2. \quad (107)$$

Зазначимо, що для тензора кривини ріманового многовиду сталої кривини ε виконуються наступні твердження:

- $R'_\sigma = 0$, а саме, кожен простір сталої кривини є локально симетричним;
- $R(X, Y)Z = \varepsilon(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$.

Доведення наступної леми міститься в [49].

Лема 2.8 *Нехай (M, g) — n -вимірний ріманів многовид сталої кривини ε .*

Тоді для будь-яких X і Y

$$R^p(X, Y) = \begin{cases} (-B^2\varepsilon^2)^{k-1}R(X, Y), & \text{для } p = 2k - 1 \\ (-B^2\varepsilon^2)^{k-1}R^2(X, Y), & \text{для } p = 2k \end{cases}, \quad (108)$$

де $k \geq 1$ і $B^2 = |X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2$ — це квадрат норми бівектора $X \wedge Y$.

Теорема 2.9 [27] *Нехай (M, g) — локально симетричний n -вимірний ріманів многовид, а натурально параметризована крива $\Gamma = x(\sigma), \xi(\sigma)$ є похилою геодезичною на TM^n з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки. Нехай $\gamma = \pi \circ \Gamma = x(\sigma)$ — це проекція похилої геодезичної Γ на базовий многовид. Нехай $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ — геодезичні кривини $x(\sigma)$. Тоді $k_i \equiv \text{const}$ для $i \geq 1$. У окремому випадку, якщо (M, g) — ріманів многовид сталої кривини, то $k_i \equiv 0$ для $i \geq 3$.*

Доведення. Використовуючи (89), маємо: $x''_\sigma = fR(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma$. Легко побачити, що $g(x''_\sigma, x'_\sigma) = fg(R(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma, x'_\sigma) = 0$, отже $|x'_\sigma| \equiv \text{const}$. Обчислимо третю похідну.

$$\begin{aligned} x'''_\sigma &= f'_t \cdot 2g(\xi'_\sigma, \xi)R(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma + fR(\xi''_\sigma, \xi)x'_\sigma + fR(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma \\ &= 2f'_t g(\xi'_\sigma, \xi)R(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma - 2f'_t g(\xi'_\sigma, \xi)R(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma + fR(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma \\ &= fR(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma. \end{aligned} \quad (109)$$

З одного боку, $x'''' = fR(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma$. Оскільки $g(x''', x''_\sigma) = fg(R(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma, x''_\sigma) = 0$, з цього випливає, що $|x''_\sigma| \equiv \text{const}$.

Продовжуючи процес, ми отримуємо

$$x_\sigma^{(p)} = fR(\xi'_\sigma, \xi)x_\sigma^{(p-1)}, \quad |x_\sigma^{(p)}| \equiv \text{const}, \quad p \geq 2. \quad (110)$$

З іншого боку, $x'''' = fR(\xi'_\sigma, \xi)x''_\sigma = f^2R^2(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma$. Отже, продовжуючи процес, ми отримуємо

$$x_\sigma^{(p)} = f^{p-1}R^{p-1}(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma. \quad (111)$$

Позначимо через $\nu_1, \dots, \nu_n$ репер Френе вздовж $\gamma = x(s)$, де s є параметром довжини дуги. Тоді виконуються формули Френе:

$$\begin{cases} (\nu_1)'_s = k_1\nu_2, \\ (\nu_i)'_s = -k_{i-1}\nu_{i-1} + k_i\nu_{i+1}, \quad \text{for } i = 2, \dots, n-1 \\ (\nu_n)'_s = -k_{n-1}\nu_{n-1}. \end{cases} \quad (112)$$

Тепер, якщо ми згадаємо, що $\frac{ds}{d\sigma} = (1 - c^2)^{1/2}$, то отримаємо $\nu_1 = x'_s = x'_\sigma \frac{d\sigma}{ds} = x'_\sigma(1 - c^2)^{-1/2}$. Отже, $x'_\sigma = (1 - c^2)^{1/2}\nu_1$. Використовуючи формули Френе, ми отримуємо

$$x''_\sigma = (1 - c^2)^{1/2}(\nu_1)'_\sigma = (1 - c^2)^{1/2}(\nu_1)'_s \frac{ds}{d\sigma} = (1 - c^2)k_1\nu_2. \quad (113)$$

Оскільки $|x''_\sigma| \equiv \text{const}$, з цього випливає, що $k_1 \equiv \text{const}$.

Подібним чином, ми маємо

$$\begin{aligned} x'''_\sigma &= (1 - c^2)k_1(\nu_2)'_\sigma = (1 - c^2)k_1(\nu_2)'_s \frac{ds}{d\sigma} \\ &= -(1 - c^2)^{3/2}k_1^2\nu_1 + (1 - c^2)^{3/2}k_1k_2\nu_3, \end{aligned} \quad (114)$$

і оскільки $|x'''_\sigma| \equiv \text{const}$, то $k_2 \equiv \text{const}$.

З одного боку, $x_\sigma^{(4)} = -(1 - c^2)^2k_1^3\nu_2 - (1 - c^2)^2k_1k_2^2\nu_2 + (1 - c^2)^2k_1k_2k_3\nu_4 = -(1 - c^2)^2k_1(k_1^2 + k_2^2)\nu_2 + (1 - c^2)^2k_1k_2k_3\nu_4$.

З іншого боку, $x_\sigma^{(4)} = f^3R^3(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma = -B^2f^3R(\xi'_\sigma, \xi)x'_\sigma = -B^2f^2x''_\sigma$, де $B^2 = \frac{c^2}{f(t)}|\xi|^2 - g(\xi', \xi)^2$.

Нехай $k_1, k_2 \neq 0$. Тоді

$$-(1 - c^2)^2 k_1 (k_1^2 + k_2^2) \nu_2 + (1 - c^2)^2 k_1 k_2 k_3 \nu_4 = -B^2 f^2 (1 - c^2) k_1 \nu_2, \quad (115)$$

$$(B^2 f^2 - (1 - c^2)(k_1^2 + k_2^2)) \nu_2 + (1 - c^2) k_2 k_3 \nu_4 = 0. \quad (116)$$

Отже, ми маємо $k_3 = 0$, а $B^2 f^2 = (1 - c^2)(k_1^2 + k_2^2)$. Нарешті, ми отримуємо $k_i = 0$ для $i \geq 3$ і $B^2 f^2 \equiv \text{const}$, де позначаємо $\omega^2 = B^2 f^2$. ■

Розглянемо похилі геодезичні на TM многовидів з сталою секційною кривиною ε з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки. Розглянемо наступні випадки: $\varepsilon = 0, 1$ або -1 в залежності від того, чи є M рівним E^n, S^n чи H^n .

Наступна теорема виконується для похилих геодезичних на TM евклідового простору з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки.

Теорема 2.10 [27] *Будь-які похилі геодезичні на $T(E^n)$ з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки є векторним полем ξ , яке рухається вздовж прямої лінії за правилом*

$$\xi''_\sigma + (\ln f(t))' (|\xi|^2)'_\sigma \xi'_\sigma - \frac{c^2}{f(t)} \xi = 0. \quad (117)$$

Відповідно, похила геодезична на $T(E^n)$ з пошарово гамільтоновою сигар солітонною деформацією метрики Сасаки є векторним полем ξ , яке рухається вздовж прямої лінії за правилом

$$\xi''_\sigma - \frac{2g(\xi'_\sigma, \xi)}{1 + |\xi|^2} \xi'_\sigma + c^2 \xi = 0. \quad (118)$$

Доведення. У випадку евклідового простору маємо $R = 0$, тоді, використовуючи (102), отримуємо $x''_\sigma = 0$. Оскільки $\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1 - c^2} \equiv \text{const}$, то крива $x(\sigma)$ є геодезичною в евклідовому просторі, а саме $x(\sigma)$ є прямою лінією. ■

Тепер розглянемо похилі геодезичні на дотичному розшаруванні сфери ($\varepsilon = 1$) та гіперболічного простору ($\varepsilon = -1$) із пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки. У цих випадках рівняння геодезичних мають вигляд:

$$x''_\sigma = \varepsilon f(t)(a\xi'_\sigma - b\xi), \quad (119)$$

$$\xi''_\sigma + (\ln f(t))'(|\xi|^2)_\sigma \xi'_\sigma - |\xi'_\sigma|^2 \xi = 0, \quad (120)$$

де $a = g(\xi, x'_\sigma)$, $b = g(\xi'_\sigma, x'_\sigma)$. Оскільки теорема 2.9 виконується для геодезичних кривин $k_1, k_2, k_3, \dots, k_{n-1}$ проекції геодезичної на TM , то ми можемо класифікувати проекції геодезичних наступним чином:

- $k_1 = 0$, а саме, проекція геодезичної на TM є геодезичною на базовому многовиді M ;
- $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$.

Отже, маємо наступну теорему.

Теорема 2.11 [27] *Нехай M — це S^n або H^n , TM — дотичне розшарування з пошарово сугар солітонною деформацією метрики Сасаки, і $k_1 = 0$, а саме, нехай проекція $\gamma = \pi \circ \Gamma = x(\sigma)$ геодезичної на TM є геодезичною на сфері S^n або в гіперболічному просторі H^n . Якщо вздовж $x(\sigma)$ вибрати ортонормований репер $e_1(\sigma) = \frac{x'(\sigma)}{|x'(\sigma)|}, e_2(\sigma), \dots, e_n(\sigma)$, що складається з паралельних векторних полів вздовж $x(\sigma)$, і розкласти векторне поле $\xi(\sigma) = y_1(\sigma)e_1(\sigma) + y_2(\sigma)e_2(\sigma) + \dots + y_n(\sigma)e_n(\sigma)$, тоді координатні функції $y_i(\sigma)$ можна знайти з наступної системи:*

$$\begin{cases} y_i = \alpha_i y_1, & i = 2, \dots, n \\ y_1'' + \frac{c^2}{f(t)} (\ln f(t))'_t y_1 = 0, \\ (1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) f(t) (y_1')^2 = c^2, & \alpha_i \equiv \text{const}. \end{cases} \quad (121)$$

Доведення. Якщо згадати, що $x' = (1 - c^2)^{1/2} e_1$, то отримаємо

$$a = g(\xi, x') = g(y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n, (1 - c^2)^{1/2} e_1) = (1 - c^2)^{1/2} y_1, \quad (122)$$

$$b = g(\xi', x') = g(y_1' e_1 + y_2' e_2 + \dots + y_n' e_n, (1 - c^2)^{1/2} e_1) = (1 - c^2)^{1/2} y_1'. \quad (123)$$

Використовуючи $x'' = \varepsilon f(a\xi' - b\xi)$, маємо

$$\begin{aligned} & (1 - c^2)^{1/2} y_1 (y_1' e_1 + y_2' e_2 + \dots + y_n' e_n) \\ & - (1 - c^2)^{1/2} y_1' (y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n) = 0, \end{aligned} \quad (124)$$

$$y_1 y'_i - y'_1 y_i = 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad (125)$$

$$\frac{y'_i}{y_i} = \frac{y'_1}{y_1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (126)$$

$$\int (\ln y_i)'_\sigma d\sigma = \int (\ln y_1)'_\sigma d\sigma, \quad i = 2, \dots, n, \quad (127)$$

$$y_i = \alpha_i y_1, \quad i = 2, \dots, n. \quad (128)$$

Використовуючи $f|\xi'|^2 = c^2$, маємо $(y'_1)^2 + (y'_2)^2 + \dots + (y'_n)^2 = \frac{c^2}{f}$, а оскільки $y_i = \alpha_i y_1$, то отримуємо

$$\begin{aligned} (y'_1)^2 + (y'_2)^2 + \dots + (y'_n)^2 &= (y'_1)^2 + (\alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)(y'_1)^2 \\ &= (1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)(y'_1)^2 = \frac{c^2}{f} \end{aligned} \quad (129)$$

Якщо позначити $A_n^2 = 1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$, тоді $(y'_1)^2 = \frac{c^2}{A_n^2 f}$. Отже, використовуючи $\xi'' + (\ln f)'((|\xi|^2)'\xi' - \frac{c^2}{f}\xi) = 0$, ми отримуємо

$$y_1'' + (\ln f)'(2A_n^2 y_1 (y'_1)^2 - \frac{c^2}{f} y_1) = 0 \Rightarrow y_1'' + \frac{c^2}{f} (\ln f)'_t y_1 = 0. \quad (130)$$

■

Наслідок 2.12 [27] *За умовами теореми 2.11 у випадку пошарово гамільтонової сигар солітонної деформації метрики Сасаки розв'язок системи можна виразити наступним чином:*

$$\begin{cases} y_1 = \beta^+ e^{c\sigma} + \beta^- e^{-c\sigma} \\ y_i = \alpha_i y_1, \quad i = 2, \dots, n \\ (1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) \beta^+ \beta^- = -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad (131)$$

де $\alpha_i, \beta^+, \beta^- \equiv \text{const}$, $\beta^+ > 0$, $\beta^- < 0$.

Доведення. Нехай $k_1 = 0$. Якщо $f(t) = \frac{1}{1+t}$, тоді рівняння $y_1'' + \frac{c^2}{f(t)} (\ln f(t))' y_1 = 0$ можна записати як $y_1'' - c^2 y_1 = 0$ з розв'язком $y_1 = \beta^+ e^{c\sigma} + \beta^- e^{-c\sigma}$. Підставивши це в рівняння $A_n^2 f(t) (y'_1)^2 = c^2$, де $A_n^2 = 1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$, отримуємо:

$$\frac{A_n^2 c^2 (\beta^+ e^{c\sigma} - \beta^- e^{-c\sigma})^2}{1 + A_n^2 (\beta^+ e^{c\sigma} + \beta^- e^{-c\sigma})^2} = c^2, \quad (132)$$

$$A_n^2 (\beta^+ e^{c\sigma} - \beta^- e^{-c\sigma})^2 = 1 + A_n^2 (\beta^+ e^{c\sigma} + \beta^- e^{-c\sigma})^2, \quad (133)$$

$$-4A_n^2\beta^+\beta^- = 1, \quad A_n^2\beta^+\beta^- = -\frac{1}{4}. \quad (134)$$

■

Теорема 2.13 [27] Нехай M — це S^n або H^n , TM — дотичне розшарування з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки, і $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$. Нехай $\nu_1, \dots, \nu_n$ — це репер Френе вздовж $x(\sigma)$. Тоді похилі геодезичні на $T(S^n)$ та $T(H^n)$ з $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$ можна виразити як:

$$\begin{cases} x'' = \varepsilon f(t)(a\xi' - b\xi), \\ \xi = a(1 - c^2)^{-1/2}\nu_1 + (a' - b)(1 - c^2)^{-1}k_1^{-1}\nu_2 - a(1 - c^2)^{-1/2}k_1^{-1}k_2\nu_3, \end{cases} \quad (135)$$

де a , b можна знайти з наступних диференціальних рівнянь:

$$a' = \frac{\varepsilon}{2}f(t)(|\xi|^2)'a + (1 - \varepsilon f(t)|\xi|^2)b, \quad (136)$$

$$b' = \frac{c^2}{f(t)}((\ln f(t))'_t + \varepsilon f(t))a - (|\xi|^2)'((\ln f(t))'_t + \frac{\varepsilon}{2}f(t))b. \quad (137)$$

Доведення. Нехай $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$. Використовуючи $x'' = \varepsilon f(a\xi' - b\xi)$ та $\xi'' = (\ln f)' \left(\frac{c^2}{f}\xi - (|\xi|^2)'\xi' \right)$, ми отримуємо:

$$\begin{aligned} a' = g(\xi', x') + g(\xi, x'') &= b + \varepsilon f\left(\frac{1}{2}a(|\xi|^2)' - b|\xi|^2\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}f(|\xi|^2)'a + (1 - \varepsilon f|\xi|^2)b, \end{aligned} \quad (138)$$

$$b' = g(\xi'', x') + g(\xi', x'') = (\ln f)' \left(\frac{c^2}{f}a - (|\xi|^2)'b \right) + \varepsilon f \left(a\frac{c^2}{f} - \frac{1}{2}b(|\xi|^2)' \right) \quad (139)$$

$$= \frac{c^2}{f(t)}((\ln f(t))'_t + \varepsilon f(t))a - (|\xi|^2)'((\ln f(t))'_t + \frac{\varepsilon}{2}f(t))b. \quad (140)$$

Використовуючи $x'' = \varepsilon f(a\xi' - b\xi)$, отримуємо $\xi' = \frac{1}{\varepsilon f a}(x'' + \varepsilon f b \xi)$. Отже,

$$\begin{aligned} x''' &= fR(\xi', \xi)x'' = \varepsilon f(g(\xi, x'')\xi' - g(\xi', x'')\xi) \\ &= f^2(g(\xi', \xi)a - |\xi|^2b)\xi' + f^2(g(\xi', \xi)b - \frac{c^2}{f}a)\xi \\ &= \frac{f}{\varepsilon a}(g(\xi', \xi)a - |\xi|^2b)x'' + f^2(2g(\xi', \xi)b - |\xi|^2\frac{b^2}{a} - \frac{c^2}{f}a)\xi. \end{aligned} \quad (141)$$

Отже, ξ можна виразити як:

$$\xi = \frac{\varepsilon a x''' - f(g(\xi', \xi)a - |\xi|^2b)x''}{\varepsilon f^2(2g(\xi', \xi)ab - |\xi|^2b^2 - \frac{c^2}{f}a^2)}. \quad (142)$$

Звернімо увагу, що $f(g(\xi', \xi)a - |\xi|^2 b) = \varepsilon(a' - b)$, а також $|x''|^2 = f^2(\frac{c^2}{f}a^2 + |\xi|^2 b^2 - 2g(\xi', \xi)ab)$. Тоді $\xi = \frac{(a'-b)x'' - ax'''}{|x''|^2}$. Звернімо увагу, що $x'' = (1 - c^2)k_1\nu_2$, а $x''' = -(1 - c^2)^{3/2}k_1^2\nu_1 + (1 - c^2)^{3/2}k_1k_2\nu_3$. Отже, $|x''|^2 = (1 - c^2)^2k_1^2$ і

$$\xi = a(1 - c^2)^{-1/2}\nu_1 + (a' - b)(1 - c^2)^{-1}k_1^{-1}\nu_2 - a(1 - c^2)^{-1/2}k_1^{-1}k_2\nu_3. \quad (143)$$

■

Наслідок 2.14 [27] *Згідно з умовами теореми 2.13 у випадку поширової гамільтонової сигар солітонної деформації метрики Сасаки геодезичні лінії можна виразити як:*

$$\begin{cases} x'' = \frac{\varepsilon}{1+|\xi|^2}(a\xi' - b\xi), \\ \xi = a(1 - c^2)^{-1/2}\nu_1 + (a' - b)(1 - c^2)^{-1}k_1^{-1}\nu_2 - a(1 - c^2)^{-1/2}k_1^{-1}k_2\nu_3, \end{cases} \quad (144)$$

де a, b можна знайти з наступних диференціальних рівнянь:

$$a' = \frac{\varepsilon g(\xi', \xi)}{1 + |\xi|^2}a + \left(1 - \frac{\varepsilon|\xi|^2}{1 + |\xi|^2}\right)b, \quad (145)$$

$$b' = c^2(\varepsilon - 1)a + \frac{g(\xi', \xi)}{1 + |\xi|^2}(2 - \varepsilon)b. \quad (146)$$

2.4 Висновки до розділу

Розділ присвячено узагальненню сигар солітонної метрики Річарда Гамільтона як деформації метрики Сасаки на дотичному розшаруванні ріманова многовиду.

Регулярно параметризовану криву $\Gamma(\sigma) \subset TM$, загалом, можна вважати парою $\{x(\sigma), \xi(\sigma)\}$, де $x(\sigma) \subset M$ — це крива, а $\xi(\sigma)$ — векторне поле вздовж $x(\sigma)$. Як результат,

- ми отримали диференціальні рівняння натурально параметризованих геодезичних у термінах $x(\sigma)$ та $\xi(\sigma)$ відповідно до Означень 2.2 та 2.3 (Теорема 2.5);
- ми довели, що $f(t)|\xi'_\sigma| = c (= const)$, $0 \leq c \leq 1$ та класифікували геодезичні лінії на TM з пошировою сигар солітонною деформацією метрики Сасаки для усіх значень параметра c , а саме: якщо $c = 0$, то геодезична

лінія називається *горизонтальною*; якщо $c = 1$, то геодезична лінія називається *вертикальною*; якщо $0 < c < 1$, то геодезична лінія називається *похилою* (Означення 2.6);

- ми довели (див. [34]) що у випадку локально симетричної бази проєкція похилої геодезичної лінії $\Gamma(\sigma)$ на базу має сталу геодезичну кривину, і у випадку бази сталої кривини $k_i = 0$ для всіх $k_i \geq 3$ (Теорема 2.9);
- ми отримали (див. [41]) рівняння геодезичних на $T(E^n)$, $T(S^n)$ та $T(H^n)$ з пошарово (гамільтоновою) деформацією метрики Сасаки (Теорема 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14).

Відкритими залишаються питання:

- знаходження тензору кривини відносно зв'язності Леві-Чивіти пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки;
- оцінки секційної кривини дотичного розшарування з пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформацією метрики Сасаки;
- дослідження асимптотичної поведінки геодезичних та секційної кривини пошарово (гамільтонової) дотичного розшарування з сигар солітонною деформацією метрики Сасаки;
- опису дотичного розшарування ріманова многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки як солітон Річі.

Результати розділу висвітлено в роботі [27].

3 Скручена метрика Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні і гармонічність

3.1 Скручена метрика Сасаки. Гармонічність векторних полів та їх відображень

Математики Л. Беларбі та Х. Ель Хенді [3] запропонували досить зрозумілу деформацію метрики Сасаки на TM . Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема метрику Сасаки та вертикально масштабовану метрику [14, 10, 4]. Скручена метрика Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$ на TM визначається Формулами:

$$G_{(x,\xi)}^{\delta,\varepsilon}(X^h, Y^h) = e^{\delta(x)} g_x(X, Y), \quad (147)$$

$$G_{(x,\xi)}^{\delta,\varepsilon}(X^h, Y^v) = 0, \quad (148)$$

$$G_{(x,\xi)}^{\delta,\varepsilon}(X^v, Y^v) = e^{\varepsilon(x)} g_x(X, Y), \quad (149)$$

де $(x, \xi) \in TM$ і $\delta, \varepsilon : M \longrightarrow \mathbb{R}$ є гладкими функціями. Зауважимо, що відносно цієї метрики горизонтальні та вертикальні векторні поля є взаємно ортогональними. Якщо візьмемо $\delta = \varepsilon = 0$, то $G^{0,0}$ – це метрика Сасаки, а якщо $\delta = 0$, то $G^{0,\varepsilon}$ – це вертикально масштабована метрика (див. [14, 10, 4]).

Вертикально масштабована метрика (коли $\delta = 0$) потребує особливої уваги, бо така деформація є більш природним узагальненням метрики Сасаки, ніж скручена метрика Сасаки. А саме, геометрично вертикальна масштабована метрика здійснює поточкову гомотетичну деформацію у шарах. Саме цією метрикою Л. Беларбі та Х. Ель Хенді надихались при вивченні геометрії дотичного розшарування скрученої метрики Сасаки.

У своїй роботі ми вивчаємо скручену метрику Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні. Головною метою дослідження є пошук деформацій які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів ξ на тривимірних унімодулярних групах Лі G з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень $\xi : G \rightarrow T_1G$ у випадку скрученої метрики Сасаки

на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , використовуючи ортонормований репер і класифікацію Дж. Мілнора [33]. Більш того, ми хочемо описати і класифікувати таких векторних полів та відображень відповідно до класифікації Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] у випадку вертикально масштабованої метрики. Також ми розглядаємо гармонічні векторні поля та відображення у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду. Властивості векторних полів та відображень, які визначається одиничними векторними полями, також вивчали українські математики [20, 23, 24, 25, 37].

Означення 3.1 [31] *Нехай (M^n, g) — ріманів многовид, а $\delta, \varepsilon : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкі функції. На одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n визначимо скручену метрику Сасаки, позначену як $G^{\delta, \varepsilon}$, за допомогою наступного виразу:*

$$G_{(x, \xi)}^{\delta, \varepsilon}(X^h, Y^h) = e^{\delta(x)} g_x(X, Y), \quad (150)$$

$$G_{(x, \xi)}^{\delta, \varepsilon}(X^h, Y^t) = 0, \quad (151)$$

$$G_{(x, \xi)}^{\delta, \varepsilon}(X^t, Y^t) = e^{\varepsilon(x)} g_x(X, Y). \quad (152)$$

для всіх векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ і $(x, \xi) \in T_1M^n$, де $g(\xi, \xi) = 1$.

Зауважимо, що якщо $\delta = \varepsilon = 0$, то $G^{0,0}$ є метрикою Сасаки на T_1M^n . Якщо $\varepsilon = 0$, то $G^{\delta,0}$ є масштабованою метрикою Сасаки на T_1M^n . Якщо $\delta = 0$, то $G^{0,\varepsilon}$ є вертикально масштабованою метрикою на T_1M^n .

Наступна лема містить формули Ковальського [26].

Лема 3.2 [31] *Нехай (M^n, g) — ріманів многовид. Зв'язність Леві-Чівіти $\tilde{\nabla}$ одиничного дотичного розшарування T_1M^n , оснащеного скрученою метрикою*

Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$, повністю визначається за допомогою наступних формул:

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y + F_\delta(X, Y))^h - \frac{1}{2} (R(X, Y)\xi)^t, \quad (153)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^t = \frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2} (R(\xi, Y)X)^h + \left(\nabla_X Y + \frac{X(\varepsilon)}{2} Y \right)^t, \quad (154)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^t} Y^h = \frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2} (R(\xi, X)Y)^h + \frac{Y(\varepsilon)}{2} X^t, \quad (155)$$

$$\tilde{\nabla}_{X^t} Y^t = -\frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2} g(X, Y)(\nabla \varepsilon)^h - g(Y, \xi)X^t, \quad (156)$$

де ∇ — зв'язність Леві-Чівіті на (M^n, g) , R — тензор кривини, асоційований із ∇ , а також:

$$F_\delta(X, Y) = \frac{1}{2}(X(\delta)Y + Y(\delta)X - g(X, Y)\nabla\delta). \quad (157)$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що наведені нижче формули не залежать від вибору метрики на дотичному розшаруванні та є аналогами формул Домбровського [15] в термінах горизонтальних і тангенціальних ліфтів. У кожній точці $(x, \xi) \in T_1 M^n$ дужки ліфтів задаються наступним чином:

$$[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - (R(X, Y)\xi)^t, \quad (158)$$

$$[X^h, Y^t] = (\nabla_X Y)^t, \quad (159)$$

$$[X^t, Y^t] = g(X, \xi)Y^t - g(Y, \xi)X^t. \quad (160)$$

Використовуючи Означення 3.1, зауважимо, що похідна скрученої метрики Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$ вздовж ліфтів векторних полів задається наступним чином:

$$X^h G^{\delta,\varepsilon}(Y^h, Z^h) = e^\delta X(\delta)g(Y, Z) + e^\delta g(\nabla_X Y, Z) + e^\delta g(Y, \nabla_X Z), \quad (161)$$

$$X^h G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, Z^t) = e^\varepsilon X(\varepsilon)g(Y, Z) + e^\varepsilon g(\nabla_X Y, Z) + e^\varepsilon g(Y, \nabla_X Z), \quad (162)$$

$$X^t G^{\delta,\varepsilon}(Y^h, Z^h) = X^t G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, Z^t) = 0. \quad (163)$$

Тепер ми можемо застосувати формулу Кошуля. Доведемо формулу (156).

$$\begin{aligned}
2G^{\delta,\varepsilon}(\tilde{\nabla}_{X^t}Y^t, Z^h) &= X^t G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, Z^h) + Y^t G^{\delta,\varepsilon}(X^t, Z^h) - Z^h G^{\delta,\varepsilon}(X^t, Y^t) \\
&\quad - G^{\delta,\varepsilon}(X^t, [Y^t, Z^h]) - G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, [X^t, Z^h]) + G^{\delta,\varepsilon}(Z^h, [X^t, Y^t]) \\
&= -e^\varepsilon Z(\varepsilon)g(X, Y) = -e^\varepsilon g(\nabla\varepsilon, Z)g(X, Y) \\
&= g(-e^\varepsilon g(X, Y)\nabla\varepsilon, Z) = 2e^\delta g\left(-\frac{e^\varepsilon}{2e^\delta}g(X, Y)\nabla\varepsilon, Z\right) \\
&= 2G^{\delta,\varepsilon}\left(-\frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2}g(X, Y)(\nabla\varepsilon)^h, Z^h\right); \tag{164}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G^{\delta,\varepsilon}(\tilde{\nabla}_{X^t}Y^t, Z^t) &= X^t G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, Z^t) + Y^t G^{\delta,\varepsilon}(X^t, Z^t) - Z^t G^{\delta,\varepsilon}(X^t, Y^t) \\
&\quad - G^{\delta,\varepsilon}(X^t, [Y^t, Z^t]) - G^{\delta,\varepsilon}(Y^t, [X^t, Z^t]) + G^{\delta,\varepsilon}(Z^t, [X^t, Y^t]) \\
&= -e^\varepsilon g(Y, \xi)g(X, Z) + e^\varepsilon g(Z, \xi)g(X, Y) - e^\varepsilon g(X, \xi)g(Y, Z) \\
&\quad + e^\varepsilon g(Z, \xi)g(Y, X) + e^\varepsilon g(X, \xi)g(Z, Y) - e^\varepsilon g(Y, \xi)g(Z, X) \\
&= 2e^\varepsilon g(g(X, Y)\xi - g(Y, \xi)X, Z) \\
&= 2G^{\delta,\varepsilon}(-g(Y, \xi)X^t, Z^t). \tag{165}
\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримуємо формулу (156). Подібним чином ми можемо отримати формули (153)–(155). ■

Теорема 3.3 [31] *Нехай (M^n, g) — n -вимірний ріманів многовид, оснащений скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n . Поле напруженості відображення $\xi: (M^n, g) \rightarrow (T_1M^n, G^{\delta,\varepsilon})$ задано наступним чином:*

$$\begin{aligned}
\tau(\xi) &= -\frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2}\left(2 \cdot \text{trace}(Hm_\xi) + (n-2)e^{\delta-\varepsilon}\nabla\delta + \|A_\xi\|^2\nabla\varepsilon\right)^h \\
&\quad - \left(\bar{\Delta}\xi + A_\xi(\nabla\varepsilon)\right)^t. \tag{166}
\end{aligned}$$

Доведення. Розглянемо деякий ортонормований репер $\{e_k\}_{k=1}^n$. Відповідно до (25), маємо $\tau(\xi) = \text{trace}(B_\xi) = \sum_{k=1}^n B_\xi(e_k, e_k)$. Спочатку знаходимо другу основну форму відображення $\xi: M^n \rightarrow T_1M^n$. Підставляючи $\xi_*X = X^h - (A_\xi X)^t$ в $B_\xi(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\xi_*X}(\xi_*Y) - \xi_*(\nabla_X Y)$, отримуємо

$$\xi_*(\nabla_X Y) = (\nabla_X Y)^h - (A_\xi(\nabla_X Y))^t, \tag{167}$$

використовуючи (20), (19) та Лему 3.2, ми маємо

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\xi_* X}(\xi_* Y) &= \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h - \tilde{\nabla}_{X^h}(A_\xi Y)^t - \tilde{\nabla}_{(A_\xi X)^t} Y^h + \tilde{\nabla}_{(A_\xi X)^t}(A_\xi Y)^t \\
&= \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h + \tilde{\nabla}_{X^h}(\nabla_Y \xi)^t + \tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t} Y^h + \tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t}(\nabla_Y \xi)^t \\
&= \left(\nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(\delta)Y + Y(\delta)X - g(X, Y)\nabla\delta) \right)^h \\
&\quad - \frac{1}{2}(R(X, Y)\xi)^t + \frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2}(R(\xi, \nabla_Y \xi)X)^h + \left(\nabla_X \nabla_Y \xi + \frac{X(\varepsilon)}{2}\nabla_Y \xi \right)^t \\
&\quad + \frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2}(R(\xi, \nabla_X \xi)Y)^h + \frac{Y(\varepsilon)}{2}(\nabla_X \xi)^t - \frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2}g(\nabla_X \xi, \nabla_Y \xi)(\nabla\varepsilon)^h \\
&= \left(\nabla_X Y - e^{\varepsilon-\delta}Hm_\xi(X, Y) + \frac{1}{2}(X(\delta)Y + Y(\delta)X \right. \\
&\quad \left. - g(X, Y)\nabla\delta - e^{\varepsilon-\delta}g(A_\xi X, A_\xi Y)\nabla\varepsilon) \right)^h \\
&\quad - \left(A_\xi(\nabla_X Y) + Hess_\xi(X, Y) + \frac{1}{2}(Y(\varepsilon)A_\xi X + X(\varepsilon)A_\xi Y) \right)^t. \quad (168)
\end{aligned}$$

Таким чином, друга основна форма відображення $\xi: M^n \rightarrow T_1 M^n$ визначається як

$$\begin{aligned}
B_\xi(X, Y) &= \left(-e^{\varepsilon-\delta}Hm_\xi(X, Y) + \frac{1}{2}(X(\delta)Y + Y(\delta)X - g(X, Y)\nabla\delta \right. \\
&\quad \left. - e^{\varepsilon-\delta}g(A_\xi X, A_\xi Y)\nabla\varepsilon) \right)^h - \left(Hess_\xi(X, Y) + \frac{1}{2}(Y(\varepsilon)A_\xi X + X(\varepsilon)A_\xi Y) \right)^t. \quad (169)
\end{aligned}$$

Підставляючи (169) в (25), використовуючи (22) та (18), ми отримуємо

$$\begin{aligned}
\tau(\xi) &= \sum_{k=1}^n B_\xi(e_k, e_k) \\
&= \sum_{k=1}^n \left(-e^{\varepsilon-\delta}Hm_\xi(e_k, e_k) + \frac{1}{2}(2e_k(\delta)e_k - \nabla\delta - e^{\varepsilon-\delta}g(A_\xi e_k, A_\xi e_k)\nabla\varepsilon) \right)^h \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \left(Hess_\xi(e_k, e_k) + A_\xi(e_k(\varepsilon)e_k) \right)^t \\
&= \left(-e^{\varepsilon-\delta}trace(Hm_\xi) + \frac{1}{2}(2\nabla\delta - n\nabla\delta - e^{\varepsilon-\delta}\|A_\xi\|^2\nabla\varepsilon) \right)^h \\
&\quad - \left(\bar{\Delta}\xi + A_\xi(\nabla\varepsilon) \right)^t = -\frac{e^{\varepsilon-\delta}}{2} \left(2 \cdot trace(Hm_\xi) + (n-2)e^{\delta-\varepsilon}\nabla\delta \right. \\
&\quad \left. + \|A_\xi\|^2\nabla\varepsilon \right)^h - \left(\bar{\Delta}\xi + A_\xi(\nabla\varepsilon) \right)^t. \quad (170)
\end{aligned}$$

Це завершує доведення Теорема 3.3. ■

Як наслідок Теорема 3.3, маємо наступну теорему.

Теорема 3.4 [31] *Нехай (M^n, g) — n -вимірний рімановий многовид, оснащений скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta, \varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n . Одиничне векторне поле ξ є гармонічним на (M^n, g) , тоді і тільки тоді, коли*

$$\bar{\Delta}\xi + A_\xi(\nabla\varepsilon) = \|A_\xi\|^2\xi. \quad (171)$$

Гармонічне одиничне векторне поле ξ визначає гармонічне відображення $\xi: (M^n, g) \rightarrow (T_1M^n, G^{\delta, \varepsilon})$, тоді і тільки тоді, коли

$$2 \cdot \text{trace}(Hm_\xi) + (n - 2)e^{\delta - \varepsilon}\nabla\delta + \|A_\xi\|^2\nabla\varepsilon = 0. \quad (172)$$

Доведення. Використовуючи (27), маємо, що одиничне векторне поле ξ є гармонічним, тоді і тільки тоді, коли

$$\exists \lambda \in C^\infty(M^n) : -\bar{\Delta}\xi - A_\xi(\nabla\varepsilon) = \lambda\xi. \quad (173)$$

Зауважимо, що $\lambda = -g(\bar{\Delta}\xi, \xi)$, і, використовуючи (21), ми отримуємо $\lambda = -\|A_\xi\|^2$. Таким чином, ми отримуємо (171). Використовуючи (28), ми отримуємо (172). ■

Зауважимо, що якщо $\nabla_{e_i}\xi = 0$ для $i = \overline{1, n}$, то рімановий многовид (M^n, g) , оснащений скрученою метрикою Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n , має гармонічні одиничні векторні поля, які визначають гармонічні відображення незалежно від функції деформації $\varepsilon(x)$, якщо $\nabla\delta = 0$ або $n = 2$. З іншого боку, якщо $\nabla\delta = 0$ або $n = 2$, і рімановий многовид (M^n, g) , оснащений скрученою метрикою Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n , має гармонічні одиничні векторні поля, які визначають гармонічні відображення незалежно від функції деформації $\varepsilon(x)$, то $\nabla_{e_i}\xi = 0$ для $i = \overline{1, n}$. Отже, маємо наступний наслідок.

Наслідок 3.5 [31] *Рімановий многовид (M^n, g) , оснащений скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta, \varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^n , має гармонічне одиничне векторне поле ξ , яке визначає гармонічне відображення незалежно*

від функції деформації $\varepsilon(x)$, тоді і тільки тоді, коли $\nabla\delta = 0$ або $n = 2$, і векторне поле ξ є паралельним, тобто $M^n = M^{n-1} \times \mathbb{E}^1$.

3.2 Двовимірні ріманові многовиди

Нехай ортонормований базис $\{e_1, e_2\}$ на двовимірному рімановому многовиді M^2 заданий як

$$\nabla_{e_1}e_1 = ke_2, \quad \nabla_{e_1}e_2 = -ke_1, \quad \nabla_{e_2}e_1 = -\varkappa e_2, \quad \nabla_{e_2}e_2 = \varkappa e_1, \quad (174)$$

де k і $\varkappa$ — орієнтовані геодезичні кривини інтегральних кривих векторних полів e_1 та e_2 відповідно. Тоді ненульові компоненти тензора кривини задаються як

$$R(e_1, e_2)e_2 = Ke_1, \quad R(e_2, e_1)e_1 = Ke_2, \quad (175)$$

де K — гаусова кривина M^2 ,

$$K = e_1(\varkappa) + e_2(k) - k^2 - \varkappa^2. \quad (176)$$

Розглянемо $e_1 = \xi$, $e_2 = \eta$, де $\eta \in \mathfrak{X}(M^2)$, $g(\eta, \eta) = 1$, $g(\xi, \eta) = 0$. Тоді

$$A_\xi e_1 = -ke_2, \quad A_\xi e_2 = \varkappa e_2, \quad (177)$$

і, використовуючи (18), ми маємо

$$\|A_\xi\|^2 = k^2 + \varkappa^2. \quad (178)$$

Теорема 3.6 [31] *Нехай (M^2, g) — двовимірний рімановий многовид, оснащений скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta, \varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1M^2 . Нехай ξ та η , де $\eta \in \mathfrak{X}(M^2)$, $g(\eta, \eta) = 1$, $g(\xi, \eta) = 0$, є ортонормованим репером на M^2 . Нехай k і $\varkappa$ — орієнтовані геодезичні кривини інтегральних кривих векторних полів ξ та η відповідно. Тоді одиничне векторне поле ξ є гармонічним на (M^2, g) , тоді і тільки тоді, коли*

$$k\xi(\varepsilon) - \varkappa\eta(\varepsilon) = \eta(\varkappa) - \xi(k). \quad (179)$$

Одиничне векторне поле ξ визначає гармонічне відображення $\xi: (M^2, g) \rightarrow$

$(T_1M^2, G^{\delta, \varepsilon})$, тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} k\xi(\varepsilon) - \varkappa\eta(\varepsilon) = 0, \\ \xi(k) - \eta(\varkappa) = 0. \end{cases} \quad (180)$$

Доведення. Використовуючи (19), (22) та ортонормований репер (174), ми маємо

$$(\nabla_{e_1}A_\xi)e_1 = k^2e_1 - (e_1(k) + k\varkappa)e_2, \quad (\nabla_{e_2}A_\xi)e_2 = \varkappa^2e_1 + (e_2(\varkappa) + k\varkappa)e_2, \quad (181)$$

$$\bar{\Delta}\xi = (\nabla_{e_1}A_\xi)e_1 + (\nabla_{e_2}A_\xi)e_2 = (k^2 + \varkappa^2)e_1 + (e_2(\varkappa) - e_1(k))e_2, \quad (182)$$

$$A_\xi(\nabla\varepsilon) = (\varkappa e_2(\varepsilon) - ke_1(\varepsilon))e_2. \quad (183)$$

Використовуючи Теорему 3.4, ми маємо

$$(k^2 + \varkappa^2)e_1 + (e_2(\varkappa) - e_1(k))e_2 + (\varkappa e_2(\varepsilon) - ke_1(\varepsilon))e_2 = (k^2 + \varkappa^2)e_1, \quad (184)$$

$$ke_1(\varepsilon) - \varkappa e_2(\varepsilon) = e_2(\varkappa) - e_1(k). \quad (185)$$

Використовуючи (20) та ортонормований репер (174), ми маємо

$$\text{trace}(Hm_\xi) = K(\varkappa e_1 + ke_2). \quad (186)$$

Використовуючи Теорему 3.4, ми маємо

$$2K(\varkappa e_1 + ke_2) + (k^2 + \varkappa^2)(e_1(\varepsilon)e_1 + e_2(\varepsilon)e_2) = 0, \quad (187)$$

$$(2K\varkappa + (k^2 + \varkappa^2)e_1(\varepsilon))e_1 + (2Kk + (k^2 + \varkappa^2)e_2(\varepsilon))e_2 = 0, \quad (188)$$

$$\begin{cases} 2K\varkappa + (k^2 + \varkappa^2)e_1(\varepsilon) = 0 \\ 2Kk + (k^2 + \varkappa^2)e_2(\varepsilon) = 0 \end{cases}. \quad (189)$$

Якщо $k^2 + \varkappa^2 \neq 0$, тоді $e_1(\varepsilon) = -\frac{2K\varkappa}{k^2 + \varkappa^2}$ і $e_2(\varepsilon) = -\frac{2Kk}{k^2 + \varkappa^2}$. Підставивши ці вирази в (185), ми отримуємо

$$e_1(k) - e_2(\varkappa) = 0 \quad \text{для будь-яких } k \text{ та } \varkappa. \quad (190)$$

Це завершує доведення теореми. ■

Приклад 3.7 [31] Якщо інтегральні криві поля ξ є геодезичними, тобто $k = 0$, тоді одиничне векторне поле ξ є гармонічним і визначає гармонічне відобра-

ження $\xi: (M^2, g) \rightarrow (T_1M^2, G^{\delta, \varepsilon})$ тоді і тільки тоді, коли інтегральні криві поля η є колами Дарбу, а функція деформації ε не залежить від точок на інтегральних кривих поля η , тобто $\eta(\varkappa) = 0$ і $\eta(\varepsilon) = 0$.

Наприклад, нехай M^2 — це поверхня обертання з першою основною формою $ds^2 = du^2 + f(u)^2 dv^2$, де u є параметром довжини дуги меридіонального перерізу $f(u)$. Візьмемо $\xi = \frac{\partial}{\partial u}$, тоді $\eta = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial v}$ і $k = 0$, $\varkappa = -\frac{f'_u}{f}$, $\eta(\varkappa) = 0$. Таким чином, ξ є гармонічним і визначає гармонічне відображення $\xi: (M^2, g) \rightarrow (T_1M^2, G^{\delta, \varepsilon})$ тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon = \varepsilon(u)$.

Зауваження 3.8 [31] Використовуючи Наслідок 3.5, двовимірний рімановий многовид M^2 допускає гармонічні одиничні векторні поля ξ які визначають гармонічні відображення $\xi: (M^2, g) \rightarrow (T_1M^2, G^{\delta, \varepsilon})$ незалежно від функції деформації $\varepsilon(x)$, якщо $k = \varkappa = 0$, тобто якщо M^2 є плоским многовидом.

3.3 Тривимірні унімодулярні групи Лі

Нехай G — тривимірна унімодулярна група Лі, а g — лівоінваріантна метрика на G . Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] повністю описали ліво-інваріантні гармонічні одиничні векторні поля і ліво-інваріантні одиничні векторні поля які задають гармонічні відображення на тривимірних групах Лі із метрикою Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні.

Табл. 1: Тривимірні унімодулярні групи Лі. [33]

Знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Відповідна група Лі G
$+, +, +$	$SU(2)$ або $SO(3)$
$+, +, -$	$SL(2, \mathbb{R})$ або $O(1, 2)$
$+, +, 0$	$E(2)$
$+, 0, -$	$E(1, 1)$
$+, 0, 0$	Група Гейзенберга
$0, 0, 0$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

Табл. 2: Набори ліво-інваріантних гармонічних одиничних векторних полів. [18]

Група Лі G	умови для λ_i	векторні поля
$SU(2)$ або $SO(3)$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$\mathbb{S}$
	$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$	$\{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$	$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
$SL(2, \mathbb{R})$ або $O(1, 2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2$	$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
$E(2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
$E(1, 1)$		$\{\pm e_2\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_3\}_{\mathbb{R}})$
Група Гейзенберга		$\mathbb{S}$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$		$\mathbb{S}$

Табл. 3: Набори гармонічних відображень $G \rightarrow T_1G$, які задаються ліво-інваріантними гармонічними одиничними векторними полями. [18]

Група Лі G	умови для λ_i	відображення
$SU(2)$ або $SO(3)$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$\mathbb{S}$
	$\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$	$\{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$	$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
$SL(2, \mathbb{R})$ або $O(1, 2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2$	$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
$E(2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$
	$\lambda_1 > \lambda_2$	$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
$E(1, 1)$		$\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$
Група Гейзенберга		$\{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$		$\mathbb{S}$

Нехай $\{e_1, e_2, e_3\}$ – ортонормовани репер алгебри Лі групи Лі G

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad (191)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є структурними константами і $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Відповідно до класифікації Дж. Мілнора [33] ми маємо шість видів тривимірних унімодулярних

алгебр Лі, які описуються в таблиці 1. Гармонічні векторні поля і відображення Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке повністю описані в таблицях 2 і 3.

Позначимо числами зв'язності $\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i$. Нехай $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$ — будь-яке лівоінваріантне одиничне векторне поле. Матриця оператора A_ξ має вигляд:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2 \xi^3 & \mu_3 \xi^2 \\ \mu_1 \xi^3 & 0 & -\mu_3 \xi^1 \\ -\mu_1 \xi^2 & \mu_2 \xi^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (192)$$

Тоді,

$$\|A_\xi\|^2 = (\mu_2^2 + \mu_3^2)(\xi^1)^2 + (\mu_1^2 + \mu_3^2)(\xi^2)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2)(\xi^3)^2. \quad (193)$$

Використовуючи Теорему 3.4, ми маємо наступний теорему.

Теорема 3.9 [31] *Нехай G — тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою g , яка оснащена скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta, \varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні $T_1 G$. Лівоінваріантні одиничні векторні поля ξ є гармонічними на (G, g) відносно ортонормованого базису алгебри Лі групи Лі G , що задовольняє рівність (191), тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \xi^2 \mu_3 e_3(\varepsilon) - \xi^3 \mu_2 e_2(\varepsilon) = ((\mu_1^2 - \mu_2^2)(\xi^2)^2 + (\mu_1^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2) \xi^1 \\ \xi^3 \mu_1 e_1(\varepsilon) - \xi^1 \mu_3 e_3(\varepsilon) = ((\mu_2^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2 + (\mu_2^2 - \mu_1^2)(\xi^1)^2) \xi^2 \\ \xi^1 \mu_2 e_2(\varepsilon) - \xi^2 \mu_1 e_1(\varepsilon) = ((\mu_3^2 - \mu_1^2)(\xi^1)^2 + (\mu_3^2 - \mu_2^2)(\xi^2)^2) \xi^3 \end{cases}. \quad (194)$$

Гармонічне лівоінваріантне одиничне векторне поле ξ визначає гармонічне відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1 G, G^{\delta, \varepsilon})$ відносно ортонормованого базису алгебри Лі групи Лі G , що задовольняє рівність (191), тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} e^{\delta - \varepsilon} e_1(\delta) + \|A_\xi\|^2 e_1(\varepsilon) = 2\xi^2 \xi^3 (\mu_2 - \mu_3) \sigma_{23} \\ e^{\delta - \varepsilon} e_2(\delta) + \|A_\xi\|^2 e_2(\varepsilon) = 2\xi^3 \xi^1 (\mu_3 - \mu_1) \sigma_{31} \\ e^{\delta - \varepsilon} e_3(\delta) + \|A_\xi\|^2 e_3(\varepsilon) = 2\xi^1 \xi^2 (\mu_1 - \mu_2) \sigma_{12} \end{cases}, \quad (195)$$

де $\sigma_{ij} = \mu_i \mu_k + \mu_j \mu_k - \mu_i \mu_j$ and (193).

Доведення. Використовуючи (19), (22) та ортонормований базис алгебри Лі

групи Лі G , що задовольняє рівність (191), ми маємо

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}\xi &= \sum_{k=1}^3 Hess_{\xi}(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^3 (\nabla_{e_k} A_{\xi}) e_k \\ &= \mu_1^2(\xi^2 e_2 + \xi^3 e_3) + \mu_2^2(\xi^1 e_1 + \xi^3 e_3) + \mu_3^2(\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2) \\ &= \xi^1(\mu_2^2 + \mu_3^2)e_1 + \xi^2(\mu_1^2 + \mu_3^2)e_2 + \xi^3(\mu_1^2 + \mu_2^2)e_3,\end{aligned}\quad (196)$$

$$\begin{aligned}A_{\xi}(\nabla \varepsilon) &= (\xi^2 \mu_3 e_3(\varepsilon) - \xi^3 \mu_2 e_2(\varepsilon))e_1 + (\xi^3 \mu_1 e_1(\varepsilon) - \xi^1 \mu_3 e_3(\varepsilon))e_2 \\ &+ (\xi^1 \mu_2 e_2(\varepsilon) - \xi^2 \mu_1 e_1(\varepsilon))e_3.\end{aligned}\quad (197)$$

Використовуючи Теорему 3.4, ми маємо

$$\begin{aligned}&\xi^1(\mu_2^2 + \mu_3^2)e_1 + \xi^2(\mu_1^2 + \mu_3^2)e_2 + \xi^3(\mu_1^2 + \mu_2^2)e_3 \\ &+ (\xi^2 \mu_3 e_3(\varepsilon) - \xi^3 \mu_2 e_2(\varepsilon))e_1 + (\xi^3 \mu_1 e_1(\varepsilon) - \xi^1 \mu_3 e_3(\varepsilon))e_2 \\ &+ (\xi^1 \mu_2 e_2(\varepsilon) - \xi^2 \mu_1 e_1(\varepsilon))e_3 = \|A_{\xi}\|^2(\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3),\end{aligned}\quad (198)$$

$$\begin{cases} \xi^2 \mu_3 e_3(\varepsilon) - \xi^3 \mu_2 e_2(\varepsilon) = (\|A_{\xi}\|^2 - (\mu_2^2 + \mu_3^2))\xi^1 \\ \xi^3 \mu_1 e_1(\varepsilon) - \xi^1 \mu_3 e_3(\varepsilon) = (\|A_{\xi}\|^2 - (\mu_1^2 + \mu_3^2))\xi^2 \\ \xi^1 \mu_2 e_2(\varepsilon) - \xi^2 \mu_1 e_1(\varepsilon) = (\|A_{\xi}\|^2 - (\mu_1^2 + \mu_2^2))\xi^3 \end{cases}, \quad (199)$$

де $\|A_{\xi}\|^2 - (\mu_j^2 + \mu_k^2) = (\mu_i^2 - \mu_j^2)(\xi^j)^2 + (\mu_i^2 - \mu_k^2)(\xi^k)^2$, через (193), і ми отримуємо систему (194). Використовуючи (20) та ортонормований базис алгебри Лі групи Лі G , що задовольняє (191), ми маємо

$$trace(Hm_{\xi}) = \xi^2 \xi^3 (\mu_3 - \mu_2) \sigma_{23} e_1 + \xi^3 \xi^1 (\mu_1 - \mu_3) \sigma_{31} e_2 + \xi^1 \xi^2 (\mu_2 - \mu_1) \sigma_{12} e_3. \quad (200)$$

Використовуючи Теорему 3.4, ми маємо

$$\begin{aligned}&2(\xi^2 \xi^3 (\mu_3 - \mu_2) \sigma_{23} e_1 + \xi^3 \xi^1 (\mu_1 - \mu_3) \sigma_{31} e_2 + \xi^1 \xi^2 (\mu_2 - \mu_1) \sigma_{12} e_3) \\ &+ e^{\delta-\varepsilon}(e_1(\delta)e_1 + e_2(\delta)e_2 + e_3(\delta)e_3) \\ &+ \|A_{\xi}\|^2(e_1(\varepsilon)e_1 + e_2(\varepsilon)e_2 + e_3(\varepsilon)e_3) = 0,\end{aligned}\quad (201)$$

$$\begin{cases} 2\xi^2 \xi^3 (\mu_3 - \mu_2) \sigma_{23} + e^{\delta-\varepsilon}e_1(\delta) + \|A_{\xi}\|^2 e_1(\varepsilon) = 0 \\ 2\xi^3 \xi^1 (\mu_1 - \mu_3) \sigma_{31} + e^{\delta-\varepsilon}e_2(\delta) + \|A_{\xi}\|^2 e_2(\varepsilon) = 0 \\ 2\xi^1 \xi^2 (\mu_2 - \mu_1) \sigma_{12} + e^{\delta-\varepsilon}e_3(\delta) + \|A_{\xi}\|^2 e_3(\varepsilon) = 0 \end{cases}, \quad (202)$$

і ми отримуємо систему (195). Це завершує доведення теореми. ■

Звернемо увагу, що для метрики Сасаки $G^{0,0}$ маємо $e_1(\delta) = e_2(\delta) = e_3(\delta) = 0$ та $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Але якщо, навпаки, $e_1(\delta) = e_2(\delta) = e_3(\delta) = 0$ та $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, то Теорема 3.9 також виконується для всіх лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів ξ та гармонічних відображень $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,0})$ на тривимірних унімодулярних групах Лі G , оснащених метрикою Сасаки $G^{0,0}$ на одиничному дотичному розшаруванні (див. Таблиці 2 та 3). Крім того, ми отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.10 [31] *Нехай G — тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою g , оснащена скрученою метрикою Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$ (метрика Сасаки $G^{0,0}$ для $\delta = \varepsilon = 0$) на одиничному дотичному розшаруванні T_1G . Нехай ξ — лівоінваріантне гармонічне одиничне векторне поле на (G, g) , оснащеному $G^{0,0}$ на T_1G , відносно ортонормованого базису $\{e_i\}_{i=1}^3$ алгебри Лі групи Лі G , що задовольняє (191). Тоді скручена метрика Сасаки $G^{\delta,\varepsilon}$ зберігає властивість гармонічності векторного поля ξ , якщо $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Крім того, нехай ξ також визначає гармонічне відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,0})$. Тоді відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{\delta,\varepsilon})$ також є гармонічним, якщо $e_1(\delta) = e_2(\delta) = e_3(\delta) = 0$ та $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$.*

Розглянемо детальніше кожен тривимірну унімодулярну групу Лі окремо для вертикально масштабованої метрики $G^{0,\varepsilon}$. Зокрема, з'ясуємо, коли група G допускає лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відносно ортонормованого базису алгебри Лі групи Лі G , що задовольняє (191).

Теорема 3.11 [31] *Нехай групи $SU(2)$ та $SO(3)$ оснащені вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = SU(2)$ або $SO(3)$ з лівоінваріантною метрикою g . Тоді групи $SU(2)$ та $SO(3)$ допускають лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які*

визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відносно ортонормованого базису алгебри Лі групи G , що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли виконується один із наступних випадків.

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \mathbb{S}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$, $\mu_1 > 0$, $\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4 > 0$, $e_1(\varepsilon) = 0$, $e_2(\varepsilon) = \text{const}$, $e_3(\varepsilon) = \text{const}$, $e_2(\varepsilon)^2 + e_3(\varepsilon)^2 = \frac{2\mu_1(\mu - \mu_1)(\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4)}{(\mu^2 - \mu_1^2)^2}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^2 - \mu_1^2} e_1 \mp \frac{e_3(\varepsilon)\mu\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4} e_2 \pm \frac{e_2(\varepsilon)\mu\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4} e_3$, $\partial e \mu = \mu_2 = \mu_3$;
- $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\mu_1\sigma_{23} > 0$, $p_{1,23}, q_{1,23} > 0$, $e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 + \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\mu_1\sigma_{23} > 0$, $p_{1,23}, q_{1,23} > 0$, $e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_1(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 - \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\sigma_{31} > 0$, $p_{2,31}, q_{2,31} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}}e_1 + \sqrt{p_{2,31}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_1^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\sigma_{31} > 0$, $p_{2,31}, q_{2,31} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_2(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}}e_1 - \sqrt{p_{2,31}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_1^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\sigma_{12} > 0$, $p_{3,12}, q_{3,12} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0$, $e_3(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{3,12}}e_1 + \sqrt{q_{3,12}}e_2}{\mu_2^2 - \mu_1^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\sigma_{12} > 0$, $p_{3,12}, q_{3,12} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0$, $e_3(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{3,12}}e_1 - \sqrt{q_{3,12}}e_2}{\mu_2^2 - \mu_1^2}$;

$\partial e p_{i,jk} = (\mu_i^2 - \mu_j^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) - 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j)$, $q_{i,jk} = (\mu_k^2 - \mu_i^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) + 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j)$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Доведення. Відповідно до Таблиці 1, маємо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, тоді $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$. Зауважимо, що, використовуючи (193), маємо $\|A_\xi\| \neq 0$. Розглянемо системи (194) і (195).

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тобто, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \neq 0$. Тоді $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, а $\xi \in \mathbb{S}$.

Нехай $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$, тобто $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3$. Позначимо $\mu = \mu_2 = \mu_3$. Використовуючи систему (195), маємо:

$$e_1(\varepsilon) = 0, \quad e_2(\varepsilon) = \frac{2\xi^3\xi^1(\mu - \mu_1)\mu^2}{\|A_\xi\|^2}, \quad e_3(\varepsilon) = \frac{2\xi^1\xi^2(\mu_1 - \mu)\mu^2}{\|A_\xi\|^2}. \quad (203)$$

Отже, $e_2(\varepsilon) = \text{const}$ і $e_3(\varepsilon) = \text{const}$. Використовуючи систему (194), маємо:

$$\|A_\xi\|^2(\xi^1)^2\xi^3 = \frac{2\mu^3}{\mu_1 + \mu}(\xi^1)^2\xi^3, \quad (204)$$

$$\|A_\xi\|^2(\xi^1)^2\xi^2 = \frac{2\mu^3}{\mu_1 + \mu}(\xi^1)^2\xi^2. \quad (205)$$

Якщо $\xi \in \{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$, то $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Нехай $\xi^1 \neq 0$ і $(\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \neq 0$, тоді

$$\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu^3}{\mu_1 + \mu}. \quad (206)$$

З іншого боку, використовуючи (193), маємо $\|A_\xi\|^2 = \mu_1^2 + \mu^2 + (\mu^2 - \mu_1^2)(\xi^1)^2$.

Тому, якщо $\mu_1 > 0$ і $\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4 > 0$, то

$$\xi^1 = \pm \frac{\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^2 - \mu_1^2}, \quad (207)$$

$$\xi^2 = \mp \frac{e_3(\varepsilon)\mu\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4} \quad (208)$$

$$\xi^3 = \pm \frac{e_2(\varepsilon)\mu\sqrt{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}}{\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4}, \quad (209)$$

де

$$e_2(\varepsilon)^2 + e_3(\varepsilon)^2 = \frac{2\mu_1(\mu - \mu_1)(\mu^4 - 2\mu_1\mu^3 + \mu_1^4)}{(\mu^2 - \mu_1^2)^2}. \quad (210)$$

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$, тобто, $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3$. Позначимо $\mu = \mu_1 = \mu_2 > 0$. Подібним чином ми отримуємо, що якщо $\xi \in \{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$, то $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Також, якщо $\xi^3 \neq 0$ і $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 \neq 0$, то $\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu^3}{\mu_3 + \mu}$. Однак, з іншого боку, використовуючи (193), маємо $\|A_\xi\|^2 = (\mu_3^2 - \mu^2)((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2) + 2\mu^2$.

Тому

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = -\frac{2\mu^2\mu_3(\mu_3 - \mu)}{(\mu_3^2 - \mu^2)^2} < 0, \quad (211)$$

але це неможливо.

Нехай $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, тобто $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Використовуючи систему (195), отримуємо:

$$e_1(\varepsilon) = \frac{2\xi^2\xi^3(\mu_2 - \mu_3)\sigma_{23}}{\|A_\xi\|^2}, \quad (212)$$

$$e_2(\varepsilon) = \frac{2\xi^3\xi^1(\mu_3 - \mu_1)\sigma_{31}}{\|A_\xi\|^2}, \quad (213)$$

$$e_3(\varepsilon) = \frac{2\xi^1\xi^2(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12}}{\|A_\xi\|^2}. \quad (214)$$

Отже, $e_1(\varepsilon) = \text{const}$, $e_2(\varepsilon) = \text{const}$ і $e_3(\varepsilon) = \text{const}$. Якщо $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$, то $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Нехай $\xi^1 = 0$ і $\xi^2, \xi^3 \neq 0$, тоді $e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$ і, використовуючи систему (194), отримуємо:

$$\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu_1\sigma_{23}}{\mu_2 + \mu_3}. \quad (215)$$

Отже, якщо $\mu_1\sigma_{23} > 0$, тоді:

$$e_1(\varepsilon) = \frac{\mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_1}\xi^2\xi^3. \quad (216)$$

З іншого боку, використовуючи (193), маємо $\|A_\xi\|^2 = (\mu_1^2 + \mu_3^2)(\xi^2)^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2)(\xi^3)^2$. Позначимо $p_{1,23} = (\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2) - 2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_3 - \mu_2)$ і $q_{1,23} = (\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2) + 2\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_3 - \mu_2)$. Тоді, якщо $p_{1,23}, q_{1,23} > 0$, то

$$e_1(\varepsilon) = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}, \quad (217)$$

$$\xi \in \left\{ \frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 \pm \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2}, -\frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 \pm \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2} \right\}. \quad (218)$$

Зазначимо, що подібні результати можна отримати для випадків $\xi^2 = 0, \xi^1, \xi^3 \neq 0$ і $\xi^3 = 0, \xi^1, \xi^2 \neq 0$. Тепер нехай $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$. Використовуючи систему (194), отримуємо:

$$\begin{aligned} & ((\mu_1^2 - \mu_2^2)(\xi^2)^2 + (\mu_1^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2)\|A_\xi\|^2 \\ & = 2(\xi^2)^2\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} - 2(\xi^3)^2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)\sigma_{31}, \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned}
& ((\mu_2^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2 + (\mu_2^2 - \mu_1^2)(\xi^1)^2) \|A_\xi\|^2 \\
& = 2(\xi^3)^2 \mu_1(\mu_2 - \mu_3)\sigma_{23} - 2(\xi^1)^2 \mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12}, \quad (220)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\mu_3^2 - \mu_1^2)(\xi^1)^2 + (\mu_3^2 - \mu_2^2)(\xi^2)^2) \|A_\xi\|^2 \\
& = 2(\xi^1)^2 \mu_2(\mu_3 - \mu_1)\sigma_{31} - 2(\xi^2)^2 \mu_1(\mu_2 - \mu_3)\sigma_{23}. \quad (221)
\end{aligned}$$

Зазначимо, що:

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_3)\sigma_{23} + \mu_2(\mu_3 - \mu_1)\sigma_{31} + \mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} = 0, \quad (222)$$

оскільки $\sigma_{31} - \sigma_{12} = 2\mu_1(\mu_2 - \mu_3)$, $\sigma_{12} - \sigma_{23} = 2\mu_2(\mu_3 - \mu_1)$, $\sigma_{23} - \sigma_{31} = 2\mu_3(\mu_1 - \mu_2)$. Помножимо третій рядок на -1 і додамо до другого рядка системи. Таким чином, використовуючи (222), отримаємо $\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu_1\sigma_{23}}{\mu_2 + \mu_3}$. Проте аналогічним чином можна отримати $\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu_2\sigma_{31}}{\mu_3 + \mu_1}$ і $\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu_3\sigma_{12}}{\mu_1 + \mu_2}$. Тоді $\frac{\mu_1\sigma_{23}}{\mu_2 + \mu_3} = \frac{\mu_2\sigma_{31}}{\mu_3 + \mu_1} = \frac{\mu_3\sigma_{12}}{\mu_1 + \mu_2}$, тобто $\mu_1^2 - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} = \mu_2^2 - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_3 + \mu_1} = \mu_3^2 - \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1 + \mu_2}$. Отже,

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = (\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2), \quad (223)$$

тобто

$$\|A_\xi\|^2 = -2(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2), \text{ де } \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2 < 0. \quad (224)$$

Зазначимо, що якщо $\mu_1 \leq 0$, то $\mu_1\mu_2\mu_3 \leq 0$, але $(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2) > 0$. Якщо $\mu_1 > 0$, то $\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2 > 0$. Отже, якщо $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$, то системи не мають розв'язків. ■

Теорема 3.12 [31] *Нехай групи $SL(2, \mathbb{R})$ і $O(1, 2)$ оснащені вертикально масштабованою метрикою $G^{0, \varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = SL(2, \mathbb{R})$ або $O(1, 2)$ з лівоінваріантною метрикою g . Тоді групи $SL(2, \mathbb{R})$ і $O(1, 2)$ допускають лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0, \varepsilon})$ відповідно до ортонормованого репера алгебри Лі групи G що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли виконується один із наступних випадків.*

- $\lambda_1 = \lambda_2$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$;

- $\lambda_1 > \lambda_2, \sigma_{23} < 0, p_{1,23}, q_{1,23} > 0, e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}e_2} + \sqrt{q_{1,23}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_2^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \sigma_{23} < 0, p_{1,23}, q_{1,23} > 0, e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_1(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}e_2} - \sqrt{q_{1,23}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_2^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \mu_2\sigma_{31} > 0, p_{2,31}, q_{2,31} > 0, e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}e_1} + \sqrt{p_{2,31}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_1^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \mu_2\sigma_{31} > 0, p_{2,31}, q_{2,31} > 0, e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_2(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}e_1} - \sqrt{p_{2,31}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_1^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \sigma_{12} < 0, p_{3,12}, q_{3,12} > 0, e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0, e_3(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{3,12}e_1} + \sqrt{q_{3,12}e_2}}{\mu_2^2 - \mu_1^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \sigma_{12} < 0, p_{3,12}, q_{3,12} > 0, e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0, e_3(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)},$
 $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{3,12}e_1} - \sqrt{q_{3,12}e_2}}{\mu_2^2 - \mu_1^2};$
- $\lambda_1 > \lambda_2, \mu_2 > 0, e_1(\varepsilon) = \text{const}, e_2(\varepsilon) = \text{const}, e_3(\varepsilon) = \text{const},$

$$\begin{cases} \mu_1^2(\gamma_2\gamma_3)^2 + \mu_2^2(\gamma_3\gamma_1)^2 + \mu_3^2(\gamma_1\gamma_2)^2 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ (\gamma_2\gamma_3)^2 + (\gamma_3\gamma_1)^2 + (\gamma_1\gamma_2)^2 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{cases}, \quad (225)$$

$$\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3, \text{ where } (\xi^1)^2 = \frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}, (\xi^2)^2 = \frac{\gamma_3\gamma_1}{\gamma_2}, (\xi^3)^2 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}, \gamma_1 = \frac{\mu_1 e_1(\varepsilon)}{\mu_2^2 - \mu_3^2}, \gamma_2 = \frac{\mu_2 e_2(\varepsilon)}{\mu_3^2 - \mu_1^2}, \gamma_3 = \frac{\mu_3 e_3(\varepsilon)}{\mu_1^2 - \mu_2^2};$$

$$\partial e p_{i,jk} = (\mu_i^2 - \mu_j^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) - 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j), q_{i,jk} = (\mu_k^2 - \mu_i^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) + 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j).$$

Доведення. Згідно з таблицею 1, маємо $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$, тоді $\mu_1 < 0, \mu_3 > 0, \mu_1 \leq \mu_2 < \mu_3$. Звернемо увагу, що, використовуючи (193), маємо $\|A_\xi\| \neq 0$. Розглянемо системи (194) і (195).

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2$, тобто $\mu_1 = \mu_2 < \mu_3$. Подібним чином, як у Теоремі 3.11, ми отримуємо $\xi \in \{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$ і $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$.

Нехай $\lambda_1 > \lambda_2$, тобто $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Отже, ми можемо отримати подібні результати для $\xi^i = 0$, $\xi^j, \xi^k \neq 0$, де $i, j, k = 1, 2, 3$, як у Теоремі 3.11. Нехай $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$. Подібним чином, як у Теоремі 3.11, ми отримуємо:

$$\|A_\xi\|^2 = \frac{2\mu_1\sigma_{23}}{\mu_2 + \mu_3} = \frac{2\mu_2\sigma_{31}}{\mu_3 + \mu_1} = \frac{2\mu_3\sigma_{12}}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (226)$$

тобто $\|A_\xi\|^2 = -2(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2)$, де $\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2 < 0$, і $\mu_1\mu_2\mu_3 = (\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)$. Якщо $\mu_2 \leq 0$, то $\mu_1\mu_2\mu_3 \geq 0$, але $(\mu_2 + \mu_3)(\mu_3 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2) < 0$, отже, системи не мають розв'язків. Нехай $\mu_2 > 0$. Використовуючи (193) і $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1$, ми можемо отримати:

$$\|A_\xi\|^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2(\xi^1)^2 - \mu_2^2(\xi^2)^2 - \mu_3^2(\xi^3)^2. \quad (227)$$

Отже, знаючи, що $(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + 2(\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2)$, маємо $\mu_1^2(\xi^1)^2 + \mu_2^2(\xi^2)^2 + \mu_3^2(\xi^3)^2 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2$. Оскільки $\mu_2^2 < (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2 < \mu_3^2$, то існують векторні поля ξ , такі що:

$$\begin{cases} \mu_1^2(\xi^1)^2 + \mu_2^2(\xi^2)^2 + \mu_3^2(\xi^3)^2 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2 \\ (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1 \end{cases}. \quad (228)$$

Використовуючи систему (195), маємо $e_1(\varepsilon) = \text{const}$, $e_2(\varepsilon) = \text{const}$, $e_3(\varepsilon) = \text{const}$ і

$$e_1(\varepsilon) = \frac{\mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_1} \xi^2 \xi^3, \quad e_2(\varepsilon) = \frac{\mu_3^2 - \mu_1^2}{\mu_2} \xi^3 \xi^1, \quad e_3(\varepsilon) = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_3} \xi^1 \xi^2. \quad (229)$$

Позначимо:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1 e_1(\varepsilon)}{\mu_2^2 - \mu_3^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_2 e_2(\varepsilon)}{\mu_3^2 - \mu_1^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\mu_3 e_3(\varepsilon)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}. \quad (230)$$

Тоді $\xi^2 \xi^3 = \gamma_1$, $\xi^3 \xi^1 = \gamma_2$, $\xi^1 \xi^2 = \gamma_3$, тобто $(\xi^1)^2 = \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\gamma_1}$, $(\xi^2)^2 = \frac{\gamma_3 \gamma_1}{\gamma_2}$, $(\xi^3)^2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_3}$.

Отже, використовуючи (228), ми отримуємо:

$$\begin{cases} \mu_1^2(\gamma_2 \gamma_3)^2 + \mu_2^2(\gamma_3 \gamma_1)^2 + \mu_3^2(\gamma_1 \gamma_2)^2 = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^2 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ (\gamma_2 \gamma_3)^2 + (\gamma_3 \gamma_1)^2 + (\gamma_1 \gamma_2)^2 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{cases}. \quad (231)$$

Це завершує доведення теореми. ■

Теорема 3.13 [31] *Нехай група $E(2)$ оснащена вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = E(2)$ з*

лівоінваріантною метрикою g . Тоді група $E(2)$ допускає лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відповідно до ортонормованого репера алгебри Лі групи G , що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли виконується один із наступних випадків.

- $\lambda_1 = \lambda_2$, ε — це будь-яка гладка функція, $\xi = \pm e_3$;
- $\lambda_1 = \lambda_2$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_3\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}})$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $q_{1,23} > 0$, $e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 + \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $q_{1,23} > 0$, $e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_1(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{p_{1,23}}e_2 - \sqrt{q_{1,23}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_2^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $p_{2,31} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}}e_1 + \sqrt{p_{2,31}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_1^2}$;
- $\lambda_1 > \lambda_2$, $p_{2,31} > 0$, $e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $e_2(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{2,31}q_{2,31}}}{\mu_2(\mu_3^2 - \mu_1^2)}$, $\xi = \pm \frac{\sqrt{q_{2,31}}e_1 - \sqrt{p_{2,31}}e_3}{\mu_3^2 - \mu_1^2}$;

де $p_{i,jk} = (\mu_i^2 - \mu_j^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) - 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j)$, $q_{i,jk} = (\mu_k^2 - \mu_i^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) + 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j)$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Доведення. Згідно з таблицею 1, маємо $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$, тоді $\mu_1 = -\mu_2$, $\mu_3 > 0$, $\mu_3 \neq \mu_1$, $\mu_3 \neq \mu_2$. Розглянемо системи (194) і (195).

Нехай $\lambda_1 = \lambda_2$, тобто $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Тоді $\|A_\xi\|^2 = \mu_3^2((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2)$ і

$$\begin{cases} \xi^2 e_3(\varepsilon) = -\mu_3(\xi^3)^2 \xi^1 \\ \xi^1 e_3(\varepsilon) = \mu_3(\xi^3)^2 \xi^2 \\ ((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2) \xi^3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \|A_\xi\|^2 e_1(\varepsilon) = 0 \\ \|A_\xi\|^2 e_2(\varepsilon) = 0 \\ \|A_\xi\|^2 e_3(\varepsilon) = 0 \end{cases}. \quad (232)$$

Якщо $\xi \in \{\pm e_3\}$, то $\|A_\xi\|^2 = 0$ і ε — це будь-яка гладка функція. Якщо $\xi \in \mathbb{S} \cap \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}}$, то $\|A_\xi\|^2 = \mu_3^2 \neq 0$ і $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$.

Нехай $\lambda_1 > \lambda_2$, тобто $\mu_1 < \mu_2$, $\mu_2 = -\mu_1 > 0$. Звернемо увагу, що $\|A_\xi\|^2 \neq 0$. Позначимо $\mu = \mu_2$, тоді $\mu_1 = -\mu$. Якщо $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$, то $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) =$

$e_3(\varepsilon) = 0$. Легко перевірити, що якщо $\xi^3 = 0$ і $\xi^1, \xi^2 \neq 0$, то рішень немає. Зверніть увагу, що ми можемо отримати подібні результати для $\xi^1 = 0, \xi^2, \xi^3 \neq 0$ та $\xi^2 = 0, \xi^1, \xi^3 \neq 0$, як у Теоремі 3.11. Нехай $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$, тоді, аналогічно як в Теоремі 3.11, ми можемо отримати:

$$\begin{cases} (\mu^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2 \|A_\xi\|^2 = 2(\xi^2)^2 \mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} - 2(\xi^3)^2 \mu_2(\mu_3 - \mu_1)\sigma_{31} \\ (\mu^2 - \mu_3^2)(\xi^3)^2 \|A_\xi\|^2 = 2(\xi^3)^2 \mu_1(\mu_2 - \mu_3)\sigma_{23} - 2(\xi^1)^2 \mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} \end{cases}. \quad (233)$$

Помножимо другий рядок на -1 і додамо його до першого рядка системи. Отже, використовуючи (222), ми отримуємо $\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} = 0$. Однак $\mu_3(\mu_1 - \mu_2)\sigma_{12} = -2\mu^3\mu_3 \neq 0$. Таким чином, якщо $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$, то рішень немає. ■

Теорема 3.14 [31] *Нехай група $E(1, 1)$ наділена вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = E(1, 1)$ із лівоінваріантною метрикою g . Тоді група $E(1, 1)$ допускає лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відносно ортонормованого репера алгебри Лі групи G , що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли виконується один із наступних випадків.*

- $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, \xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\};$
- $\mu_2 = 0, e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_2(\varepsilon) = \text{const}, 0 < e_2(\varepsilon)^2 \leq 4\mu^2, \xi = \xi^1 e_1 + \xi^3 e_3,$
 $\partial e (\xi^1)^2 = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - e_2(\varepsilon)^2}}{4\mu}, (\xi^3)^2 = \frac{2\mu \mp \sqrt{4\mu^2 - e_2(\varepsilon)^2}}{4\mu};$
- $\frac{1}{2}\mu_1 < \mu_2 < 0, p_{1,23} > 0, e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}, \xi =$
 $\pm \frac{\sqrt{p_{1,23}e_2} + \sqrt{q_{1,23}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_2^2};$
- $\frac{1}{2}\mu_1 < \mu_2 < 0, p_{1,23} > 0, e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_1(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{1,23}q_{1,23}}}{\mu_1(\mu_3^2 - \mu_2^2)}, \xi =$
 $\pm \frac{\sqrt{p_{1,23}e_2} - \sqrt{q_{1,23}e_3}}{\mu_3^2 - \mu_2^2};$
- $0 < \mu_2 < \frac{1}{2}\mu_3, q_{3,12} > 0, e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0, e_3(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \xi =$
 $\pm \frac{\sqrt{p_{3,12}e_1} + \sqrt{q_{3,12}e_2}}{\mu_2^2 - \mu_1^2};$

$$\bullet \ 0 < \mu_2 < \frac{1}{2}\mu_3, \ q_{3,12} > 0, \ e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = 0, \ e_3(\varepsilon) = -\frac{\sqrt{p_{3,12}q_{3,12}}}{\mu_3(\mu_2^2 - \mu_1^2)}, \ \xi = \pm \frac{\sqrt{p_{3,12}e_1} - \sqrt{q_{3,12}e_2}}{\mu_2^2 - \mu_1^2};$$

$$\text{де } p_{i,jk} = (\mu_i^2 - \mu_j^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) - 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j), \ q_{i,jk} = (\mu_k^2 - \mu_i^2)(\mu_k^2 - \mu_j^2) + 2\mu_i\mu_j\mu_k(\mu_k - \mu_j), \ i, j, k = 1, 2, 3.$$

Доведення. Відповідно до Таблиці 1, ми маємо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, тоді $\mu_3 = -\mu_1 > 0$, $\mu_2 \neq \mu_1$, $\mu_2 \neq \mu_3$ і $\|A_\xi\| \neq 0$. Розглянемо системи (194) та (195). Позначимо $\mu = \mu_3$, тоді $\mu_1 = -\mu$. Якщо $\xi \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$, то $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$. Нехай $\xi^2 = 0$, $\xi^1, \xi^3 \neq 0$, тоді

$$e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, \quad \mu_2 e_2(\varepsilon) = 0, \quad e_2(\varepsilon) = \frac{4\mu^3}{\|A_\xi\|^2} \xi^3 \xi^1. \quad (234)$$

Якщо $e_2(\varepsilon) = 0$, тоді розв'язків немає. Якщо $\mu_2 = 0$, тоді $\|A_\xi\|^2 = \mu^2$ і $e_2(\varepsilon) = 4\mu \xi^3 \xi^1$, тобто $e_2(\varepsilon) = \text{const}$. Отже, якщо $0 < e_2(\varepsilon)^2 \leq 4\mu^2$, тоді

$$(\xi^1)^2 = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - e_2(\varepsilon)^2}}{4\mu}, \quad (\xi^3)^2 = \frac{2\mu \mp \sqrt{4\mu^2 - e_2(\varepsilon)^2}}{4\mu}. \quad (235)$$

Зауважимо, що можна отримати подібні результати для $\xi^1 = 0$, $\xi^2, \xi^3 \neq 0$ та $\xi^3 = 0$, $\xi^1, \xi^2 \neq 0$, як у Теоремі 3.11. Нехай $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$, тоді аналогічно до Теорем 3.13 розв'язків немає, якщо $\mu_2 \neq 0$. Також, якщо $\mu_2 = 0$, то отримуємо $(\xi^2)^2 = 1$, $\xi^1 = \xi^3 = 0$, що є неможливим. Отже, якщо $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \neq 0$, то розв'язків немає. ■

Теорема 3.15 [31] *Нехай група Гейзенберга наділена вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де G — це група Гейзенберга з лівоінваріантною метрикою g . Тоді група Гейзенберга допускає лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відносно ортонормованого репера алгебри Лі групи G , що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$.*

Доведення. Відповідно до Таблиці 1, ми маємо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тоді $-\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 > 0$ і $\|A_\xi\| \neq 0$. Тому, використовуючи системи (194) та (195), отримуємо $e_1(\varepsilon) = e_2(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0$, $\xi \in \{\pm e_1\} \cup (\mathbb{S} \cap \{e_2, e_3\}_{\mathbb{R}})$. ■

Теорема 3.16 [31] *Нехай група $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ наділена вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ з лівоінваріантною метрикою g . Тоді група $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ допускає лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$ відносно ортонормованого репера алгебри Лі групи G , що задовольняє (191), тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon(x)$ є будь-якою гладкою функцією і $\xi \in \mathbb{S}$.*

Доведення. Відповідно до Таблиці 1, ми маємо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тоді $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ і $\|A_\xi\| = 0$. Використовуючи системи (194) та (195), ми отримуємо, що $\varepsilon(x)$ є будь-якою гладкою функцією і $\xi \in \mathbb{S}$. ■

Використовуючи Наслідок 3.5, ми отримуємо наступний результат.

Наслідок 3.17 [31] *Нехай групи $E(2)$ та $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ наділені вертикально масштабованою метрикою $G^{0,\varepsilon}$ на одиничному дотичному розшаруванні T_1G , де $G = E(2)$ або $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ з лівоінваріантною метрикою g . Тоді групи $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ та $E(2)$ допускають лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$, незалежно від функції деформації $\varepsilon(x)$.*

Приклад 3.18 [31] *Розглянемо евклідову групу руху $E(2)$, задану явно*

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x^3 & -\sin x^3 & x^1 \\ \sin x^3 & \cos x^3 & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x^1, x^2 \in \mathbb{R}, x^3 \in \mathbb{S}^1 \right\}. \quad (236)$$

Розглянемо $\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $\lambda_3 = 0$ та

$$e_1 = \frac{\sqrt{10}}{5} (\cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}), \quad (237)$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} (-\sin x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}), \quad (238)$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{\partial}{\partial x^3}. \quad (239)$$

Отже, e_1, e_2, e_3 задовольняють (191) і $\mu_1 = -\frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{1}{2}, \mu_3 = 2, p_{2,31} = \frac{185}{16} > 0, q_{2,31} = \frac{5}{2}$. Знайдемо ε , таку, що $e_1(\varepsilon) = e_3(\varepsilon) = 0, e_2(\varepsilon) = \frac{\sqrt{74}}{6}$, тобто

$$\begin{cases} \cos x^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1} + \sin x^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3}(-\sin x^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^1} + \cos x^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^2}) = \frac{\sqrt{74}}{6} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^3} = 0 \end{cases} \quad (240)$$

Розв'язок системи: $\varepsilon(x^1, x^2, x^3) = \frac{\sqrt{111}}{6}(-x^1 \sin x^3 + x^2 \cos x^3) + C$. Тоді, використовуючи Теорему 3.13, лівоінваріантні одиничні векторні поля $\xi = \pm \frac{1}{15}(2\sqrt{10}e_1 + \sqrt{185}e_3)$ є гармонічними та визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0,\varepsilon})$.

Аналогічно, ми можемо побудувати приклади для всіх інших випадків за допомогою Теорем 3.11–3.16.

3.4 Висновки до розділу

Розділ присвячено вивченню гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасакі. Основною метою дослідження є пошук деформацій, які зберігають існування гармонічних лівоінваріантних одиничних векторних полів на 3-вимірних унімодулярних групах Лі G з лівоінваріантною метрикою та гармонічними відображеннями $G \rightarrow T_1G$, які задаються одиничними векторними полями, у випадку скрученої метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні.

Основні результати:

- отримано необхідні та достатні умови гармонічності одиничного векторного поля та відображення $M^n \rightarrow T_1M^n$, що задається цим полем (Теорема 3.4);
- отримано необхідні та достатні умови гармонічності одиничного векторного поля ξ та відображення $\xi: (M^2, g) \rightarrow (T_1M^2, G^{\delta,\varepsilon})$ відносно ортонор-

мованого репера $\{e_1, e_2\}$ на M^2 , таким, що $e_1 = \xi$, $e_2 = \eta$, де $\eta \in \mathfrak{X}(M^2)$, $g(\eta, \eta) = 1$, $g(\xi, \eta) = 0$ (Теорема 3.6);

- описано лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ та гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{\delta, \varepsilon})$, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою g , з використанням ортонормованого репера Дж. Мілнора [33] (Теорема 3.9);
- зроблена класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: G \rightarrow T_1G$, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою g у випадку вертикально масштабованої метрики на T_1M , відповідно до класифікації Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] (Теореми 3.11–3.16).

Відкритими залишаються питання:

- опису лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів та гармонічних відображень $G \rightarrow T_1G$, що задаються цим полем, де G – тривимірна неунімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, з використанням деякого ортонормованого репера;
- класифікації лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – тривимірна неунімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, в окремому випадку скрученої метрики Сасаки, а саме у випадку вертикально масштабованої метрики;
- класифікації лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – будь-яка тривимірна група Лі з лівоінваріантною метрикою у випадку скрученої метрики Сасаки;

- отримання необхідних та достатніх умов мінімальності та цілком геодезичності одиничного векторного поля та відображення $M^n \rightarrow T_1 M^n$, що задається цим полем;
- отримання необхідних та достатніх умов мінімальності та цілком геодезичності одиничного векторного поля та відображення $M^2 \rightarrow T_1 M^2$, що задається цим полем, відносно деякого ортонормованого репера.

Результати розділу висвітлено в роботі [31].

4 Особливість ріманової g -натуральної метрики.

4.1 g -натуральна метрика. Дослідження Перроне

Математики М.Т.К. Аббассі і М. Саріх М. [1, 2] запропонували досить узагальнену деформацію метрики Сасаки на TM і T_1M . Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема метрику Сасаки та метрику Чігера-Громолла [10, 44].

Ріманова g -натуральна метрика G на TM визначається формулами:

$$G_{(x,\xi)}(X^h, Y^h) = (\alpha_1 + \alpha_3)(r^2)g_x(X, Y) + (\beta_1 + \beta_3)(r^2)g_x(X, \xi)g_x(Y, \xi), \quad (241)$$

$$G_{(x,\xi)}(X^h, Y^v) = \alpha_2(r^2)g_x(X, Y) + \beta_2(r^2)g_x(X, \xi)g_x(Y, \xi), \quad (242)$$

$$G_{(x,\xi)}(X^v, Y^v) = \alpha_1(r^2)g_x(X, Y) + \beta_1(r^2)g_x(X, \xi)g_x(Y, \xi), \quad (243)$$

для будь-яких векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ і $(x, \xi) \in TM$, де $r^2 = g_x(\xi, \xi)$ і $\alpha_i, \beta_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, є гладкими функціями. Якщо візьмемо

$$\alpha_1(r^2) = 1, \quad \alpha_2(r^2) = \alpha_3(r^2) = \beta_1(r^2) = \beta_2(r^2) = \beta_3(r^2) = 0, \quad (244)$$

то отримаємо метрику Сасаки. Якщо візьмемо

$$\alpha_2(r^2) = \beta_2(r^2) = 0, \quad (245)$$

$$\alpha_1(r^2) = \beta_1(r^2) = -\beta_3(r^2) = \frac{1}{1 + r^2}, \quad (246)$$

$$\alpha_3(r^2) = \frac{r^2}{1 + r^2}, \quad (247)$$

то отримаємо метрику Чігера-Громолла.

Ріманова g -натуральна метрика $\tilde{G}$ на T_1M визначається формулами:

$$\tilde{G}_{(x,\xi)}(X^h, Y^h) = (a + c)g_x(X, Y) + dg_x(X, \xi)g_x(Y, \xi), \quad (248)$$

$$\tilde{G}_{(x,\xi)}(X^h, Y^t) = bg_x(X, Y), \quad (249)$$

$$\tilde{G}_{(x,\xi)}(X^t, Y^t) = ag_x(X, Y) - \frac{\phi}{a + c + d}g_x(X, \xi)g_x(Y, \xi), \quad (250)$$

для будь-яких векторних полів $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ і $(x, \xi) \in T_1M$, де сталі a, b, c, d

задовільняють наступні нерівності:

$$a > 0, \quad \alpha := a(a + c) - b^2 > 0, \quad \phi := a(a + c + d) - b^2 > 0; \quad (251)$$

одинична нормаль в будь-якій точці T_1M визначається формулою

$$N_{(x,\xi)}^G = \frac{1}{\sqrt{(a + c + d)\phi}}(-b\xi^h + (a + c + d)\xi^v); \quad (252)$$

“тангенціальний ліфт” X^t , що відповідає G , векторного поля $X \in \mathfrak{X}(M)$ в точці $(x, \xi) \in T_1M$, як тангенціальна проекція вертикального ліфта поля X в точці (x, ξ) відповідно до N^G визначається формулою

$$X^t = X^v - G_{(x,\xi)}(X^v, N_{(x,\xi)}^G)N_{(x,\xi)}^G = X^v - \sqrt{\frac{\phi}{a + c + d}}g_x(X, \xi)N_{(x,\xi)}^G. \quad (253)$$

Зауважемо, що

$$\xi^t = \frac{b}{a + c + d}\xi^h. \quad (254)$$

Ріманова g -натуральна метрика, незважаючи на свою складну будову, має одну цікаву особливість яку досліджував Д. Перроне [36].

Розглянемо векторне поле ξ як відображення $\xi : M \rightarrow T_1M$. Розглядаючи метрику Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні T_1M , відображення $\xi \in$ ізометричним вкладенням тільки якщо $\xi \in$ паралельним. Однак, Д. Перроне показав, що існує випадок коли *непаралельне* одиничне векторне поле визначає ізометричне вкладення. Він також досліджував *гармонічність* і *мінімальність* відображень [17, 46], що визначаються такими векторними полями. Сформулюємо результати його досліджень.

Пропозиція 4.1 [36] *Нехай (M, g, η, ξ, ϕ) – контактний метричний многовид. Рівовське векторне поле ξ визначає ізометричне вкладення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ з деякою сім’єю ріманових g -натуральних метрик $\tilde{G}$ на T_1M , що визначається параметрами a, b, c і d такими, що*

$$0 < a < 1, \quad b^2 < a(1 - a), \quad c = 1 - 2a, \quad (255)$$

тоді і тільки тоді, коли $d = a$ і M є K -контактним.

Отже, для ізометрії нам необхідно у якості непаралельного векторного поля

взяти рібовське векторне поле на базовому многовиді і певну сім'ю ріманових g -натуральних метрик на одиничному дотичному розшаруванні. Також зауважимо, що метрика на одиничному дотичному розшаруванні, яка розглядається в теоремі, не включає в себе метрику Сасаки.

Теорема 4.2 [36] *Рібовське векторне поле ξ на K -контактному многовиді (M, g, η, ξ, ϕ) визначає гармонічне відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ з будь-якою сім'єю ріманових g -натуральних метрик $\tilde{G}$ на T_1M .*

Теорема 4.3 [36] *Рібовське векторне поле ξ на K -контактному многовиді (M, g, η, ξ, ϕ) визначає мінімальне ізометричне занурення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ з деякою сім'єю ріманових g -натуральних метрик $\tilde{G}$ на T_1M , що визначається параметрами*

$$0 < a < 1, \quad b^2 < a(1 - a), \quad c = 1 - 2a, \quad d = a. \quad (256)$$

Природним доповнення до результатів Д. Перроне буде дослідження *цілком геодезичності*. Геодезичні відображення також досліджували деякі українські математики у роботах [20, 22, 23, 25, 42, 43].

4.2 Цілком геодезичне ізометричне вкладення

Нехай $(M, g, \eta, \xi, \phi) \in K$ -контактним метричним многовидом, $\dim M = 2n + 1$, і нехай $\tilde{G}$ є рімановою g -натуральною метрикою на T_1M з $c = 1 - 2a$ та $d = a$. За Теоремою 4.1, *рібовське векторне поле визначає ізометричне вкладення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$* . За цією гіпотезою ми можемо довести наступне твердження.

Теорема 4.4 [29] *Нехай $(M, g, \eta, \xi, \phi) \in (2n+1)$ -вимірним K -контактним метричним многовидом. Нехай $\mathcal{F}$ є сім'єю ріманових g -натуральних метрик на T_1M , що визначається параметрами*

$$0 < a < 1, \quad b^2 < a(1 - a), \quad c = 1 - 2a, \quad d = a. \quad (257)$$

Рібовське векторне поле ξ для будь-якої метрики $\tilde{G} \in \mathcal{F}$ визначає цілком геодезичне ізометричне вкладення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ тоді і тільки тоді, коли M є сасакієвим многовидом.

Доведення базується на наступних Лемах.

Лема 4.5 [1] Нехай $\tilde{G}$ — ріманова g -натуральна метрика на одиничному дотичному розшируванні T_1M ріманового многовиду (M, g) . Зв'язність Леві-Чивіти $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{G}$ на T_1M повністю визначається наступними формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = & \left\{ \nabla_X Y - \frac{ab}{2\alpha} [R(X, \xi)Y + R(Y, \xi)X] \right. \\ & + \frac{bd}{2\alpha} [g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X] \\ & + \frac{b}{(a+c+d)\alpha} [(ad+b^2)g(R(X, \xi)Y, \xi) \\ & \left. - d(a+c+d)g(X, \xi)g(Y, \xi)]\xi \right\}^h \\ & + \left\{ \frac{b^2}{\alpha} R(X, \xi)Y - \frac{a(a+c)}{2\alpha} R(X, Y)\xi \right. \\ & - \frac{(a+c)d}{2\alpha} [g(Y, \xi)X + g(X, \xi)Y] \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} [-b^2g(R(X, \xi)Y, \xi) + d(a+c)g(Y, \xi)g(X, \xi)]\xi \right\}^t, \end{aligned} \quad (258)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^h} Y^t = & \left\{ -\frac{a^2}{2\alpha} R(Y, \xi) X - \frac{ab^2}{2(a+c+d)\alpha} g(Y, \xi) R(X, \xi) \xi \right. \\
& + \frac{ad}{2\alpha} g(X, \xi) Y + \frac{db^2}{2(a+c+d)\alpha} g(Y, \xi) X \\
& + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(X, \xi)Y, \xi) \\
& + d\alpha g(X, Y) - ad(2(a+c)+d)g(X, \xi)g(Y, \xi)] \xi \Big\}^h \\
& + \left\{ \nabla_X Y + \frac{ab}{2\alpha} R(Y, \xi) X - \frac{b(\alpha-b^2)}{2(a+c+d)\alpha} g(Y, \xi) R(X, \xi) \xi \right. \\
& - \frac{bd}{2\alpha} g(X, \xi) Y - \frac{(a+c)bd}{2(a+c+d)\alpha} g(Y, \xi) X \\
& + \frac{b}{2(a+c+d)\alpha} [-a(a+c+d)g(R(X, \xi)Y, \xi) \\
& + ad(2(a+c)+d)g(X, \xi)g(Y, \xi)] \xi \Big\}^t, \tag{259}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^t} Y^h = & \left\{ -\frac{a^2}{2\alpha} R(X, \xi) Y + \frac{b}{a+c+d} g(X, \xi) \nabla_\xi Y \right. \\
& - \frac{ab^2}{2(a+c+d)\alpha} g(X, \xi) R(Y, \xi) \xi \\
& + \frac{ad}{2\alpha} g(Y, \xi) X + \frac{db^2}{2(a+c+d)\alpha} g(X, \xi) Y \\
& + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(X, \xi)Y, \xi) \\
& + d\alpha g(X, Y) - ad(2(a+c)+d)g(X, \xi)g(Y, \xi)] \xi \Big\}^h \\
& + \left\{ \frac{ab}{2\alpha} R(X, \xi) Y + \frac{a(a+c)b}{2(a+c+d)\alpha} g(X, \xi) R(Y, \xi) \xi \right. \\
& - \frac{bd}{2\alpha} g(Y, \xi) X - \frac{(a+c)bd}{2(a+c+d)\alpha} g(X, \xi) Y \\
& + \frac{b}{2(a+c+d)\alpha} [-a(a+c+d)g(R(X, \xi)Y, \xi) \\
& + ad(2(a+c)+d)g(X, \xi)g(Y, \xi)] \xi \Big\}^t, \tag{260}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{X^t} Y^t = & \frac{b}{2(a+c+d)\alpha} \left\{ -a^2[g(X, \xi)R(Y, \xi)\xi \right. \\
& + g(Y, \xi)R(X, \xi)\xi] + adg(X, \xi)Y \\
& + (2\alpha + ad)g(Y, \xi)X - \frac{2d\phi}{a+c+d}g(X, \xi)g(Y, \xi)\xi \Big\}^h \\
& + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} \left\{ 2b\alpha g(X, \xi)\nabla_\xi Y \right. \\
& + ab^2[g(X, \xi)R(Y, \xi)\xi + g(Y, \xi)R(X, \xi)\xi] \\
& \left. - b^2dg(X, \xi)Y - (2(a+c+d)\alpha - b^2d)g(Y, \xi)X \right\}^t. \quad (261)
\end{aligned}$$

Лема 4.6 [29] Нехай $\tilde{G}$ — ріманова g -натуральна метрика на одиничному до-
точному розшируванні T_1M ріманового многовиду (M, g) , визначена чотирма
параметрами a, b, c та d . Тоді для одиничного векторного поля ξ , яке визначає
відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$, друга основна форма $\xi(M) \subset (T_1M, \tilde{G})$
має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
B_\xi(X, Y) = & \left\{ -\frac{a^2}{\alpha}Hm_\xi(X, Y) - \frac{ab}{\alpha}\rho_\xi(X, Y) \right. \\
& + \frac{bd}{\alpha}\gamma_\xi(X, Y) - \frac{ad}{\alpha}A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)) \\
& + \frac{d}{(a+c+d)\alpha} \left[a^2g(Hm_\xi(X, Y), \xi) + abg(\rho_\xi(X, Y), \xi) \right. \\
& \left. - bdg(\gamma_\xi(X, Y), \xi) - \frac{\alpha}{2}(g(X, A_\xi Y) + g(Y, A_\xi X)) \right] \xi \Big\}^h \\
& + \left\{ -Hess_\xi(X, Y) + \frac{b^2}{\alpha}\rho_\xi(X, Y) - \frac{(a+c)d}{\alpha}\gamma_\xi(X, Y) \right. \\
& \left. + \frac{bd}{\alpha}A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)) + \frac{ab}{\alpha}Hm_\xi(X, Y) \right\}^t, \quad (262)
\end{aligned}$$

де $\alpha = a(a+c) - b^2$, та

$$\rho_\xi(X, Y) = \frac{1}{2}(R(X, \xi)Y + R(Y, \xi)X), \quad (263)$$

$$\gamma_\xi(X, Y) = \frac{1}{2}(g(X, \xi)Y + g(Y, \xi)X). \quad (264)$$

Доведення. Підставляючи (17) у (24), ми можемо обчислити другу основну

форму відображення.

$$B_\xi(X, Y) = \tilde{\nabla}_{\xi_* X}(\xi_* Y) - \xi_*(\nabla_X Y). \quad (265)$$

Зауважимо, що

$$\xi_*(\nabla_X Y) = (\nabla_X Y)^h - (A_\xi(\nabla_X Y))^t = (\nabla_X Y)^h + (\nabla_{\nabla_X Y} \xi)^t, \quad (266)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\xi_* X}(\xi_* Y) &= \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h - \tilde{\nabla}_{X^h} (A_\xi Y)^t - \tilde{\nabla}_{(A_\xi X)^t} Y^h + \tilde{\nabla}_{(A_\xi X)^t} (A_\xi Y)^t \\ &= \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h + \tilde{\nabla}_{X^h} (\nabla_Y \xi)^t + \tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t} Y^h + \tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t} (\nabla_Y \xi)^t. \end{aligned} \quad (267)$$

Використовуючи (19), (20), (263), (264) та Лему 4.5, отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X^h} Y^h &= \left\{ \nabla_X Y - \frac{ab}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) + \frac{bd}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) \right. \\ &\quad + \frac{b}{(a+c+d)\alpha} [(ad+b^2)g(\rho_\xi(X, Y), \xi) \\ &\quad \left. - d(a+c+d)g(\gamma_\xi(X, Y), \xi)] \xi \right\}^h \\ &\quad + \left\{ \frac{b^2}{\alpha} R(X, \xi) Y - \frac{a(a+c)}{2\alpha} R(X, Y) \xi - \frac{(a+c)d}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} [-b^2 g(\rho_\xi(X, Y), \xi) + d(a+c)g(\gamma_\xi(X, Y), \xi)] \xi \right\}^t, \end{aligned} \quad (268)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X^h} (\nabla_Y \xi)^t &= \left\{ -\frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi) X + \frac{ad}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi \right. \\ &\quad + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) \\ &\quad \left. + d\alpha g(X, \nabla_Y \xi)] \xi \right\}^h + \left\{ \nabla_X \nabla_Y \xi + \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi) X \right. \\ &\quad \left. - \frac{bd}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi - \frac{ab}{2\alpha} g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) \xi \right\}^t, \end{aligned} \quad (269)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t} Y^h &= \left\{ -\frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi) Y + \frac{ad}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi \right. \\ &\quad + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(\nabla_X \xi, \xi) Y, \xi) \\ &\quad \left. + d\alpha g(\nabla_X \xi, Y)] \xi \right\}^h + \left\{ \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi) Y - \frac{bd}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{ab}{2\alpha} g(R(\nabla_X \xi, \xi) Y, \xi) \xi \right\}^t, \end{aligned} \quad (270)$$

$$\tilde{\nabla}_{(\nabla_X \xi)^t}(\nabla_Y \xi)^t = 0. \quad (271)$$

Спершу обчислимо горизонтальну компоненту.

$$\begin{aligned} h : \quad & \nabla_X Y - \frac{ab}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) + \frac{bd}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) \\ & + \frac{b}{(a+c+d)\alpha} [(ad+b^2)g(\rho_\xi(X, Y), \xi) - d(a+c+d)g(\gamma_\xi(X, Y), \xi)]\xi \\ & - \frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi)X + \frac{ad}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi \\ & + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) + d\alpha g(X, \nabla_Y \xi)]\xi \\ & - \frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi)Y + \frac{ad}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi \\ & + \frac{1}{2(a+c+d)\alpha} [a(ad+b^2)g(R(\nabla_X \xi, \xi)Y, \xi) + d\alpha g(\nabla_X \xi, Y)]\xi \\ & - \nabla_X Y. \end{aligned} \quad (272)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) + \frac{a}{2} g(R(\nabla_X \xi, \xi)Y, \xi) \\ & = \frac{a}{2} g(R(\xi, A_\xi Y)X, \xi) + \frac{a}{2} g(R(\xi, A_\xi X)Y, \xi) \\ & = ag(Hm_\xi(X, Y), \xi), \\ & \frac{ad}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi + \frac{ad}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi = -\frac{ad}{\alpha} A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)), \\ & -\frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi)X - \frac{a^2}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi)Y = -\frac{a^2}{\alpha} Hm_\xi(X, Y). \end{aligned} \quad (273)$$

Отже,

$$\begin{aligned} h : \quad & -\frac{a^2}{\alpha} Hm_\xi(X, Y) - \frac{ab}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) + \frac{bd}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) - \frac{ad}{\alpha} A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)) \\ & + \left(\frac{ad+b^2}{(a+c+d)\alpha} (ag(Hm_\xi(X, Y), \xi) + bg(\rho_\xi(X, Y), \xi)) \right. \\ & \left. - \frac{bd}{\alpha} g(\gamma_\xi(X, Y), \xi) - \frac{d}{2(a+c+d)} (g(X, A_\xi Y) + g(Y, A_\xi X)) \right) \xi. \end{aligned} \quad (274)$$

Обчислимо тангенціальну компоненту.

$$\begin{aligned}
t : \quad & \frac{b^2}{\alpha} R(X, \xi) Y - \frac{a(a+c)}{2\alpha} R(X, Y) \xi - \frac{(a+c)d}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) \\
& + \frac{1}{\alpha} [-b^2 g(\rho_\xi(X, Y), \xi) + d(a+c) g(\gamma_\xi(X, Y), \xi)] \xi + \nabla_X \nabla_Y \xi \\
& + \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi) X - \frac{bd}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi - \frac{ab}{2\alpha} g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) \xi \\
& + \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi) Y - \frac{bd}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi - \frac{ab}{2\alpha} g(R(\nabla_X \xi, \xi) Y, \xi) \xi \\
& - \nabla_{\nabla_X Y} \xi.
\end{aligned} \tag{275}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_Y \xi, \xi) X + \frac{ab}{2\alpha} R(\nabla_X \xi, \xi) Y \\
& = \frac{ab}{2\alpha} (R(\xi, A_\xi Y) X + R(\xi, A_\xi X) Y) = \frac{ab}{\alpha} H m_\xi(X, Y), \\
& - \frac{bd}{2\alpha} g(X, \xi) \nabla_Y \xi - \frac{bd}{2\alpha} g(Y, \xi) \nabla_X \xi \\
& = \frac{bd}{2\alpha} (g(X, \xi) A_\xi Y + g(Y, \xi) A_\xi X) = \frac{bd}{\alpha} A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)), \\
& - \frac{ab}{2\alpha} g(R(X, \xi) \nabla_Y \xi, \xi) \xi - \frac{ab}{2\alpha} g(R(\nabla_X \xi, \xi) Y, \xi) \xi \\
& = -\frac{ab}{2\alpha} g(R(\xi, A_\xi Y) X + R(\xi, A_\xi X) Y, \xi) \xi = -\frac{ab}{\alpha} g(H m_\xi(X, Y), \xi) \xi.
\end{aligned} \tag{276}$$

Використовуючи

$$R(X, \xi) Y + R(\xi, Y) X + R(Y, X) \xi = 0, \tag{277}$$

маємо

$$R(X, \xi) Y = R(X, Y) \xi + R(Y, \xi) X \tag{278}$$

та

$$\begin{aligned}
& \frac{b^2}{\alpha} R(X, \xi) Y - \frac{a(a+c)}{2\alpha} R(X, Y) \xi \\
& = \left(\frac{b^2}{\alpha} - \frac{a(a+c)}{2\alpha} \right) R(X, Y) \xi + \frac{b^2}{\alpha} R(Y, \xi) X \\
& = \left(\frac{b^2}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) R(X, Y) \xi + \frac{b^2}{\alpha} R(Y, \xi) X.
\end{aligned} \tag{279}$$

Використовуючи

$$R(X, Y) \xi + R(Y, \xi) X + R(\xi, X) Y = 0, \tag{280}$$

маємо

$$R(X, Y)\xi = R(X, \xi)Y - R(Y, \xi)X \quad (281)$$

та

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^2}{2\alpha} - \frac{1}{2} \right) R(X, Y)\xi + \frac{b^2}{\alpha} R(Y, \xi)X \\ &= \frac{b^2}{2\alpha} R(X, Y)\xi - \frac{1}{2} R(X, Y)\xi + \frac{b^2}{\alpha} R(Y, \xi)X \\ &= \frac{b^2}{2\alpha} R(X, \xi)Y - \frac{b^2}{2\alpha} R(Y, \xi)X - \frac{1}{2} R(X, Y)\xi + \frac{b^2}{\alpha} R(Y, \xi)X \\ &= \frac{b^2}{2\alpha} (R(X, \xi)Y + R(Y, \xi)X) - \frac{1}{2} R(X, Y)\xi \\ &= \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - \frac{1}{2} R(X, Y)\xi. \end{aligned} \quad (282)$$

Використовуючи

$$\nabla_X \nabla_Y \xi = -\nabla_X (A_\xi Y), \quad (283)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi + \nabla_{\nabla_Y X} \xi \\ &= \nabla_Y (A_\xi X) - \nabla_X (A_\xi Y) + A_\xi (\nabla_X Y) - A_\xi (\nabla_Y X), \end{aligned} \quad (284)$$

$$\nabla_X (A_\xi Y) = (\nabla_X A_\xi)Y + A_\xi (\nabla_X Y), \quad (285)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{b^2}{\alpha} R(X, \xi)Y - \frac{a(a+c)}{2\alpha} R(X, Y)\xi + \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi \\ &= \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - \frac{1}{2} R(X, Y)\xi - \nabla_X (A_\xi Y) + A_\xi (\nabla_X Y) \\ &= \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - \frac{1}{2} (\nabla_Y (A_\xi X) + \nabla_X (A_\xi Y) - A_\xi (\nabla_X Y) - A_\xi (\nabla_Y X)) \\ &= \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - \frac{1}{2} ((\nabla_Y A_\xi)X + (\nabla_X A_\xi)Y) = \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - Hess_\xi(X, Y). \end{aligned} \quad (286)$$

Отже,

$$\begin{aligned} t : & -Hess_\xi(X, Y) + \frac{b^2}{\alpha} \rho_\xi(X, Y) - \frac{(a+c)d}{\alpha} \gamma_\xi(X, Y) \\ & + \frac{bd}{\alpha} A_\xi(\gamma_\xi(X, Y)) + \frac{ab}{\alpha} Hm_\xi(X, Y) + \left(-\frac{b^2}{\alpha} g(\rho_\xi(X, Y), \xi) \right. \\ & \left. + \frac{d(a+c)}{\alpha} g(\gamma_\xi(X, Y), \xi) - \frac{ab}{\alpha} g(Hm_\xi(X, Y), \xi) \right) \xi. \end{aligned} \quad (287)$$

Отже, використовуючи (254), ми отримуємо (262). ■

Доведення Теорема 4.4. Нехай $(M, g, \eta, \xi, \phi) \in K$ -контактним многови-
дом, але не обов'язково сасакієвим. Використовуючи (36), (41) та (43), маємо:

$$Hess_{\xi}(X, Y) = \frac{1}{2}(R(\xi, X)Y + R(\xi, Y)X), \quad (288)$$

$$Hm_{\xi}(X, Y) = \frac{1}{2}(R(\xi, \phi X)Y + R(\xi, \phi Y)X), \quad (289)$$

$$\rho_{\xi}(X, Y) = -Hess_{\xi}(X, Y), \quad (290)$$

$$\gamma_{\xi}(X, Y) = \frac{1}{2}(\eta(X)Y + \eta(Y)X). \quad (291)$$

Зауважимо, що, використовуючи (34), (38), (42), маємо:

$$\eta(Hm_{\xi}(X, Y)) = 0, \quad (292)$$

$$\eta(Hess_{\xi}(X, Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad (293)$$

$$\eta(\gamma_{\xi}(X, Y)) = \eta(X)\eta(Y), \quad (294)$$

$$\eta(\phi(\gamma_{\xi}(X, Y))) = 0. \quad (295)$$

Використовуючи $c = 1 - 2a$ і $d = a$, можна переписати B_{ξ} у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} B_{\xi}(X, Y) = & \left\{ \frac{ab}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) \right. \\ & - \frac{a^2}{\alpha}(Hm_{\xi}(X, Y) + \phi(\gamma_{\xi}(X, Y))) - \frac{a^2b}{\alpha}g(X, Y)\xi \Big\}^h \\ & + \left\{ -\frac{a(1-a)}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) \right. \\ & \left. + \frac{ab}{\alpha}(\phi(\gamma_{\xi}(X, Y)) + Hm_{\xi}(X, Y)) \right\}^t. \end{aligned} \quad (296)$$

Позначимо через V векторне поле

$$\begin{aligned} V = & \frac{ab}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) - \frac{a^2}{\alpha}(Hm_{\xi}(X, Y) \\ & + \phi(\gamma_{\xi}(X, Y))) - \frac{a^2b}{\alpha}g(X, Y)\xi. \end{aligned} \quad (297)$$

Тоді горизонтальна компонента V дорівнює

$$\begin{aligned} V^h = & \left\{ \frac{ab}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) \right. \\ & \left. - \frac{a^2}{\alpha}(Hm_{\xi}(X, Y) + \phi(\gamma_{\xi}(X, Y))) \right\}^h - \frac{a^2b}{\alpha}g(X, Y)\xi^h. \end{aligned} \quad (298)$$

Позначимо через W векторне поле

$$W = -\frac{a(1-a)}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) + \frac{ab}{\alpha}(\phi(\gamma_{\xi}(X, Y)) + Hm_{\xi}(X, Y)). \quad (299)$$

Використовуючи (252), (253), $c = 1 - 2a$ і $d = a$, можна переписати W^t у такій формі:

$$W^t = W^v + \eta(W)(b\xi^h - \xi^v). \quad (300)$$

Зазначимо, що:

$$\eta(W) = -\frac{a(1-a)}{\alpha}g(X, Y). \quad (301)$$

Отже,

$$\begin{aligned} W^t = & -\frac{a(1-a)b}{\alpha}g(X, Y)\xi^h \\ & + \left\{ -\frac{a(1-a)}{\alpha}(Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y)) \right. \\ & \left. + \frac{ab}{\alpha}(\phi(\gamma_{\xi}(X, Y)) + Hm_{\xi}(X, Y)) + \frac{a(1-a)}{\alpha}g(X, Y)\xi \right\}^v. \end{aligned} \quad (302)$$

Позначимо

$$\lambda_{\xi}(X, Y) = Hess_{\xi}(X, Y) + \gamma_{\xi}(X, Y), \quad (303)$$

$$\mu_{\xi}(X, Y) = Hm_{\xi}(X, Y) + \phi(\gamma_{\xi}(X, Y)). \quad (304)$$

Таким чином, ми можемо переписати B_{ξ} у такій формі:

$$B_{\xi}(X, Y) = \left\{ \frac{ab}{\alpha}\lambda_{\xi}(X, Y) - \frac{a^2}{\alpha}\mu_{\xi}(X, Y) - \frac{ab}{\alpha}g(X, Y)\xi \right\}^h \quad (305)$$

$$+ \left\{ -\frac{a(1-a)}{\alpha}\lambda_{\xi}(X, Y) + \frac{ab}{\alpha}\mu_{\xi}(X, Y) + \frac{a(1-a)}{\alpha}g(X, Y)\xi \right\}^v. \quad (306)$$

Тоді $B_{\xi}(X, Y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{cases} \frac{ab}{\alpha}\lambda_{\xi}(X, Y) - \frac{a^2}{\alpha}\mu_{\xi}(X, Y) = \frac{ab}{\alpha}g(X, Y)\xi, \\ -\frac{a(1-a)}{\alpha}\lambda_{\xi}(X, Y) + \frac{ab}{\alpha}\mu_{\xi}(X, Y) = -\frac{a(1-a)}{\alpha}g(X, Y)\xi. \end{cases} \quad (307)$$

Ми отримуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\lambda_{\xi}(X, Y)$ та $\mu_{\xi}(X, Y)$.

Зазначимо, що:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{ab}{\alpha} & -\frac{a^2}{\alpha} \\ -\frac{a(1-a)}{\alpha} & \frac{ab}{\alpha} \end{pmatrix} = -\frac{a^2}{\alpha} \neq 0. \quad (308)$$

Отже, згідно з правилом Крамера, $\lambda_\xi(X, Y) = g(X, Y)\xi$, $\mu_\xi(X, Y) = 0$, тобто:

$$\begin{cases} Hess_\xi(X, Y) + \gamma_\xi(X, Y) = g(X, Y)\xi, \\ Hm_\xi(X, Y) + \phi(\gamma_\xi(X, Y)) = 0 \end{cases} \quad (309)$$

або, більш детально,

$$\begin{cases} R(\xi, X)Y + R(\xi, Y)X + \eta(X)Y + \eta(Y)X = 2g(X, Y)\xi, \\ R(\xi, \phi X)Y + R(\xi, \phi Y)X + \eta(X)\phi Y + \eta(Y)\phi X = 0. \end{cases} \quad (310)$$

Зауважимо, що, використовуючи (43), ми можемо переписати перше рівняння у такому вигляді:

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_Y \phi)X = 2g(X, Y)\xi - \eta(X)Y - \eta(Y)X. \quad (311)$$

Ця умова точно відповідає (47), тобто (M, g, η, ξ, ϕ) є майже сасакієвим многовидом. За **Теоремою 1.7** це є сасакієв многовид, що завершує доведення.

Отже, властивість цілком геодезичності рібовського векторного поля, що визначає ізометричне вкладення, вирізняє сасакієві многовиди серед усіх K -контактних многовидів у контексті геометрії одиничного дотичного розшарування з рімановою g -натуральною метрикою.

4.3 Висновки до розділу

Розділ присвячено вивченню випадку, коли непаралельне одиничне векторне поле ξ на рімановому многовиді (M, g) визначає ізометричне занурення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, де G є рімановою g -натуральною метрикою. Основною метою є знаходження умов, за яких відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ може бути цілком геодезичним. Як результат,

- знайдено вираз для другої основної форми відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ (Лема 4.6);

- доведено, що рібовське векторне поле K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M з рімановою g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні породжує цілком геодезичне ізометричне вкладення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ тоді і тільки тоді, коли ця структура є сасакієвою (Теорема 4.4).

Відкритими залишаються питання:

- дослідження цілком геодезичних ізометричних вкладень, що породжуються рібовським векторним полем K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M з рімановою g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні, для вимірностей 3, 5, 7;
- можливості розширення теореми Д. Перроне на більш широкий клас одиничних дотичних розшарувань.

Результати розділу висвітлено в роботі [29].

Висновки до дисертації

Дисертацію присвячено дослідженню метрик розшарованих просторів, їхніх властивостей, та їх узагальнень на більш широкий клас метрик які призводять до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні.

Метою дослідження було виявлення залежностей геометричних властивостей загальних векторних розшарувань від метрики на розшарованому просторі, а також знаходження зв'язку між властивостями базового многовиду і шарів загального розшарування, вивчення геометричних властивостей перерізів загального розшарування для різних типів узагальнених метрик.

Об'єктом дослідження були геометричні властивості дотичних розшарувань ріманових многовидів та їх перерізів з різними деформаціями метрики Сасакі.

Предметами дослідження були узагальнення метрики Сасакі, геодезичні лінії дотичного розшарування, особливості сасакієвого многовиду, а також гармонічні, мінімальні та цілком геодезичні векторні поля.

Завданнями дослідження були:

- узагальнення сигар солітонної метрики на дотичне розшарування;
- дослідження геодезичних ліній дотичного розшарування з пошарово сигар солітонною метрикою;
- дослідження гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасакі;
- класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення у випадку вертикально масштабованої метрики на одиничному дотичному розшаруванні;
- знаходження виразу для другої основної форми підмноговиду, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою;

- знаходження умов, за яких підмноговид що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою може бути цілком геодезичним.

Для дослідження використано методи диференціальної геометрії, ріманової геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії груп та алгебр Лі.

Розділ 1 дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям з геометрії розшарованих просторів, а також огляду літератури. Наведено базові відомості з геометрії дотичного розшарування та одиничного дотичного розшарування, контактних многовидів, метрики Сасакі, векторних полів на рімановому многовиді як відображень в підмноговидів. Зроблено огляд таких понять, як гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність векторного поля та відображення.

Розділ 2 дисертаційної роботи присвячено узагальненню сигар солітонної метрики Річарда Гамільтона як деформації метрики Сасакі на дотичному розшаруванні ріманова многовиду. Основною метою дослідження є вивчення геодезичних дотичного розшарування ріманового многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонною метрикою з фокусом на локально симетричні многовиди та многовиди сталої кривини у ролі бази розшарування.

- Введено поняття пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасакі або пошарово (гамільтонової) сигар солітонної метрики на дотичному розшаруванні ріманового многовиду.
- Отримано диференціальні рівняння натурально параметризованих геодезичних відносно зв'язності Леві-Чивіти пошарово сигар солітонної метрики.
- Доведено, що у випадку локально симетричної бази усі геодезичні кривини проекції похилої геодезичної на базу є сталими, і у випадку бази зі сталою кривиною усі геодезичні кривини починаючи з третьої дорівнюють нулю.

- Отримано рівняння геодезичних на дотичних розшаруваннях просторів сталої кривини з пошарово (гамільтоновою) сигарою солітонною деформацією метрики Сасаки.

Пошарово (гамільтонова) сигар солітонна метрика на дотичному розшаруванні ріманового многовиду є частковим, але вмотивованим, випадком метрики яку досліджували А. Загане і М. Джаа в роботах [51, 52]. Форма і назва метрики походять від метрики на двовимірному многовиді який називається сигар солітоном Гамільтона і має першу квадратичну форму виду

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}. \quad (312)$$

Цей многовид є першим прикладом некомпактного сталого солітона Річі на площині, який винайшов Р. Гамільтон [19]. Солітони Річі, які привернули до себе увагу після доведення Р. Гамільтоном та Г. Перельманом гіпотези Пуанкаре, досліджувало і продовжують досліджувати багато математиків (див., наприклад, [9, 11, 13]), серед яких є і українські [24]. Сигар солітон Гамільтона конформно еквівалентний площині з функцією конформності $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Конформно еквівалентні метрики та конформні відображення також вивчали деякі українські математики [43].

У дисертаційній роботі вперше було досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні. Було вперше введено поняття "пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки" (або "пошарово гамільтонової сигар солітонної метрики") і досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з такою метрикою.

До кола питань майбутніх досліджень пошарово (гамільтонової) сигар солітонної метрики входять:

- знаходження тензору кривини відносно зв'язності Леві-Чивіти пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки;
- оцінка секційної кривини дотичного розшарування з пошарово (гамільто-

нової) сигар солітонної деформацією метрики Сасаки;

- дослідження асимптотичної поведінки геодезичних та секційної кривини пошарово (гамільтонової) дотичного розшарування з сигар солітонною деформацією метрики Сасаки;
- опис дотичного розшарування ріманова многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки як солітон Річі.

Розділ 3 дисертаційної роботи присвячено вивченню гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасаки. Основною метою дослідження є пошук деформацій, які зберігають існування гармонічних лівоінваріантних одиничних векторних полів на 3-вимірних унімодулярних групах Лі G з лівоінваріантною метрикою та гармонічними відображеннями $G \rightarrow T_1G$, які задаються одиничними векторними полями, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні.

- Отримано необхідні та достатні умови гармонічності одиничного векторного поля та відображення $M^n \rightarrow T_1M^n$, що задається цим полем.
- Отримано необхідні та достатні умови гармонічності одиничного векторного поля та відображення $M^2 \rightarrow T_1M^2$, що задається цим полем, відносно деякого ортонормованого репера.
- Описано лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля та гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, що задається цим полем, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, з використанням деякого ортонормованого репера.
- Зроблена класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G –

тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, в окремому випадку скрученої метрики Сасаки, а саме у випадку вертикально масштабованої метрики.

Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке [18] повністю описали ліво-інваріантні гармонічні одиничні векторні поля і ліво-інваріантні одиничні векторні поля які задають гармонічні відображення на тривимірних групах Лі із метрикою Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, використовуючи класифікацію Дж. Мілнора [33].

У дисертаційній роботі вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, а також вперше було класифіковано такі векторні поля та відображень у випадку вертикально масштабованої метрики.

До кола питань майбутніх досліджень скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні входять:

- описати лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля та гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, що задається цим полем, де G – тривимірна неунімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, з використанням деякого ортонормованого репера;
- зробити класифікацію лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – тривимірна неунімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, в окремому випадку скрученої метрики Сасаки, а саме у випадку вертикально масштабованої метрики;
- зробити класифікацію лівоінваріантних гармонічних одиничних вектор-

них полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – будь-яка тривимірна група Лі з лівоінваріантною метрикою у випадку скрученої метрики Сасаки;

- отримати необхідні та достатні умови мінімальності та цілком геодезичності одиничного векторного поля та відображення $M^n \rightarrow T_1M^n$, що задається цим полем;
- отримати необхідні та достатні умови мінімальності та цілком геодезичності одиничного векторного поля та відображення $M^2 \rightarrow T_1M^2$, що задається цим полем, відносно деякого ортонормованого репера.

Розділ 4 дисертаційної роботи присвячено вивченню випадку, коли непаралельне одиничне векторне поле ξ на рімановому многовиді (M, g) визначає ізометричне занурення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, де G є рімановою g -натуральною метрикою. Основною метою є знаходження умов, за яких відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ може бути цілком геодезичним.

- Доведено, що рібовське векторне поле K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M з рімановою g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні породжує цілком геодезичне ізометричне вкладення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$ тоді і тільки тоді, коли ця структура є сасакієвою.
- Знайдено вираз для другої основної форми відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, \tilde{G})$.

Ріманова g -натуральна метрика, незважаючи на свою складну будову, має одну цікаву особливість яку досліджував Д. Перроне [36]. Розглядаючи метрику Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, відображення, яке задається одиничним векторним полем, є ізометричним зануренням тільки якщо це векторне поле є паралельним. Однак, Д. Перроне показав, що існує випадок

коли непаралельне одиничне векторне поле визначає ізометричне занурення. Він також досліджував гармонічність і мінімальність відображень [17, 46], що визначаються такими векторними полями. Він довів, що для ізометрії нам необхідно у якості непаралельного векторного поля взяти рібовське векторне поле на базовому многовиді і певну сім'ю ріманових g -натуральних метрик на одиничному дотичному розшаруванні.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні. Дослідження цілком геодезичності одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, є природним доповнення до результатів Д. Перроне, оскільки будь-яке відображення, що задається цілком геодезичним векторним полем є гармонічним і мінімальним. Також вперше було отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

До кола питань майбутніх досліджень g -натуральної метрики на одиничному дотичному розшаруванні входять:

- дослідження цілком геодезичних ізометричних вкладень, що породжуються рібовським векторним полем K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M з рімановою g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні, для вимірностей 3, 5, 7;
- можливості розширення теореми Д. Перроне на більш широкий клас одиничних дотичних розшарувань.

Практичним значенням отриманих результатів є доповнення наявних результатів з геометрії розшарованих просторів. Всі результати дисертаційної роботи наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Результати

мають теоретичний характер, і розширюють наші знання про метрики розшарованих просторів, їх властивостей, та їх узагальнень на більш широкий клас метрик які призводять до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні.

Список використаних джерел

- [1] M.T.K. Abbassi and G. Calvaruso. g -Natural Contact Metrics on Unit Tangent Sphere Bundles. *Monatshefte für Mathematik*, 151:89–109, 2007.
- [2] M.T.K. Abbassi and M. Sarik. On Riemannian g -natural metrics of the form $ag^s + bg^h + cg^v$ on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold (M, g) . *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2:19–43, 2005.
- [3] L. Belarbi and H. El Hendi. Geometry of Twisted Sasaki Metric. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 53:1–19, 2019.
- [4] L. Belarbi, H. El Hendi, and F. Latti. On the geometry of the tangent bundle with vertical rescaled generalized Cheeger-Gromoll metric. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, 12:247–264, 2020.
- [5] David E. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Birkhäuser Boston, MA, 2002.
- [6] E. Boeckx and L. Vanhecke. Characteristic reflections on unit tangent sphere bundles. *Houston Journal of Mathematics*, 23:427–448, 1997.
- [7] E. Boeckx and L. Vanhecke. Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent bundles. *Differential Geometry and its Applications*, 13(1):77–93, 2000.
- [8] E. Boeckx and L. Vanhecke. Unit tangent sphere bundles with constant scalar curvature. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 51(3):523–544, 2001.
- [9] H. D. Cao. Recent progress on Ricci solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*, 11:1–38, 2010.
- [10] J. Cheeger and D. Gromoll. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature. *Annals of Mathematics*, 96:413–443, 1972.
- [11] B. Y. Chen. A survey on Ricci solitons on Riemannian submanifolds. *Contemporary Mathematics*, 674:27–39, 2016.
- [12] U.C. De and K. Mandal. On K -contact Einstein manifolds. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 46(1):105–114, 2016.
- [13] A. Derdzinski. Solitony Ricciego. *Wiadomości Matematyczne*, 48(1):1–32, 2012.

- [14] H. M. Dida, F. Hathout, and A. Azzouz. On the geometry of the tangent bundle with vertical rescaled generalized cheeger-gromoll metric. *Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68:222–235, 2019.
- [15] P. Dombrowski. On the geometry of the tangent bundle. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 210:73–88, 1962.
- [16] J. Eells and L. Lemaire. A report on harmonic maps. *Bulletin of London Mathematical Society*, 10:1–68, 1978.
- [17] O. Gil-Medrano. Minimal unit vector fields. *Tohoku Mathematical Journal*, 54(1):71–84, 2002.
- [18] J. C. González-Dávila and L. Vanhecke. Invariant harmonic unit vector fields on lie groups. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana*, 5(2):377–403, 2002.
- [19] R. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 71:237–261, 1988.
- [20] V. Kiosak, L. Kusik, and V. Isaiev. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2):109–119, 2022.
- [21] V. Kiosak, O. Latysh, and V. Kuz’mich. Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3):232–243, 2024.
- [22] V. Kiosak, O. Prishlyak, and O. Gudyreva. On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1):56–64, 2024.
- [23] V. Kiosak, O. Prishlyak, and O. Lesechko. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4):13–26, 2021.
- [24] V. Kiosak, A. Savchenko, and L. Kusik. On the properties of Ricci solitons. *AIP Conference Proceedings*, 2522(1):120006, 2022.
- [25] V. Kiosak, A. Savchenko, and O. Latysh. Geodesic mappings of compact quasi-einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1):80–91, 2021.
- [26] O. Kowalski. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 250:124–129, 1971.
- [27] L. Lotarets. Geodesics of fiberwise cigar soliton deformation of the Sasaki metric. *Turkish Journal of Mathematics*, 46:130–144, 2022.
- [28] L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. In *International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”*, Odesa, 2023.

- [29] L. Lotarets. A characteristic property of Sasakian manifolds. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3):218–231, 2024.
- [30] L. Lotarets. Reeb vector field as isometric embedding. In *International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”*, Odesa, 2024.
- [31] L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. *Turkish Journal of Mathematics*, 48:123–143, 2024.
- [32] F. Massamba and A. Nzunogera. A Note on Nearly Sasakian Manifolds. *Mathematics*, 11(12):1–20, 2023.
- [33] J. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, 21:293–329, 1976.
- [34] P. T. Nagy. Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold. *Geometriae Dedicata*, 7(2):233–244, 1978.
- [35] A. De Nicola, G. Dileo, and I. Yudin. On nearly Sasakian and nearly cosymplectic manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 197:127–138, 2018.
- [36] D. Perrone. Minimality, harmonicity and CR geometry for Reeb vector fields. *International Journal of Mathematics*, 21:1189–1218, 2010.
- [37] A. Prishlyak, A. Prus, and S. Huraka. Flows with collective dynamics on a sphere. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1):60–79, 2021.
- [38] C. Puhle. Almost contact metric 5-manifolds and connections with torsion. *Differential Geometry and its Applications*, 30:85–106, 2012.
- [39] S. Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 10(3):338–354, 1958.
- [40] S. Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II. *Tohoku Journal of Mathematics*, 14(2):146–155, 1962.
- [41] K. Sato. Geodesics on the tangent bundles over space forms. *Tensor*, 32:5–10, 1978.
- [42] A. Savchenko, N. Vashpanova, and N. Vasylieva. Generalized $\phi(Ric)$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4):1–12, 2021.
- [43] A. G. Savchenko, T. I. Shevchenko, and S. I. Hedulian. Conformal recurrent Kähler spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1):88–98, 2024.
- [44] M. Sekizawa. Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Tokyo Journal of Mathematics*, 14(2):407–417, 1991.
- [45] M. Sekizawa. Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. *Tokyo Journal of Mathematics*, 14(2):407–417, 1991.

- [46] G. Wiegink. Total bending of vector fields on Riemannian manifolds. *Mathematische Annalen*, 303:325–344, 1995.
- [47] A. Yampolsky. A totally geodesic property of Hopf vector fields. *Acta Mathematica Hungarica*, 101(1):93–112, 2003.
- [48] A. Yampolsky. On special types of minimal and totally geodesic unit vector fields. In *Seventh International Conference in Geometry, Integrability and Quantization*, pages 292–306, 2005.
- [49] A. Yampolsky and E. Saharova. Powers of the space form curvature operator and geodesics of the tangent bundle. *Ukrainian Mathematical Journal*, 56(9):1231–1243, 2004.
- [50] K. Yano and M. Kon. Structures on manifolds. *World Scientific Press*, 40, 1989.
- [51] A. Zagane and M. Djaa. On Geodesic of Warped Sasaki Metric. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 5(1):85–92, 2017.
- [52] A. Zagane and M. Djaa. Geometry of Mus-Sasaki metric. *Communications in Mathematics*, 26(2):113–126, 2018.
- [53] Л. Лотарець. Геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. Семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України, 2024.

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

- L. Lotarets. A characteristic property of Sasakian manifolds. Proceedings of the International Geometry Center, 17(3):218–231, 2024.

DOI: 10.15673/pigc.v17i3.2866

Keywords: Sasakian manifold, K-contact manifold, unit tangent bundle, Reeb vector field, isometric embedding, totally geodesic manifold

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

- L. Lotarets. Geodesics of fiberwise cigar soliton deformation of the Sasaki metric. Turkish Journal of Mathematics, 46:130–144, 2022.

DOI: 10.3906/mat-2107-99

Keywords: Sasaki metric, tangent bundle, geodesics

- L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. Turkish Journal of Mathematics, 48:123–143, 2024.

DOI: 10.55730/1300-0098.3498

Keywords: harmonic map, harmonic vector field, Lie group, Twisted Sasaki metric, unit tangent bundle, vertical rescaled metric

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

- L. Lotarets. Twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle and harmonicity. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2023.

- Л. Лотарець. Геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. Семінар лабораторії топології Інституту математики НАН України, 2024.
- L. Lotarets. Reeb vector field as isometric embedding. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis“, Odesa, 2024.

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 01:29:01 16.05.2025

Назва файлу з підписом: Lotarets_diss.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 580.3 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Lotarets_diss.pdf
Розмір файлу без підпису: 600.9 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Лотарець Ляна Андріївна
П.І.Б.: Лотарець Ляна Андріївна
Країна: Україна
РНОКПП: 3585305863
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 01:28:55 16.05.2025
Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг
Серійний номер: 382367105294AF97040000003B2D6001B815EA03
Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Кваліфікований
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAdES-X Long)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.02.05 13:00