

Анотація

Лотарець Л. А. Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертацію присвячено дослідженню метрик розшарованих просторів, їхніх властивостей, та їх узагальнень на більш широкий клас метрик які призводять до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні.

Природною метрикою на дотичному розшаруванні є метрика Сасакі, геометричні властивості якої добре відомі. Насправді ж загалом метрика Сасакі має лише властивості загальної ріманової метрики, бо на шарах метрика Сасакі співпадає з метрикою базового многовиду. Але можна узагальнити визначення метрики Сасакі, дозволивши метриці на шарах відрізнятися від базової. Деформація метрики Сасакі призводить до іншої геометрії в шарах і всьому дотичному розшаруванні. Головним питанням, яким займалися і займаються багато відомих математиків, є: як саме нова деформована метрика Сасакі змінює геометрію дотичного розшарування?

Метою дослідження є виявлення залежностей геометричних властивостей загальних векторних розшарувань від метрики на розшарованому просторі, а також знаходження зв'язку між властивостями базового многовиду і шарів загального розшарування, вивчення геометричних властивостей перерізів загального розшарування для різних типів узагальнених метрик.

Об'єктом дослідження є геометричні властивості дотичних розшарувань ріманових многовидів та їх перерізів з різними деформаціями метрики Сасакі.

Предметами дослідження є узагальнення метрики Сасакі, геодезичні лінії дотичного розшарування, особливості сасакієвого многовиду, а також гармоні-

чні, мінімальні та цілком геодезичні векторні поля.

Завданнями дослідження є:

- узагальнення сигар солітонної метрики на дотичне розшарування;
- дослідження геодезичних ліній дотичного розшарування з пошарово сигар солітонною метрикою;
- дослідження гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасакі;
- класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення у випадку вертикально масштабованої метрики на одиничному дотичному розшаруванні;
- знаходження виразу для другої основної форми підмноговиду, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою;
- знаходження умов, за яких відображення що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою може бути цілком геодезичним.

Для дослідження використано методи диференціальної геометрії, ріманової геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії груп та алгебр Лі.

Розділ 1 дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям з геометрії розшарованих просторів, а також огляду літератури. Наведено базові відомості з геометрії дотичного розшарування та одиничного дотичного розшарування, контактних многовидів, метрики Сасакі, векторних полів на рімановому многовиді як відображень та підмноговидів. Зроблено огляд таких понять, як гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність векторного поля та відображення.

Розділ 2 дисертаційної роботи присвячено узагальненню сигар солітонної метрики Річарда Гамільтона як деформації метрики Сасаки на дотичному розшаруванні ріманова многовиду.

Після доведення Річардом Гамільтоном та Григорієм Перельманом гіпотези Пуанкаре з'явилося багато публікацій щодо геометрії так званих *солітонів Річі*. Їх досліджували багато математиків, серед яких є і українські. Першим приклад некомпактного сталого солітона Річі на площині винайшов Р. Гамільтон. Цей двовимірний многовид конформно еквівалентний площині з функцією конформності $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ і називається *сигар солітоном Гамільтона*. Конформно еквівалентні метрики та конформні відображення також вивчали інші математики. За аналогією з двовимірним многовидом, природно можна визначити метрику на дотичному розшаруванні.

Введено поняття *пошарово (гамільтонової) сигар солітонної деформації метрики Сасаки* або *пошарово (гамільтонової) сигар солітонної метрики* на дотичному розшаруванні ріманового многовиду. Вона є частковим, але вмотивованим, випадком метрики яку досліджували А. Загане і М. Джаа у своїх роботах.

Основною метою дослідження є вивчення *геодезичних* дотичного розшарування ріманового многовиду з пошарово (гамільтонової) сигар солітонною метрикою з фокусом на *локально симетричні многовиди* та *многовиди сталої кривини* у ролі бази розшарування. Властивості просторів зі сталою секційною кривиною також досліджували інші українські математики.

Отримано диференціальні рівняння натурально параметризованих геодезичних відносно зв'язності Леві-Чивіти пошарово сигар солітонної метрики. Доведено, що у випадку *локально симетричної бази* усі *геодезичні кривини* проєкції похилої геодезичної на базу є *сталими*, і у випадку *бази зі сталою кривиною* усі *геодезичні кривини* починаючи з третьої дорівнюють *нулю*. Отримано рівняння геодезичних на дотичних розшаруваннях просторів сталої кривини з пошарово (гамільтоновою) сигарою солітонною деформацією метрики Сасаки.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні. Було вперше введено поняття "пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки" (або "пошарово гамільтонової сигар солітонної метрики") і досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з такою метрикою.

Розділ 3 дисертаційної роботи присвячено вивченню *гармонічних одиничних векторних полів* на одиничному дотичному розшаруванні зі *скрученою метрикою Сасаки*.

Математики Л. Беларбі та Х. Ель Хенді запропонували досить зрозумілу деформацію метрики Сасаки на TM . Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема *вертикально масштабовану метрику*. Вертикально масштабована метрика потребує особливої уваги, бо така деформація є більш природним узагальненням метрики Сасаки, ніж скручена метрика Сасаки. А саме, геометрично вертикальна масштабована метрика здійснює поточкову гомотетичну деформацію у шарах. Саме цією метрикою Л. Беларбі та Х. Ель Хенді надихались при вивченні геометрії дотичного розшарування скрученої метрики Сасаки.

У своїй роботі ми вивчаємо скручену метрику Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні. Головною метою дослідження є пошук деформацій які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах L_1 з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні, використовуючи ортонормований репер і класифікацію Дж. Мілнора. Більш того, ми хочемо описати і класифікувати таких векторних полів та відображень відповідно до класифікації Дж. К. Гонсалес-Давіла і Л. Ванхеке у випадку вертикально масштабованої метрики. Також ми розглядаємо гармонічні векторні поля та відображення у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду. Властивості векторних по-

лів та відображень, які визначається одиничними векторними полями, також вивчали деякі українські математики.

Отримано необхідні та достатні умови гармонічності лівоінваріантного одиничного векторного поля та відображення $M \rightarrow T_1M$, що задається цим полем. Отримано необхідні та достатні умови гармонічності лівоінваріантного одиничного векторного поля та відображення $M^2 \rightarrow T_1M^2$, що задається цим полем, відносно деякого ортонормованого репера. Описано лівоінваріантні гармонічні одиничні векторні поля та гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, що задається цим полем, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, з використанням деякого ортонормованого репера. Зроблена класифікація лівоінваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення $G \rightarrow T_1G$, де G – тривимірна унімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою, в окремому випадку скрученої метрики Сасакі, а саме у випадку *вертикально масштабованої метрики*.

У дисертаційній роботі вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, а також вперше було класифіковано такі векторні поля та відображень у випадку вертикально масштабованої метрики.

Розділ 4 дисертаційної роботи присвячено вивченню випадку, коли *непаралельне* одиничне векторне поле ξ на рімановому многовиді (M, g) визначає *ізометричне занурення* $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, де G є рімановою g -натуральною метрикою.

Математики М.Т.К. Аббассі і М. Саріх М. запропонували досить узагальнену деформацію метрики Сасакі на дотичному розшаруванні, а саме ріманову g -натуральну метрику. Ця метрика включає в себе ряд інших відомих метрик, зокрема метрику Чігера-Громолла. Ріманова g -натуральна метрика,

незважаючи на свою складну будову, має одну цікаву особливість яку досліджував Д. Перроне. Розглядаючи метрику Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні, відображення, яке задається одиничним векторним полем, є *ізометричним вкладенням* тільки якщо це векторне поле є *паралельним*. Однак, Д. Перроне показав, що існує випадок коли *непаралельне* одиничне векторне поле визначає *ізометричне занурення*. Він також досліджував *гармонічність* і *мінімальність відображень*, що визначаються такими векторними полями. Він довів, що для ізометрії нам необхідно у якості непаралельного векторного поля взяти рібовське векторне поле на базовому многовиді і певну сім'ю ріманових g -натуральних метрик на одиничному дотичному розшаруванні. Також зауважимо, що метрика на одиничному дотичному розшаруванні, яка розглядається в теоремі, не включає в себе метрику Сасакі.

Природним доповнення до результатів Д. Перроне буде дослідження *цілком геодезичності* одиничних векторних полів, що визначають ізометричне вкладення. Основною метою є знаходження умов, за яких відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ може бути *цілком геодезичним*. Цілком геодезичні відображення є окремим випадком геодезичних відображень. Геодезичні відображення також досліджували інші українські математики.

Доведено, що *рібовське векторне поле* K -контактної метричної структури на рімановому многовиді M породжує цілком геодезичне відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ тоді і тільки тоді, коли ця структура є *сасакієвою*. Знайдено вираз для *другої основної форми* відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$.

У дисертаційній роботі вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне вкладення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні. Також вперше було отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

Практичним значенням отриманих результатів є доповнення наявних результатів з геометрії розшарованих просторів.

Ключові слова: дотичне розшарування, метрика Сасаки, геодезичні, скручена метрика Сасаки, вертикально масштабована метрика, одиничне дотичне розшарування, група Лі, гармонічне векторне поле, гармонічне відображення, сасакиєв многовид, K -контактний многовид, рібовське векторне поле, ізометричне занурення, цілком геодезичний многовид.

Abstract

Liana A. Lotarets. Differential geometry of bundles with generalized metrics. – Qualification scientific work is as a manuscript. A thesis on the degree of Doctor of Philosophy: Speciality 111 – Mathematics (Mathematics and statistics). – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The thesis is devoted to the study of metrics of bundles, their properties, and their generalizations to a broader class of metrics that lead to different geometries in the fibers and the entire tangent bundle.

The standard metric on the tangent bundle is the Sasaki metric, whose geometric properties are well known. However, in general, the Sasaki metric possesses only the properties of a general Riemannian metric since, on the fibers, it coincides with the metric of the base manifold. Nevertheless, one can generalize the Sasaki metric definition allowing the fiber metric to be different from the base one. A deformation of the Sasaki metric brings another geometry to the fibers and the whole tangent bundle. The main question, which has been and continues to be studied by many renowned mathematicians, is: to what extent the new fiber-wise metric changes the geometry of the tangent bundle?

The aim of the study is to identify the dependence of the geometric properties of general vector bundles on the metric of the bundle, as well as to establish the relationship between the properties of the base manifold and the fibers of a general bundle. Additionally, the study explores the geometric properties of sections of a general bundle for different types of generalized metrics.

The object of the study is the geometric properties of tangent bundles of Riemannian manifolds and their sections with various deformations of the Sasaki metric.

The subjects of the study are generalizations of the Sasaki metric, geodesic lines of the tangent bundle, properties of the Sasakian manifold, as well as harmonic,

minimal, and totally geodesic vector fields.

The objectives of the study are:

- generalization of the cigar soliton metric to the tangent bundle;
- investigation of geodesic lines in the tangent bundle with a fiberwise cigar soliton metric;
- study of harmonic unit vector fields on the unit tangent bundle with a twisted Sasaki metric;
- classification of left-invariant harmonic unit vector fields that define harmonic maps in the case of a vertical rescaled metric on the unit tangent bundle;
- derivation of the expression for the second fundamental form of a submanifold defined by a unit vector field in the unit tangent bundle of a Riemannian manifold with a g -natural metric;
- determination of the conditions under which a map defined by a unit vector field in the unit tangent bundle of a Riemannian manifold with a g -natural metric can be totally geodesic.

The study employs methods of differential geometry, Riemannian geometry, differential equations, mathematical analysis, linear algebra, group theory, and Lie algebras.

Section 1 of the thesis is devoted to fundamental concepts in the geometry of bundles, as well as a literature review. It provides basic information on the geometry of the tangent bundle and the unit tangent bundle, contact manifolds, the Sasaki metric, and vector fields on a Riemannian manifold as maps and submanifolds. An overview of concepts such as harmonicity, minimality, and totally geodesicity of vector fields and maps is also given.

Section 2 of the thesis is devoted to the generalization of Richard Hamilton's cigar soliton metric as a deformation of the Sasaki metric on the tangent bundle of

a Riemannian manifold.

After the proof of the Poincaré conjecture by Richard Hamilton and Grigori Perelman, numerous publications appeared concerning the geometry of the so-called *Ricci solitons*. They have been studied by many mathematicians, including Ukrainian researchers. The first example of a noncompact steady Ricci soliton on a plane was found by R. Hamilton. The first example of a noncompact steady Ricci soliton on the plane was discovered by R. Hamilton. This two-dimensional manifold is conformally equivalent to the plane with the conformal function $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ and is called the *Hamilton's cigar soliton*. Conformally equivalent metrics and conformal mappings have also been studied by other mathematicians. By analogy with the two-dimensional manifold, it is natural to define a corresponding metric on the tangent bundle.

The concept of a *fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton deformation of the Sasaki metric* or *fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton metric* on the tangent bundle of a Riemannian manifold is introduced. It represents a particular but well-motivated case of the metric studied by A. Zagane and M. Djaa.

The main objective of the study is to examine the *geodesics* of the tangent bundle of a Riemannian manifold with a fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton metric, focusing on *locally symmetric manifolds* and *manifolds of constant curvature* as the base of the bundle. The properties of spaces with constant sectional curvature have also been studied by other Ukrainian mathematicians.

Differential equations for naturally parameterized geodesics with respect to the Levi-Civita connection of the fiberwise cigar soliton metric have been obtained. It has been proven that in the case of a *locally symmetric base*, all *geodesic curvatures* of the projection of an oblique geodesic onto the base are *constant*, and in the case of a *base with constant curvature*, all *geodesic curvatures* starting from the third one are *zero*. The geodesic equations for tangent bundles of spaces with constant curvature under the fiberwise (Hamiltonian) cigar soliton deformation of the Sasaki metric have been derived.

In the thesis, for the first time, a generalization of the Hamiltonian cigar soliton metric, which is a two-dimensional manifold, was studied as a metric on the tangent bundle. The concept of "fiberwise cigar soliton deformation of the Sasaki metric" (or "fiberwise Hamiltonian cigar soliton metric") was introduced for the first time, and the geodesic lines of the tangent bundle with this metric were investigated.

Section 3 of the thesis is devoted to the study of *harmonic unit vector fields* on the unit tangent bundle with the *twisted Sasaki metric*.

Mathematicians L. Belarbi and H. El Hendi proposed a fairly intuitive deformation of the Sasaki metric on TM . This metric encompasses several other well-known metrics, including *vertical rescaled metric*. The vertical rescaled metric requires special attention, as this deformation is a more natural generalization of the Sasaki metric than the twisted Sasaki metric. Specifically, geometrically, the vertical rescaled metric performs a pointwise homothetic deformation within the fibers. It was precisely this metric that inspired L. Belarbi and H. El Hendi in their study of the geometry of the tangent bundle with the twisted Sasaki metric.

In our work, we study the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle. The main goal of the research is to identify deformations that preserve the existence of harmonic left-invariant unit vector fields on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant metric, as well as harmonic maps defined by unit vector fields, in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle, using an orthonormal frame and the classification by J. Milnor. Moreover, we aim to describe and classify such vector fields and maps according to the classification by J. C. González-Dávila and L. Vanhecke in the case of the vertical rescaled metric. We also consider harmonic vector fields and maps in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle of a two-dimensional Riemannian manifold. The properties of vector fields and mappings defined by unit vector fields have also been studied by some Ukrainian mathematicians.

Necessary and sufficient conditions for the harmonicity of a left-invariant unit vector field and a map $M \rightarrow T_1M$ defined by this field have been obtained. Necessary

and sufficient conditions for the harmonicity of a left-invariant unit vector field and the map $M^2 \rightarrow T_1M^2$, defined by this field with respect to a certain orthonormal frame, have also been established. Description of left-invariant harmonic unit vector fields and harmonic maps $G \rightarrow T_1G$, defined by such fields, has been provided, where G is a three-dimensional unimodular Lie group with a left-invariant metric, using a certain orthonormal frame. A classification of left-invariant harmonic unit vector fields that determine harmonic maps $G \rightarrow T_1G$, where G is a three-dimensional unimodular Lie group with a left-invariant metric, has been carried out in the special case of the twisted Sasaki metric, namely in the case of the *vertical rescaled metric*.

In the thesis, for the first time, deformations preserving the existence of harmonic left-invariant unit vector fields on three-dimensional unimodular Lie groups with a left-invariant metric and harmonic maps defined by a unit vector field in the case of the twisted Sasaki metric on the unit tangent bundle were described. Additionally, such vector fields and maps were classified for the first time in the case of the vertical rescaled metric.

Section 4 of the thesis is devoted to studying the case when a *non-parallel* unit vector field ξ on a Riemannian manifold (M, g) defines an *isometric immersion* $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, where G is a *Riemannian g -natural metric*.

Mathematicians M.T.K. Abbassi and M. Sarik proposed a rather general deformation of the Sasaki metric on the tangent bundle, namely the Riemannian g -natural metric. This metric includes several other well-known metrics, in particular the Cheeger-Gromoll metric. Despite its complicated formation, the Riemannian g -natural metric possesses an interesting property studied by D. Perrone. When considering the Sasaki metric on the unit tangent bundle, a map defined by a unit vector field is an *isometric embedding* only if the vector field is *parallel*. However, D. Perrone demonstrated that there exists a case where a *non-parallel* unit vector field determines an *isometric embedding*. He also investigated the *harmonicity* and *minimality* of maps defined by such vector fields. Perrone proved that for an isometry, it is necessary to take the Reeb vector field on the base manifold as the non-parallel

vector field and consider a certain family of Riemannian g -natural metrics on the unit tangent bundle. Moreover, it should be noted that the metric on the unit tangent bundle considered in this theorem does not include the Sasaki metric.

A natural complement to D. Perrone's results would be the study of the *totally geodesic* nature of unit vector fields that define an isometric embedding. The main goal is to determine the conditions under which the map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ can be *totally geodesic*. Totally geodesic maps are a special case of geodesic maps. Geodesic maps have also been studied by other Ukrainian mathematicians.

It has been proven that the *Reeb vector field* of a K -contact metric structure on a Riemannian manifold M induces a totally geodesic map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ if and only if this structure is *Sasakian*. An expression for the *second fundamental form* of the map $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ has been obtained.

In the thesis, the total geodesicity of non-parallel unit vector fields defining an isometric embedding on a K -contact metric manifold with a g -natural metric on the unit tangent bundle was studied for the first time. Additionally, for the first time, an expression for the second fundamental form of the map defined by a unit vector field on a Riemannian manifold with a g -natural metric on the unit tangent bundle was obtained.

The practical significance of the obtained results lies in complementing the existing findings in the geometry of bundles.

Keywords: tangent bundle, Sasaki metric, geodesics, Twisted Sasaki metric, vertical rescaled metric, unit tangent bundle, Lie group, harmonic vector field, harmonic map, Sasakian manifold, K -contact manifold, Reeb vector field, isometric embedding, totally geodesic manifold.