

Голові разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Рецензія

офіційного рецензента, доцента кафедри фундаментальної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, доктора філософії (спеціальність 111 – Математика) ЗАВАРЗІНОЇ Олесі Олегівни на дисертаційну роботу ЛОТАРЕЦЬ Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика.

1. Актуальність теми дослідження

Класичною метрикою на дотичному розшаруванні є метрика Сасаки. За своїми властивостями вона здебільшого поводить себе як загальна ріманова метрика не зважаючи на те, що дотичне розшарування з такою метрикою містить у своїй структурі цілком геодезичне шарування. Така властивість метрики Сасаки спонукала дослідників на «деформацію» метрики Сасаки з метою досягнення більшої «гнучкості» її геометричних властивостей. Деформація метрики розшарування приводить також до зміни геометрії перерізів розшарування – векторних полів як відображень базового многовиду у розшарування.

У дисертації запропоновано новий тип деформації метрики Сасаки – сигар солітонну – і досліджено властивості її геодезичних. Для скрученої деформації отримано умови гармонічності одиничного векторного поля як відображення в одиничне дотичне розшарування, а для випадку найбільш загальної деформації метрики Сасаки виявлена властивість, що вирізняє сасакієві многовиди у класі загальних контактних многовидів.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною, а результати дисертації важливими.

2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

У **вступі** наявні всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна та практичне значення результатів, особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** наведені основні означення і теореми, що використовуються в дисертації. Їх обсяг не виходить за межі дослідження і дає уявлення про методи дослідження, використані в дисертації.

У **другому розділі** визначено сигар солітонну пошарову деформацію метрики Сасаки та досліджено поведінку геодезичних такої метрики.

У **третьому розділі** виконане детальне дослідження гармонічності одиничного векторного поля для випадку так званої «скрученої деформації» метрики Сасаки. Головні результати пов'язані з дослідженням гармонічності одиничного векторного поля та гармонічності відображення в розумінні Ілліса й Семпсона, що визначається одиничним

векторним полем. Ці результати узагальнюють аналогічні дослідження для розшарувань з метрикою Сасаки на випадок скрученої деформації. В дисертації виявлено вплив деформації на гармонічність векторного поля порівнянням аналогічним для розшарування з класичною метрикою у випадку двовимірної бази, а також для інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з інваріантною метрикою.

Четвертий розділ дисертаційної роботи містить важливий результат, що характеризує Сасакеів многовид (многовид зі спеціальною – Сасакеівою структурою) в класі кілінгово-контактних многовидів у випадку, коли на дотичному розшарування розглядається клас дуже загальних метрик, за наявності яких одиничне векторне поле може породжувати ізометричне занурення бази у простір розшарування. Класична метрика дозволяє існування такого типу векторних полів лише у випадку, коли базовий многовид розщеплюється у добуток певного многовиду та евклідового фактора.

Висновки до дисертації є логічними та послідовними. Вони підсумовують отримані результати та наукову новизну роботи.

Список використаних джерел свідчить про те, що при виконанні роботи було проаналізовано актуальні закордонні та вітчизняні наукові праці з тематики дослідження.

Дисертація є завершеною науковою працею, а її оформлення відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Всі необхідні базові результати та означення сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено повністю, результати дисертаційної роботи мають повне обґрунтування. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і адекватно описують основні результати.

4. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

Дисертантка отримала наступні нові наукові результати:

- Вперше було досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні;
- Вперше введено поняття пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки;
- Досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з пошарово сигар солітонною деформацією метрики Сасаки;
- Вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні;
- Вперше було класифіковано гармонічні векторні поля та гармонічні відображення, що визначаються векторним полем, у випадку вертикально масштабованої метрики;
- Вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні;

- Вперше було отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Всі основні результати роботи опубліковано у фахових журналах, індексованих у наукометричній базі SCOPUS з них 2 у журналах квартиля Q2. Роботи виконані без співавторів. Результати були представлені на двох конференціях міжнародного рівня, тези яких входять до переліку міжнародних наукометричних баз, та семінарах, що засвідчує апробацію матеріалів дисертації.

6. Дотримання академічної доброчесності

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи з необхідними посиланнями. Дисертація містить чіткі посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати доповнюють існуючі дослідження з геометрії розшарованих просторів з узагальненими метриками та можуть бути використані для подальших досліджень із заявленої тематики.

8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До дисертаційної роботи є декілька зауважень.

1. Вступна частина дисертації містить лише факти і означення, на які спирається дослідження. Було б доречно надати більш широкий огляд публікацій з тематики дослідження та історії питань.
2. Солітони Річі є предметом дуже великої кількості публікацій. Сигар солітон Гамільтона є лише одним з прикладів солітона Річі. Було б доречно приділити увагу загальній теорії солітонів Річі і (можливо) знайти більш загальні конструкції деформації метрики Сасаки, яка була б пов'язана з солітонами Річі.
3. Теорія гармонічних відображень тісно пов'язана з теорією геодезичних відображень. Наявність у автора виразу для другої фундаментальної форми відображення, що визначається одиничним векторним полем, для випадку скрученої метрики відкривала можливість дослідити геодезичність відповідного відображення. Було б доречно виконати подібне дослідження.
4. Текст дисертації містить деякі граматичні та стилістичні помилки, які, втім, не впливають на сприйняття змісту роботи.
Зазначені зауваження не впливають на високу оцінку якості результатів дисертаційного дослідження і обґрунтованості наведених здобувачем висновків та є, скоріше, спонуканням автора до подальших досліджень.

9. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота ЛОТАРЕЦЬ Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11

– Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати.

Здобувач ЛОТАРЕЦЬ Ляна Андріївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 –Математика та статистика.

Офіційний рецензент, доцент кафедри
фундаментальної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
доктор філософії, доцент

Олеся ЗАВАРЗІНА

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 17:15:24 09.07.2025

Назва файлу з підписом: Заварзіна. Рецензія_Ел.pdf
Розмір файлу з підписом: 308.4 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Заварзіна. Рецензія_Ел.pdf
Розмір файлу без підпису: 274.3 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач - 1: ЗАВАРЗІНА ОЛЕСЯ ОЛЕГІВНА
П.І.Б.: ЗАВАРЗІНА ОЛЕСЯ ОЛЕГІВНА
Країна: Україна
РНОКПП: 3387700987
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 17:28:28 06.07.2025
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000069529301A1629A05
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підписаний PDF-файл (PAdES)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (PAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Підписувач - 2: ЗАВАРЗІНА ОЛЕСЯ ОЛЕГІВНА
П.І.Б.: ЗАВАРЗІНА ОЛЕСЯ ОЛЕГІВНА
Країна: Україна
РНОКПП: 3387700987
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 17:15:22 09.07.2025
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000069529301A1629A05
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підписаний PDF-файл (PAdES)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (PAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.02.05 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, професора, доктора фізико-математичних наук
(спеціальність 01.01.04 – геометрія і топологія),
професора кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
Одеського національного університету імені І. Мечникова

Кіосака Володимира Анатолійовича

на дисертаційну роботу

Лотарець Ляни Андріївни

**«Диференціальна геометрія розшарованих просторів
з узагальненими метриками»,**

подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 – Математика
з галузі знань 11 – Математика та статистика.

1. Актуальність теми дослідження

Ріманова метрика на розшарованому просторі виникла в піонерській роботі Сігео Сасакі (1958) як метрика на дотичному, а пізніше (1962) на одиничному дотичному розшаруванні ріманова многовида. Подальші дослідження показали, що згадана метрика встановлює жорсткі зв'язки геометрії дотичного розшарування з геометрією базового многовиду. З огляду на це, впродовж подальших років було здійснено багато спроб «здеформувати» метрику Сасакі та з'ясувати вплив такої деформації на геометрію як дотичного розшарування, так і узагальнених розшарованих просторів. Потужний поштовх до дослідження zdeформованих метрик надала робота Аббасі та Саріха (2005), а також визначення інших типів деформацій (О. Ямпольський (2012), А. Загане і М. Джаа (2018), Л. Беларбі і Х. Ель Хенді (2019, 2020), та ін.).

В дисертаційній роботі Л. Лотарець визначено новий тип пошарової деформації сасакійової метрики, пов'язаної з прикладом солітона Річі на площині, який був введений Річардом Гамільтоном в рамках доведення гіпотези Пуанкаре (так званий сигар-солітон Р. Гамільтона). Дисертант узагальнила приклад метрики Гамільтона, виділивши її основні властивості, й виконала дослідження геодезичних ліній дотичного розшарування з сигар-солітонною деформацією метрики на шарах з фокусом на випадок локально-симетричної бази та бази зі сталою кривиною. Це дослідження є узагальненням раніше отриманих результатів щодо класичної метрики Сасакі.

В дисертації виконане поглиблене вивчення властивостей пошарово конформної деформації (гомотетії) метрики Сасакі та скрученої (двічі конформної деформації) метрики Сасакі на одиничному дотичному розшаруванні (Л. Беларбі та Х. Ель Хенді (2019)). Головну увагу було приділено з'ясуванню впливу вказаного типу деформацій на властивості векторного поля породжувати гармонічне відображення бази у простір розшарування. Такий вплив висвітлено у порівнянні з відомими результатами з гармонічності одиничного векторного поля на тривимірній унімодулярній групі Li з інваріантною метрикою для класичної метрики Сасакі на розшаруванні одиничних векторів.

Існує широкий клас ріманових многовидів, геометрія яких пов'язана з існуванням на них векторних полів з певними властивостями. До такого класу належать солітони Річі та многовиди з (майже -) контактними структурами. Характеристичне векторне поле таких структур зветься Рібовським векторним полем. Як з'ясував Д. Перон (2010), за певної деформації сасакійової метрики Рібовське векторне поле Кілінгової контактної структури може визначати ізометричне занурення бази в одиничне дотичне розшарування з такою zdeформованою метрикою, причому в такому разі Рібовське векторне поле ξ породжує мінімальний підмноговид $\xi(M) \subset T_1 M$. Логічним питанням в такому разі є дослідження умов, за яких підмноговид $\xi(M)$ може бути не тільки мінімальним, а й цілком геодезичним. Відповідна задача була сформульована і розв'язана в дисертації.

Зважаючи на вищесказане, вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною, а результати дисертації важливими.

2. Загальна характеристика дисертації

Дисертаційна робота Лотарець Л.А. складається зі вступу та чотирьох розділів загальним обсягом 106 сторінок. Список використаних джерел налічує 53 найменування. Основні положення дисертаційної роботи опубліковано у 6 наукових працях *без співавторів*, з яких 3 статті у виданнях, які входять до переліку міжнародної наукометричної бази **SCOPUS**, два з яких входять до *квартілю Q2*, та 3 праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях та семінарах. Отримані дисертанткою результати висвітлені у Розділах 2, 3,4.

У **вступі** окреслені всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми дослідження з наданням інформації про попередні результати в рамках окресленої теми, на підставі яких сформульовані мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, конкретизовано завдання дослідження. Чітко описані отримані результати, зв'язок з науковими програмами та темами, наукова новизна та практичне значення результатів, особистий внесок здобувача. Надано інформацію про апробацію результатів та публікації автора.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям з геометрії розшарованих просторів, необхідних для розуміння постановок задач та використаних методів. Наведено базові відомості з геометрії дотичного розшарування та одиничного дотичного розшарування, контактних многовидів, класичної метрики Сасакі, векторних полів на рімановому многовиді як відображень та підмноговидів. Зроблено огляд таких понять, як гармонічність, мінімальність і цілком геодезичність векторного поля та породженого ним відображення бази у простір розшарування. Наведено, також, необхідні відомості з контактної геометрії. Особливу увагу приділено зв'язкам між кілінгово-контактними, сасакійовими та майже сасакійовими структурами.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено узагальненню сигар солітонної метрики Річарда Гамільтона як пошарової деформації метрики Сасакі на дотичному розшаруванні ріманова многовиду. Основною метою дослідження є вивчення геодезичних дотичного розшарування ріманового многовиду з пошарово сигар-солітонною метрикою з фокусом на локально симетричні многовиди та многовиди сталої кривини як бази розшарування. В дисерта-

ції з'ясовано, що за умов сигар-солітонної деформації можлива класифікація геодезичних, аналогічна класифікації геодезичних класичної метрики Сасаки. Більше того, як і у випадку класичної метрики Сасаки, похилі геодезичні лінії сигар-солітонної деформації метрики Сасаки розшарування над симетричним рімановим простором проєктуються у криві зі сталими геодезичними кривими, а у випадку бази сталої кривини – в кола та гвинтові лінії (перша та друга геодезичні кривини є сталими, а інші дорівнюють 0).

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню гармонічних одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасаки – одним з типів zdeформованих метрик на розшарованих просторах. Ця метрика включає в себе вертикально масштабовану метрику, тобто метрику, що породжується поточною гомотетією дотичних сфер. Така деформація метрики Сасаки є більш природним узагальненням метрики Сасаки, ніж загальна скручена метрика Сасаки, що включає одночасну поточкову гомотетію бази і шарів. Головною метою дослідження даного розділу є пошук деформацій, які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні. Результати цього розділу узагальнюють аналогічні результати, отримані для випадку класичної метрики Сасаки й висвітлюють вплив деформації метрики розшарування на властивості векторних полів, що є однією з провідних задач дослідження.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено питанням геометрії підмноговиду, що породжений одиничним векторним полем у дотичному розшаруванні з найбільш загальною деформацією метрики Сасаки, що має назву g -натуральної метрики (М.Т.К. Аббассі та М. Саріх (2010)). Така деформація визначається великою кількістю параметрів і навіть не завжди є додатно визначеною. У випадку класичної метрики Сасаки одиничне векторне поле визначає ізометричне занурення базового многовида у дотичне розшарування лише у тривіальному випадку паралельності векторного поля, а значить, у випадку розщеплення базового многовида у прямий добуток на евклідов фактор $M^n = M^{n-1} \times E^1$. Як з'ясував Д. Перрон (2010), існують такі -натуральні метрики, що Рібовське векторне поле контактної метричної структури, яке не є

паралельним, визначає ізометричне занурення бази у сферичне дотичне розшарування. Більше того за певних значень параметрів здеформованої метрики G таке занурення є мінімальним у випадку K -контактної структури (Теорема 4.3). В дисертації розглянуто питання знаходження умов, за яких відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$, може бути не тільки мінімальним ізометричним зануренням K -контактного многовиду, а й цілком геодезичним. З цією метою було знайдено вираз для другої квадратичної форми $\xi(M) \subset (T_1M, G)$. Як результат, для цілком геодезичності ізометричного занурення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ K -контактна структура має бути сасакійовою, що дає характеристику сасакійових структур в класі K -контактних.

Висновки до розділів підсумовують отримані результати та підкреслюють наукову новизну роботи, а також включають певні питання, що залишилися за межами дисертаційного дослідження. Цей факт підкреслює обізнаність автора в сучасному стані проблематики і **накреслює шляхи подальшого розвитку тематики**.

Всі необхідні попередні результати та означення сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено чітко і повно, що переконує в **обґрунтованості результатів дисертаційної роботи**. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати. Всі розділи дисертації логічно пов'язані між собою і складають цілісну наукову працю.

4. Ступінь наукової новизни

Дисертантка отримала наступні нові наукові результати:

- Виконане дослідження геодезичних ліній дотичного розшарування з пошарово сигар-солітонною метрикою (Теорема 2.5, Теорема 2.9, Теорема 2.10, Теорема 2.11 та Теорема 2.13);
- Знайдено умови гармонічності одиничних векторних полів на одиничному дотичному розшаруванні зі скрученою метрикою Сасакі (Теорема 3.3, Теорема 3.4) та виконано редукцію цих умов для випадку двовимірного базового многовида (Теорема 3.6);
- Надано класифікацію ліво-інваріантних гармонічних одиничних векторних полів, які визначають гармонічні відображення у випадку вертикально масштабованої метрики на одиничному дотичному розшаруванні три-

вимірної групи Лі з ліво інваріантною метрикою (Теорема 3.9, Теорема 3.11, Теорема 3.12, Теорема 3.13, Теорема 3.15, Теорема 3.16);

- Знайдено вираз для другої основної форми підмноговиду, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиду з g -натуральною метрикою (Лема 4.6);
- Знайдено умови, за яких відображення, що задається одиничним векторним полем, в одиничному дотичному розшаруванні ріманового многовиді з g -натуральною метрикою може бути цілком геодезичним (Теорема 4.4).

Отримані результати цілком відповідають заявленій меті дослідження.

5. Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати складають суттєвий внесок до досліджень, пов'язаних з метизацією розшарованих просторів, та відображень, що визначаються векторними полями. Геометричні властивості векторних полів можуть бути цікавими для спеціалістів з математичної фізики та теорії динамічних систем.

6. Стиль, структура та повнота викладення матеріалу

Всі оригінальні розділи дисертації логічно пов'язані між собою. Доведення отриманих результатів здійснюється завдяки кваліфікованим обчисленням з використанням сучасної геометричної мови. Коректність результатів не викликає сумніву, адже обчислення викладені повністю.

7. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, в рамках державної науково-дослідницької роботи за темою "Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок між геометрією, алгеброю, та топологією"(номер проекту: 2020.02/0096) та в рамках конкурсу математичних проектів 2023 фонду імені Н.І. Ахієзера. Результати досліджень також були відзначені стипендією фонду імені Н.І. Ахієзера у 2025 році.

8. Дотримання академічної доброчесності.

Всі використані відомі результати викладені в дисертаційній роботі з необхідними посиланнями. Дисертація містить чіткі посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації.

9. Дискусійні положення та зауваження.

Загальні:

- Заявлена мета досліджень дисертаційної роботи в цілому досягнута. Викликає повагу формулювання перспективних напрямків продовження досліджень, сформульовані у висновках до відповідних розділів. До таких напрямків можна було б додати зв'язок з дослідженнями українських геомерів щодо геодезичних відображень між рімановими просторами в контексті дослідження векторних полів, що визначають цілком геодезичні підмноговиди у (одиночному) дотичному розшаруванні. Наприклад, було б доцільно розглянути векторне поле ξ , що переводять геодезичні лінії базового многовида у геодезичні лінії підмноговида $\xi(M)$.
- До теореми 2.10 бажано б додати приклади розв'язків відповідних диференціальних рівнянь принаймні на евклідовій площині. Це б значно прояснило природу описаних геодезичних ліній.
- При формулюванні Лем 2.4 та 3.2 авторка вживає вираз «Наступна лема містить формули Ковальського [посилання]» замість «Ми доводимо наступну лему, що містить **аналоги** формул Ковальського»

Зауваження редакційного характеру:

- Певна кількість означень і теорем не мають посилань на джерело *безпосередньо у формулюванні*. Це, наприклад, Означення 1.3, 1.5, 1.6, 2.1 та ін.. Також це стосується Теорем 1.2, 1.3 та ін.. Натомість, теореми автора мають такі посилання. Доведення авторських результатів краще супроводжувати вступними словами «Ми доводимо наступну теорему [посилання]»
- Стор. 30₃: друкарська помилка: *довід* замість *довів*
- Стор. 45: У формулюванні Леми 2.8 змішано стилі позначень. Записано $B^2 = |X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2$. Слід було використовувати або $B^2 = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2$, або $B^2 = |X|_g^2 |Y|_g^2 - \langle X,Y \rangle_g^2$
- Стор. 54 та ін.: використані лапки “ “ замість нормативних лапок « »
- При формулюванні результатів в Таблицях 2 та 3 на стор. 62 немає пояснення щодо позначення S , хоча з контексту зрозуміло, що мається на увазі одинична сфера.
- Стор. 63: залишилося при перекладі англійське **and**

10. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

На підставі проведеного аналізу вважаю, що дисертаційна робота Лотарець Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Дисертація відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44) та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертацій».

Здобувач Лотарець Ляна Андріївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри алгебри, геометрії та
диференціальних рівнянь Одеського
національного університету імені І. Мечникова

Володимир КІОСАК

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 14:56:24 04.07.2025

Назва файлу з підписом: Відгук_опонента_PhD_(Kiocak).pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 207.2 КБ

Назва файлу без підпису: Відгук_опонента_PhD_(Kiocak).pdf.zip
Розмір файлу без підпису: 213.2 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: КЮСАК ВОЛОДИМИР АНАТОЛІЙОВИЧ

П.І.Б.: КЮСАК ВОЛОДИМИР АНАТОЛІЙОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2140209072

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 14:20:55 04.07.2025

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000001F975E01315E7006

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Підписані файли: Відгук_опонента_PhD_(Kiocak).pdf

Версія від: 2025.07.03 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, професора, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.04 – геометрія і топологія), професора кафедри комп'ютерних методів механіки і процесів керування Київського національного університету імені Тараса Шевченка **Пришляка** Олександра Олеговича на дисертаційну роботу **Лотарець** Ляни Андріївни «**Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками**», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика.

Актуальність теми дисертаційної роботи.

Розшаровані простори та шарування на многовидах є предметом великої кількості сучасних досліджень як з точки зору їх топології, так і з геометричної точки зору. Геометризація розшарованих просторів почалася з визначення С. Сасакі ріманової метрики на дотичному (1958), а згодом і сферичному розшаруванні (1962) ріманова многовиду. В подальшому ідея геометризації розшарованих просторів була поширена нормальне розшарування підмноговиду (О. Борисенко, О. Ямпольський) та інші, більш загальні типи розшарувань.

В останні роки з'явилося чимало публікацій з метою покращення властивостей метрики Сасакі та певних її модифікацій. Це і метрика Чігера-Громола, і Берже-деформація метрики сферичного розшарування (О. Ямпольський, 2012), скручена деформація метрики Сасакі (L. Belarbi, H. El Hendi, 2019), вертикально-масштабована метрика Чігера-Громола (L. Belarbi, H. El Hendi, та F. Latti, 2020).

Дисертаційна робота Л. Лотарець є суттєвим доповненням до результатів щодо геометрії розшарованих просторів з узагальненими метриками. В роботі введено новий тип деформацій – сигар-солітонна – та вивчений вплив цієї деформації на поведінку геодезичних ліній zdeформованої метрики. Досліджені

гармонічні властивості одиничних векторних полів у випадку скрученої метрики Сасаки. В якості прикладу впливу такої деформації на гармонічність відображення, що визначається одиничним векторним полем, було розглянуто унімодулярні групи Лі та інваріантні одиничні векторні поля на них. Досягнуті результати повністю корелюють з аналогічними результатами для класичної метрики Сасаки. Метризація дотичного розшарування приводить до нового розуміння геометрії векторного поля, як такого, що породжує підмноговид у (одиничному) дотичному розшаруванні. Така інтерпретація приводить до понять мінімального та цілком геодезичного векторного поля. В певних випадках одиничне векторне поле може існувати глобально на многовиді. Класичним прикладом є поля Хопфа на сферах. Вони визначають мінімальні та навіть цілком геодезичні підмноговиди в одиничному розшаруванні сфер з метрикою Сасаки. Але отримані підмноговиди не ізометричні сферам. У загальному випадку векторне поле зберігає метрику бази тільки якщо воно є паралельним (коваріантно сталим). Проте існує приклад такої деформації метрики Сасаки, що одиничне векторне поле зберігає метрику бази, тобто є ізометрією. Це випадок кілінгово-контактного многовида і Рібовського векторного поля (D. Perrone, 2010). Більше того, при певних параметрах деформації рібовське поле породжує мінімальний підмноговид, ізометричний базі. В дисертації поставлене питання та дано відповідь, за яких умов такий підмноговид може бути цілком геодезичним?

На підставі наведених зауважень вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною і такою, що відповідає сучасному стану досліджень з геометрії розшарувань.

Наукова новизна і практична цінність дисертаційної роботи.

Результати роботи мають теоретичний характер та належать до фундаментальної математики, відповідають профілю кафедри, на якій виконана дисертація. На мою думку, серед основних результатів, перелічених в дисертації, можна виділити наступні:

1. Вперше було введено поняття пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки і досліджено проекції на базу геодезичних ліній дотичного розшарування з такою метрикою (Розділ 2).
2. Вперше було описано деформації які зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні (Розділ 3).

3. Вперше було класифіковано гармонічні ліво-інваріантні одиничні векторні поля на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою та гармонічні відображення, які задаються одиничним векторним полем у випадку вертикально масштабованої метрики (Розділ 3).
4. Вперше було досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, на К-контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні (Розділ 4).

Окрім згаданих результатів можна відзначити важливі технічні результати, такі як аналоги формул Ковальського для коваріантних похідних комбінацій ліфтів векторних полів на простір розшарування у випадках різних узагальнених метрик (Лема 2.4, Лема 3.2); вираз для другої фундаментальної форми відображення, що визначається одиничним векторним полем, у випадку g -натуральної метрики на розшаруванні. Особливо хочу відзначити Теорему 3.3 що дає явний вираз для тензора напруженості одиничного векторного поля у випадку скрученої метрики $G^{(\delta, \varepsilon)}$ та її наслідку – теорему 3.4 – що визначає умови гармонічності одиничного векторного поля та умов, за яких таке поле визначає гармонічне відображення. Не зважаючи на складність обчислень, кінцевий результат є красивим, зводиться до відомих при $\delta = \varepsilon = 0$ і дивним чином виокремлює випадок $n = 2$. В цьому контексті цікавим є окремий розгляд двовимірною випадку: Теорема 3.6 та Приклад 3.7.

Обґрунтованість і достовірність наукових висновків та повнота викладення основних результатів.

Доведення теорем виконане шляхом копітких обчислень, правильність яких не викликає сумнівів. При цьому авторка використовує сучасний, безкоординатний стиль обчислень, що підкреслює кваліфікацію здобувача. Результати дисертації опубліковані у виданнях, що включені до наукометричної бази SCOPUS (дві з яких у журналі квартілю Q2), проходили анонімне рецензування і тому є достовірними. Доведення теорем, вивід необхідних формул супроводжені повними обчисленнями, що є свідомством повноти викладення результатів.

Апробація результатів.

Робота над дисертацією та апробаційний період випали для Ляни Лотарець на період російського вторгнення на територію України. Ця обставина особливо обтяжлива для науковців Харківської математичної школи. Незважаючи на такі складні обставини, здобувачка доповідала результати дисертаційного дослідження на Міжнародній науковій конференції «Алгебраїчні та геометричні

методи аналізу» (2023, 2024), семінарі лабораторії топології Інституту математики НАН України (2024). Тези доповіді на конференціях опубліковані, доповідь на семінарі отримала схвальну оцінку.

Оцінка мови, стилю та оформлення дисертації. Дисертаційна робота викладена на 103 сторінках без урахування Додатку. Робота складається з анотації (українською та англійською мовами), змісту, 4 розділів, висновків, списку літератури та додатків. Список використаних джерел складається з 47 найменувань без урахування 6 посилань на роботи здобувачки та свідчить про значний обсяг опрацьованих джерел. Матеріал написано у науковому стилі, логічно, структура дисертації відповідає завданням та вимогам Наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» зі змінами від 31.05.2019 р.

Аналіз змісту дисертації.

Вступ складається з необхідних стандартних пунктів, а саме: обґрунтування вибору теми дослідження; мета і завдання дослідження; наукова новизна одержаних результатів; зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами; практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача; апробація результатів дисертації; відомості про публікації автора та структуру дисертації. Згадані пункти мають вичерпну інформацію про сучасний стан проблематики, ідеї до постановки задач та отримані здобувачкою результати.

Перший розділ є оглядово-інформативним, містить основні означення та формулювання базових теорем. Розділ складається всього з 10 сторінок, не містить зайвої інформації та сприяє замкненості викладу основних результатів.

В другому розділі введено в розгляд новий тип деформації метрики Сасакі – сигар-солітонну. Ідея деформації виходить з прикладу двовимірного солітона Річі, що винайшов Річард Гамільтон в процесі доведення гіпотези Пуанкаре. Здобувачка узагальнила властивості метрики солітона Гамільтона й визначила сигар-солітонну пошарову деформацію метрики Сасакі наділивши шари дотичного розшарування структурою солітона Річі. З цієї точки зору можна сказати, що здобувачка визначила сигар-солітонне розшарування над рімановим многовидом. В якості першого результату щодо сигар-солітонного розшарування були виписані рівняння геодезичних такого розшарування та з'ясовані проєкції геодезичних на базовий многовид. Детально проаналізовані властивості таких проєкцій у класичних випадках сталої кривини бази та її локальної симетричності. Основні результати розділу містяться в Теоремах 2.11, 2.12, 2.13, 2.14

Третій розділ присвячено дослідженню одиничного векторного ξ поля як відображення $\xi: M \rightarrow T_1M$ бази у дотичне розшарування одиничних векторів. Подібні дослідження у випадку класичної метрики Сасаки на розшаруванні добре відомі. Здобувачка ставить питання про вплив на властивості гармонічності векторного поля інших метрик на розшаруванні, а саме, конформно деформованих. Метрика $G^{(\delta, \varepsilon)}$ здійснює конформну деформацію $g \rightarrow e^\delta g$ на базі та деформацію $g \rightarrow e^\varepsilon g$ на шарах дотичного розшарування, де $\delta, \varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ – довільні гладкі функції на многовиді. В літературі такі метрики отримали назву «скручена (twisted) метрика Сасаки». Шляхом акуратних обчислень, в Теоремі 3.3 здобувачка отримала вираз для тензора напруженості одиничного векторного поля та виписала в Теоремі 3.4 умови гармонічності інваріантного одиничного векторного поля на тривимірній унімодулярній групі Лі з інваріантною метрикою. Слід зазначити, що з геометричної точки зору найбільш природною є метрика $G^{(0, \varepsilon)}$, що в дисертації названо вертикально масштабованою метрикою. В подальшому здобувачка фокусується саме на такій деформації у застосуванні до одиничних інваріантних векторних полів на у випадку тривимірних груп Лі з інваріантними метриками. Відправною точкою дослідження є опис на таких групах гармонічних інваріантних векторних полів та таких, що визначають гармонічне відображення для класичної метрики Сасаки $G^{(0, 0)}$, що був наданий Гонзасезом Да-Віла та Ванеке. Здобувачці вдалося повністю розв’язати аналогічну задачу шляхом ретельного аналізу відповідних рівнянь на кожній з таких груп для з’ясування питання про те, коли група допускає ліво інваріантні гармонічні одиничні векторні поля ξ , які визначають гармонічні відображення $\xi: (G, g) \rightarrow (T_1G, G^{0, \varepsilon})$. Відповідні результати презентовані в Теоремах 3.11 – 3.16.

Четвертий розділ продовжує тематику геометрії одиничного векторного поля як відображення, що породжує підмноговид в одиничному дотичному розшаруванні з точки зору класичної геометрії підмноговидів. Відомо, що такий підмноговид у розшаруванні з класичною метрикою Сасаки може бути ізометричним базі лише у випадку коваріантно сталого векторного поля, що накладає на многовид умову розщеплення його у прямий добуток на евклідів фактор. Досить неочікуваний результат був отриманий Доменіко Пероном. Він довів, що при певній деформації метрики Сасаки, на многовиді може існувати векторне поле, що породжує підмноговид у одиничному дотичному розшаруванні, ізометричний базі. Таким многовидом є кілінгово-контактний многовид, а відповідним полем – його характеристичне (Рібовське) векторне поле ξ . При додаткових умовах на деформацію сасакійової метрики підмноговид $\xi(M) \subset T_1M$ навіть може бути мінімальним. Здобувачка ставить питання про те, чи «рібовський» мінімальний підмноговид може бути цілком геодезичним. Відповідь

надано в Теоремі 4.4. Доведення базується на Лемі 4.6, де знайдено вираз для другої квадратичної форми підмноговида $\xi(M) \subset T_1M$ при параметрах деформації, запропонованих Д. Пероном. Друга квадратична форма підмноговида $\xi(M) \subset T_1M$ та дослідження випадків його цілком геодезичності у випадку класичної метрики Сакакі на розшаруванні відома з робіт О.Ямпольського – наукового керівника здобувачки. Тож результати дисертації доповнюють як результати Д. Пероне, так і О. Ямпольського.

Академічна доброчесність

При ознайомленні з текстом дисертації та публікаціями фактів академічної недоброчесності не встановлено, цитування мають коректні посилання на першоджерела.

Дискусійні положення та зауваження.

В цілому, дисертаційна робота Лотарець Л.А. відповідає сформульованим меті та завданням дослідження. Мотивація є обґрунтованою, актуальність підтвердженою. Виконана робота є якісною, результати – достовірними. Між тим, є кілька дискусійних питань та зауважень.

1. На мою думку у вступі слід було б приділити більше уваги опису геометрії тривимірних унімодулярних та не унімодулярних груп, пояснити важливість розгляду у другому розділі дисертації саме них. Також потребує пояснень питання, чому неунімодулярні групи лишилися поза увагою досліджень в дисертації;
2. При розгляді геометричних властивостей одиничних векторних полів не акцентовано уваги на локальність розглядів, адже довільний многовид не дозволяє глобально визначеного векторного поля без особливостей. Слід було б згадати, приміром, про теорему Адамса про кількість лінійно незалежних невироджених векторних полів на сферах;
3. Технічні навички здобувачки без сумніву дозволяють вивчати питання ріманової кривини zdeформованих метрик, проте подібні питання в дисертації не розглядаються;
4. Цілком геодезичні підмноговиди дають класичний приклад існування відображень одного ріманова многовида в інший, що переводить геодезичні лінії підмноговида в геодезичні лінії охоплюючого простору. В цьому випадку йдеться про ізометричне занурення одного ріманова многовида в інший. Як зазначено в дисертації, векторне у загальному випадку не визначає

ізометричного зануренні. Тож у природний спосіб виникає питання про існування многовидів, що несуть векторні поля які здійснюють геодезичне відображення бази в простір (одиничного) дотичного розшарування з вдало підбраною метрикою на розшаруванні.

Згадані зауваження не знижують значення отриманих результаті, а скоріше вказують на можливі напрямки подальших досліджень. До речі, у висновках до дисертації здобувачка також формулює певні перспективні напрямки.

Висновок опонента. На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок, що за своєю актуальністю, обсягом виконаних досліджень, теоретичною і практичною цінністю, науковою новизною, достовірністю отриманих результатів, обґрунтованістю висновків, оформленням роботи, дисертаційна робота Лотарець Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками » є завершеною науковою працею, яка відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44) та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертацій».

Вважаю, що Лотарець Ляна Андріївна заслуговує на присудження ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – «Математика та статистика » за спеціальністю 111 – «Математика»

Офіційний опонент,
доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри комп'ютерних методів
механіки і процесів керування
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Олександр ПРИШЛЯК

ПРИШЛЯК ОЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

Результат перевірки підпису	Signature is valid
П.І.Б.	ПРИШЛЯК ОЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ
РНОКПП	2522205617
Організація (установа)	ФІЗИЧНА ОСОБА
Код ЄДРПОУ	
Посада	
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для даних від Надавача)	23:18:48 03.07.2025
Сертифікат виданий	КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер	5E984D526F82F38F04000000FC9F9101C1EE6F06
Тип носія особистого ключа	Захищений
Алгоритм підпису	dstu4145
Тип підпису	Кваліфікований
Формат підпису	CAdES-T
Сертифікат	Кваліфікований

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.04 – «Геометрія та топологія»), професора, професора кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету САВЧЕНКА Олександра Григоровича на дисертаційну роботу ЛОТАРЕЦЬ Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками», подану до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – «Математика» з галузі знань 11 – «Математика та статистика».

Актуальність теми дисертаційної роботи

Ріманові метрики на розшарованих просторах є предметом великої кількості наукових публікацій. Інтерес до геометрії розшарованих просторів пов'язаний з можливістю конструювати нові ріманові простори на основі інших ріманових просторів. В якості аналогу можна згадати конструкцію лінійчатої поверхні генерованої сім'єю дотичних прямих просторової лінії (торсу) та інших аналогічних конструкцій. Класичною метрикою на дотичному та сферичному дотичному розшаруваннях є метрика Сасакі. Як показали подальші дослідження, дотичне розшарування з метрикою Сасакі виявляє себе здебільшого як загальний рімановий простір. Така поведінка метрики Сасакі надихнула дослідників на модифікацію, деформацію метрики Сасакі для покращення її властивостей. В дисертації Ляни Лотарець виконана одна з модифікацій, базована на прикладі солітона Річі, що був наведений Річардом Гамільтоном у випадку двовимірного многовида.

В продовження цього типу досліджень в дисертації Лотарець Л. А. розглянуто пошарово конформну деформацію метрики Сасаки та вплив такої деформації на властивості одиничних векторних полів. Векторні поля у контексті геометрії розшарованих просторів розглядаються як відображення бази у простір розшарування. У такого типу конструкції векторному полю можна приписати властивості з геометрії підмноговидів: секційну кривину, середню кривину, цілком геодезичність. З іншого боку, розглядаючи векторне поле як відображення бази у простір розшарування, можна приписати векторному полю таке поняття як гармонічність та геодезичність. Саме дослідження властивостей одиничного векторного поля як відображення є одним з фокусів дисертаційної роботи в контексті пошарової деформації метрики Сасаки.

Одним з успіхів мотивації деформацій метрики Сасаки є результат Д. Пероне, досягнутий на кілінгово-контактних многовидах. Вдалося побудувати таку деформацію, що одиничне векторне поле контактної структури (так зване Рібовське векторне поле) визначає ізометричне занурення бази у простір розшарування. За певних умов таке занурення може бути мінімальним (Д. Пероне). В дисертації розглянуте природне питання, чи може бути таке занурення цілком геодезичним? Як відповідь з'ясувалося, що в такому разі базовий многовид має бути сасакійовим.

Отже, дисертаційна робота спирається на сучасні дослідження з геометрії розшарованих просторів, а обрана тематика є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, в рамках державної науково-дослідницької роботи за темою «Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок між геометрією, алгеброю та топологією» (номер проекту: 2020.02/0096) та в рамках конкурсу математичних проектів 2023 фонду імені Н.І. Ахієзера.

Результати досліджень також були відзначені стипендією фонду імені Н.І. Ахієзера у 2025 році.

Повнота викладу основних положень дисертації в опублікованих працях та апробація результатів дисертації та степінь обґрунтованості.

Основні положення дисертаційної роботи опубліковано в провідних математичних журналах з кваліфікованим рецензуванням. Всі три публікації занесені до бази Scopus, дві з яких опубліковані у журналах другого квартіля.

Роботи виконані самостійно, без співавторів. Публікації засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях та семінарах. Доведення теорем виконане повністю, обчислення не мають помилок. Це дозволяє зробити висновок про обґрунтованість результатів дисертації та коректність висновків.

Наукова новизна одержаних результатів.

Як опонент підтверджую список основних результатів дисертації. А саме:

- вперше досліджено узагальнення метрики сигар солітона Гамільтона, що є двовимірним многовидом, як метрики на дотичному розшаруванні;
- вперше введено поняття пошарово сигар солітонної деформації метрики Сасаки (або пошарово гамільтонової сигар солітонної метрики) і досліджено геодезичні лінії дотичного розшарування з такою метрикою;
- вперше описано деформації що зберігають існування гармонічних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Li з ліво-інваріантною метрикою та гармонічних відображень, які задаються одиничним векторним полем, у випадку скрученої метрики Сасаки на одиничному дотичному розшаруванні;
- вперше класифіковано гармонічні ліво-інваріантні одиничні векторні поля на тривимірних унімодулярних групах Li з ліво-інваріантною метрикою та гармонічні відображення, які задаються одиничним векторним полем у випадку вертикально масштабованої метрики;
- вперше досліджено цілком геодезичність непаралельних одиничних векторних полів, що визначають ізометричне занурення, на K -контактному метричному многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні;
- вперше отримано вираз для другої основної форми відображення, що задається одиничним векторним полем на рімановому многовиді з g -натуральною метрикою на одиничному дотичному розшаруванні.

Оцінка змісту дисертації, її завершеності та відповідності встановленим вимогам.

Структура дисертації містить вступ, чотири розділи, анотацію, список публікацій автора, висновки, додатки, до яких включено довідки про впровадження результатів. Загальний обсяг дисертації становить 106 сторінок. Матеріал написано у науковому стилі, логічно, зміст дисертації відповідає заявленій тематиці. Оформлення дослідження відповідає вимогам наказу МОН України № 40 від 12 січня 2017 року «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» зі змінами від 31 травня 2019 року.

Вступ містить обґрунтування вибору теми дослідження, сформульовані мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, конкретизовано завдання дослідження. Сформульовано перелік основних результатів, зв'язок з науковими програмами та темами, наукова новизна та практичне значення результатів, особистий внесок здобувача. Надано інформацію про апробацію результатів та публікації автора.

Перший розділ дисертаційної роботи містить необхідні відомості з геометрії розшарованих просторів та контактної геометрії.

У другому розділі розглянуто сигар солітонну деформацію метрики Сасакі та детально розглянуто вплив такої деформації на рівняння та властивості геодезичних ліній zdeформованої метрики. Відповідні результати містяться в Теоремах 2.5, 2.9, 2.10, 2.11 та 2.13.

Третій розділ дисертаційної роботи є найбільш об'ємним. В цьому розділі виявляється вплив скрученої та пошарової деформації метрики Сасакі на властивості векторного поля як відображення у дотичне розшарування. Ключовою загальною теоремою є Теорема 3.3 в якій знайдено тензор напруженості відображення $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G^{\delta, \varepsilon})$ де δ, ε – функції горизонтально-вертикальної деформації. Цікаво, що випадок вимірності $n = 2$ виявився особливим. Дослідженню цього випадку присвячено Теорему 3.6. У загальному випадку автору вдалося виписати необхідні і достатні умови гармонічності одиничних інваріантних векторних полів на тривимірних унімодулярних групах Лі з ліво інваріантними метриками (Теорема 3.9) в залежності від параметрів деформації. У випадку $\delta = 0, \varepsilon = 0$ відповідні умови зводяться до результату J.C. Gonzales-Davila та L. Vanhecke.

Більше детальних результатів отримано для випадку вертикально масштабованої метрики $G^{0,\varepsilon}$. Теореми 3.11 – 3.17 містять опис інваріантних векторних полів, що визначають гармонічні відображення. Доведення виконані за допомогою громіздких кваліфікованих обчислень, з використанням властивостей відповідних алгебр Лі та методів сучасної диференціальної геометрії.

У четвертому розділі дисертаційної роботи розглядається питання геометрії підмноговиду, що породжений одиничним векторним полем у одиничному дотичному розшаруванні за умови визначення на просторі розшарування так званої g -натуральної метрики. Ця метрика $G^{(a,b,c,d)}$ утворюється як 4-параметрична деформація метрики Сасаки. У випадку сасакійової метрики одиничне векторне ξ поле може визначати ізометричне занурення базового многовиду M в одиничне дотичне розшарування лише за умови, що поле паралельне, тобто $\nabla \xi = 0$. Як з'ясувалося (D. Perrone) параметри деформації (a, b, c, d) можна підібрати так, що $\nabla \xi \neq 0$, але відображення $\xi: M \rightarrow (T_1M, G^{(a,b,c,d)})$ є ізометрією в класі K -контактних многовидів і навіть добитися того, що $\xi(M) \subset (T_1M, G^{(a,b,c,d)})$ буде мінімальним підмноговидом. Відповідне векторне поле ξ при цьому є характеристичним векторним полем K -контактної структури. В дисертації поставлено питання про можливість для характеристичного векторного поля K -контактної структури бути ізометричним зануренням, що породжувало б цілком геодезичний підмноговид у $(T_1M, G^{(a,b,c,d)})$. Теорема 4.4 дає відповідь на це питання. А саме, структура має бути сасакійовою – частинним випадком K -контактної структури.

Практичне значення роботи.

Дисертація є науковою роботою з фундаментальної математики і має теоретичний характер. Результати дисертації можуть бути використані у подальших дослідженнях з геометрії розшарованих просторів та в освітньому процесі як курс за вибором для поглибленого вивчення геометрії.

Дотримання академічної доброчесності.

За результатами перевірки та аналізу дисертаційної роботи Лотарець Л. А. та наявних за її темою публікацій ознак академічного плагіату, фабрикації чи фальсифікації не виявлено. Дисертаційна робота є результатом власних дослі-

джень здобувача: публікації виконані без співавторів. Цитування мають коректні посилання на відповідні джерела.

Перспективи продовження досліджень.

Висновки до розділів дисертації містять не лише констатацію досягнутих результатів, а й низку нерозв'язаних задач. Цей факт підкреслює здібність авторки до формулювання нових задач, розуміння перспектив подальших досліджень.

Дискусійні положення та зауваження.

У розділі 2 при розгляді сигар солітонної деформації метрики Сасакі авторка користується поняттям солітона Річі, проте самі солітони Річі як такі лишилися поза увагою дисертантки. Було б доцільно, з моєї точки зору, розглянути солітони Річі з точки зору метризації дотичного розшарування, адже означення солітона Річі включає наявність на многовиді векторного поля з певними властивостями. Було б цікаво пов'язати властивості солітона Річі з геометрією його векторного поля.

Також у розділі 2 дисертантка обмежилася дослідженням проекцій геодезичних ліній в розшаруваннях над просторами сталої кривини, але поза увагою лишився опис відповідних векторних полів. Було б доцільно більш детально розглянути випадок двовимірної площини з повним описом як проекцій так і векторних полів, що породжують геодезичні лінії її дотичного розшарування.

У розділі 3 міститься ретельне дослідження гармонічних векторних полів та породжуваних ними гармонічних відображень лише на тривимірних унімодулярних групах Лі. Неунімодулярні групи лишилися за межами дослідження. Можливо це пояснюється тим, що тривимірні групи Лі виникли лише як приклад, на якому можлива реалізація головної теореми 3.9.

Також робота містить певну кількість друкарських неточностей.

Наявні недоліки та дискусійні положення не впливають на загальний високий рівень досягнутих результатів.

Загальні висновки щодо дисертаційної роботи.

На підставі проведеного аналізу вважаю, що дисертаційна робота Лотарець Ляни Андріївни «Диференціальна геометрія розшарованих просторів з узагальненими метриками», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – «Математика» з галузі знань 11 – «Математика та статистика», є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному

теоретичному та методологічному рівні і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Дисертація відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44) та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертацій».

Я вважаю, що здобувачка Лотарець Ляна Андріївна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – «Математика» з галузі знань 11 – «Математика та статистика».

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри алгебри, геометрії та
математичного аналізу
Херсонського державного університету

Олександр САВЧЕНКО

САВЧЕНКО ОЛЕКСАНДР ГРИГОРОВИЧ

Результат перевірки підпису	Підпис вірний
П.І.Б.	САВЧЕНКО ОЛЕКСАНДР ГРИГОРОВИЧ
РНОКПП	2221313873
Організація (установа)	ФІЗИЧНА ОСОБА
Код ЄДРПОУ	
Посада	
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для даних від Надавача)	22:56:50 30.06.2025
Сертифікат виданий	КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер	5E984D526F82F38F040000002DEBD301E5396D06
Тип носія особистого ключа	Захищений
Алгоритм підпису	dstu4145
Тип підпису	Кваліфікований
Формат підпису	CAdES-T
Сертифікат	Кваліфікований