

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Геращенко Надія Олексіївна

УДК 538.941 + 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ
«ВПЛИВ ГІДРОДИНАМІЧНИХ МОД НА КОЛИВАННЯ ТІЛ
У НАДПЛИННИХ РОЗЧИНАХ ³НЕ – ⁴НЕ»

Спеціальність 105 – «Прикладна фізика та наноматеріали»
(галузь знань 10 – «Природничі науки»)

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Н.О.Геращенко

Науковий керівник:

Немченко Костянтин Едуардович, доктор фізико – математичних наук

Харків – 2025

АНОТАЦІЯ

Геращенко Н.О. Вплив гідродинамічних мод на коливання тіл у надплинних розчинах ^3He – ^4He – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 105 – Прикладна фізика та наноматеріали (галузь знань 10 – Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертацію присвячено дослідженню повного набору гідродинамічних мод у чистому гелії та у надплинних розчинах ^3He – ^4He та їх впливу на розповсюдження тепла та коливання тіл, що занурені в гелій.

Дослідження квантових середовищ через спостереження за коливаннями тіл, занурених у гелій, завжди було потужним інструментом для виявлення унікальних властивостей цих речовин. За останні роки особливо великої популярності набули кварцові камертони як універсальні зонди для дослідження рідкого гелію при низьких температурах. Це стало можливим завдяки кільком важливим властивостям камертонів, які роблять їх надзвичайно зручними та ефективними інструментами для фізичних вимірювань. Зокрема, вони є легко доступними та мають низьку вартість, що робить їх доступними для широкого використання в наукових дослідженнях. Крім того, кварцові камертони мають високу надійність, що дозволяє проводити довготривалі експерименти без ризику поломки або потреби в частих калібруваннях. Простота схем вимірювань, низька внутрішня характеристика демпфування та нечутливість до магнітного поля також є важливими перевагами, що дозволяють здійснювати точні вимірювання в складних умовах.

Завдяки своїм унікальним властивостям кварцові камертони стали альтернативою вібруючим дротам, які традиційно використовуються як стандартні резонатори для дослідження рідкого гелію. Вони суттєво

спрощують експериментальну апаратуру, зменшуючи технічну складність вимірювань. Проте їх застосування пов'язане з певними проблемами, зумовленими як фізичними особливостями, так і складнішою геометрією самих камертонів. Це створює труднощі при їх використанні як вимірювальних приладів для вивчення параметрів рідкого гелію. Зокрема, акустичні ефекти та дисипативні процеси суттєво впливають на результати вимірювань. Крім того, високочастотні коливання камертонів можуть викликати непередбачувані явища, що ускладнює забезпечення високої точності вимірювань у таких системах.

Щоб максимально використати переваги кварцових камертонів у вивченні фундаментальних властивостей надплинних розчинів ізотопів гелію, необхідно детально дослідити їх резонансні характеристики в рідкому гелії як теоретично, так і експериментально. Такі дослідження дадуть змогу глибше зрозуміти механізми формування різних резонансів, а також визначити вплив акустичних і гідродинамічних ефектів на точність вимірювань у подібних системах.

Основна мета цієї роботи – дослідити фізичні механізми, що визначають взаємодію гідродинамічних мод (першого та другого звуків, в'язкої, дифузійної та теплової хвиль) із тілами, що коливаються в рідкому гелії. Зокрема, розглядаються процеси випромінювання й поглинання енергії в надплинних розчинах, вивчаються звукові резонанси в критичному гелії, а також аналізуються резонансні особливості першого і другого звуків у надплинному гелії та розчинах його ізотопів. Дослідження цих явищ спрямоване не лише на вдосконалення методів вимірювання властивостей рідкого гелію, а й на глибше розуміння фізичних процесів, що відбуваються в цих унікальних матеріалах за низьких температур.

Особлива увага в дисертації приділяється дослідженню надплинних розчинів ізотопів гелію та розробці теорії повної системи гідродинамічних мод цих розчинів.

Актуальність цих завдань зумовлена значною кількістю нових експериментальних результатів, отриманих при зануренні осцилюючого кварцового камертона в надплинні розчини ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ з різними концентраціями ${}^3\text{He}$ — від малих до 15%. Ці експерименти дозволили виявити важливі властивості, які відрізняються від характеристик чистого гелію, що має ключове значення для розуміння фізичних процесів у таких системах.

Однією з основних відмінностей розчинів ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ є наявність квазічастинок ${}^3\text{He}$, що існують у них за будь-яких температур, включаючи області, близькі до абсолютного нуля. Дослідження цих квазічастинок є важливим для вивчення фізичних властивостей розчинів.

Ще однією особливістю таких систем при не дуже малих концентраціях є надзвичайно короткий час взаємодії між квазічастинками ${}^3\text{He}$, що дозволяє розглядати їх у гідродинамічному наближенні. Це припущення особливо важливе для розчинів з відносно високими концентраціями ${}^3\text{He}$ (10 – 15%), у яких проводилися експерименти, що виявили цілу низку незвичайних явищ.

У цих концентраційних межах осциляції твердої стінки, наприклад, кварцових камертонів, можуть збуджувати не лише перший звук, а й другий звук, а також генерувати теплову хвилю. Це пояснюється особливостями перенесення тепла та маси в надплинних розчинах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Зокрема, концентраційні та температурні збудження в таких сумішах можуть релаксувати як у вигляді хвилі другого звуку, так і у формі дисипативної дифузійної хвилі — окремого фізичного процесу, що виникає при зміні температури або концентрації в подібних системах. Ці явища були детально вивчені в дисертаційній роботі, де розглянуто їхній вплив на динаміку розчинів та можливість використання отриманих результатів для глибшого розуміння теплопереносу й інших фізичних процесів.

До таких унікальних явищ належить так званий другий звук — незвичайна форма поширення теплових хвиль у надплинних рідинах за низьких температур. Це явище має ключове значення для вивчення квантових рідин та макроскопічних квантових ефектів.

На відміну від звичайного (першого) звуку, який є акустичною хвилею, що поширюється завдяки коливанням атомів і молекул, другий звук пов'язаний із термодинамічними процесами та колективним рухом фаз рідини. У цій хвилі основну роль відіграють зміни температури та концентрації компонентів рідини. Таким чином, другий звук являє собою теплові хвилі, що виникають через фазове розділення та особливий механізм теплопереносу, характерний для надплинного гелію.

У сумішах ^3He – ^4He другий звук проявляється найсильніше при високих концентраціях ^3He (10 – 15%). У таких умовах його вплив на процеси теплопереносу, дифузії та інших фізичних явищ стає особливо помітним. Дослідження цього ефекту дозволяють глибше зрозуміти поведінку квантових рідин за наднизьких температур, а також сприяють розвитку нових методів вимірювання термодинамічних властивостей рідких сумішей.

Останнім часом інтерес до другого звуку значно зріс через його виявлення в наносередовищах. Новітні дослідження теплопередачі у графені, графіті та інших двовимірних і шаруватих матеріалах показали, що фононна гідродинаміка, включно з другим звуком, має важливі практичні наслідки. Це відкриває перспективи для використання фононних гідродинамічних ефектів у керуванні тепловим балансом у сучасних мікро– та наноелектронних пристроях.

Результати експериментальних досліджень показали, що другий звук в твердих тілах і рідинах більше не можна вважати рідкісним або суто академічним явищем. Зокрема, фононна гідродинаміка може вплинути на продуктивність графену та графіту як теплопровідних матеріалів у мікроелектроніці, що відкриває нові можливості для ефективного управління тепловими потоками в нанорозмірних системах.

У дисертації аналізується принципова можливість використання другого звуку для ефективного тепловідведення, а також перспективи його застосування в охолодженні обчислювальних пристроїв.

Другим важливим механізмом є дифузійна дисипативна хвиля, яка є унікальною для розчинів. У надплинних розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$, на відміну від чистого ^4He , поряд із другою звуковою хвилею виникає ще одна, суто дисипативна мода, яка також визначає релаксацію температури та концентрації. У цій моді еволюція збурень температури та концентрації відбувається під впливом теплопровідності, термодифузії та масової дифузії розчину.

Існування двох незалежних мод, що відповідають за встановлення рівноваги температури та концентрації, вимагає їх одночасного врахування при описі різних процесів релаксації в надплинних розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$. Водночас задача про просторово-часову еволюцію температури та концентрації залишається нерозв'язаною, попри значну кількість проведених експериментів у цій галузі. Більше того, деякі експериментальні результати досі не мають задовільного теоретичного пояснення, що підкреслює актуальність подальших досліджень у цій сфері.

Для теоретичного опису спостережуваних явищ у чистому гелії та надплинних розчинах у широкому діапазоні температур і концентрацій було вирішено задачу релаксації на основі повної системи гідродинамічних рівнянь для розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$. За допомогою перетворення Фур'є, формалізму неермітових матриць та функцій Гріна було отримано розв'язок цієї системи для миттєвого точкового джерела тепла або початкового збурення концентрації. Розв'язок виражено через функції Гріна, які описують два основних механізми релаксації: дисипативний (за рахунок теплопровідності, дифузії та термодифузії) та хвильовий (зумовлений поширенням другого звуку). У результаті знайдено загальне рішення задачі про релаксацію довільного початкового збурення на нескінченній прямій.

На наступному етапі роботи, виходячи з повної системи гідродинамічних рівнянь, було проведено дослідження коливань густини, температури, концентрації та тиску з метою визначення умов, за яких коливання твердої стінки збуджують перший і другий звук, а також дисипативну дифузійну

хвилю в надплинному гелії та акустичні хвилі в надкритичному гелії. Було виконано обчислення внесків цих процесів у формування резонансів під час коливань закритих камертонів.

Зокрема, розглянуто експериментально спостережуване збудження стоячих хвиль тиску камертоном, що коливається, а також особливості появи й поведінки резонансів залежно від температури та тиску гелію.

У результаті цих досліджень було створено модель, яка описує фізичні властивості резонансних явищ, що спостерігалися експериментально. Зокрема, детально досліджено резонанси, що виникають під час коливань кварцових камертонів у надплинному гелії та його розчинах.

Для проведення порівняння з експериментальними даними необхідно було отримати явні вирази для дисипативних коефіцієнтів розчинів ізотопів гелію. З цією метою, в рамках газокінетичної моделі, яка описує суміш слабковзаємодіючого газу квазічастинок — фононів та домішок, й виходить з системи кінетичних рівнянь для цих частинок, було досліджено дисипативні властивості як рідких, так і твердих розчинів ^3He – ^4He .

Розглядалися такі явища, як масова та спінова дифузія, самодифузія і теплопровідність, у широкому діапазоні температур та концентрацій. Особливу увагу приділено області, де домішки ^3He можна розглядати як квазічастинки, що вільно рухаються крізь рідину або кристал, що дозволило суттєво спростити розрахунки та отримати аналітичні вирази для відповідних коефіцієнтів переносу. У результаті розрахунків було отримано явні вирази для коефіцієнтів спінової та масової дифузії, а також коефіцієнта теплопровідності. Для перевірки побудованої моделі проведено порівняння з експериментальними даними, зокрема аналіз залежностей, що спостерігалися в експериментах зі спінової релаксації, та фазового розділення розчинів.

Проведені дослідження дозволили детально розглянути поведінку кварцових камертонів у різних експериментальних умовах, що дало змогу виявити особливості взаємодії їхніх коливань із гідродинамічними модами надплинних розчинів. Зокрема, було досліджено експериментально

спостережувані перший і другий звукові резонанси, що виникають унаслідок взаємодії коливань закритого камертона з середовищем надплинної суміші.

Врахування повного набору гідродинамічних мод системи дозволило запропонувати пояснення незвичайної поведінки резонансів другого звуку, що була зафіксована в експериментах. Було показано, що ця поведінка пов'язана з перерозподілом енергії між дисипативним режимом і режимом другого звуку, що впливає на форму та інтенсивність резонансів.

Крім того, були проведені теоретичні дослідження механізмів дисипації енергії, що проявляються в експериментах із кварцовими камертоном, який коливається в надплинних розчинах ^3He – ^4He з високою концентрацією домішок ^3He . Зокрема, досліджено можливість і ефективність випромінювання камертоном не лише хвилі другого звуку, але й дифузійної дисипативної хвилі, що є специфічною для розчинів ізотопів гелію.

В ході аналізу були знайдені зв'язки між амплітудами коливань температури та концентрації в цих хвилях, а також визначено їхні відносні інтенсивності. Це дало змогу сформулювати фізичне пояснення додаткових механізмів ослаблення коливань камертона в надплинних розчинах, що спостерігалися в експериментальних дослідженнях. Отримані результати відіграють важливу роль для подальшого розуміння механізмів взаємодії акустичних резонансних систем із квантовими рідинами та можуть бути корисними для розробки нових методів прецизійних вимірювань у низькотемпературних фізичних системах.

Наукова новизна результатів дисертаційного дослідження полягає в наступному: вперше пояснено експериментально спостережуване збудження стоячих хвиль коливань тиску камертоном, а також детально розглянуто появу та властивості резонансів залежно від температури й тиску гелію. Побудовано теоретичну модель, яка описує фізичні механізми резонансних явищ, що спостерігалися експериментально. Зокрема, вперше розв'язано задачу про одночасне збудження першого та другого звуків у надплинному гелії внаслідок збудження камертоном хвиль тиску й ентропії, а також пояснено

експериментально спостережувані залежності властивостей резонансів від температури та тиску гелію.

Вперше отримано явні вирази для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності та термодифузії для рідких і твердих розчинів ізотопів гелію. У рамках запропонованого підходу також вдалося визначити явний вираз коефіцієнта самодифузії домішок у твердих розчинах ^3He – ^4He та продемонструвати відповідність розрахункових результатів експериментальним даним.

Вперше, шляхом розв'язання повної системи гідродинамічних рівнянь для надплинних розчинів ^3He – ^4He , знайдено дисперсійні співвідношення для першого та другого звуків, а також дисипативних теплових хвиль. Визначено взаємозв'язки між амплітудами всіх гідродинамічних параметрів у цих модах.

Вперше доведено, що врахування дисипативної дифузійної теплової хвилі дозволяє пояснити зникнення резонансів другого звуку, які спостерігалися в експерименті. Отримані співвідношення показали, що при певних значеннях параметрів розчину характерні для другого звуку коливання ентропії відсутні, а натомість збуджуються коливання температури та концентрації, що є характерними для дисипативного режиму.

Вперше отримано явні вирази для амплітуд концентраційних та температурних збурень, викликаних коливаннями твердої стінки в гелії. Проведені розрахунки показали, що спостережувана в експерименті різниця в ослабленні відкритого та закритого камертонів може бути зумовлена конкуренцією між механізмами другого звуку та дифузійної хвилі.

Вперше продемонстровано, що знайдений у дисертації механізм одночасного поширення енергії в дисипативній хвилі (за рахунок теплопровідності) та у звуковій хвилі другого звуку може бути використаний для створення нових ефективних методів тепловідведення в наноструктурах.

Ключові слова: теорія конденсованих середовищ, низькі температури, квантові кристали та рідини, коливання тіл і рідин, надплинні розчини, звуки, фазові переходи, дифузія.

ABSTRACT

Herashchenko N.O. Influence of Hydrodynamic Modes on the Oscillations of Bodies in Superfluid ^3He – ^4He Solutions – Qualifying Scientific Work (Manuscript).

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in specialty 105 – Applied Physics and Nanomaterials (field of knowledge 10 – Natural Sciences). – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of the full set of hydrodynamic modes in pure helium and in superfluid ^3He – ^4He solutions and their influence on heat transfer and oscillations of bodies immersed in helium.

The study of quantum media through observation of oscillating bodies immersed in helium has always been a powerful tool for revealing unique properties of these substances. In recent years, quartz tuning forks have gained particular popularity as universal probes for studying liquid helium at low temperatures. This has been made possible thanks to several important properties of tuning forks, which make them extremely convenient and effective instruments for physical measurements. In particular, they are easily accessible and inexpensive, making them widely usable in scientific research. Moreover, quartz tuning forks are highly reliable, allowing for long-term experiments without the risk of failure or the need for frequent calibration. The simplicity of measurement circuits, low intrinsic damping characteristics, and insensitivity to magnetic fields are also significant advantages enabling precise measurements under complex conditions.

Thanks to their unique properties, quartz tuning forks have become an alternative to vibrating wires traditionally used as standard resonators for studying liquid helium. They significantly simplify the experimental setup, reducing the technical complexity of measurements. However, their use is associated with certain problems caused by both physical peculiarities and the more complex geometry of the forks themselves. This creates difficulties when using them as measurement

devices for studying the parameters of liquid helium. In particular, acoustic effects and dissipative processes significantly influence the measurement results. Furthermore, the high-frequency oscillations of the tuning forks can induce unpredictable phenomena, complicating the achievement of high measurement accuracy in such systems.

To fully utilize the advantages of quartz tuning forks in studying the fundamental properties of superfluid helium isotope solutions, it is necessary to thoroughly investigate their resonance characteristics in liquid helium both theoretically and experimentally. Such studies will allow a deeper understanding of the mechanisms of resonance formation, as well as determine the impact of acoustic and hydrodynamic effects on measurement accuracy in these systems.

The main goal of this work is to investigate the physical mechanisms determining the interaction of hydrodynamic modes (first and second sounds, viscous, diffusion, and thermal waves) with bodies oscillating in liquid helium. In particular, the processes of energy emission and absorption in superfluid solutions are considered; sound resonances in critical helium are studied, and resonance features of first and second sounds in superfluid helium and its isotope solutions are analyzed. The study of these phenomena aims not only to improve methods for measuring properties of liquid helium but also to deepen the understanding of physical processes occurring in these unique materials at low temperatures.

Special attention in the dissertation is paid to the study of superfluid helium isotope solutions and the development of a theory of the full system of hydrodynamic modes of these solutions.

The relevance of these tasks is driven by a significant number of new experimental results obtained by immersing an oscillating quartz tuning fork in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions with various ^3He concentrations — from small amounts up to 15%.

These experiments revealed important properties differing from those of pure helium, which are crucial for understanding the physical processes in such systems.

One of the main distinctions of $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions is the presence of ^3He quasiparticles that exist at any temperature, including regions close to absolute zero. Studying these quasiparticles is important for investigating the physical properties of the solutions.

Another feature of such systems at not very low concentrations is the extremely short interaction time between ^3He quasiparticles, which allows treating them within the hydrodynamic approximation. This assumption is particularly important for solutions with relatively high ^3He concentrations (10 – 15%), where experiments revealed a number of unusual phenomena.

Within this concentration range, oscillations of a solid boundary, such as quartz tuning forks, can excite not only the first sound but also the second sound and generate a thermal wave. This is explained by peculiarities of heat and mass transfer in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions. In particular, concentration and temperature excitations in such mixtures can relax both as second sound waves and as dissipative diffusion waves — a distinct physical process arising from changes in temperature or concentration in similar systems. These phenomena are thoroughly examined in the dissertation, considering their influence on solution dynamics and the potential use of the results to deepen the understanding of heat transfer and other physical processes.

Among such unique phenomena is the so-called second sound — an unusual form of thermal wave propagation in superfluid liquids at low temperatures. This phenomenon is crucial for studying quantum fluids and macroscopic quantum effects.

Unlike ordinary (first) sound, which is an acoustic wave propagated by atomic and molecular vibrations, the second sound is associated with thermodynamic processes and collective motion of the fluid's phase. In this wave, temperature and concentration variations of the fluid's components play the main role. Thus, the second sound represents thermal waves caused by phase separation and a special heat transfer mechanism characteristic of superfluid helium.

In $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures, the second sound manifests most strongly at high ^3He concentrations (10 – 15%). Under these conditions, its influence on heat transfer, diffusion, and other physical phenomena becomes particularly noticeable. Studying this effect allows for a deeper understanding of quantum fluids behavior at ultra-low temperatures and promotes the development of new methods for measuring thermodynamic properties of liquid mixtures.

Recently, interest in second sound has grown significantly due to its detection in nanoscale media. Advanced studies of heat transfer in graphene, graphite, and other two-dimensional and layered materials have shown that phonon hydrodynamics, including second sound, has important practical implications. This opens prospects for using phonon hydrodynamic effects to manage thermal balance in modern micro- and nanoelectronic devices.

Experimental results have shown that second sound in solids and liquids can no longer be considered a rare or purely academic phenomenon. In particular, phonon hydrodynamics may affect the performance of graphene and graphite as heat-conducting materials in microelectronics, opening new possibilities for efficient thermal flow management in nanoscale systems.

The dissertation analyzes the fundamental possibility of using second sound for efficient heat removal and its prospects for cooling computing devices.

Another important mechanism is the diffusive dissipative wave, unique to solutions. In superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions, unlike pure ^4He , alongside the second sound wave, there appears another purely dissipative mode that also governs the relaxation of temperature and concentration. In this mode, the evolution of temperature and concentration disturbances occurs under the influence of thermal conductivity, thermodiffusion, and mass diffusion of the solution.

The existence of two independent modes responsible for establishing temperature and concentration equilibrium requires their simultaneous consideration when describing various relaxation processes in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions. At the same time, the problem of spatiotemporal evolution of temperature and concentration remains unsolved despite a significant number of experiments in this

area. Moreover, some experimental results still lack satisfactory theoretical explanation, emphasizing the relevance of further research.

For the theoretical description of observed phenomena in pure helium and superfluid solutions over a wide temperature and concentration range, the relaxation problem was solved based on the full system of hydrodynamic equations for ^3He – ^4He solutions. Using Fourier transform, non-Hermitian matrix formalism, and Green's functions, the solution of this system was obtained for an instantaneous point heat source or an initial concentration disturbance. The solution is expressed through Green's functions describing two main relaxation mechanisms: dissipative (due to thermal conductivity, diffusion, and thermodiffusion) and wave-like (due to second sound propagation). As a result, a general solution for the relaxation of an arbitrary initial disturbance on an infinite line was found.

At the next stage, based on the full hydrodynamic system, oscillations of density, temperature, concentration, and pressure were studied to determine the conditions under which solid wall oscillations excite first and second sounds, as well as the dissipative diffusion wave in superfluid helium and acoustic waves in supercritical helium. Calculations of contributions of these processes to resonance formation during oscillations of closed tuning forks were performed.

In particular, experimentally observed excitation of pressure standing waves by the oscillating fork and features of resonance appearance and behavior depending on helium temperature and pressure were considered.

As a result of these studies, a model describing the physical properties of resonance phenomena observed experimentally was created. In particular, resonances arising during oscillations of quartz tuning forks in superfluid helium and its solutions were investigated in detail.

To compare with experimental data, explicit expressions for dissipative coefficients of helium isotope solutions were needed. For this purpose, within the framework of a gas-kinetic model describing a weakly interacting gas mixture of quasiparticles — phonons and impurities — and based on a system of kinetic

equations for these particles, the dissipative properties of both liquid and solid ^3He – ^4He solutions were studied.

The phenomena of mass and spin diffusion, self-diffusion, and thermal conductivity were considered over a wide range of temperatures and concentrations. Special attention was paid to the region where ^3He impurities can be regarded as quasiparticles freely moving through the liquid or crystal, which allowed a significant simplification of calculations and the derivation of analytical expressions for the corresponding transport coefficients. As a result of the calculations, explicit expressions were obtained for the coefficients of spin and mass diffusion, as well as for the thermal conductivity coefficient. To verify the constructed model, comparisons were made with experimental data, particularly analyzing the dependencies observed in experiments on spin relaxation and phase separation of solutions.

The conducted studies allowed a detailed examination of the behavior of quartz tuning forks under various experimental conditions, which made it possible to identify features of the interaction of their oscillations with the hydrodynamic modes of superfluid solutions. In particular, experimentally observed first and second sound resonances arising from the interaction of the closed tuning fork oscillations with the superfluid mixture environment were investigated.

Taking into account the full set of hydrodynamic modes of the system allowed proposing an explanation for the unusual behavior of second sound resonances recorded in experiments. It was shown that this behavior is related to the redistribution of energy between the dissipative mode and the second sound mode, which affects the shape and intensity of the resonances.

Additionally, theoretical studies were conducted on the mechanisms of energy dissipation manifesting in experiments with quartz tuning forks oscillating in superfluid ^3He – ^4He solutions with high concentrations of ^3He impurities. Specifically, the possibility and efficiency of tuning fork radiation not only of the second sound wave but also of the diffusive dissipative wave, which is characteristic of helium isotope solutions, were studied.

During the analysis, relationships between the amplitudes of temperature and concentration oscillations in these waves were found, as well as their relative intensities. This allowed formulating a physical explanation of additional mechanisms of attenuation of tuning fork oscillations in superfluid solutions observed in experimental studies. The obtained results play an important role in further understanding the mechanisms of interaction of acoustic resonance systems with quantum fluids and may be useful for the development of new methods for precision measurements in low-temperature physical systems.

The scientific novelty of the dissertation results consists of the following: for the first time, the experimentally observed excitation of standing waves of pressure oscillations by the tuning fork was explained, and the appearance and properties of resonances depending on helium temperature and pressure were considered in detail. A theoretical model was constructed that describes the physical mechanisms of resonance phenomena observed experimentally. In particular, for the first time, the problem of simultaneous excitation of the first and second sounds in superfluid helium due to the tuning fork excitation of pressure and entropy waves was solved, and experimentally observed dependencies of resonance properties on helium temperature and pressure were explained.

Explicit expressions for diffusion, thermal conductivity, and thermodiffusion coefficients for liquid and solid solutions of helium isotopes were obtained for the first time. Within the proposed approach, an explicit expression for the self-diffusion coefficient of impurities in solid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions was also derived, demonstrating agreement between the calculated results and experimental data.

For the first time, by solving the full system of hydrodynamic equations for superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ solutions, dispersion relations were found for the first and second sounds as well as for dissipative thermal waves. Relationships between the amplitudes of all hydrodynamic parameters in these modes were determined.

It was shown for the first time that considering the dissipative diffusive thermal wave explains the disappearance of second sound resonances observed experimentally. The obtained relations showed that for certain solution parameters,

entropy oscillations characteristic of the second sound are absent, while temperature and concentration oscillations characteristic of the dissipative mode are excited instead.

Explicit expressions for the amplitudes of concentration and temperature perturbations caused by oscillations of a solid wall in helium were obtained for the first time. Calculations showed that the experimentally observed difference in the attenuation of open and closed tuning forks may be due to the competition between mechanisms of second sound and diffusive waves.

It was demonstrated for the first time that the mechanism found in the dissertation of simultaneous energy propagation in the dissipative wave (due to thermal conductivity) and in the second sound acoustic wave can be used to develop new effective heat dissipation methods in nanostructures.

Keywords: condensed matter theory, low temperatures, quantum crystals and liquids, oscillations of bodies and liquids, superfluid mixtures, sounds, phase transitions, diffusion.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у закордонному періодичному науковому виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus

1. Vikhtinskaya T. G., **Herashchenko N. O.**, Nemchenko K. E.. Second sound resonances in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures. *Low Temp. Phys.*, 2022; Vol. 48. Iss. 2. P 117. (Scopus, Q3). <https://doi.org/10.1063/10.0009290>
(Особистий внесок здобувача: участь у постановці, обговоренні та розв'язання поставленої задачі, проведенні розрахунків, оформлення тексту роботи)
2. **Herashchenko N. O.**, Nemchenko E. K., Nemchenko K. E., Vikhtinskaya T. G. Kinetic properties of solid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures in the model of freely moving impuritons. *Low Temp. Phys.* 2022; Vol. 48. Iss. 8. P. 583. (Scopus, Q3).
<https://doi.org/10.1063/10.0012645>
(Особистий внесок здобувача: визначення мети дослідження, теоретичне обґрунтування підходів до розв'язання задачі, проведення розрахунків та підготовка текстової частини роботи)
3. **Herashchenko N.**, Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Collective mode resonances in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures. *Low Temp. Phys.* 2023; Vol. 49. Iss. 2. P. 171. (Scopus, Q3). <https://doi.org/10.1063/10.0016841>
(Особистий внесок здобувача: формулювання дослідницької задачі, її аналітичне опрацювання, розрахункова частина, укладання тексту роботи згідно з вимогами наукового стилю)
4. Amrit J., **Herashchenko N.**, Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two-mode dissipation of oscillating tuning fork in $^3\text{He} - ^4\text{He}$ superfluid mixtures. *Low Temp. Phys.* 2025. Vol. 51. Iss. 1. P. 5. (Scopus, Q3).
<https://doi.org/10.1063/10.0034553>

(Особистий внесок здобувача: формулювання наукової проблематики, участь у розробці концепції статті, аналіз літературних джерел, проведення розрахунків та підготовка тексту публікації)

Публікації у наукових виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України

5. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu. Sound resonances in supercritical and superfluid helium. Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія «Фізика», вип. 34, 2021. с. 33 – 35

<https://doi.org/10.26565/2222-5617-2021-34-05>

(Особистий внесок здобувача: обговоренні методів розв'язання, виконано аналітичні розрахунки, оформленні результатів у вигляді наукової праці.

Особистий внесок Немченка К.Е.: постановка задачі, розподіл завдань, написання статті.

Особистий внесок Віхтинської Т.Г.: аналітичні розв'язання модельних задач, інтегрування диференціальних рівнянь, перевірка тексту роботи, редагування, обговорення та аналіз результатів.

Особистий внесок Рогової С.Ю.: чисельні розрахунки та написання програм, побудова графіків, обговорення та аналіз результатів.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Mutual transformation of acoustic and thermal waves in superfluid liquids. *International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020*. Book of Abstracts. 8 – 14 June 2020, Kharkiv, Ukraine, p. 86.

2. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Sound resonances in critical and superfluid helium. *International Conference for Young Professionals in*

Physics and Technology 2021. Book of Abstracts. 26 – 30 April 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 38.

3. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Second sound resonances in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures. *II International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021*. Book of Abstracts. 6 – 12 June 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 103.

4. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Influence of dissipative diffusion mode to the resonances of second sound generated by oscillating quartz tuning forks in superfluid helium. *Quantum Fluids and Solids – QFS 2021 International Online Conference*. Participation certificate. 10 – 19 August 2021, Bangalore, India.

5. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Collective mode resonances in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures. *LT29 – 29th International Conference on Low Temperature Physics*. Poster. 18 – 24 August 2022, Sapporo, Japan.

6. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Nemchenko Ye.K., Nemchenko K.E., Rogova S.Yu. Resonances of Closed Vibrating Fork in Superfluid $^3\text{He}-^4\text{He}$ Mixtures. *III International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2023*. Book of Abstracts. 5 – 11 June 2023, Kharkiv, Ukraine, p. 103.

7. **Herashchenko N.**, Amrit J., Nemchenko K., Rogova S. Effectiveness of heat transfer by sound and thermal conductivity in superfluid. *20th International Conference of Young Scientists on Energy and Natural Sciences Issues*. Book of Abstracts. 21 – 23 May 2024, Kaunas, Lithuania, p. 63.

8. **Herashchenko N.**, Amrit J., Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two-step energy dissipation of oscillating tuning fork in $^3\text{He} - ^4\text{He}$ superfluid mixtures. *VI International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2024*. Book of Abstracts. 3 – 7 June 2024, Kharkiv, Ukraine, p. 124.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	23
ВСТУП	24
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	31
1.1 Колективні гідродинамічні моди в гелії	32
1.2 Дисипативні процеси в надплинному гелії	38
1.3 Використання кварцових резонаторів для дослідження властивостей надплинного гелію	41
1.4 Висновок до розділу	49
РОЗДІЛ 2. РЕЗОНАНСИ ЗВУКУ В РІДКОМУ ТА НАДКРИТИЧНОМУ ГЕЛІЇ.....	52
2.1 Опис результатів експериментів	52
2.2 Математична модель системи.....	55
2.3 Обговорення результатів розрахунків та експериментів.....	60
2.4 Висновки до розділу	63
РОЗДІЛ 3. РЕЗОНАНСИ КОЛЕКТИВНИХ МОД В НАДПЛИННИХ РОЗЧИНАХ $^3\text{He} - ^4\text{He}$	65
3.1 Вихідна система рівнянь	66
3.2 Акустичні резонанси звуку у чистому надплинному гелії.....	69
3.3 Резонанси колективних мод в сумішах ізотопів гелію	79
3.4 Висновки до розділу	87
РОЗДІЛ 4. КІНЕТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СУМІШЕЙ $^3\text{He} - ^4\text{He}$	89
4.1 Вступ до розділу.....	89
4.2 Дифузія і теплопровідність у трикомпонентному газі квазічастинок.....	90
4.3 Обговорення результатів зі спінової дифузії	99

	22
4.4 Обговорення інших доказів вільного руху домішок	103
4.5 Висновки до розділу	104
РОЗДІЛ 5. ДВОХРЕЖИМНЕ ЗАТУХАННЯ КОЛИВАНЬ КАМЕРТОНА У НАДПЛИННИХ РОЗЧИНАХ $^3\text{He} - ^4\text{He}$	105
5.1 Основні рівняння.....	106
5.2 Дві задачі з граничними умовами	108
5.3 Згасання коливань камертона	111
5.4 Дисипативний та акустичний механізми перенесення тепла в конденсованих середовищах.....	115
5.5 Висновки до розділу	125
ВИСНОВКИ.....	126
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	128
ДОДАТОК А.....	143

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ГУ	—	граничні умови
К	—	Кельвін
кГц	—	кілогерц
мК	—	мікроКельвін
МПа	—	мегапаскаль
м/с	—	метрів за секунду
ФП	—	фазовий перехід

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження.

Одним із найінформативніших підходів до дослідження квантових рідин, зокрема рідкого гелію, є аналіз поведінки механічних об'єктів, що коливаються у цих середовищах. У цьому контексті кварцові камертони зарекомендували себе як чутливі інструменти для зондування фізичних властивостей рідкого гелію при наднизьких температурах. Їхнє широке впровадження у кріогенних експериментах пов'язане з поєднанням низки переваг — від стабільності та простоти використання до високої резонансної якості та інженерної доступності. Серед таких переваг також необхідно зазначити доступність, невисоку вартість, довготривалу надійність, нечутливість до магнітного поля та низьким внутрішнім демпфуванням. Усе це робить кварцові камертони привабливими для застосування у фізичних експериментах.

Завдяки цим характеристикам, камертони стали серйозною альтернативою традиційним вібруючим дротам, які раніше вважалися стандартними резонаторами для дослідження рідкого гелію. Вони дають змогу суттєво зменшити складність експериментальної апаратури й підвищити стабільність вимірювального процесу. Водночас, через специфіку фізичних властивостей і геометричну складність самих камертонів, виникає низка викликів. Зокрема, акустичні ефекти, дисипативні явища та можливість виникнення непередбачуваних резонансів ускладнюють аналіз результатів і можуть знижувати точність вимірювань.

Для повноцінного використання потенціалу кварцових камертонів у дослідженнях надплинних систем, зокрема ізотопних розчинів гелію, необхідно глибоко проаналізувати їхню резонансну поведінку в рідкому гелії. Це передбачає як експериментальні дослідження, так і побудову відповідних теоретичних моделей, що враховують акустичні, гідродинамічні й дисипативні ефекти.

Актуальність таких досліджень зумовлена як зростаючою потребою в компактних, високоточних та стабільних методах зондування квантових середовищ, так і наявністю значної кількості експериментальних результатів, отриманих у дослідженнях надплинних рідин, які досі не мають повного теоретичного обґрунтування

Мета і задачі дослідження. Основна мета цієї роботи – дослідити фізичні механізми, що визначають взаємодію гідродинамічних мод (першого та другого звуків, в'язкої, дифузійної та теплової хвиль) із тілами, що коливаються в рідкому гелії. Для досягнення цієї мети були поставлені та виконані наступні задачі дослідження:

- розглянути процеси випромінювання й поглинання енергії в надплинних розчинах,
- вивчити звукові резонанси в критичному гелії, а також проаналізувати резонансні особливості першого і другого звуків у надплинному гелії та розчинах його ізотопів
- розробити теорію повної системи гідродинамічних мод цих розчинів;
- розв'язати задачу про одночасне збудження першого та другого звуків у надплинному гелії внаслідок збудження камертоном хвиль тиску й ентропії;
- отримати явні вирази для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності та термодифузії для рідких і твердих розчинів ізотопів гелію у моделі суміші газів квазічастинок;
- знайти дисперсійні співвідношення для першого, другого звуків, та дисипативних теплових хвиль для надплинних розчинів ^3He – ^4He , та визначити співвідношення між амплітудами всіх гідродинамічних параметрів у цих модах;
- врахувати внесок дисипативної дифузійної теплової хвилі у зникнення резонансів другого звуку, які спостерігалися в експерименті;
- отримати явні вирази для амплітуд концентраційних та температурних збурень, викликаних коливаннями твердої стінки в гелії.

Об'єктом є дослідження дисертаційної роботи є релаксаційні процеси в надплинних розчинах квантових рідин.

Предметом дослідження є повна система гідродинамічних мод надплинних розчинів ^3He – ^4He і їх взаємодія з тілами, що коливаються в рідкому гелії.

Методи дослідження. Для визначення повного набору нормальних розв'язків системи гідродинамічних рівнянь надплинних розчинів ізотопів гелію ^3He – ^4He були використані методи перетворення Фур'є. Зокрема, знаходження власних чисел матриці системи цих рівнянь дозволило встановити дисперсійні співвідношення для кожної з мод, а обчислення власних векторів цієї матриці — визначити співвідношення між амплітудами гідродинамічних величин у складі кожної з них. Такий підхід дав змогу також побудувати функції Гріна задачі, що описують часову релаксацію початкових збурень параметрів розчину. Для дослідження резонансних властивостей системи «кварцовий камертон — рідкий гелій» було проведено моделювання диференціальних рівнянь, що описують коливальний процес з урахуванням реальних геометричних і фізичних характеристик камертона та середовища. Для знаходження явних виразів для кінетичних коефіцієнтів було застосована методика використання кінетичних рівнянь для функцій розподілу системи квазічастинок та їх розв'язання в випадку слабого відхилення від стану рівноваги.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна та була складовою частиною держбюджетного наукового проекту Міністерства освіти і науки України № державної реєстрації роботи: 0122U001482 – «Взаємодія квазічастинок з поверхнями наноструктур довільної ступені шорсткості». Також робота була частково підтримана за рахунок програми «Гранти на дистанційні дослідження для українських дослідників», проекту EURIZON, за грантовою угодою ЄС № 871072.

Наукова новизна отриманих результатів.

1. Вперше пояснено експериментально спостережуване збудження стоячих хвиль коливань тиску камертоном, а також детально розглянуто появу та властивості резонансів залежно від температури й тиску гелію. Побудовано теоретичну модель, яка описує фізичні механізми резонансних явищ, що спостерігалися експериментально.
2. Вперше розв'язано задачу про одночасне збудження першого та другого звуків у надплинному гелії внаслідок збудження камертоном хвиль тиску й ентропії, а також пояснено експериментально спостережувані залежності властивостей резонансів від температури та тиску гелію.
3. Вперше отримано явні вирази для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності та термодифузії для рідких і твердих розчинів ізотопів гелію, та визначено явний вираз коефіцієнта самодифузії домішок у твердих розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$.
4. Вперше, шляхом розв'язання повної системи гідродинамічних рівнянь для надплинних розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$, знайдено дисперсійні співвідношення для першого та другого звуків, а також дисипативних теплових хвиль. Визначено взаємозв'язки між амплітудами всіх гідродинамічних параметрів у цих модах.
5. Вперше доведено, що врахування дисипативної дифузійної теплової хвилі дозволяє пояснити зникнення резонансів другого звуку, які спостерігалися в експерименті.
6. Вперше отримано явні вирази для амплітуд концентраційних та температурних збурень, викликаних коливаннями твердої стінки в гелії. Проведені розрахунки показали, що спостережувана в експерименті різниця в ослабленні відкритого та закритого камертонів може бути зумовлена конкуренцією між механізмами другого звуку та дифузійної хвилі.
7. Вперше продемонстровано, що знайдений у дисертації механізм одночасного поширення енергії в дисипативній хвилі та у звуковій хвилі другого звуку може бути використаний для створення нових ефективних методів тепловідведення в наноструктурах.

Практичне значення отриманих результатів.

Дослідження коливальних режимів тіл у надплинних розчинах гелію мають як фундаментальне, так і прикладне значення. Зокрема, кварцові камертони зарекомендували себе як надзвичайно чутливі зонди для точного вимірювання в'язкості, густини та інших характеристик квантових рідин у криогенних умовах, аж до мілікельвінових температур. Це відкриває широкі можливості для використання таких структур у сенсорних системах квантових комп'ютерів, у фізиці низьких температур, при охолодженні надпровідників, а також у техніці створення детекторів для фізики частинок.

Розробка математичних моделей взаємодії тіл із надплинним середовищем дозволяє не лише пояснювати експериментальні результати, а й прогнозувати поведінку таких систем за складних умов — при наявності неоднорідностей, зовнішніх збурень або багатокomпонентності середовища.

Отже, результати роботи можуть бути використані як для поглиблення теоретичних знань про квантові рідини, так і для створення нових високоточних технологій у галузі квантової метрології, кріоінженерії та надпровідникової електроніки.

Результати дисертаційного дослідження, а саме теоретичний матеріал та методики були впроваджені у навчальний процес в дисциплінах пов'язаних з вивчення як математичних дисциплін, пов'язаних з розв'язанням рівнянь математичної фізики, так й фізичних дисциплін, таких як гідродинаміка, фізика конденсованих середовищ та фізична кінетика, зокрема на кафедрі комп'ютерної фізики навчально–наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Також, результати досліджень можуть бути використані в наукових дослідженнях Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України пов'язаних з коливанням складних систем, що містять рідини та тверди тіла, та в експериментальних та теоретичних дослідженнях Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна, пов'язаних з

майбутніми дослідженнями релаксаційних процесів у квантових рідинах та їх розчинах при низьких та наднизьких температурах.

Особистий внесок здобувача полягає в участі у постановці, обговоренні та розв'язання поставленої задачі та визначенні мети дослідження, теоретичному обґрунтуванні підходів до розв'язання задачі, аналітичному опрацюванні задачі та розрахункової частини, проведенні розрахунків, а також в участі у розробці концепції статті, оформленні тексту роботи, та аналізі літературних джерел.

Доклади на міжнародних конференціях представлені здобувачем особисто.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи були представлені на міжнародних конференціях:

- International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020 (м. Харків, 8 – 14 червня 2020 року),
- International Conference for Young Professionals in Physics and Technology 2021 (м. Харків, 26 – 30 квітня 2021 року),
- II International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021 (м. Харків, 6 – 12 червня 2021 року),
- Quantum Fluids and Solids – QFS 2021 International Online Conference (м. Бенгалуру, Індія, 10 – 19 серпня 2021 року),
- LT29 – 29th International Conference on Low Temperature Physics (м. Саппоро, Японія, 18 – 24 серпня 2022 року),
- III International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2023 (м. Харків, 5 – 11 червня 2023 року),
- 20th International Conference of Young Scientists on Energy and Natural Sciences Issues (м. Каунас, Литва, 21 – 23 травня 2024 року),
- VI International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2024 (м. Харків, 3 – 7 червня 2024 року).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані у 5 наукових працях, серед яких 4 наукові статті опубліковано у наукових періодичних виданнях, що індексуються наукометричною базою Scopus, 1 наукова стаття опублікована у наукових фахових виданнях України, та 8 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи складає 145 сторінок (6 авторських аркушів), з них текст основної частини (вступ, п'ять розділів і висновки) становить 104 сторінки (4.5 авторських аркуша). Дисертація містить 13 рисунків. Список використаних джерел містить 135 найменувань.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Гелій вирізняється серед інших елементів винятковими фізичними властивостями, зокрема надзвичайно низькою температурою кипіння, приблизно 4,2 К, але це не єдина незвичайна властивість гелію. При подальшому зниженні температури виявилось, що навіть за наближення до температури абсолютного нуля гелій не переходить у твердий стан за нормального тиску. Натомість спостерігається фазовий перехід із набуттям незвичних властивостей за температури близько 2,17 К, так званої лямбда-точки. У цій точці зникає в'язкість речовини під час її руху крізь вузькі щілини, візуальні ознаки кипіння різко зникають, а теплопровідність зростає. Це явище отримало назву надплинності [1], що зумовило поділ рідкого гелію на дві фази: гелій II (від абсолютного нуля до лямбда-точки) та гелій I (від лямбда-точки до температури кипіння). Через унікальні властивості обидві фази потребують окремого теоретичного опису

Надплинність спостерігається в ізотопах ^3He , ^4He , а також у їхніх сумішах із малою концентрацією одного з компонентів. Серед експериментальних методів для вивчення гідродинамічних властивостей надплинних середовищ важливу роль відіграють коливальні методи [2 – 4], зокрема, використання твердих тіл у рідині, таких як кварцові камертони [5 – 16]. Ці методи дають змогу вивчати механізми дисипації енергії залежно від концентрації та температури. У цьому дисертаційному дослідженні основну увагу приділено теоретичному аналізу гідродинамічних властивостей надплинного гелію із використанням кварцових камертонів як сенсорів, а також поясненню фізичних властивостей спостережуваних на експериментах явищ та особливостей поведінки таких камертонів в рідкому гелії, зокрема в його надплинному стані, та в надплинних розчинах ізотопів гелію. Основною ідеєю роботи було врахування повного набору гідродинамічних мод цих розчинів, тобто одночасному врахуванні всіх колективних нормальних збуджень – акустичних та дисипативних хвиль.

1.1 Колективні гідродинамічні моди в гелії

Колективні гідродинамічні моди у чистому надплинному гелії є проявами надплинної природи цієї квантової рідини та описуються в рамках двофазної моделі Ландау [17], яка передбачає співіснування нормальної та надплинної компонент. У таких умовах виникають специфічні типи звукових і температурних збурень, що мають колективний характер і відображають спільну динаміку обох складових.

Перший звук — це аналог звичайної акустичної хвилі, подібної до тієї, що спостерігається в класичних рідинах [18]. Він пов'язаний з коливанням густини та тиску й супроводжується спільним рухом обох компонент надплинного гелію.

Другий звук — унікальна особливість надплинного стану [19]. Це температурна хвиля, яка відповідає коливанням ентропії при майже постійній густині. У цій моді нормальна і надплинна компоненти рухаються одна відносно одної, що створює хвилю переносу тепла без масового переносу. Другий звук — один із проявів надплинності і використовується для експериментального дослідження теплових властивостей речовин.

В'язка хвиля в надплинному гелії — це хвильовий процес, що виникає внаслідок в'язкості нормальної компоненти [18]. Незважаючи на те, що надплинна компонента має нульову в'язкість, нормальна компонента зберігає в'язкі властивості, і тому, саме вона і є носієм в'язких ефектів у He II. Така хвиля аналогічна звичайній в'язкій хвилі в нормальних рідинах. В'язка хвиля швидко загасає і тому є короткохвильовим і сильно затухаючим збуренням.

Ці моди є не лише теоретично важливими, а й мають експериментальне значення, оскільки використовуються для визначення параметрів надплинності, коефіцієнтів теплопровідності, в'язкості та інших характеристик гелію II. Розглянемо ці моди більш ретельно.

Ми почнемо зі звичайних для нормальних рідин хвиль – звукової та в'язкої. А потім розглянемо такі хвилі, які характерні для надплинних рідин – хвилі другого звуку та дифузно–теплової хвилі.

1.1.1 Перший звук та в'язка хвиля

Найбільш звичним і близьким до класичних рідин є так званий перший звук у надплинному гелії [18, 20]. Як і в нормальних рідинах, він є гідродинамічною модою, у якій в основному коливаються густина та тиск речовини, а ентропія й температура практично не змінюються. При цьому слід також зазначити наявність в'язкості в чистому гелії, яка, зокрема, визначає як поглинання першого звуку, так і затухання різних тіл, що здійснюють коливання в ньому [2–4]. Власне, так була виявлена в'язкість чистого гелію — попри той факт, що гелій є надплинним, тобто може протікати без тертя через вузькі щілини.

Формально в'язкість відповідає ще одній, чисто дисипативній моді в гелії, яка, на відміну від першого звуку, є суто поперечною. У цій моді коливається швидкість рідини, причому в напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі.

В'язка хвиля та перший звук є ортогональними колективними модами для чистого гелію і, у випадку, коли не збуджуються збурення температури та/або ентропії, вони повністю визначають релаксаційні процеси в надплинному гелії [21 – 23].

Наприклад, під час коливань тіл у гелії — зокрема, камертонів — ці дві моди повністю описують як затухання камертона (у гідродинамічному режимі), так і зсув його резонансної частоти.

Більше того, ця властивість дозволила, у певному сенсі, розв'язувати обернену задачу — використовувати камертон як вимірювальний прилад для визначення коефіцієнта в'язкості або швидкості поширення першого звуку в надплинному гелії [11].

Розгляд випромінювання першого звуку в надплинному гелії не відрізняється від аналогічної задачі випромінювання звуку в звичайних рідинах і газах. Коливальне тіло (наприклад, камертон, пластинка або дріт), занурене в рідину, генерує періодичні збурення тиску та густини, які поширюються в середовищі у вигляді акустичної хвилі — тобто першого звуку. Ключовим елементом у цій задачі є граничні умови на поверхні тіла, що коливається. В надплинному гелії, який описується двокомпонентною гідродинамікою, на межі «тіло – гелій» накладаються умови неперервності швидкостей і потоків обох компонент. Нормальна компонента не рухається вздовж поверхні (як звичайна в'язка рідина), тобто її швидкість на межі дорівнює швидкості тіла. Надплинна компонента може ковзати вздовж поверхні, тому її гранична умова є вільною. Ці граничні умови визначають, які саме моди збурень збуджуються тілом. Якщо тіло виконує гармонічні коливання, то збуджується як поздовжня звукова хвиля (перший звук), так і локальні в'язкі моди в безпосередній близькості до поверхні. Власне ці процеси й були основними на перших етапах досліджень й використання камертонів у гелії.

1.1.2 Другий звук

Квантові властивості речовини на макроскопічних масштабах проявляються не лише у вигляді незвичайних явищ або властивостей, таких як надплинність і надпровідність, а й у вигляді, здавалося б, менш екзотичних явищ — наприклад, транспорту електронів у металах і напівпровідниках, теплових явищ у твердих тілах, магнітних властивостей речовин. До таких властивостей належить також явище **другого звуку**, яке зумовлює перенесення тепла бездисипативним способом, на відміну від газів і класичних рідин, де перенос тепла здійснюється дисипативно за рахунок теплопровідності. Цей бездисипативний перенос тепла в звуковому хвильовому процесі, на перший погляд, здається унікальним явищем, притаманним лише екзотичним надплинним рідинам. Насправді він описує

перенесення тепла в кристалічних твердих тілах, магнетиках, надпровідниках, які нині дедалі ширше застосовуються в науці і техніці, а тепер спостерігається і в наносередовищах.

Існування цього температурного хвильового процесу, який отримав назву другого звуку, вперше було теоретично передбачене в роботі [17]. Експериментально другий звук було виявлено в [19, 24, 25], а в роботі [26] було висловлено припущення про можливість існування хвиль другого звуку в твердих тілах. У роботах [27– 29] вперше розглядалися хвилі другого звуку в кристалічних твердих тілах.

Зокрема, експериментально хвилі другого звуку в твердих тілах спостерігалися в твердому гелії [28, 29], у чистих монокристалах NaF [30], і у вісмуті [31].

Другий звук має важливе практичне значення для керування тепловими процесами в мікро– та наноелектронних системах. Новітні експерименти з графеном та графітом [32, 33], а також дослідження фононної теплопередачі в твердих тілах [34, 35] і рідинах [36] підтверджують наявність фононної гідродинаміки в реальних матеріалах. Зокрема, в роботі [32] зазначається, що другий звук та споріднені ефекти більше не є науковою екзотикою, а мають практичне значення. Очікується, що ці результати сприятимуть новим підходам до керування тепловими явищами на мікро– та нанорівнях.

Таким чином, другий звук не є явищем, притаманним виключно надплинному гелію, і тому результати цієї дисертації можуть бути корисними й для вивчення цілого ряду інших речовин.

1.1.3 Другий звук і властивості камертона в розчинах

Другий звук являє собою акустичне поширення збурень ентропії і, відповідно, практично не збуджується при коливаннях твердих тіл у чистому надплинному гелії. Однак у надплинних розчинах ізотопів гелію, особливо за високих концентрацій ^3He , вплив випромінювання другого звуку під час дослідження коливань камертонів стає суттєвим. У таких випадках врахування

другого звуку є необхідним, оскільки саме він часто дає визначальний внесок у загальне затухання коливань камертона та зміну його резонансних характеристик. Однак відсутність повноцінного теоретичного опису динаміки таких систем, зокрема механізмів взаємодії коливальних тіл із квантовою рідиною у присутності дисипативних процесів, ускладнювала як інтерпретацію результатів раніше проведених експериментів, так і постановку нових досліджень. Це стимулювало як виконання низки експериментальних робіт [37, 22, 38, 39], так і подальший розвиток теоретичних моделей [40], що стали предметом дослідження в цій дисертаційній роботі.

1.1.4 Дисипативна мода

На відміну від чистого гелію, у надплинних розчинах ізотопів гелію ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, окрім другої звукової моди, яка відповідає за поширення збурень ентропії, виникає також додаткова чисто дисипативна мода. Ця мода суттєво впливає на процеси релаксації температури та концентрації розчину. Механізми еволюції таких збурень у розчині визначаються теплопровідністю, термодифузією та масовою дифузією. На сьогодні ці процеси вже добре вивчені як з теоретичної, так і з експериментальної точки зору. Зокрема, були визначені основні параметри цієї моди — коефіцієнти теплопровідності, дифузії та термодифузії для надплинних розчинів гелію ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ [41]. Дослідження таких механізмів перенесення проводилися в численних експериментальних [42 – 49], та теоретичних [50 – 53], дослідженнях процесів теплопровідності, а також дифузії [54 – 56] и термодифузії.

Важливо відзначити, що одночасна наявність двох незалежних мод — звукової та дисипативної — означає, що для точного опису динаміки процесів у таких системах необхідно враховувати обидві моди. Саме це, ймовірно, стало однією з причин, чому до сьогодні не було побудовано повного опису просторово–часової еволюції температури та концентрації в таких розчинах, незважаючи на значну кількість експериментальних досліджень, частина з яких залишилася без задовільного теоретичного пояснення.

Одним із прикладів подібних процесів є фазове розшарування перенасичених надплинних розчинів ^3He – ^4He [57]. У попередніх моделях, зокрема в роботі [58], яка започаткувала кінетичну теорію метастабільних розчинів, дисипативні процеси або ігнорувалися, або зводилися до класичної дифузії. Проте подальші експериментальні та теоретичні роботи [59 – 64] показали, що і другий звук також відіграє суттєву роль у фазовому розшаруванні, і тому не може бути виключений із розгляду.

Інший тип задач, що досі не отримали повного теоретичного пояснення, пов'язаний із нестационарними тепловими потоками в надплинних розчинах — їх вмиканням, вимиканням або періодичними коливаннями. У цих випадках також необхідно враховувати одночасну дію двох згаданих мод. До таких ситуацій належать, наприклад, експерименти з тепловими потоками в системах, де поряд із надплинним гелієм присутні звичайні речовини, в яких тепло поширюється лише за рахунок теплопровідності.

Отже, в надплинних розчинах ^3He – ^4He спостерігається широкий спектр складних явищ, адекватний опис яких вимагає врахування повного набору можливих шляхів релаксації. Наприклад, при запуску теплового потоку необхідно враховувати дифузійну релаксацію концентрації, а при дослідженні фазового розшарування — температурну релаксацію. Ймовірно, саме складність урахування обох механізмів стала причиною того, що цілий ряд експериментальних результатів досі не знайшли повного пояснення.

Вперше параметри обох мод — як другої звукової, так і дисипативної — були розраховані в роботах [65, 66] на основі гідродинамічних рівнянь для надплинних розчинів [18]. Для області наднизьких температур, де внеском теплових збуджень можна знехтувати, дисипативну моду розглядали на основі кінетичного рівняння для газу домішкових квазічастинок у гідродинамічному наближенні [67, 68].

Метою цього дисертаційного дослідження є побудова теоретичної моделі, що дозволяє описувати одночасну релаксацію температури та концентрації в надплинних розчинах ^3He – ^4He , враховуючи все різноманіття колективних

мод — як звукових, так і дисипативних — які визначають кінетичні властивості нерівноважних процесів у таких системах, при різних температурах, концентраціях, тиску та в широкому спектрі експериментальних умов, зокрема під час дослідження динамічних характеристик коливального руху кварцового камертона.

1.2 Дисипативні процеси в надплинному гелії

Велика кількість власних колективних мод у надплинних розчинах гелію—3 у гелії—4 — таких як перший і другий звук, теплові та в'язкі дисипативні хвилі — підкреслює унікальність цього квантового середовища. І це ще не згадуючи про третій і четвертий звук, які проявляються лише за певних геометричних умов та в певній обмеженій геометрії. Не менш винятковим є і розмаїття дисипативних процесів, характерних для таких розчинів: перша і друга в'язкість, теплопровідність, масова та спінова дифузія, а також термодифузія. Ці процеси були досліджені експериментально — як безпосередньо, наприклад, через вимірювання коефіцієнта зсувної в'язкості, або теплових потоків, так і опосередковано, зокрема за допомогою визначення поглинання звукових хвиль як першого, так і другого звуків.

1.2.1 Коефіцієнти в'язкості

Теоретичні дослідження в'язкості відіграли важливу роль у розумінні природи надплинного гелію та побудові двокомпонентної моделі гелію II. У однієї з перших кінетичних теорій надплинного гелію [69] було показано, яким чином в'язкість нормальної компоненти пов'язана з процесами взаємодії фононів і ротонів – теплових збуджень гелію [70].

Разом з тим, порівняння отриманих експериментальних даних з висновками кінетичної теорії гелію II часто давали лише якісний, а не кількісний характер. Таке порівняння особливо актуальне з огляду на подальші доповнення кінетичної теорії [71]. Ця обставина ще більше ускладнює і збагачує картину релаксаційних процесів у фонон–ротонній

системі, а дані про в'язкість виступають надійним інструментом перевірки теоретичних моделей. Ще однією характерною рисою наявних експериментальних досліджень було то, що більшість із них обмежується температурним діапазоном вище 1,2 К. Лише в окремих роботах [72, 73] наведені результати при нижчих температурах, що дозволяє спостерігати перехід від гідродинамічного до балістичного режиму у фононній підсистемі гелію II. Цей перехід зазвичай проявляється у вигляді максимуму на температурній залежності ефективної в'язкості. Вказане коло питань також потребувало додаткових експериментальних досліджень, які були проведені й описані, зокрема, в роботах [70].

Нагадаємо, що експериментальні дані щодо динамічної в'язкості надплинного гелію II та сумішей $^3\text{He} - ^4\text{He}$ були отримані переважно за допомогою трьох методів: методу осцилюючого диска, капілярного потоку та вимірювання крутильних коливань кварцового кристалу [72 – 75]. Усі ці методи мають не лише певні переваги, але й низку недоліків, зокрема трудомісткість та необхідність унесення поправок, пов'язаних зі специфікою надплинного гелію, збудженням в ньому акустичних мод та обмеженими розмірами експериментального об'єму. Це стимулює інтерес до пошуку та розробки нових підходів до експериментального вивчення явищ, зумовлених внутрішнім тертям у надплинній рідині, а також до незалежного визначення коефіцієнта її в'язкості. Зараз з'явилася можливість отримання нових експериментальних даних щодо в'язкості He II за допомогою методу коливного кварцового камертона, який забезпечує високу чутливість вимірювань [76]. Детальний розгляд цього методу буде наведено в окремому підрозділі 1.3.1.

1.2.2 Коефіцієнт теплопровідності

Не менш цікавою й водночас складною є ситуація з тепловими потоками в цих розчинах [77]. Основи опису кінетичних властивостей надплинних розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$ були закладені у роботі [50], які показали, що механізм

перенесення тепла в таких системах значно складніший і багатогранніший, ніж у чистому He II. Якщо в надплинному гелії II роду, згідно з теорією Ландау, перенос тепла зумовлений тепловими збудженнями — фононами та ротонами, то в надплинних розчинах істотну роль відіграють також домішкові збудження (квазічастинки ^3He), які взаємодіють із фононами і ротонами.

У загальному випадку при тепловому потоці в розчині виникають градієнти температури й концентрації, які визначають потік домішкових збуджень. За таких умов процеси теплопровідності, масової дифузії та термодифузії виявляються взаємопов'язаними. Подальші теоретичні дослідження кінетичних та релаксаційних процесів у надплинних розчинах були проведені в роботах [65 – 68, 78], де зазначено, що релаксація температури й концентрації може здійснюватися за двома механізмами — за допомогою другого звуку та через механізм, пов'язаний із дисипативними процесами.

Експериментальне дослідження релаксації температури й концентрації в надплинних розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$ поки що проведено лише в області порівняно високих температур (вище $\sim 0,8$ K) і поблизу температури надплинного переходу [79, 80]. У цих роботах автори здійснювали вимірювання при малій потужності введеного теплового імпульсу і встановили, що характерні часи релаксації температури й концентрації практично збігаються. При цьому спостерігалось також співпадіння сталих часу при вмиканні та вимиканні теплового навантаження. Отримані експериментальні результати добре узгоджуються з теоретичними висновками, наведеними в роботах [78].

1.2.3 Коефіцієнти дифузії

Ідея та феноменологічний опис дифузії дефектів у надплинному гелії а також у кристалічній ґратки у квантових кристалах вперше була запропонована в роботах [81, 82], де домішкові атоми розглядалися як делокалізовані квазічастинки, що практично вільно рухаються крізь речовину. Так, у роботі [81] було запропоновано квантову дифузію домішкових атомів.

[81] передбачено квантову дифузію домішкових атомів у твердих розчинах ізотопів гелію.

В оригінальній моделі [83, 84] припускається, що слабкі розчини ^3He і ^4He можна розглядати як майже ідеальний газ квазічастинок ^3He – домішок у матриці квантового кристала ^4He , або всередині рідкого гелію. У цьому випадку квантова природа цього явища зводиться до можливості вільного руху домішкових атомів, що визначається ефектом безперервного тунелювання, зумовленого перекриттям хвильових функцій сусідніх атомів ^3He і ^4He та періодичністю кристалічної ґратки. Кінцеве значення коефіцієнта дифузії в цьому випадку визначається взаємодією домішок між собою і з тепловими збудженнями ґратки – фононами.

Таким чином, процес квантової дифузії, принаймні для слабких розчинів при досить низьких температурах, можна описати як звичайну дифузію в двокомпонентному газі домішок і фононів. Ця ситуація є одним із переконливих прикладів застосування квазічастинкового підходу, коли систему частинок із сильною взаємодією можна описати в моделі слабо взаємодіючих (і нелокалізованих) квазічастинок – фононів і домішок.

На користь квазічастинкової інтерпретації свідчить також порівняння температурних і концентраційних залежностей коефіцієнтів дифузії та теплопровідності в області значної взаємодії фонон–домішка [85 – 88].

Зокрема, для коефіцієнта дифузії ця взаємодія призводить до сильної температурної залежності (T^{-9}) коефіцієнта дифузії. Ця залежність вперше спостерігалася в роботах [89 – 92], що дозволило провести якісне порівняння з теорією [81] і підтвердити застосовність квазічастинкової моделі.

1.3 Використання кварцових резонаторів для дослідження властивостей надплинного гелію

Кварцові камертони широко застосовуються як стабільні еталони частоти, зокрема в годинниках, цифровій електроніці та системах синхронізації

асинхронного зв'язку. Їхня висока стабільність, точність, низьке енергоспоживання та доступна вартість зробили можливим створення годинників з добовим відхиленням менше однієї секунди, чого достатньо для більшості побутових потреб.

Подібно до камертонів, що використовуються для налаштування музичних інструментів, кварцові камертони складаються з двох ніжок на спільній основі. Для використання у техніці камертон виробляється у металевому циліндрі, який можна модифікувати або повністю видалити відповідно до потреб експерименту. Шляхом коливання цих ніжок, кварцовий камертон здатен випромінювати електричні сигнали як наслідок деформації кристалічної решітки або навпаки перетворювати напругу в механічне переміщення завдяки що пояснюється п'єзоелектричними властивостями кварцу.

Завдяки низьким акустичним втратам в п'єзоелектричних матеріалах, результуюча добротність зазвичай має порядок десятків тисяч у вакуумі. У повітрі добротність зазвичай падає до кількох тисяч через втрати на тертя між резонатором і повітрям. При використанні кварцових камертонів у рідинах варто враховувати, що рух зубців може генерувати поздовжні хвилі, за рахунок чого будуть відбуватися втрати енергії, впливаючи таким чином на добротність камертона, понижуючи її. Також за високого вмісту іонів у рідині можуть відбуватися електрохімічні реакції через виникнення різниці потенціалів між ніжками камертону.

Резонансна частота і ширина в He I і в He II можуть бути використані для термометрії [11]. Завдяки надзвичайно низькій кінематичній в'язкості He I і нормальної складової в He II, зміни показів камертона, спричинені температурою, малі. Проблемаю можуть стати неоднорідності потоку або тверді домішки, які потрапляють у технічний гелій ззовні, що обмежує використання камертона як термометра або манометра в технічному ^4He у відкритій посудині Дьюара. Для отримання точних і відтворюваних показань

кварцовий камертон слід розміщувати в екранованому об'ємі або не видаляти повністю оригінальний металічний циліндр камертона.

Таким чином можна казати, що камертон був і залишається не лише об'єктом інтенсивних досліджень, але й методом визначення характеристик гелію [93 – 97], таких як в'язкість, швидкість звуку, нелінійний рух, кавітація тощо.

1.3.1 Вимірювання в'язкості надплинних рідин [1 – 6]

Однією з відмінностей надплинних рідин є майже відсутня в'язкість, що виражається здатністю надплинного гелію витікати із посудин крізь вузькі щілини та отвори. При цьому під час руху твердих тіл в самій рідині, наприклад, під час коливання кварцових камертонів, в'язкість набуває кінцевих значень. Додатково на кінетичні та термодинамічні властивості надплинних рідин впливає наявність домішок. Зокрема серед ізотопів гелію обирають стабільні ^4He і ^3He , де ^3He виступає у якості домішки до надплинного ^4He .

Експериментальні дані про динамічну в'язкість надплинних сумішей He II і $^3\text{He}-^4\text{He}$ було отримано кількома методами. За допомогою методу диска, що коливається, обговорювалась якісна залежність між значеннями в'язкості у надплинних розчинах ізотопів гелію і концентрацією домішок ^3He , запропоновано пов'язати зміни в'язкості розчинів зі специфікою енергетичного спектру He II та відноситись до He II у високотемпературній області як до газу ротонів [98].

Інший спосіб визначення в'язкості – за допомогою капілярного методу, що використовується в експериментах на визначення теплопровідності. В'язкість нормальної компоненти надплинного гелію може бути визначена якщо відомо співвідношення між градієнтом тиску і швидкістю нормальної компоненти ламінарної течії. При поєднанні двох ємностей із сумішами ізотопів гелію різної концентрації за допомогою тонкого капіляру, надплинна рідина почне перетікати до посудини з більшою концентрацією до тих пір,

поки дифузний тиск не врівноважиться різницею рівнів. При цьому різниця рівнів концентрації досягала завдяки тому, що концентрація ізотопів ^3He у газоподібному стані вища, ніж у рідкій суміші, що створювало необхідну різницю при перенесенні пари між посудинами. За низьких концентрацій суміші і в умовах температури нижче 1.3 К створення різниці рівнів виявилось більш складним завданням. Воно було досягнуто шляхом конденсації розчинів вищої ніж вже наявна концентрації на одній зі сторін приладу. Конденсація чистого ^4He у різних кількостях або суміші значно нижчих концентрацій не призводила до утворення помітної різниці рівнів. За підвищеного тиску пари створення різниці рівнів було також можливе шляхом раптового додавання газу, тим самим змушуючи рідину проходити через капіляр за допомогою надлишкового тиску..

Густина та в'язкість рідкого гелію вимірювались і за допомогою методу крутильних кристалів. У цьому методі відповідним чином підготовлений прямий круговий циліндр з п'єзоелектричного кварцу, занурений у рідкий гелій, збуджували в основній моді крутильних коливань з постійною амплітудою [4]. Вимірювання в'язкості надплинних розчинів гелію за температур нижче 1.2 К було проведено із певними модифікаціями методу [99]. Навколо кристала розміщались на срібному тримачі електроди з чистого срібла, які оточували кристал, але не торкались його. Кристал підтримувався двома нейлоновими нитками в центральному вузлі деформації. Розчин заливався у простір між квадрантами електродів і поверхнею кристала, вся ця установка розташовувалась у мідній комірці. Результати [99] показали розбіжність із очікуваними теоретичними розрахунками для розчинів з концентрацією 1.09% і 1.57% ^3He за температури близько 0.3 К, після якої спостерігається зниження в'язкості для даних концентрацій розчинів, в той час як для концентрації у 4.67% цей показник зростав. При цьому при наближенні до 1 К дані цього дослідження узгоджуються якісно із результатами, отриманими у [99]. В [100] за допомогою цього ж методу було отримано виміри в'язкості для ширшого діапазону температур та концентрацій, від 20

мК до 1 К і від 1% до 10% відповідно, які так само за низьких концентрацій і температур не відповідали теоретичним розрахункам. В той же час, дослідження [5] також було спрямовано на експериментальне вимірювання в'язкості суміші ізотопів гелію за температур від 0.03 К до 0.6 К для малих концентрацій ^3He за допомогою методу двох поєднаних капіляром посудин. Отримані данні не підтвердили результати, отримані за допомогою методу крутильних кристалів у [7, 8], тому було зроблено припущення, що використання методу крутильних кристалів для вимірювання в'язкості в розбавлених розчинах має ваду порівняно з капілярним методом.

П'єзоелектричний кварцовий камертон вперше було використано для дослідження кінетичних процесів у надплинному гелії при наднизьких температурах під час експериментів в діапазоні температур 100 мК – 2.6 К, і в діапазоні 1.3 – 4.2 К [102]. В дослідженні [102] експериментально зареєстровано в'язкість нормальної складової надплинної рідини, яка зумовлена перенесенням імпульсу елементарними збудженнями – фононами і ротонами. На відміну від високотемпературної області, при температурах нижче 0,8 К було зареєстровано три режими течії: ламінарний з лінійною залежністю від швидкості течії, турбулентний з квадратичною залежністю від швидкості течії і проміжний режим, в якому спостерігається зміна конфігурації резонансних кривих, що проявляється у вигляді появи плато поблизу максимуму резонансних кривих. Перехід до нелінійного проміжного режиму супроводжувався пороговим механізмом дисипації зі створенням квантованих вихорів за рахунок шорсткості коливальної поверхні. Виявилось, що дані, отримані за допомогою цього методу, якісно подібні до результатів, отриманих іншими методами. При температурі 0.5 К в цьому експерименті спостерігався перехід від гідродинамічного до балістичного режиму, що дозволило дослідити питому ефективну в'язкість, яка має максимум при температурі переходу між режимами. Пізніше отримані в результаті експериментів дані були описані теоретично [70].

Пізніше в роботах [102, 70] методом кварцового камертона виміряно коефіцієнт в'язкості рідкого ^4He у гідродинамічній і балістичній ділянках, а в роботах [5, 16] дані про загасання коливань камертона в нормальній рідині ^3He і суміші $^3\text{He} - ^4\text{He}$ з концентрацією ^3He 6.2% використано для визначення значення температури з точністю до 3 мК.

1.3.2 Теоретичні дослідження випромінювання

Найбільш докладно випромінювання першого звуку та його вплив на коливання камертона описано в статтях [99 – 103].. Зокрема в [103] описано найпростіший випадок акустичного випромінювання, який розглядається тоді, коли джерело коливань знаходиться у нескінченному, необмеженому об'ємі класичної рідини, в якій затухання звукових хвиль є незначним. За таких умов уся енергія, що виникає під час випромінювання, розповсюджується на великі відстані від джерела, і можна досить прямо вивести аналітичний вираз для потужності випромінювання коливального джерела. Для цього припускається спрощена геометрія осцилятора та нехтується поглинанням звуку в рідині.

У такому разі загальний підхід полягає у побудові потенціалу швидкості для сферичних або циліндричних хвиль, що поширюються назовні, виходячи з системи ідеалізованих точкових джерел, яка моделює поведінку осцилятора. На основі цього потенціалу обчислюються поля швидкості та тиску, а далі — потік енергії.

Оскільки у цьому випадку відсутні обмеження, пов'язані з геометрією середовища чи затуханням звуку, можна використовувати асимптотичні вирази для полів на великих відстанях від джерела. Після інтегрування потоку енергії по замкненій поверхні, що оточує осцилятор, було отримано загальну потужність акустичного випромінювання.

Схожа модель точкових джерел використовувалась й роботі [16] Там обговорювалася одне з найбільш спрощених, але поширених уявлень про випромінювальну здатність осцилюючого тіла — наприклад, камертона — що полягає в моделюванні його у вигляді кількох точкових акустичних джерел з

певними інтенсивностями. Найчастіше використовують чотири джерела, які утворюють латеральний або лінійний (поздовжній) квадруполь. Однак така модель значно спрощує дійсну поведінку системи.

У реальності кожен з вусиків камертона не лише генерує звукові хвилі, але й частково відбиває та поглинає їх, що особливо суттєво, коли довжина хвилі порівнянна з розмірами самого камертона. Крім того, швидкість коливань уздовж довжини вусиків розподілена нерівномірно й описується профілем, наближеним до коливань ідеального консолі [16]. Це означає, що кожен вусик — по своїй осі — точніше було б моделювати як неперервний розподіл точкових джерел з варіативною інтенсивністю від основи до вершини, а не як простий акустичний диполь. У результаті весь камертон краще інтерпретувати як поздовжній квадруполь.

Таке уточнення особливо важливе у випадках, коли ми вивчаємо акустичне поле в безпосередній близькості від камертона, тобто на відстанях, порівнянних з довжиною його вусиків. Це варто мати на увазі під час моделювання камертона в умовах, коли він розміщений у власному корпусі.

Також в статтях [16, 104] було наголошено, що при моделюванні акустичних явищ у надплинному гелії важливо брати до уваги не лише випромінювання звичайного (першого) звуку, але й можливе виникнення другого звуку, зумовленого температурними коливаннями в системі двох компонент. Нагадаємо, що акустичне випромінювання в надплинному гелії має низку особливостей, що відрізняють його від класичних рідин. Найістотніша з них — наявність другого типу хвильового руху, відомого як другий звук, який проявляється як температурні коливання, коли нормальна та надплинна компоненти рідини коливаються у протифазі. Оскільки інші неklasичні моди не розглядаються, ми маємо справу з двома незалежними режимами: першим звуком — майже ізотермічними хвилями тиску, та другим звуком — майже ізобаричними хвилями температури.

Будь-яке тіло, що рухається в He II, породжує змішане акустичне поле, яке складається з обох типів хвиль. Генерація першого звуку аналогічна

поширенню адіабатичних звукових хвиль у звичайних рідинах, з подібною швидкістю звуку в He I та He II.

Другий звук від камертона виникає з двох основних причин. По–перше, через те, що граничні умови змінюються по–різному для в’язкої нормальної компоненти й ідеальної (безв’язкої) надплинної компоненти, це створює відносний рух між ними на частоті коливань — тобто формується другий звук. По–друге, навіть за умов дуже низьких температур, коли домінує баллістичне тертя, залишкові сили опору викликають періодичне нагрівання поверхні тіла та прилеглого шару рідини, що зумовлює виникнення температурного градієнта. У результаті з’являється ще одна компонента другого звуку — цього разу з подвоєною частотою, накладена на стаціонарний контрпотік, який охолоджує осцилятор.

Ці міркування стали поштовхом до численних теоретичних і експериментальних досліджень [94 – 100] у діапазоні температур і концентрацій, де можна було б очікувати, що внесок другого звуку у загальне загасання осцилятора буде порівнюваним з іншими механізмами дисипації.

Слід також підкреслити, що вивчення акустичного випромінювання, збуджуваного кварцовим камертоном, може здійснюватися не лише шляхом аналізу його затухання. Альтернативний і надзвичайно інформативний підхід полягає у дослідженні резонансних явищ, пов’язаних із збудженням першого та другого звуку в експериментальних системах зі складною геометрією. Такі резонанси несуть важливу інформацію про взаємодію між камертоном та надтекучим середовищем і можуть бути використані для ідентифікації різних механізмів дисипації та переносу.

Справа в тому, що, перший і другий звук поширюються зі своїми власними груповими швидкостями й утворюють стоячі хвилі, резонансні частоти яких визначаються геометрією експериментальної камери. Резонанси другого звуку були зафіксовані як у сумішах $^3\text{He} - ^4\text{He}$, так і в чистому ^4He (див. [6, 9]). Виходячи з цього, можна стверджувати, що якщо в системі не реалізується резонанс другого звуку, енергетичні втрати, пов’язані з його

випромінюванням, є незначними порівняно з втратами на випромінювання першого звуку. У зв'язку з цим у подальших моделях внесок другого звуку до енергетичних втрат не враховується кількісно, оскільки різке розширення лінії, пов'язане з внутрішньокамерними резонансами, зазвичай усувається на етапі обробки експериментальних даних. Інакше кажучи, для обчислення потужності випромінювання поза зонами акустичних резонансів (і лише в цьому контексті) надтекучий ${}^4\text{He}$ розглядається як класична стискувана рідина.

Окремо варто відзначити, що теоретичні дослідження випромінювання другого звуку кварцовими камертонами в різних геометріях можна проводити в рамках суто квазічастинкової теорії. У цьому підході другий звук розглядається як коливання густини та швидкості квазічастинок системи — тобто як звичайний звук, але не в класичному середовищі, а в газі квазічастинок [18]. У цьому разі основна складність задачі полягає у коректному врахуванні граничних умов.

Такий підхід дає змогу суттєво спростити аналітичні розрахунки й застосовувати методи визначення випромінювання камертонів, які були розроблені у піонерських роботах. Зокрема, йдеться про використання квадрупольних моделей для опису акустичного поля в зоні далекого поля (хвильовій зоні) [11, 16].

1.4 Висновок до розділу

У цьому розділі здійснено ґрунтовний огляд експериментальних і теоретичних досліджень, присвячених вивченню динаміки коливань кварцових камертонів у надплинному гелії, а також у надплинних розчинах ізотопів гелію ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Аналіз охоплює як класичні роботи, що заклали основу сучасного розуміння цих процесів, так і нещодавні публікації, в яких досліджуються нові ефекти взаємодії камертона з надплинним середовищем.

Значну увагу приділено статтям, у яких камертон розглядається не лише як об'єкт дослідження, а й як високочутливий вимірювальний прилад. У таких

роботах камертон виступає в ролі сенсора, здатного детектувати коливальні та теплові характеристики середовища з високою роздільною здатністю. Окремі дослідження демонструють використання камертона для спостереження фазових переходів, флуктуацій густини та температури, а також для вимірювання коефіцієнтів в'язкості і теплопровідності на наднизьких температурах.

Розглянуто широкий спектр експериментальних підходів до збудження та реєстрації коливань камертона. Зокрема, акцент зроблено на двох основних методиках: дослідження акустичного випромінювання осцилятора в рідині, що дає змогу вивчати далеке поле збуджених хвиль, та резонансні методи, що базуються на вимірюванні добротності і ширини резонансної лінії при зміні температури, тиску або концентрації ізотопів.

У ході аналізу були вивчені джерела, в яких докладно описано взаємодію камертона з усіма нормальними колективними модами надплинних рідин, зокрема: першим звуком (ізотермічні тиск–хвилі), другим звуком (ізобаричні температурні хвилі), в'язкими модами (поширення через нормальну компоненту), дисипативними тепловими хвилями (які виникають внаслідок тертя та теплового градієнта), а також можливим балістичним транспортом на наднизьких температурах.

Наведено результати теоретичних досліджень, які базуються на різноманітних підходах: від класичних гідродинамічних моделей до сучасних варіацій багатоконпонентної гідродинаміки, включно з мікроскопічними описами руху нормальної та надплинної компонент у зовнішньому полі, в'язкими та тепловими дисипативними процесами.

Окрему увагу приділено тим аспектам поведінки камертона в надплинних середовищах, які досі залишаються слабо вивченими або суперечливими. Серед них — вплив геометрії камертонів на утворення гібридних хвильових мод, можливість збудження мод другого звуку, зокрема хвиль ентропії чи акустичного турбулентного перетоку, а також складна картина локального

нагрівання поверхні осцилятора внаслідок в'язких втрат та мікроскопічного тертя на межі поділу фаз.

Цей розгорнутий огляд літератури став вкрай необхідним етапом у процесі підготовки дисертаційної роботи. Його роль полягала не лише в ознайомленні з попередніми науковими досягненнями, але й у формуванні теоретичного підґрунтя для досліджень, результати яких наведені в дисертації. Ґрунтуючись на аналізі сучасного стану проблеми, цей огляд забезпечив обґрунтовану основу для вибору наукової проблематики, сприяв формулюванню коректних і логічно послідовних дослідницьких гіпотез, а також слугував орієнтиром для чіткого визначення мети та конкретних завдань дисертаційної роботи.

Огляд дозволив систематизувати наявні знання, виявити суперечності та нез'ясовані аспекти у фізиці камертонних осциляторів у надплинному середовищі. Зокрема, він відкрив можливості для виявлення «білих плям» — ще не досліджених або недостатньо вивчених явищ і закономірностей, які потребують подальшого аналізу. Це, у свою чергу, підкреслило актуальність обраного наукового напрямку й аргументувало доцільність запропонованих напрямків досліджень. Отже літературний огляд виконав не лише функцію аналітичного інструменту, а й слугував інтелектуальним мостом між уже здобутим знанням і зробленим автором внеску в науку.

РОЗДІЛ 2. РЕЗОНАНСИ ЗВУКУ В РІДКОМУ ТА НАДКРИТИЧНОМУ ГЕЛІЇ

Цей розділ присвячено теоретичному опису процесів випромінювання і розсіювання звукових коливань кварцовими камертонами в надкритичному та рідкому гелії, які спостерігалися в низці експериментів [12] з дослідження резонансних явищ в надкритичному та надплинному гелії. В розділі обговорюються особливості досліджуваної фізичної системи та пропонується модель для її теоретичного опису.

Експерименти, на яких ґрунтуються наші теоретичні дослідження, були наведені в [12], в яких спостерігалися залежності резонансів від температури і тиску, а також перекриття резонансів. Ці явища мають дуже очевидне пояснення, але ще не мали задовільного кількісного опису.

2.1 Опис результатів експериментів

Останніми роками кварцові камертони набули популярності як універсальні зондові інструменти для рідин гелію при низьких температурах [11 – 14]. Завдяки своїм властивостям вони все частіше замінюють вібруючі драти як стандартні резонатори для вивчення рідин гелію. Однак їх значно вища частота резонансу — зазвичай близько 30 кГц для більшості камертонів — і складніша геометрія вводять нові особливості в вимірюваннях й поясненнях спостережуваних явищ. Зокрема, акустичні явища, які зазвичай не є значущими для вібруючих дротів, мають істотний вплив на відгук занурених камертонів. Тому дослідження випромінювання звукових хвиль і характеристик звукових резонансів у камертонів набуло особливої актуальності у вивченні фізичних властивостей рідкого гелію та надплинних розчинів його ізотопів. Такі дослідження дозволяють глибше зрозуміти механізми взаємодії акустичних збурень із середовищем, визначити динамічні параметри рідини та розкрити нові аспекти квантових явищ у криогенних умовах.

Потоки надплинної рідини при скінченних температурах можуть підтримувати режими, які виходять за межі звичайної хвилі тиску, властивої для всіх конденсованих тіл [18]. Одним із таких режимів є другий звук — хвиля ентропії, в якій нормальна і надплинна компоненти коливаються в протилежних фазах. Завдяки специфічним граничним умовам для цих компонентів, другий звук взаємодіє з рухом зануреного осцилятора.

У цьому контексті відносно низька швидкість другого звуку має вирішальне значення для досліджень. У сумішах ізотопів гелію її швидкість коливається від менше 10 м/с до приблизно 40 м/с залежно від тиску, концентрації та температури. У чистому ^4He швидкість другого звуку збільшується від нуля у λ – точці до понад 40 м/с, перш ніж ставати незначною при температурах нижче приблизно 0,7 К через майже повне відсутність нормальної компоненти. Натомість швидкість першого звуку у ^4He залишається порядку 240 м/с і слабо змінюється залежно від температури і тиску. За певних умов, коли довжина хвилі акустичної хвилі збігається з характерним розміром експериментального об'єму, занурений резонатор може сильно взаємодіяти з рідиною, збуджуючи резонансну стоячу хвилю і викликаючи різкий аномальний відгук.

В роботі [12] було проведено вимірювання в трьох різних експериментальних установках і спостерігалися резонанси за чотирма якісно різними умовами: резонанси першого звуку в надкритичному ^4He при 30 кГц, в нормальному та надтекучому ^4He , а також у сумішах гелію при 200 кГц, а також резонанси другого звуку в надплинному ^4He та сумішах гелію при 30 кГц. Була досліджена залежність цих режимів від температури, тиску та концентрації. При цьому треба відмітити, що здобуті результати поки що залишаються здебільшого якісними та не мають кількісного пояснення. Наприклад, автори роботи [12] виявили ознаки того, що другий звук у чистому гелії несподівано відрізняється від аналогічного режиму у сумішах гелію.

Розглянемо більш ретельно проведені у роботі [12] експерименти. У першому експерименті були досліджені резонанси першого звуку в

надкритичній рідині ${}^4\text{He}$, тобто при температурах близько 5 К і тисках понад 0,2 МПа, на частоті близько 30 кГц у невеликій тисковій клітці, зануреній в дьюар для зберігання. Температура маленької клітки вимірювалася за допомогою вугільного резистора і контролювалася за допомогою електричного нагрівача, а також шляхом переміщення клітки вгору чи вниз у газовому об'ємі дьюару. Тиск контролювався за допомогою вентилів при кімнатній температурі. У цьому дослідженні було використано кілька різних типів камертонів, які всі працювали на базовій частоті 30 кГц.

У другому експерименті були досліджені резонанси першого звуку в нормальному та надтекучому ${}^4\text{He}$ та в сумішах гелію (200 кГц), а також резонанси другого звуку в надтекучому ${}^4\text{He}$ та в сумішах гелію (30 кГц). Цей набір експериментів проводився в скляному дьюарі, який можна було охолодити до близько 1,3 К шляхом відкачування гелію. Камертон було встановлено на дно маленької мідної комірки з заповнювальним капіляром. Рідина в комірці завжди знаходилася при тиску насиченої пар, оскільки комірка ніколи не заповнювалася до верху, щоб дозволити зміни концентрації ${}^3\text{He}$ шляхом додавання відомої кількості ${}^3\text{He}$ або ${}^4\text{He}$ без підігріву комірки. Температура ванни могла змінюватися від 1,3 до 4,2 К шляхом регулювання ефективності відкачування. Температура визначалася з тиску ванни (первинний метод) або за значенням вугільного резистора (вторинний метод).

Для дослідження другого звуку камертон працював на своїй основній резонансній частоті, близько 30 кГц. Оскільки швидкість першого звуку на порядок більша, резонанси першого звуку можна було досліджувати на вищому гармонічному резонансі камертону, який знаходиться близько величини 200 кГц.

У третьому експерименті були досліджені резонанси другого звуку в сумішах гелію при дуже низьких температурах. Камертон, що працює на частоті близько 30 кГц, охолоджувалася до міліКельвінових температур за допомогою розділового холодильника. Вилка була встановлена в комірку, де можна було змінювати концентрацію ${}^3\text{He}$ і тиск. У типовому вимірюванні

розділовий холодильник спочатку працював на високій потужності для досягнення температури нижче 10 мК. Потім увесь кріостат повільно нагрівався до температури понад 2 К, в той час як відстеження вилки проводилося в режимі однієї точки.

В результаті проведених експериментів [12] автори статті спостерігали гострі акустичні резонанси в усіх чотирьох досліджених випадках.

Тут треба зазначити, що нетривіальна геометрія не давала можливості надійно розрахувати резонансний спектр. Таким чином, камертони та акустичні моди в їх оточенні не забезпечували абсолютну кількісну міру швидкості звуку. Тому в роботі [12] були представлені переважно необроблені дані, з яких можна зробити лише приблизні та якісні висновки.

Перейдемо до обговорення математичної моделі досліджуваної системи, і обговорення отриманих результатів.

2.2 Математична модель системи

Для того, щоб описати явища, які проявилися під час експериментів з кварцовим камертоном, що коливається в чистому гелії або у надплинних розчинах ^3He – ^4He різних концентрацій, у цій роботі пропонується використати певну модель, яка може допомогти описати отримані результати з певною точністю.

Отже для розгляду умов, за яких можуть спостерігатися резонанси першого і другого звуків, використовується одновимірна модель замкненої посудини. Встановимо для цієї моделі коливну стінку з одного боку та нерухому стінку з протилежного боку. Ця модель сфокусована на дослідженні одночасної генерації колективних мод, а також який вплив зміна температур і концентрацій має на дистрибуцію інтенсивностей серед наявних мод розчинів. Водночас запропонована модель не враховує специфічної форми кварцового камертона і циліндричної форми колби.

Для розв'язання цієї задачі розглянемо осциляції тиску, коливання густини і швидкостей, при цьому зміни у значеннях температури, збурення

ентропії та концентрації не будемо враховувати. У цьому випадку повна система [18] гідродинамічних рівнянь для надплинних сумішей ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$ зводиться до рівнянь, які дозволяють врахувати зв'язок, виникаючий між тиском та густиною, залишаючи ентропію та концентрацію сталими.

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = v_{eff} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут $c_1 = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_{\sigma, c}}$ описується швидкість звуку в надкритичному гелії а також швидкість першого звуку в надплинному гелії, взята при постійних ентропії та концентрації, v_{eff} – ефективний коефіцієнт в'язкості.

Наступним кроком визначимо специфіку запропонованої моделі. Для подальшого дослідження будемо вважати, що коливна стінка має свою власну частоту, жорсткість, масу і добротність. Посудина, на одному із кінців якої розташована стінка–осцилятор, має форму вузької колби, всередині якої знаходиться рідкий гелій [105]. Варто зазначити, що ця модель не враховує всіх геометричних параметрів камертона і те, як це впливає на коливання камертона в закритій колбі, проте все ще залишає можливість розглянути якісні фізичні особливості появи і взаємодії резонансів.

Будемо вважати, що на цю коливну стінку–осцилятор діє зовнішня періодична сила $F \cos \omega t$, де ω – задана частота. Із системи рівнянь (2.1) та (2.3) наступним кроком опишемо зв'язок між тиском та швидкістю. Для цього спочатку шукаємо розв'язок у вигляді $V = V_0 e^{i(\omega t - kx)}$ і відповідно

Рівняння для тиску в цьому разі має вигляд

$$P = -i \frac{\rho_0 c_1^2}{\omega} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2.2)$$

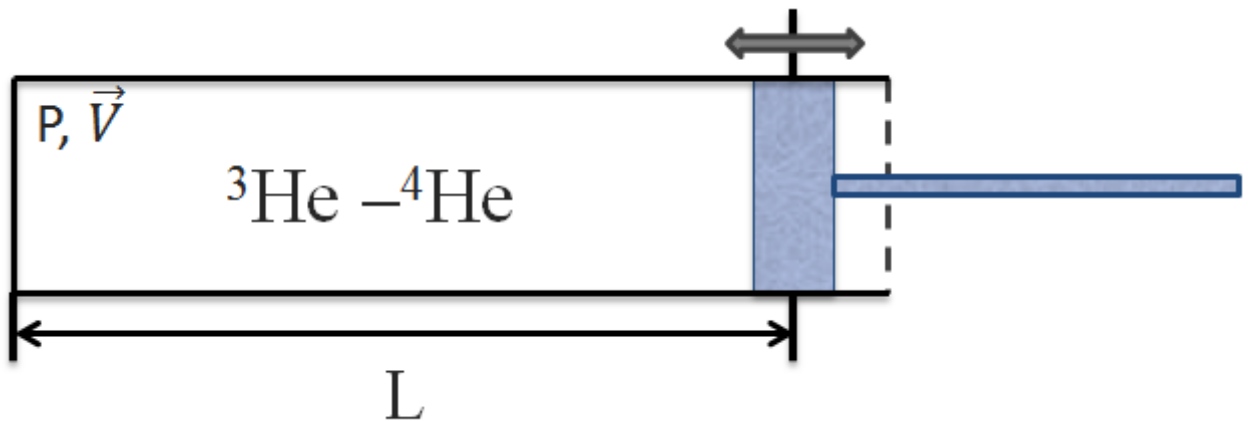


Рис. 2.1. Імітація руху камертону у комірці з рідким гелієм. Об'єднана система рідкого гелію і осцилятора

Також отримуємо вираз для швидкості:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{u_1^2} V = 0 \quad (2.3)$$

де

$$u_1^2 = c_1^2 - i\omega v_{eff} \quad (2.4)$$

Вважаючи ліву стінку нерушною, в точці $x=0$ будемо шукати розв'язок рівняння (2.3) як:

$$V = V_0 \sin\left(\frac{\omega x}{u_1}\right) \quad (2.5)$$

Тепер з рівнянь (2.5) та (2.2) знаходимо явний вираз для тиску:

$$P = -i \frac{\rho_0 c_1^2}{u_1} V_0 \cos(\omega x / u_1) \quad (2.6)$$

Для лівої стінки колби, яка коливається від тиску з боку гелію та зовнішньої сили, поводячи себе як осцилятор, опишемо зміну її положення відносно рівноважного стану виразом

$$M \ddot{x} = -k(x - L) - \tilde{\gamma} \dot{x} + AP(x = L)e^{-i\omega t} + F_0 e^{-i\omega t}, \quad (2.7)$$

в якому M – маса, k – жорсткість, $\tilde{\gamma}$ – коефіцієнт тертя, A – поперечний переріз посудини, $P(x = L)$ – тиск суміші в координатах $x = L$ стінки, що коливається, F_0 – амплітуда і ω – частота зовнішньої сили.

Це рівняння дозволяє визначити динамічну поведінку стінки під впливом зовнішніх та внутрішніх факторів, що є важливим для аналізу акустичних і гідродинамічних процесів у системі [106, 107].

Після ділення (2.7) на масу отримаємо рівняння, яке доповнює систему рівнянь (2.1) для тиску та швидкості:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(x - L) - \gamma\omega_0 \dot{x} + \alpha P_0(x = L)e^{-i\omega t} + a_0 e^{-i\omega t} \quad (2.8)$$

Тут $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ і γ – власна частота і добротність осцилятора, а $a_0 = F_0/M$ – амплітуда прискорення, $\alpha = A/M$ – коефіцієнт взаємного впливу осциляцій стінки колби і звукових коливань. Оскільки непорушна стінка задана у точці $x = 0$, то тиск гелію на осцилятор обчислюємо в точці $x = L$.

Зміщення положення стінки відносно стану рівноваги $\zeta = \zeta_0 e^{-i\omega t} = x - L$ у зовнішньому полі із заданою частотою коливань отримаємо із (2.8) як:

$$-\omega^2 \zeta = -\omega_0^2 \zeta + i\omega\omega_0 \gamma \zeta + \alpha P(L + \zeta) + a_0 \quad (2.9)$$

Варто зазначити, що у рівнянні (2.9) використовується лінійне наближення за параметрами ζ і P , і амплітуда $a_0 = F_0/M$ теж вважається малою.

Далі, для правої коливної стінки скориставшись граничними умовами для швидкості гелію:

$$V(x=L) = \dot{\zeta} = -i\omega\zeta \quad (2.10)$$

запишемо вираз для швидкості гелію поблизу осцилятора:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma)V(L) = i\omega\alpha P(L) + i\omega a_0 \quad (2.11)$$

Тепер ми використовуємо знайдені вирази для швидкості (2.5) та тиску (2.6) із рівняння (2.11) маємо остаточний результат для опису амплітуди осциляцій швидкості в рідкому гелії:

$$V_0 = \frac{i\omega a_0}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma)\sin\left(\frac{\omega L}{u_1}\right) - \lambda\omega\omega_0 \cos\left(\frac{\omega L}{u_1}\right)} \quad (2.12)$$

Із цього виразу можна отримати дані щодо резонансів самого осцилятора і щодо того, як поведуть себе резонанси звукових коливань у моделі вузької колби. При цьому «взаємодія» (перекриття) цих резонансних мод визначається безрозмірним коефіцієнтом

$$\lambda = \alpha \frac{\rho_0 c_1}{\omega_0} = \frac{A}{M} \frac{\rho_0 c_1}{\omega_0}, \quad (2.13)$$

який визначається співвідношенням між параметрами, що характеризують пружні параметри камертона та гелію.

Таким чином, розв'язок системи рівнянь (2.1) і (2.7) дає результати для квадрата амплітуди швидкості коливальної стінки в наявності рідини в посудині:

$$|V_0|^2 = \frac{\omega^2 |a_0|^2}{\left((\omega^2 - \omega_0^2)\sin(\omega L / c_1) - \lambda\omega\omega_0\right)^2 + \left(\omega\omega_0\gamma \sin(\omega L / c_1) + y(\omega^2 - \omega_0^2)\right)^2}. \quad (2.14)$$

Тут коефіцієнт $y = \omega^2 L v_{eff} / 2c_1^3$ описує ефективну ширину звукових резонансів, яка визначається в'язкістю рідини.

Вираз (2.14) розв'язує задачу про резонанси, спричинені коливаннями кварцових камертонів, а також звуковими коливаннями в гелії.

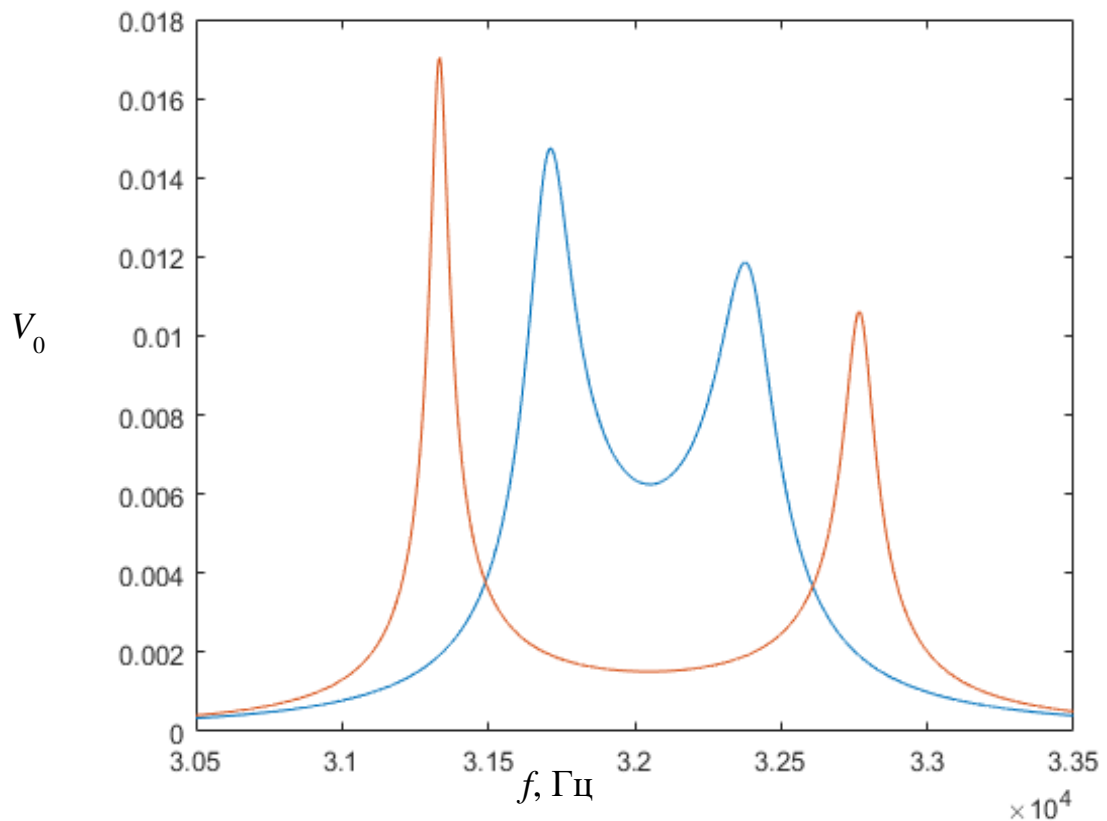


Рис. 2.2. Криві резонансів звуку в надкритичному гелії. Синім кольором показано значення обчислені із використанням коефіцієнта «перекриття» (взаємодії) резонансів, рудюю – з нульовим значення цього коефіцієнта

2.3 Обговорення результатів розрахунків та експериментів

Здобутий в попередньому підрозділі вираз (2.14) дає змогу описати перекриття цих резонансів і дати кількісний опис явищ, що спостерігаються в експериментах з [12].

На рисунку 2.2 показано приклад близьких резонансів рушійних і акустичних коливань за відсутності перекриття (помаранчева лінія) і за

наявності перекриття (синя лінія). Представлені графіки розраховані за формулою (2.4) і якісно описують залежності, що спостерігаються в експерименті (див. рис. 3 з [12]).

Представлені на Рис. 2.2. графіки розраховані за формулою (2.4) і якісно описують залежності, що спостерігаються в експерименті (див. рис. 3 з [12]).

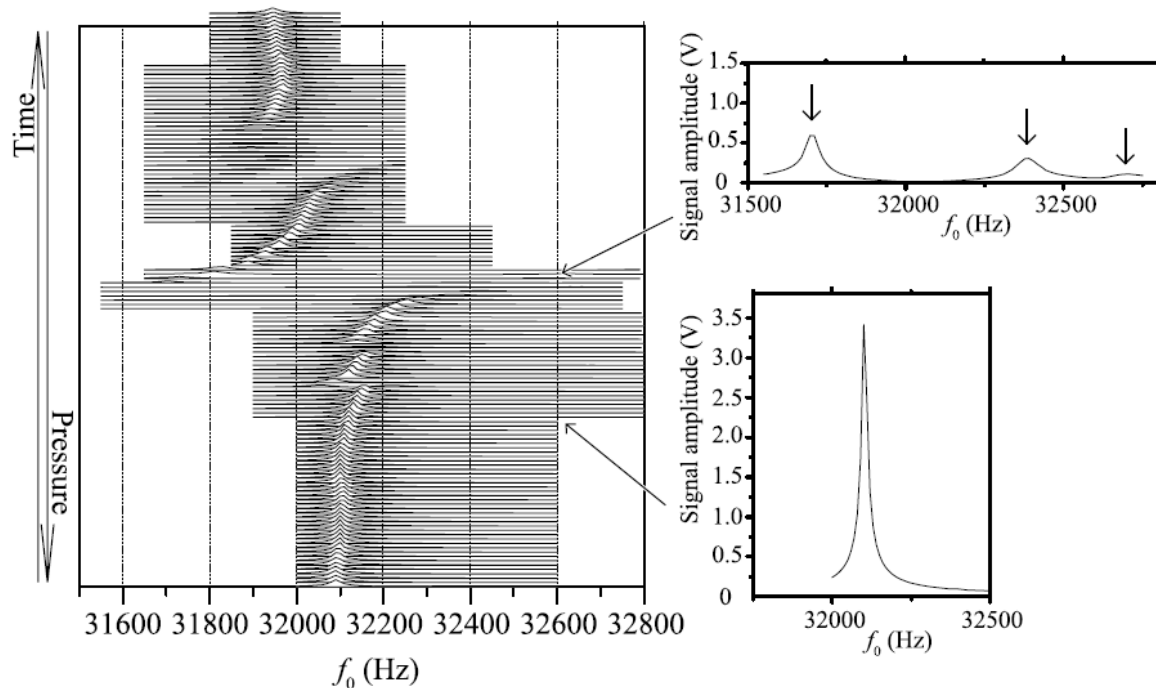


Рис. 2.3. Результати дослідження резонансів поблизу критичної точки в ^4He . Ці спектри були записані протягом 8 годин, протягом яких температура підтримувалася постійною на рівні 4,6 К, а тиск знижувався від 0,26 до 0,21 МПа (Рис. 3 з [12]).

На Рис. 2.3 для порівняння представлено Рис 3 зі статті [12], де демонструються кілька акустичних режимів, що переходили зліва направо (збільшення швидкості звуку). Два приклади резонансних кривих показані більш детально у випадках, коли об'єм вільний від акустичних резонансів (нижня вставка) і коли два таких резонанси з'єднані з камертоном (верхня вставка).

У випадку рідкого гелію вираз (2.4) описує резонанси першого звуку в області надплинності та звичайного звуку в нормальній області. Температурна залежність цих резонансів показана на Рис. 2.4 і охоплює діапазон температур від 1,25 К до 4,25, який включає лямбда-перехід у надплинний стан. Розраховані залежності якісно і кількісно збігаються з тими, що спостерігаються в експерименті (див. рис. 5 в [12])

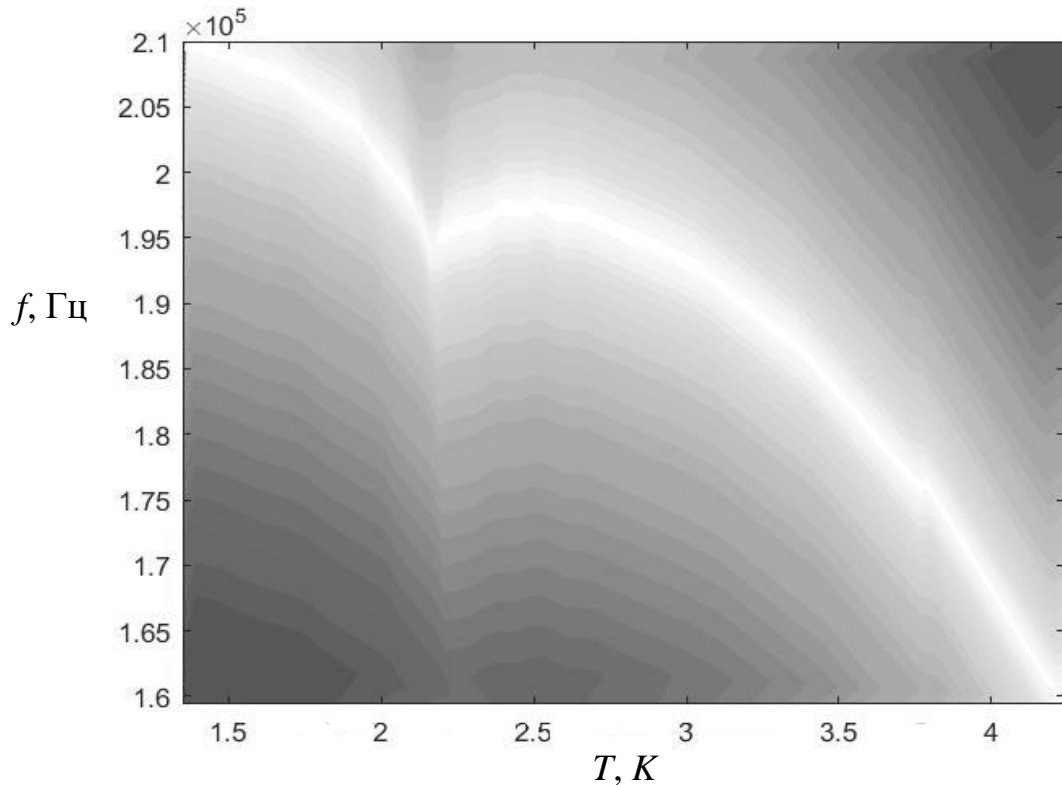


Рис. 2.4. Резонанси першого звуку в надплинному гелії залежно від температури і звуку в звичайному гелії. Наявність резонансних частот позначено світлим кольором

Для порівняння з експериментом у чистому гелії ми привели Рис. 5 зі статті [12], як приклад результатів з визначення акустичних резонансів, та їх залежності від температури. В цьому експерименті автори використовували камертон, який мав резонанс вищих гармонік на частоті близько 200 кГц. Резонанси першого звуку можна вивчати, коли вилка працює на цій частоті. На Рис. 2.5 показано Рис. 5 зі статті [12], де наведено показано карту

резонансів у 10% суміші в діапазоні температур від 1,4 до 4,2 К. Загальна форма резонансних траєкторій схожа на температурну залежність першого звуку, яка характерна и для ^4He (див. Рис. 1. в [12])

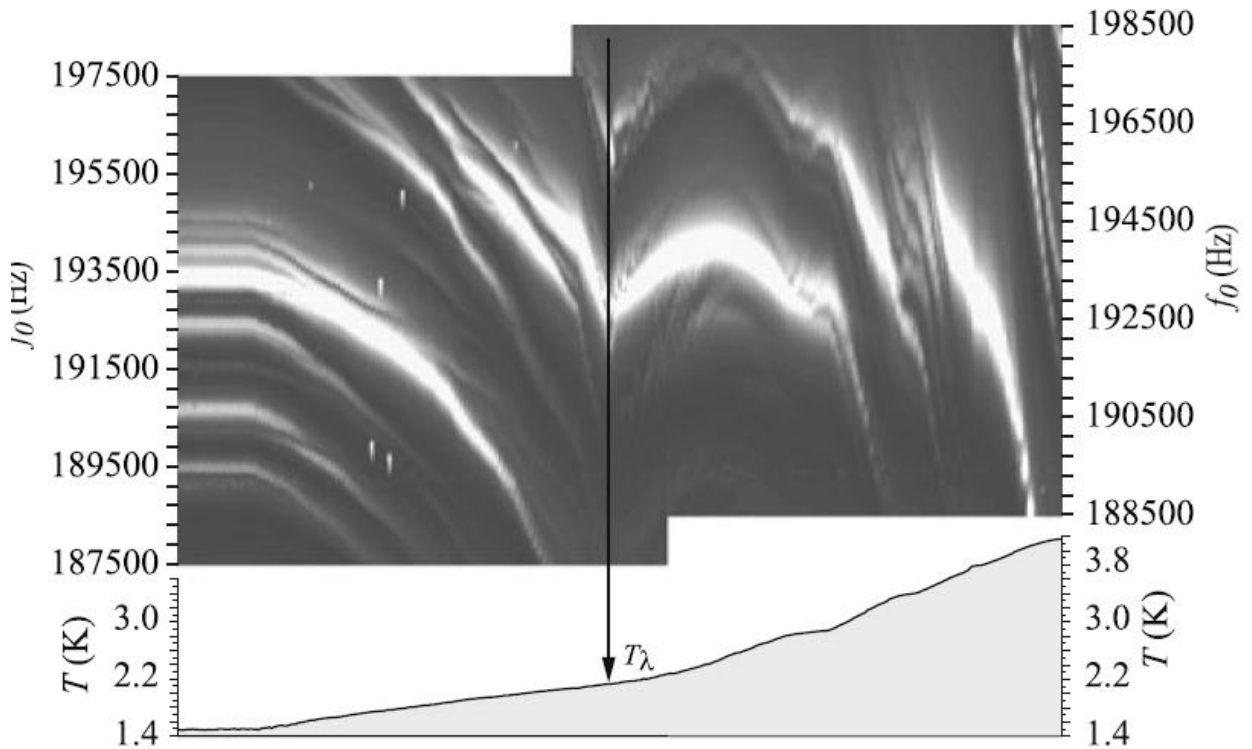


Рис 2.5. Результати дослідження резонансів першого звуку в 10% розчині рідкого гелію. (Рис. 5. Зі статті [12]) Вертикальна вісь показує резонансну частоту на верхній панелі та температуру на нижній. Горизонтальна вісь довільна, але відповідає часу. Світлі ділянки вказують на сильніший сигнал, тобто резонанси. Момент переходу в надплинне стан позначено стрілкою.

2.4 Висновки до розділу

В цьому розділі виконано теоретичне дослідження взаємодії надкритичного і надплинного гелію та тіла, що збурює в ньому коливання, зокрема вплив на дисипацію енергії тіла. Під час роботи проаналізовані поява та перекриття резонансів і гідродинамічних режимів гелію з дослідженням

фізичних принципів їх виникнення і взаємодії. У рамках поставленого завдання було побудовано спрощену одновимірну модель, яка дозволяє дослідити динаміку колективних мод – зокрема першого та другого звуку – в обмеженій геометрії, що імітує умови експериментів з кварцовими камертонами у надплинних розчинах ізотопів гелію. Розроблена модель пояснює фізичні характеристики явища виникнення резонансів, що були зафіксовані під час експериментів. Представлено метод, за допомогою якого можна обчислити виміри резонансних кривих, який дає змогу випрацювати алгоритми аналізу різноманітних варіантів взаємодії кварцових камертонів із розчинами гелію. Незважаючи на те, що модель не враховує складну реальну геометрію камертона і колби, вона дозволила отримати якісно значущі результати та може бути корисною для початкового аналізу явищ генерації звуку в надплинних середовищах. Особливо важливим є те, що в межах спрощення було обґрунтовано можливість знехтувати впливом ентропії та концентраційних збурень, що значно полегшило математичний опис і дозволило зосередитися на взаємозв'язку між тиском, густиною та швидкістю. Отримано явний аналітичний вираз (2.14) для резонансних кривих, зумовлених першим звуком у надплинному гелії, з побудовою належних графіків. Співставлення з експериментом показало, що одержані вирази якісно збігаються із показами експериментів.

Таким чином, виконання завдання продемонструвало ефективність запропонованого аналітичного підходу до моделювання гідродинамічних процесів у надплинних сумішах і заклало основу для подальших уточнень моделі з урахуванням реальної геометрії камертона та складніших граничних умов.

РОЗДІЛ 3. РЕЗОНАНСИ КОЛЕКТИВНИХ МОД В НАДПЛИННИХ РОЗЧИНАХ ^3He – ^4He

В цьому розділі проведено дослідження резонансного збудження акустичних хвиль другого та першого звуків у надплинних сумішах ^3He – ^4He . Основна мета розділу це аналіз коливань температури і тиску для об'єднаної моделі осцилятор–гелій та дослідження параметрів, які спричиняють появу другого звуку під час коливань і розрахунок внесків цих процесів у формування резонансів при коливаннях замкненого камертона.

Використання кварцового камертона, що коливається, в чистому надплинному гелії та надплинних сумішах ізотопів гелію стало одним з найплідніших методів вивчення транспортних явищ за останні десять років [22, 23]. У цих експериментах було відкрито багато цікавих і незвичайних явищ, серед яких, наприклад, існування других звукових резонансів [12]. У роботі [12] наведено результати експериментів з коливання кварцового камертона в камері, зануреної в надплинний розчин ^3He – ^4He з концентрацією ^3He до 15%.

У цій суміші кварцові камертони можуть викликати випромінювання не лише першого, а й другого звуку [103, 108], а також теплову хвилю [109]. Річ у тім, що теплопередача в надплинному розчині ^3He – ^4He має багато незвичайних особливостей. Одна з них полягає в тому, що концентраційні та температурні збудження релаксують як у другій звуковій хвилі, так і в дисипативній дифузійній хвилі [110, 111]. Така багатокомпонентна структура збуджень призводить до складної динаміки взаємодії між твердим тілом (камертоном) та середовищем, що особливо проявляється в умовах низьких температур і великих концентрацій.

Оскільки кожна з цих хвиль має різний характер поширення й поглинання, їх одночасна генерація може викликати складні резонансні ефекти, що, своєю чергою, суттєво впливають на силу зворотного впливу середовища на камертон. Таким чином, аналіз цих процесів потребує

детального врахування граничних умов, температурного режиму та особливостей суміші.

Мета досліджень у цьому розділі — з'ясувати, за яких умов коливання твердої стінки збуджують перший і другий звуки, генерують дисипативну хвилю, а також визначити внески цих процесів у затухання коливань кварцового камертона. Зокрема, увага приділяється порівнянню інтенсивності збудження кожного з типів хвиль залежно від геометрії, частоти та гідродинамічних властивостей розчину [105 – 107].

3.1 Вихідна система рівнянь

Для розв'язання цієї задачі розглянуто зв'язану систему – рідкий гелій і осцилятор, який збуджується камертоном, розташованим у закритій трубці, заповненій гелієм. Розв'язок цих рівнянь дає змогу розглянути генерацію концентраційних і температурних коливань у стоячих хвилях першого і другого звуків та теплової хвилі віброуючими стінками [103] в надплинних розчинах ^3He – ^4He з довільною концентрацією ^3He [39]. Зокрема, розглянуто можливість збудження резонансів другого звуку та вплив теплової дисипативної хвилі [108 – 111] на ці резонанси.

Для того, щоб описати деякі явища, які виникли під час експериментів з кварцовим камертоном, що коливається в надплинних розчинах ^3He – ^4He різних концентрацій, ми пропонуємо використати модель, яка може допомогти описати отримані результати з певною точністю.

Отже, для того, щоб розглянути умови, за яких можуть спостерігатися резонанси першого і другого звуків, розглянемо одновимірну модель обмеженої посудини довжиною L , в якій з одного боку маємо нерухому стінку, а з протилежного – коливну. Ця модель орієнтована на вивчення одночасних збурень колективних мод, залежності розподілу інтенсивності між цими модами залежно від температури і концентрації розчинів, але використання такої моделі не враховує специфічної форми кварцового

камертона і циліндричної форми колби. Ця модель описана в попередньому розділі і представлена на Рис. 2.1.

Рівняння руху рухомої стіни можна описати рівнянням (2.7), з якого випливає рівняння (2.8), що описує рух осцилятора та рух самої рідини.

$$\ddot{x} = -\omega_0^2(x - L) - \gamma\omega_0\dot{x} + \alpha P_0(x = L)e^{-i\omega t} + a_0e^{-i\omega t}$$

Нагадаємо, що тут ω_0 і γ – власна частота і добротність осцилятора, a_0 – амплітуда прискорення, α – параметр взаємодії осциляцій стінки і рідкого гелію. При цьому, тиск із боку гелію $P_0(x = L)$ обчислюється в точці розташування осцилятора $x = L$.

Тепер нам треба визначити взаємний вплив камертона і надплинного гелію, та врахувати при цьому всі можливі колективні моди, які існують в розчинах: перший звук, другий звук, в'язку та дифузійну дисипативні хвилі.

Для цього використовуючи лінійне наближення запишемо повну систему гідродинамічних рівнянь для розчинів ^3He – ^4He :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = v_{\text{eff}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + S_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(q - \frac{z_0}{\rho_0} g \right) = 0, \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu - \frac{z}{\rho} c \right) = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 c_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial g}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

в якій малі відхилення від рівноважного стану позначені символами без індексів, до яких відносяться: ρ – густина, P – тиск, S – ентропія, c – масова

концентрація, хімічні потенціали розчину μ і z , де z обумовлений домішками ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$. Значення в рівноважному стані відмічені підкресленим символом «0», серед яких присутні: S_0 – ентропія одиниці об'єму, ρ_0 – густина, c_0 – масова концентрація. Вираз $V = j/\rho_0$ задає швидкість всього розчину, наявні нормальна та надплинна складові надплинного розчину задають швидкості v_n і v_s відповідно. Густина масового потоку j задається виразом $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s$, і для густини розчину маємо вираз $\rho = \rho_n + \rho_s$. Тепловий потік q і масовий потік g мають звичайний вигляд [18]:

$$q = -T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{z}{\rho_0 T} - \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial}{\partial c} \frac{z}{\rho_0 T} \right) g - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.2)$$

і також:

$$g = -\rho_0 D \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3.3)$$

де κ – коефіцієнт теплопровідності, D – це коефіцієнт дифузії, а параметр k_T – це коефіцієнт термодифузії.

Спільний розв'язок рівнянь (2.8) і (3.1) при заданих граничних умовах дає змогу визначити властивості резонансів, які виникають у системі, що розглядається.

На першому етапі розв'язання розглянемо граничний випадок чистого гелію або суміші з низькими концентраціями. За умовами задачі зовнішній вплив камертона на гелій відбувається лише за рахунок руху твердої стінки без нагрівання або зміни концентрації. Тому, принаймні для розчинів низьких концентрацій, коливання стінки збуджують лише збурення тиску і густини потоку в гелії, а коливання ентропії, концентрації і швидкості відносного руху нормальної і надплинної компонент $w = v_n - v_s$, не збуджуються. Таким чином,

на першому етапі можна розглянути систему рівнянь (2.1) для збурень тиску і швидкості гелію:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = v_{eff} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases}$$

Тут тепер c_1 – швидкість першого звуку в надплинному гелії, v_{eff} – відома комбінація коефіцієнтів в'язкості, що визначають поглинання звуку.

Розв'язок системи рівнянь (2.1) і (2.8) був детально описаний в попередньому розділі, де було отримано явний аналітичний вираз (2.4) і представлено графіки для резонансних кривих, зумовлених першим звуком у надплинному гелії. Зіставлення з експериментом дозволило визначити якісну подібність одержаних аналітичних висновків і експериментальних даних.

3.2 Акустичні резонанси звуку у чистому надплинному гелії

Для опису резонансів другого звуку, які спостерігалися в роботі [12], на першому кроці використаємо отримані в попередньому розділі розв'язки для флуктуацій тиску і швидкості. На другому кроці результуючі флуктуації ентропії та швидкості відносного руху будуть визначатися з повної системи рівнянь (3.1) з граничними умовами, що відповідають рівності всіх потоків нулю на границях робочої області [112].

За відсутності ізотопів гелію – 3 у надплинному розчині, систему рівнянь (3.1) для чистого гелію – 4 запишемо як:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = v_{eff} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \frac{\partial S}{\partial t} + S_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{\kappa}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mu_4 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

В системі (3.4) задано хімічний потенціал гелію-4 μ_4 та коефіцієнт теплопровідності κ .

Тепер виключимо з системи (3.4) всі змінні, окрім тиску та ентропії. Це дозволяє записати перший вираз із (3.4) як рівність

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

Оскільки густина потоку маси може бути записана $j = \rho_n v_n + \rho_s v_s = \rho_0 V$, отримуємо вирази для швидкостей надплинної і нормальної складових Не II:

$$v_s = V - \frac{\rho_n}{\rho_0} w, \quad v_n = V + \frac{\rho_s}{\rho_0} w \quad (3.6)$$

де введено поняття відносної швидкості нормальної та надплинної компонент:

$$w = v_n - v_s \quad (3.7)$$

Тепер, відповідно до рівняння Гіббса – Дюхема маємо

$$d\mu_4 = \frac{1}{\rho_0} dP - \sigma dT = \frac{1}{\rho_0} dP - \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma dP - \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P d\sigma \quad (3.8)$$

Четвертий вираз системи (3.4) використовуючи формулу для швидкості надплинної складової (3.6) представимо у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(V - \frac{\rho_n}{\rho_0} w \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \mu_4 = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma \frac{\partial}{\partial x} T \quad (3.9)$$

де використовуємо друге рівняння з (3.4)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla P = - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho$$

Здобуваємо такий зв'язок для змінних

$$- \frac{\rho_n}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} w = \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} T = \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_\sigma \frac{\partial}{\partial x} P + \sigma_0 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial}{\partial x} \sigma \quad (3.10)$$

Відповідно до співвідношення $S = \rho\sigma$ вираз, що відповідає за опис переносу тепла в (3.4) набуває вигляду:

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} V + \rho_0 \sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} w = \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.11)$$

За сталого тиску справедливе співвідношення для питомої теплоємності

$$C_p = \rho_0 T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_P$$

Що в свою чергу дозволяє записати (3.11) у форматі:

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} w + \sigma_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} V \right) = \frac{\rho_0 \kappa}{C_p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma. \quad (3.12)$$

У отриманому рівнянні (3.12) використовуємо перше рівняння із (3.4), спрощуємо формулу, і, оскільки сума в дужках буде дорівнювати нулю, запишемо:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} w = \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma \quad (3.13)$$

де $\chi = \kappa / C_p$ – коефіцієнт теплопровідності.

Далі виключаємо із рівнянь відносну швидкість w й остаточно здобуємо:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma - c_{2\varepsilon}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{c_1^2} \frac{C_p}{\rho_0^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma. \quad (3.14)$$

Тут β – коефіцієнт теплового розширення, а величина

$$c_{2\varepsilon}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma_0^2 \frac{\rho_0 T}{C_p} \quad (3.15)$$

визначає швидкість другого звуку у чистому надплинному гелії.

Для здобуття другого рівняння виділимо швидкість V . Щоб скласти систему рівнянь скористаємось отриманими виразами (3.5), другим рівнянням системи (3.4), і враховуючи співвідношення $c_1 = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_\sigma}$ отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)_P \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 V_{eff} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.16)$$

Звідки здобуваємо рівняння для тиску

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\rho_0 c_1^2 \beta \frac{\rho_0^2}{C_p} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + v_{eff} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (3.17)$$

та швидкості

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 c_1^2} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Використовуючи безрозмірні величини та систему (3.4) перейдемо до наступної системи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - u_1^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - u_2^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

Де перехід відбувся за формулами $P \rightarrow P / (\rho_0 c_1^2)$ та $\sigma \rightarrow \sigma / (C_p \rho_0)$.

Розв'язок системи (2.19) шукатимемо як функцію $P = P_0 \cos(kx - \omega t)$. Таким чином записуємо систему:

$$\begin{cases} (\omega^2 - u_1^2 k^2) P = -\omega^2 \beta \sigma \\ P = \frac{(\omega^2 - u_2^2 k^2) \sigma \beta}{c_{2\varepsilon}^2 k^2} \end{cases} \quad (3.20)$$

Звідси впливає шукане дисперсійне рівняння, що визначає можливі зв'язки між частотою та хвильовим вектором :

$$(\omega^2 - u_1^2 k^2)(\omega^2 - u_2^2 k^2) = -\omega^2 c_{2\varepsilon}^2 k^2. \quad (3.21)$$

Розв'язуючи це біквдратне рівняння, здобуємо для хвилі першого звуку:

$$(s_1^2 - u_1^2)(u_1^2 - u_2^2) = -u_1^2 c_{2\varepsilon}^2, \quad (3.22)$$

де величина

$$s_1^2 = u_1^2 - \frac{c_1^2}{c_1^2 - c_{2\varepsilon}^2} c_{2\varepsilon}^2 \quad (3.23)$$

що дозволяє записати вираз для другого звуку:

$$(s_2^2 - u_1^2)(s_2^2 - u_2^2) = -s_2^2 c_{2\varepsilon}^2, \quad (3.24)$$

де

$$s_2^2 = u_2^2 + \frac{c_{2\varepsilon}^2}{c_1^2 - c_{2\varepsilon}^2} c_{2\varepsilon}^2. \quad (3.25)$$

Тут введено величини

$$u_1^2 = c_1^2 - i\omega\nu_{eff} \quad (3.26)$$

та

$$u_2^2 = c_{2\varepsilon}^2 - i\omega\kappa/C_p, \quad (3.27)$$

які визначають швидкості відповідно першого та другого звуків, та їхні коефіцієнти поглинання.

Тепер ми можемо з системи (3.16) за допомогою рівнянь (3.17) та (3.18) здобути окремі рівняння для тиску

$$-\omega^2 \left(-\omega^2 P - u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \right) - u_2^2 \left(-\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P - u_1^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} P \right) = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta} \omega^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \quad (3.28)$$

та швидкості

$$-\omega^2 \left(-\omega^2 \frac{\partial}{\partial x} V - u_1^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} V \right) - u_2^2 \left(-\omega^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} V - u_1^2 \frac{\partial^5}{\partial x^5} V \right) = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{\beta} \omega^2 \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} V \quad (3.29)$$

Вважаючи ліву стінку колби непорушною у точці $x = 0$, відповідь до виразу (3.29) розглядатимемо як:

$$V = V_1 \sin(k_1 x) + V_2 \sin(k_2 x) + V_{12} (\cos(k_1 x) - \cos(k_2 x)) \quad (3.30)$$

За допомогою значення (3.30) і другого рівняння в (3.16) знаходимо явний вираз для тиску:

$$P = i\omega\rho_0 \left[-\frac{V_1}{k_1} \cos(k_1 x) - \frac{V_2}{k_2} \cos(k_2 x) + V_{12} \left(\frac{1}{k_1} \sin(k_1 x) - \frac{1}{k_2} \sin(k_2 x) \right) \right] \quad (3.33)$$

Тоді безрозмірна ентропія може бути записана із (3.20) наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{i\omega\rho_0}{\beta} \left[\left(1 - \frac{u_1^2}{s_1^2} \right) \left\{ -\frac{V_1}{k_1} \cos(k_1 x) + \frac{V_{12}}{k_1} \sin(k_1 x) \right\} + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{u_1^2}{s_2^2} \right) \left\{ -\frac{V_2}{k_2} \cos(k_2 x) - \frac{V_{12}}{k_2} \sin(k_2 x) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Шукані амплітуди V_1 , V_2 і V_{12} знаходимо користуючись граничними умовами що описують зміну у відносній швидкості $w = v_n - v_s = 0$ на краях колби в точках $x = 0$ і $x = L$. Остаточно з них випливає, що $V_{12} = 0$, а амплітуда V_2 визначається як

$$V_2 = -\frac{s_2^2}{s_1^2} V_1 \frac{\sin(k_1 L)}{\sin(k_2 L)} = -\frac{s_2^2}{s_1^2} V_1 \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)}. \quad (3.33)$$

Отже для швидкості остаточно здобуваємо таку залежність від координати:

$$V(x) = V_1 \left(\sin(\omega x / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \sin(\omega x / s_2) \right), \quad (3.34)$$

а для тиску таку

$$P = i\omega\rho_0 V_1 \left(-\frac{s_1}{\omega} \cos(\omega x / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \left(-\frac{s_2}{\omega} \right) \cos(\omega x / s_2) \right). \quad (3.35)$$

Тепер ми можемо повернутися до граничної умови біля стінки, що коливається, тобто у точці $x = L$. Величина швидкості з (3.33) має вигляд:

$$V(L) = V_1 \left(\sin(\omega L / s_1) - \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{\sin(\omega L / s_1)}{\sin(\omega L / s_2)} \sin(\omega L / s_2) \right) = V_1 \left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2} \right) \sin(\omega L / s_1) \quad (3.36)$$

а тиск:

$$P(L) = -i\rho_0 V_1 s_1 \cos(\omega L / s_1) \left[1 - \frac{s_2^3}{s_1^3} \frac{\operatorname{tg}(\omega L / s_1)}{\operatorname{tg}(\omega L / s_2)} \right]. \quad (3.37)$$

Наступним кроком, схожим методом, що застосований у другому розділі дисертації, використовуємо ці значення в рівнянні (2.11)

$$(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma)V(L) = i\omega\alpha P(L) + i\omega\alpha_0 \quad (2.11)$$

яке пов'язує амплітуди швидкості та тиску біля правої стінки з амплітудою прискорення цієї стінки. Об'єднуючи отримані результати запишемо формулу,

що описує амплітуду осциляцій швидкості в гелії, якщо його температура знаходиться в наближенні до температури надплинного фазового переходу:

$$V_1 = \frac{i\omega a_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\sin(\omega L/s_1) - \lambda\omega\omega_0 \cos(\omega L/s_1) \left[1 - \frac{s_2^3}{s_1^3} \frac{\text{tg}(\omega L/s_1)}{\text{tg}(\omega L/s_2)}\right]} \quad (3.38)$$

Для того, щоб знайти гідродинамічні параметри, які визначають коливання другого звуку виходимо з рівнянь (3.14) та (3.10), і здобуваємо такі вирази для амплітуд коливань швидкості відносного руху:

$$w(x) = w_0 \frac{\sin(\omega L/s_2)\sin(\omega x/s_1) - \sin(\omega L/s_1)\sin(\omega x/s_2)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\sin(\omega L/s_1)\sin(\omega L/s_2) + \lambda_1} \quad (3.39)$$

і для ентропії одиниці маси:

$$\sigma(x) = \sigma_0 \frac{\sin(\omega L/s_1)\cos(\omega x/s_2)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\omega_0\gamma\right)\left(1 - \frac{s_2^2}{s_1^2}\right)\sin(\omega L/s_1)\sin(\omega L/s_2) + \lambda_1} \quad (3.40)$$

Тут відповідні амплітуди дорівнюють

$$w_0 = i\omega a_0 \frac{\rho_0}{\rho_n} \frac{\sigma_0 T}{c_1^2 \beta} \frac{u_1^2}{s_1^2} \quad (3.41)$$

та

$$\sigma_0 = -s_2 \frac{C_p \omega a_0}{\beta \rho_0 c_1^2}. \quad (3.42)$$

Коефіцієнт

$$\lambda_1 = \lambda \omega \omega_0 \left(\sin(\omega L / s_2) \cos(\omega L / s_1) - \frac{s_2^3}{s_1^3} \sin(\omega L / s_1) \cos(\omega L / s_2) \right) \quad (3.43)$$

описує як розширення резонансів, так і їх зміщення.

Всі ці результати наведено для випадку достатньо малих концентрацій ^3He . У співвідношеннях (3.39) і (3.40) знаменники містять характеристичні резонансні коефіцієнти для самого осцилятора, першого звуку і другого звуку.

Таким чином, ці співвідношення розв'язують проблему можливих резонансів у системі, що розглядається. Зокрема, вони дають змогу дослідити резонанси другого звуку в чистому гелії та в слабких розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$. На Рис.3.1 наведено розрахунки резонансної кривої поблизу основного резонансу другого звуку. Розрахунки зроблено для випадку слабких розчинів ($c < 1\%$) і для області високих температур $T > 1.9\text{ K}$ для певних значень швидкості другого звуку. Розраховані залежності якісно і кількісно збігаються з тими, що спостерігаються в експерименті (див. рис. 8 в [12]).

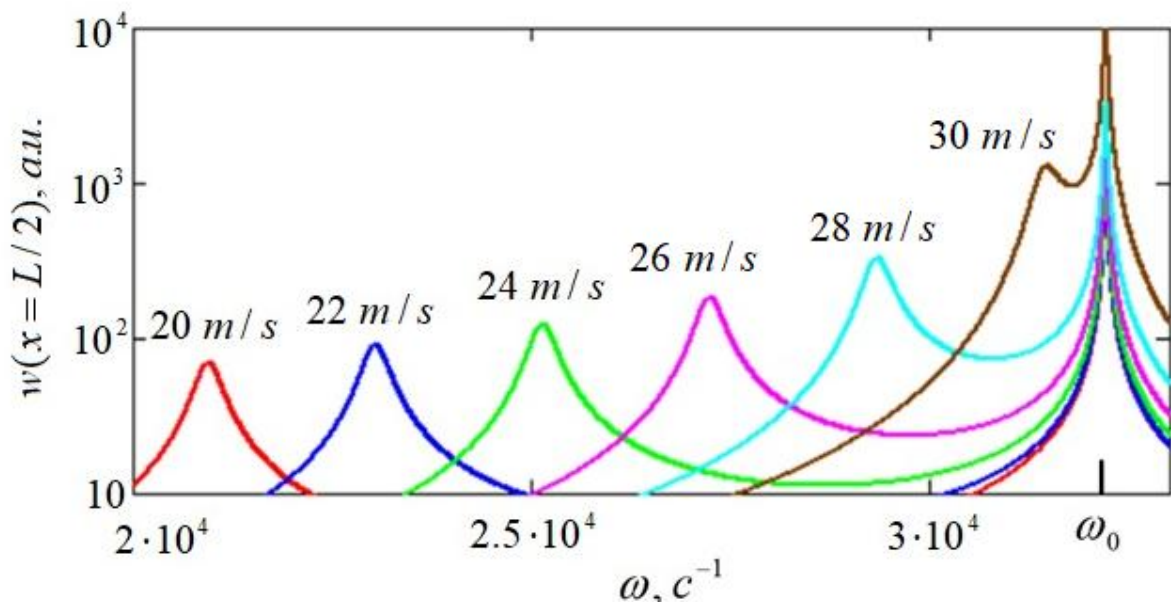


Рис.3.1. Розрахунок за рівнянням (3.39) в координаті $x = L/2$ резонансів другого звуку для різних температур в області T_λ для деяких значень швидкості другого звуку.

У випадку близьких значень частот резонансів вилки і другого звуку (блакитна і коричнева лінії на Рис.3.1) спостерігається перекриття цих резонансів, що пояснює перекриття, яке спостерігається в експерименті [12]. Ми бачимо, що отримані результати підтверджують можливість появи других звукових резонансів у системах камертон – гелій і, крім того, підтверджують кількісні параметри спостережуваних резонансів.

Таким чином, в цьому підрозділі отримано рівняння (3.38) для зв'язаних резонансів коливань замкненого кварцового камертона і стоячої першої звукової хвилі. Це дозволяє отримати вирази (3.39) і (3.40), які враховують існування трьох типів резонансів у системі замкнутий кварцовий камертон – надплинний гелій: пов'язаних з автоколиваннями кварцового камертона і стоячої хвилі другого і першого звуків. Отримані результати дають змогу пояснити експериментально спостережувані явища з [12] і пояснити спостережувані залежності резонансних кривих від температури і тиску.

3.3 Резонанси колективних мод в сумішах ізотопів гелію

Перейдемо до розгляду випадку розчинів ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ з довільними концентраціями [113 – 116].. Експериментальні результати [12] для таких розчинів були отримані в широкому діапазоні температур і тисків, але не мають достатньо повного пояснення спостережуваних результатів.

Для розглядання гідродинамічних резонансів в надплинних сумішах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ врахуємо повний набір гідродинамічних мод цих систем: перший і другий звуку, дифузійну хвилю і в'язку хвилю [108, 111]. Такий підхід дозволяє розглядати суміші з різними концентраціями і, описати виникнення стоячих хвиль змін тиску та ентропії, викликані коливаннями замкненого камертона, а також резонансні характеристики, які виникали в експериментах під час змін у температурі розчинів або зміни тиску гелію.

У результаті цих досліджень буде отримано вирази для зв'язаних резонансів коливань замкненого кварцового камертона і стоячих першої та

другої звукових хвиль. Це дозволить встановити існування трьох типів резонансів у системі замкнений кварцовий камертон – надплинний гелій: пов’язаних з автоколиваннями кварцового камертона та стоячими хвилями другого і першого звуків. Отримані результати дають змогу пояснити експериментально спостережувані явища і пояснити спостережувані залежності резонансних кривих від температури і тиску.

Зокрема, врахування повного набору гідродинамічних мод системи дозволяє пояснити незвичайну поведінку резонансів другого звуку, що спостерігається в експериментах, за рахунок перерозподілу енергії між дисипативною модою і модою другого звуку.

3.3.1 Рівняння для колективних мод

Розглянемо спрощену одновимірну модель [105, 107] посудини, заповненої надплинною сумішшю ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Один кінець посудини закритий нерухомою стінкою, а протилежна стінка з’єднана з лінійним осцилятором, з власною частотою, що дорівнює власній частоті камертона. Ця модель не враховує геометрії камертона і циліндричної колби, в якій він знаходиться. Але вона дозволяє дослідити особливості одночасного збудження колективних мод, а також залежність інтенсивностей цих мод від температури і концентрації розчинів.

Почнемо з повної системи гідродинамічних рівнянь для надплинних сумішей [18] (3.1). Ми використовуємо лінеаризовану одновимірну версію системи (3.1) для знаходження повного набору гідродинамічних режимів у вигляді плоских хвиль. У цьому випадку всі параметри пропорційні множнику $\exp(-i\omega t + ikx)$, де ω – частота, а k – хвильовий вектор. Такими нормальними модами є перший і другий звуки, які мають лінійну залежність частоти від хвильового вектора $\omega \sim k$ і дисипативна дифузона (або теплова) хвиля з квадратичною залежністю частоти від хвильового вектора $\omega \sim k^2$.

Для визначення цих мод виразимо малі відхилення всіх термодинамічних змінних у (1) через відносні малі відхилення тиску $P'/\rho c_1^2$ та ентропії σ'/σ , і отримаємо такі рівняння [103, 111]:

$$\begin{cases} \left[1 - \frac{k^2 c_1^2}{\omega^2} \right] \frac{P'}{\rho c_1^2} = -\bar{c} \frac{1+i\Gamma}{1+i\Gamma\tilde{\sigma}} \frac{\sigma'}{\sigma} \\ \left[\frac{k^2 c_{II}^2}{\omega^2} - 1 \right] \frac{1+i\Gamma}{1+i\Gamma\tilde{\sigma}} \frac{\sigma'}{\sigma} = \bar{c} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{k^2 c_1^2}{\omega^2} \frac{P'}{\rho c_1^2} \end{cases} \quad (3.44)$$

Тут,

$$c_I^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T,c}, \quad c_{II}^2 = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{1+i\Gamma} + c_{2N}^2$$

значення, які визначають швидкість першого і другого звуку в розчинах,

$$c_{2\varepsilon}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\bar{\sigma}^2 T}{c_P}, \quad c_{2N}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} c^2 \left(\frac{\partial(Z/\rho)}{\partial c} \right)_{T,P}, \quad \bar{\sigma} = \sigma(1-\tilde{\sigma}), \quad c_P = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{P,c},$$

значення

$$\tilde{\sigma} = \frac{c}{\sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial c} \right)_{P,T} \quad \text{і} \quad \bar{c} = \frac{c}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{P,T}$$

є безрозмірними похідними за концентрацією.

Параметр Γ визначає дисипативний режим, а також внесок теплопровідності в звукопоглинання:

$$\Gamma = \frac{k^2}{\omega} \frac{\kappa}{c_P}. \quad (3.45)$$

З умови сумісності системи рівнянь (3) отримуємо шукане дисперсійне співвідношення:

$$\left[\frac{\omega^2}{k^2} - c_1^2 \right] \left[c_{II}^2 - \frac{\omega^2}{k^2} \right] = -\xi \frac{\omega^2}{k^2} c_1^2, \quad (3.46)$$

Де коефіцієнт

$$\xi = \bar{c}^2 \frac{\rho_s}{\rho_n}. \quad (3.47)$$

Доданок з коефіцієнтом теплового розширення суміші опускається. Таке наближення справедливе для неслабких ($c > 0.1$) розчинів і дозволяє зосередитися на генерації другої звукової і теплової дисипативної хвилі внаслідок взаємної залежності густини і концентрації, яка кількісно описується величиною $\bar{c} = (c/\rho) (\partial\rho/\partial c)$.

Співвідношення (4), як і слід було очікувати з кількості рівнянь у системі (1), є рівнянням п'ятого порядку щодо частоти ω , а отже, описує п'ять нормальних мод. Аналітичні розв'язки рівняння (4) наведено в наближенні малого коефіцієнта

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{c_{2\varepsilon}^2 + c_{2N}^2}{c_1^2} \ll 1,$$

яка визначається квадратом відношення швидкостей другого і першого звуків і справедлива при будь-якій температурі і концентрації.

Для акустичних режимів, коли $\omega \sim k$, зі співвідношення (4) отримуємо дисперсійні рівняння для першого і другого звуків:

$$\omega^2 = u_{1,2}^2 k^2, \quad (3.48)$$

де

$$u_1^2 = c_1^2(1 + \xi) \quad (3.49)$$

це квадрат швидкості першого звуку, і

$$u_2^2 = \frac{c_2^2}{1 + \xi} \quad (3.50)$$

це квадрат швидкості другого звуку.

П'ятий корінь рівняння (4) відповідає термодисипативній моді, яка характеризується квадратичною залежністю частоти від хвильового вектора:

$$\omega = -i \frac{c_{2N}^2}{c_2^2} \frac{\kappa}{c_P} k^2. \quad (3.51)$$

З цього співвідношення дамо явний вираз для хвильового вектора цієї моди:

$$k = \pm \sqrt{\omega} \frac{c_2}{c_{2N}} \sqrt{\frac{c_P}{\kappa}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \quad (3.52)$$

Щоб розглянути фізичні властивості знайдених нормальних мод, дослідимо залежності між амплітудами термодинамічних змінних у цих модах.

3.3.2 Амплітудні співвідношення в колективних модах

Тепер випишемо співвідношення між амплітудами змінних, які були отримані при переході від початкової системи рівнянь (3.1) до рівнянь (3.44). Отже, флуктуації температури та концентрації повністю визначаються флуктуаціями ентропії:

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \frac{1}{1+i\Gamma\tilde{\sigma}} \frac{\sigma'}{\sigma_0} \quad i \quad \frac{c'}{c_0} = \frac{1+i\Gamma}{1+i\Gamma\tilde{\sigma}} \frac{\sigma'}{\sigma_0}. \quad (3.53)$$

Флуктуації густини визначаються як тиском, так і ентропією в межах коефіцієнта \bar{c} :

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} + \bar{c} G \frac{\sigma'}{\sigma_0}. \quad (3.54)$$

Співвідношення для амплітуд швидкостей виявляються залежними від частоти і хвильового вектора і мають наступний вигляд для швидкості надплинної компоненти:

$$v_s = \frac{k}{\omega} \left[c_1^2 (1 + \bar{c}) \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} - \frac{\rho_n}{\rho_s} c_{II}^2 G \frac{\sigma'}{\sigma_0} \right], \quad (3.55)$$

і для швидкості нормальної компоненти:

$$v_n = \frac{\omega}{k} \left[(1 + \bar{c}) G \frac{\sigma'}{\sigma_0} + \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} \right]. \quad (3.56)$$

Отримані співвідношення (3.53) – (3.56) визначають співвідношення між амплітудами для нормальних мод (6) і (9). Для чистого гелію, зокрема, отримуємо добре відомі результати, коли першим звуком є коливання тиску, другим – коливання ентропії, а дисипативна мода взагалі відсутня. Останній факт визначає відому властивість чистого гелію, в якому неможливо створити стаціонарний градієнт температури.

У сумішах ситуація суттєво змінюється. Зокрема, у другому звуці можуть відбуватися флуктуації густини, а в першому – температури і концентрації.

Для нашої задачі важливо визначити, в якому з режимів переважно відбуваються флуктуації температури і концентрації – в другому звуці чи

тепловому режимі. Використовуючи рівняння (3.53), визначимо відносні амплітуди температури та концентрації у другому звуці та тепловому режимі:

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \frac{1}{1+i\Gamma} \frac{c'}{c_0}. \quad (3.57)$$

З цього співвідношення видно, що в другому звуці відносні амплітуди температури і концентрації мають однаковий порядок і коливаються в протифазі

$$\frac{T'}{T_0} \approx \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \frac{c'}{c_0}. \quad (3.58)$$

У той же час, в тепловому режимі

$$1+i\Gamma = -\frac{c_{2\varepsilon}^2}{c_{2N}^2}. \quad (3.59)$$

Отже, коливання концентрації і температури відбуваються в протифазі, а їх відносна величина визначається співвідношенням між величинами квадратів швидкостей.

Отримані співвідношення для амплітуд мають ще одну особливість, яка є критично важливою для задачі, що розглядається в цій роботі. Це наявність у знаменниках (11) величини, яка може бути близькою до нуля лише для дифузної моди:

$$1+i\Gamma \tilde{\sigma} = 1 - \frac{c_2^2}{c_{2N}^2} \tilde{\sigma} \approx 0 \quad \text{or} \quad \tilde{\sigma} \approx \frac{c_{2N}^2}{c_2^2}. \quad (3.60)$$

При виконанні цього співвідношення основна частина енергії від зовнішньої сили (камертона) переходить в дисипативний режим, тобто резонанс другої звукової стоячої хвилі зникає.

Дослідимо залежність відношення квадратів швидкостей у (18) від температури і концентрації. На рисунку 1 показано лінії постійного відношення c_{2N}^2/c_2^2 на площині cT . Отже, ми можемо визначити умови з необхідним співвідношенням між c_{2N}^2 і c_2^2 .

Зокрема, на рисунку наведено розрахунок відношення квадратів швидкостей для досить малого значення $1/4$, яке можна порівняти за величиною з параметром. З рисунка видно, що для розчинів зі значною концентрацією 1–2% можна досягти рівності (18) при температурах від 1,6 К до 2 К. Такий діапазон температур і концентрацій відповідає області, в якій зникав резонанс другого звуку в експериментах [12].

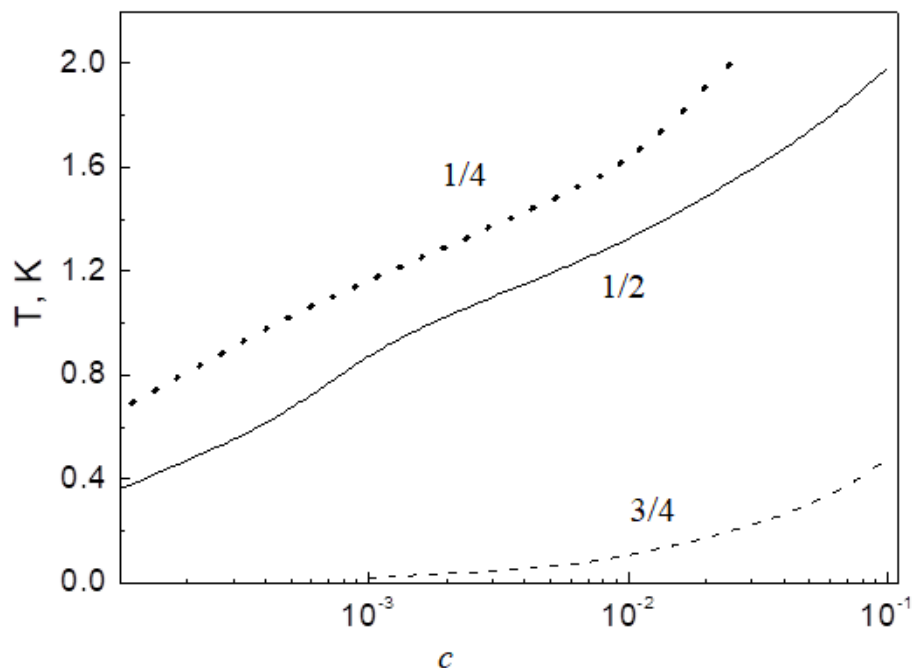


Рис. 3.2 Криві постійної залежності між c_{2N}^2 і c_2^2 . Штрихова крива відноситься до $c_{2N}^2/c_2^2 = 3/4$, суцільна крива – до $c_{2N}^2/c_2^2 = 1/2$, і пунктирна – до $c_{2N}^2/c_2^2 = 1/4$.

Таким чином у підрозділі досліджено збудження концентрації і температури в першій і другій хвилях довільною концентрацією ^3He . Із загальної системи гідродинамічних рівнянь розчинів (1) отримано дисперсійні співвідношення для хвиль першого (7) і другого (8) звуків та для дисипативної теплової хвилі (9). Визначено співвідношення між амплітудами в цих модах (11) – (14). Розв’язано задачу про втрату енергії коливною стінкою та утворення резонансів у всіх нормальних модах і знайдено співвідношення між амплітудами, які визначають втрату енергії в тепловій хвилі та другій звуковій хвилі (15).

Нарешті, ми показали, що врахування дисипативної моди може пояснити зникнення резонансів другого звуку, які спостерігаються в експерименті [12]. Співвідношення (11) показує, що при певних значеннях параметрів розчину, коли знаменник близький до нуля, ентропійні коливання, характерні для другого звуку, відсутні, але збуджуються температурні та концентраційні коливання, характерні для дисипативної моди. Таким чином, енергія коливаний камертона розсіюється в цій тепловій хвилі і не збуджує стоячу хвилю другого звуку.

3.4 Висновки до розділу

У цьому розділі досліджено резонансне збудження акустичних хвиль — першого та другого звуків — у надплинних сумішах $^3\text{He} - ^4\text{He}$. Для цього проаналізовано температурні й тискові коливання з метою визначення умов, що визначають збурення другого звуку у надплинному гелії в наслідок осциляцій твердої стінки, і визначено впливу цих механізмів на виникнення резонансу під час коливаний замкненого камертона..

Для опису гідродинамічних резонансів у надплинних сумішах $^3\text{He}-^4\text{He}$ враховано повний спектр гідродинамічних мод системи: перший і другий звуки, дифузійну та в’язку хвилі. Такий підхід дає змогу розглядати суміші з різними концентраціями і пояснити експериментально спостережуване збудження стоячих хвиль тиску та ентропії в результаті коливаний замкненого

камертона, а також вивчити залежність резонансних характеристик від температури і тиску гелію.

У результаті отримано вирази для зв'язаних резонансів між коливаннями замкненого кварцового камертона та стоячими хвилями першого й другого звуків. Це дозволило виявити існування трьох типів резонансів у системі “замкнений кварцовий камертон — надплинний гелій”: автоколивань самого камертона, а також стоячих хвиль другого й першого звуків. Отримані результати дали змогу пояснити ряд експериментально зафіксованих явищ, зокрема характер залежностей резонансних кривих від температури й тиску.

Особливо важливо, що врахування повного набору гідродинамічних мод системи дозволило пояснити нетривіальну поведінку резонансів другого звуку, яку спостерігають у низці експериментів.

Зокрема, проведений аналіз переконливо демонструє, що включення до моделі дисипативної моди дає змогу пояснити експериментально зафіксоване зникнення резонансів другого звуку [12]. Як видно з виразу (11), у певному діапазоні параметрів розчину виникає особливий режим, коли знаменник наближається до нуля. У цьому випадку ентропійні збурення, притаманні другому звуку, ефективно пригнічуються, натомість домінують температурні та концентраційні коливання, характерні для дисипативної теплової моди. Як наслідок, енергія, передана камертонами, не реалізується у вигляді стоячої хвилі другого звуку, а повністю розсіюється у формі теплової дисипації. Це дозволяє з високою точністю інтерпретувати відсутність акустичних резонансів у ряді експериментальних умов.

РОЗДІЛ 4. КІНЕТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СУМІШЕЙ ^3He – ^4He

На наступному етапі дослідження будуть враховуватися не лише акустичні хвилі, але й дисипативні моди, зумовлені процесами дифузії та теплопровідності у надплинних розчинах ізотопів гелію. Особливу увагу буде приділено аналізу взаємодії цих мод із коливаннями середовища, що дозволить краще зрозуміти механізми енергетичних втрат у таких системах.

Для переходу до наступного етапу в цьому розділі ми детально розглянемо особливості дифузійного руху домішок у розчинах гелію [117] та виведемо явні аналітичні вирази для відповідних дисипативних коефіцієнтів.

4.1 Вступ до розділу

Ідея та феноменологічний опис дифузії дефектів у надплинному гелії а також у кристалічній ґратки у квантових кристалах вперше була запропонована в роботах [81, 82], де домішкові атоми розглядалися як делокалізовані квазічастинки, що практично вільно рухаються крізь речовину. Так, у роботі [81] було запропоновано квантову дифузію домішкових атомів. Також у [81] передбачено квантову дифузію домішкових атомів у твердих розчинах ізотопів гелію.

В оригінальній моделі [83, 84] припускається, що слабкі розчини ^3He і ^4He можна розглядати як майже ідеальний газ квазічастинок ^3He – домішок у матриці квантового кристала ^4He , або всередині рідкого гелію. У цьому випадку квантова природа цього явища зводиться до можливості вільного руху домішкових атомів, що визначається ефектом безперервного тунелювання, зумовленого перекриттям хвильових функцій сусідніх атомів ^3He і ^4He та періодичністю кристалічної ґратки. Кінцеве значення коефіцієнта дифузії в цьому випадку визначається взаємодією домішок між собою і з тепловими збудженнями ґратки – фононами.

Таким чином, процес квантової дифузії, принаймні для слабких розчинів при досить низьких температурах, можна описати як звичайну дифузію в

двокомпонентному газі домішок і фононів. Ця ситуація є одним із переконливих прикладів застосування квазічастинкового підходу, коли систему частинок із сильною взаємодією можна описати в моделі слабо взаємодіючих (і нелокалізованих) квазічастинок – фононів і домішок.

На користь квазічастинкової інтерпретації свідчить також порівняння температурних і концентраційних залежностей коефіцієнтів дифузії та теплопровідності в області значної взаємодії фонон–домішка [85 – 88]. Зокрема, для коефіцієнта дифузії ця взаємодія призводить до сильної температурної залежності (T^{-9}) коефіцієнта дифузії. Ця залежність вперше спостерігалася в роботах [89 – 92], що дозволило провести якісне порівняння з теорією [81] і підтвердити застосовність квазічастинкової моделі.

У цьому розділі дисипативні властивості твердих та рідких розчинів ^3He – ^4He : коефіцієнти дифузії, самодифузії та теплопровідності, розглянуто методами газокінетичної теорії в моделі суміші слабо взаємодіючих з газом квазічастинок – фононів та домішок. Наведено обговорення залежностей і параметрів квазічастинок, що спостерігаються в експериментах зі спінової релаксації, теплопередачі та розділення розчинів.

4.2 Дифузія і теплопровідність у трикомпонентному газі квазічастинок

Визначення коефіцієнтів дифузії є традиційною кінетичною задачею для сумішей класичних газів і конденсованих середовищ, для яких справедливий квазічастинковий опис. У газокінетичному підході для сумішей квазічастинок коефіцієнт дифузії обчислюють, використовуючи поняття функцій розподілу квазічастинок, для яких складають систему кінетичних рівнянь. Розв'язання такої системи є досить складним і тому для її розв'язання використовують різні наближення. У цій роботі для розв'язання системи трьох кінетичних рівнянь використано матричний метод, який дає змогу отримати явний і компактний вираз для коефіцієнтів дифузії та теплопровідності, що містять часи взаємодії різних квазічастинок.

4.2.1 Розв'язок системи кінетичних рівнянь

Для створення узагальненої моделі кінетичних властивостей розчинів ізотопів гелію розглянемо, як приклад, тверді розчині, що дозволить обговорити не тільки процеси масової дифузії та теплопровідності, а також й процеси самодифузії та спінової дифузії.

Розглянемо квазістаціонарний нерівноважний стан твердого розчину ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, в якому координатними функціями є кількість домішок в одиниці об'єму з різними спіновими проекціями n_\uparrow і n_\downarrow , загальна кількість домішок $n_i = n_\uparrow + n_\downarrow$, а також густина фононів і температура суміші, пов'язана з цією густиною.

Властивості досліджуваного розв'язку описуються стаціонарними кінетичними рівняннями, що містять функції розподілу фононів f_{ph} та домішок з різними спіновими проекціями f_\uparrow і f_\downarrow , а також відповідні інтеграли зіткнень [118] $J_{kl}(f_k, f_l)$:

$$\mathbf{v}_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} = \sum_l J_{kl}(f_k, f_l). \quad (4.1)$$

Тут індекси k та l набувають трьох різних значень \uparrow , \downarrow та ph . Розв'язок системи (4.1) у випадку малого відхилення від стану рівноваги шукається у вигляді

$$f_k = f_k^{(0)} - f_k^{(0)'} g_k, \quad (4.2)$$

де $f_k^{(0)}$ – локально рівноважна функція розподілу, в якій параметри n_\uparrow , n_\downarrow і T залежать від координати, а проміжок позначає похідну за аргументом.

Враховуючи малу величину відхилення від стану рівноваги, з співвідношень (4.1) отримуємо систему лінійних інтегральних рівнянь для визначення g_k :

$$\mathbf{v}_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} = \sum_l I_{kl} \mathbf{g}_l + \sum_{l \neq k} I_{kl} \mathbf{g}_k, \quad (4.3)$$

де I_{kl} – лінеаризовані інтеграли зіткнень.

Дія операторів I_{kl} на довільну функцію імпульсу $\psi(\mathbf{p}_{k,l})$ визначається конкретною формою інтеграла зіткнень. Для інтеграла бінарних зіткнень з густиною ймовірності переходу $W_{kl}(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l | \mathbf{p}'_k; \mathbf{p}'_l)$ маємо

$$\begin{aligned} I_{kl} \chi(\mathbf{p}_{k,l}) &= \int W_{kl}(\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l | \mathbf{p}'_k, \mathbf{p}'_l) f_l^{(0)}(\mathbf{p}_l) \{1 \pm f_k^{(0)}(\mathbf{p}_k)\}^{-1} \times \\ &\times \{1 \pm f_k^{(0)}(\mathbf{p}'_k)\} \{1 \pm f_l^{(0)}(\mathbf{p}'_l)\} \{ \chi(\mathbf{p}'_{k,l}) - \chi(\mathbf{p}_{k,l}) \} d\Gamma_l d\Gamma'_k d\Gamma'_l \end{aligned} \quad (4.4)$$

при $k \neq l$,

$$\begin{aligned} I_{kk} \chi(\mathbf{p}_k) &= \int W_{kk}(\mathbf{p}_k, \mathbf{p} | \mathbf{p}'_k, \mathbf{p}') f_k^{(0)}(\mathbf{p}) \{1 \pm f_k^{(0)}(\mathbf{p}_k)\}^{-1} \{1 \pm f_k^{(0)}(\mathbf{p}'_k)\} \times \\ &\times \{1 \pm f_k^{(0)}(\mathbf{p}')\} \{ \chi(\mathbf{p}'_k) + \chi(\mathbf{p}_k) - \chi(\mathbf{p}_k) - \chi(\mathbf{p}) \} d\Gamma d\Gamma'_k d\Gamma' \end{aligned} \quad (4.5)$$

при $k = l$. Знаки плюс і мінус відносяться до бозонів і ферміонів відповідно.

Систему трьох рівнянь (4.1) зручно записати у вигляді

$$I|g\rangle = |\varphi\rangle, \quad (4.6)$$

де I – матриця операторів з наступними елементами:

$$(I)_{ik} = \delta_{ik} \sum_j I_{ij} + (1 - \delta_{ik}) I_{ik} \quad (4.7)$$

$|g\rangle$ та $|\varphi\rangle$ – тривимірні вектори з компонентами

$$|g\rangle_i = g_i, \quad |\varphi\rangle_i = \mathbf{v}_i \partial f_i^{(0)} / \partial \mathbf{r}, \quad i = \uparrow, \downarrow, ph. \quad (4.8)$$

Скалярний добуток введених векторів визначається співвідношенням

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_k \langle \varphi_k | \chi_k \rangle = - \sum_k \int \varphi_k^* \chi_k f_k^{(0)'} d\Gamma_k. \quad (4.9)$$

У прийнятих позначеннях густину імпульсного потоку можна записати у вигляді

$$\mathbf{j}_k = \langle \mathbf{p}_k | g_k \rangle, \quad (4.10)$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (4.6) згідно з альтернативою Фредгольма можна виділити у просторі власних векторів ермітового оператора I підпростір векторів $|J\rangle$ з нульовими власними значеннями

$$I|J\rangle = 0, \quad (4.11)$$

Відомо, що вектори $|J\rangle$ утворюють підпростір інваріантів зіткнень. За основу цього підпростору візьмемо ортонормовану множину векторів, що відповідає збереженню кількості домішок $|J_N\rangle$, енергії $|J_\varepsilon\rangle$ та імпульсу $|J_p\rangle$:

$$|J_N\rangle = \left(\frac{T}{n_i}\right)^{1/2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad |J_\varepsilon\rangle = (C_V)^{-1/2} \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_\uparrow \\ \tilde{\varepsilon}_\downarrow \\ \varepsilon_{ph} \end{vmatrix}; \quad |J_p\rangle = (3\rho_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} \mathbf{p}_\uparrow \\ \mathbf{p}_\downarrow \\ \mathbf{p}_{ph} \end{vmatrix} \quad (4.12).$$

Тут $\rho_n = \frac{1}{3} \sum_k \langle \mathbf{p}_k | \mathbf{p}_k \rangle = \rho_\uparrow + \rho_\downarrow + \rho_{ph}$ – повна густина квазічастинок;

$C_V = C_\uparrow + C_\downarrow + C_{ph}$ – теплоємність суміші; $\tilde{\varepsilon}_{\uparrow,\downarrow} = p_{\uparrow,\downarrow}^2/2m - \langle \varepsilon_i \rangle$ – енергія домішки, виміряна від її середнього значення

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \langle \varepsilon_\uparrow \rangle = \langle \varepsilon_\downarrow \rangle = \langle \varepsilon_i | 1 \rangle / \langle 1 | 1 \rangle. \quad (4.13)$$

Введемо оператор–проектор P_c на підпростір інваріантів зіткнень і оператор–проектор P_n на підпростір, ортогональний до нього:

$$P_c = |J_N\rangle\langle J_N| + |J_\varepsilon\rangle\langle J_\varepsilon| + |J_p\rangle\langle J_p|; \quad P_n = 1 - P_c \quad (4.14)$$

Згідно з рівнянням (4.11), вектори $|J\rangle$ є розв'язком рівняння (4.6) з правою частиною, що дорівнює нулю. При цьому шуканий вектор $|g\rangle$ належить підпростору P_n . З умов

$$P_c |g\rangle = 0 \quad (4.15)$$

Отримуємо

$$\sum_k \langle p_k | g_k \rangle = \sum_k j_k = 0. \quad (4.16)$$

Співвідношення (4.16) має простий фізичний зміст: під час дифузії повна густина потоку газу квазічастинок дорівнює нулю.

Далі зауважимо, що оператор, обернений до I , визначений лише в підпросторі P_n , де власні значення відмінні від нуля. В результаті розв'язок рівняння (4.6) можна записати у вигляді

$$|g\rangle = (P_n I P_n)^{-1} |\varphi\rangle. \quad (4.17)$$

Для отримання загальних співвідношень, що визначають коефіцієнти спінової, масової та теплової дифузії, а також теплопровідності, вектор $|\varphi\rangle$ слід представити у вигляді суми трьох доданків, що містять відповідно градієнт концентрації домішок з вибраним напрямком спіну

$$x_{\uparrow} = n_{\uparrow}/n_i \quad \text{и} \quad x_{\downarrow} = 1 - x_{\uparrow} = n_{\downarrow}/n_i, \quad (4.18)$$

градієнт n_i і градієнт T . Виходячи з (4.8) після відносно простих, але досить громіздких перетворень, маємо

$$|\varphi\rangle = \frac{T}{m} |\varphi_s\rangle \frac{\nabla x_{\uparrow}}{x_{\uparrow}} + \frac{T}{m} |\varphi_m\rangle \frac{\nabla n_i}{n_i} + |\varphi_T\rangle \frac{\nabla T}{T}, \quad (4.19)$$

де

$$|\varphi_s\rangle = \rho_{\downarrow}^{-1} \begin{vmatrix} \rho_{\downarrow} p_{\uparrow} \\ -\rho_{\uparrow} p_{\downarrow} \\ 0 \end{vmatrix}; \quad |\varphi_m\rangle = \rho_n^{-1} \begin{vmatrix} \rho_{ph} p_{\uparrow} \\ -\rho_{ph} p_{\downarrow} \\ -\rho_i p_{ph} \end{vmatrix}; \quad |\varphi_T\rangle = \begin{vmatrix} \tilde{\varepsilon}_{\uparrow} v_{\uparrow} - \frac{\bar{S}T}{\rho_n} p_{\uparrow} \\ \tilde{\varepsilon}_{\downarrow} v_{\downarrow} - \frac{\bar{S}T}{\rho_n} p_{\downarrow} \\ \tilde{\varepsilon}_{ph} v_{ph} - \frac{\bar{S}T}{\rho_n} p_{ph} \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

це вектори, що визначають коефіцієнти спінової, масової дифузії, а також теплової дифузії та теплопровідності відповідно.

При отриманні (4.20) доданки в (4.19), що містять ∇n_i і ∇T , були перетворені таким чином, щоб вектори $|\varphi_m\rangle$, $|\varphi_T\rangle$ і $|\varphi_s\rangle$ належали простору P_n . Тільки в цьому випадку інтегральне рівняння (4.6) матиме однозначний розв'язок, а визначення дисипативних коефіцієнтів відповідатиме гідродинамічному наближенню.

4.2.2 Визначення дисипативних коефіцієнтів

Для знаходження коефіцієнтів дифузії обчислимо густину потоку домішок зі спіном \uparrow , яку, згідно з (4.6), (4.10) та (4.17), зручно записати у вигляді

$$j_{\uparrow} = \langle p_{\uparrow}; 0; 0 | P_n | g \rangle = \langle p_{\uparrow}; 0; 0 | P_n (P_n I P_n)^{-1} | \varphi \rangle. \quad (4.21)$$

Підстановка (4.19) в (4.21) дає

$$j_{\uparrow} = \frac{T}{m} \langle p_{\uparrow}; 0; 0 | P_n | \chi_S \rangle \frac{\nabla x_{\uparrow}}{x_{\uparrow}} + \frac{T}{m} \langle p_{\uparrow}; 0; 0 | P_n | \chi_D \rangle \frac{\nabla n_i}{n_i} + \langle p_{\uparrow}; 0; 0 | P_n | \chi_T \rangle \frac{\nabla T}{T}, \quad (4.22)$$

де

$$| \chi_{S,m,T} \rangle = (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_{S,m,T} \rangle. \quad (4.23)$$

Середня швидкість $u_{\uparrow} = j_{\uparrow} \rho_{\uparrow}^{-1}$ дисипативного потоку іспуритонів зі спіном \uparrow пов'язана з коефіцієнтами спінової D_S і масової D_m дифузії та коефіцієнтом теплової дифузії κ_T рівністю

$$\mathbf{u}_{\uparrow} = -D_S \frac{\nabla x_{\uparrow}}{x_{\uparrow}} - D_m \frac{\nabla n_i}{n_i} - D_m \frac{k_T}{c} \frac{\nabla T}{T}, \quad (4.24)$$

де $c = m_3 n_i / (m_3 n_i + m_4 n_4)$ – масова концентрація, n_4 – густина ${}^4\text{He}$; m_3 , m_4 – маса атомів ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, відповідно. У цьому випадку для дисипативної швидкості потоку $\mathbf{u}_i = (\mathbf{j}_{\uparrow} + \mathbf{j}_{\downarrow}) \rho_i^{-1}$ домішкового газу маємо

$$\mathbf{u}_i = -D_m \frac{\nabla n_i}{n_i} - D_m \frac{k_T}{c} \frac{\nabla T}{T}. \quad (4.25)$$

Визначення (4.25) узгоджується з визначенням, прийнятим для надплинних розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$ [18].

Враховуючи, що

$$\langle \mathbf{p}_\uparrow; 0; 0 | P_n = \langle \mathbf{p}_\uparrow; 0; 0 | (1 - P_c) = \frac{\rho_\downarrow}{\rho_i} \langle \varphi_s | + \frac{\rho_\uparrow}{\rho_i} \langle \varphi_m |, \quad (4.26)$$

з виразів (4.24) – (4.26) отримуємо

$$D_s = -\frac{T}{m} \frac{\rho_\uparrow}{\rho_\downarrow} \frac{1}{\rho_i} \langle \varphi_s | (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_s \rangle; \quad (4.27)$$

$$D_m = -\frac{T}{m} \left(\frac{\rho_T}{\rho_N} \right)^2 \frac{1}{\rho_i} \langle \varphi_m | (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_m \rangle; \quad (4.28)$$

$$D_m k_T = -\frac{c}{\rho_i} \langle \varphi_m | (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_T \rangle. \quad (4.29)$$

Аналогічні міркування для розрахунку теплового потоку дають вирази для коефіцієнта теплопровідності:

$$\kappa = -\langle \varphi_T | (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_T \rangle. \quad (4.30)$$

У співвідношеннях (4.27) – (4.30) враховано, що елементи матриці задовольняють виразу

$$\langle \varphi_s | (P_n I P_n)^{-1} | \varphi_{m,T} \rangle = 0. \quad (4.31)$$

Останнє випливає з міркувань симетрії, згідно з якими коефіцієнти дифузії не змінюються зі зміною напрямку осі квантування.

4.2.3 Часи релаксації та явні вирази для дисипативних коефіцієнтів

Процедуру визначення матричних коефіцієнтів, що входять у співвідношення (4.27) – (4.30), докладно описано в [118]. У результаті розрахунків отримано явні вирази для дисипативних коефіцієнтів як функцій часу взаємодії квазічастинок. Зокрема, для коефіцієнта самодифузії

$$D_s = \frac{2\langle \varepsilon_i \rangle}{3m} (\tau_{ii}^{-1} + \tau_{iph}^{-1}), \quad (4.32)$$

для коефіцієнта масової дифузії

$$D_m = \frac{2\langle \varepsilon_i \rangle}{3m} \left(\frac{\rho_{ph}}{\rho_n} \right)^2 \tau_{iph}, \quad (4.33)$$

і для коефіцієнта теплопровідності

$$\kappa_F = \frac{S_{ph}^2 T}{\rho_{ph}} \tau_{phi}. \quad (4.34)$$

У ці співвідношення вводиться час взаємодії між домішками,

$$\tau_{ii}^{-1} = \tau_{\downarrow\uparrow}^{-1} + \tau_{\uparrow\downarrow}^{-1}, \quad (4.35)$$

і швидкості зіткнення k -квазічастинки з l -квазічастинкою визначаються наступним чином:

$$\tau_{kl}^{-1} = -\rho_k^{-1} \frac{1}{3} \langle \mathbf{p}_k | I_{kl} | \mathbf{p}_l \rangle = -\rho_k^{-1} \frac{1}{3} \langle \mathbf{p}_k | I_{kl} | \mathbf{p}_l \rangle \quad (4.36)$$

У цьому випадку із закону збереження імпульсу при взаємодії квазічастинок випливає співвідношення між швидкостями

$$\tau_{kl}^{-1} = \frac{\rho_l}{\rho_k} \tau_{lk}^{-1}. \quad (4.37)$$

Отримані результати (4.33), (4.34) і (4.35) дають змогу обговорити якісні та кількісні особливості процесів дифузії та теплопровідності, а також проаналізувати експериментальні дані.

4.3 Обговорення результатів зі спінової дифузії

Спінову дифузію атомів ${}^3\text{He}$ можна розглядати як самодифузію в газі домішок, коли він містить домішки різних типів, наприклад, з протилежними проекціями спінів на задану вісь.

Для слабких розчинів в області відносно високих температур домішковим коефіцієнтом зіткнень τ_{ii}^{-1} в (4.38) можна знехтувати. Тоді D_s в основному визначається дифузією домішок у фононному газі з коефіцієнтом

$$D_{iph}^{(s)} = \frac{2\langle \varepsilon_i \rangle}{3m} \tau_{iph}. \quad (38)$$

При обчисленні скалярних добутків, що входять у (4.38), інтеграли беруться в межах ширини енергетичної зони домішки Δ_i . В результаті співвідношення (4.38) дає

$$D_{iph}^{(s)} = \frac{2}{5} \frac{\Delta_i}{m_i} \tau_{iph}. \quad (4.39)$$

Результат (4.39) відрізняється від коефіцієнта дифузії (4.32) у фононно-домішковій системі рідких розчинів ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. По-перше, скінченна ширина

енергетичної зони домішок у твердому розчині призводить до заміни T на Δ_i при $T \gg \Delta_i$. По-друге, D_m містить множник, який враховує співвідношення густин.

Розглянемо температурну залежність коефіцієнта $D_{iph}^{(s)}$, зумовлену дисипативним потоком фононів, спрямованих назустріч дифузійному потоку домішок так, що сумарний потік дорівнює нулю. Для цього, використовуючи закон збереження імпульсу, запишемо τ_{iph} у вигляді

$$\tau_{iph} = \tau_{phi} \rho_i / \rho_{ph} . \quad (4.40)$$

Тут, згідно з визначенням густини,

$$\rho_i = \frac{2}{5} \frac{\Delta_i}{T} n_i m_i , \quad (4.41)$$

$$\rho_{ph} = \frac{2\pi^2}{15} \frac{T^4}{u^5} . \quad (4.42)$$

де u – середня швидкість поздовжніх і поперечних звуків у твердому гелії. Підстановка (4.42) і (4.41) у (4.40) дає

$$D_{iph}^{(s)} = \frac{4}{25} \frac{\Delta_i^2}{T} \frac{n_i}{\rho_{ph}} \tau_{phi} . \quad (4.43)$$

Тут час τ_{phi} має залежність T^{-4} , характерну для релеївського розсіяння, а ρ_{ph} , згідно з (42), пропорційна до T^4 . В результаті, згідно з (4.43), $D_{iph}^{(s)} \propto T^{-9}$.

Така сильна температурна залежність була вперше отримана в роботі [81] на основі феноменологічних міркувань. Згідно з (4.43), температурна

залежність $D_{iph}^{(s)}$ визначається лише τ_{phi} . При цьому з (4.39) – (4.43) випливає, що вісім ступенів температури пов'язані з фононами, а один – з нормальною густиною домішок (4.41).

Така інтерпретація температурної залежності відрізняється від феноменологічної інтерпретації, яка була дана як в оригінальній роботі про дифузію в квантових кристалах [81], так і в наступних оглядах [83, 84]. Крім того, вирази (4.39) і (4.43) відрізняються своїми позначеннями від результатів, наведених у роботі [89]. Зокрема, співвідношення (4.4) містить параметри, які можна визначити з незалежних експериментів.

Для цього звернемося до співвідношення (4.34) для коефіцієнта теплопровідності у фононно–домішкковій системі. У розглянутому випадку низьких температур і концентрацій співвідношення (4.34) з використанням (4.42) можна записати у вигляді

$$\kappa_F = u^4 \frac{\rho_{ph}}{T} \tau_{phi} = \frac{2\pi^2 T^3}{15 u} \tau_{phi} \quad (4.44)$$

Таким чином, характерний час, що входить у (4.43), можна знайти з даних про теплопровідність твердих розчинів ізотопів гелію [119]. Обробка цих результатів дає наступний вираз для часу фонон–домішкової взаємодії:

$$\tau_{phi} = 8,96 \cdot 10^{-11} T^{-4} x^{-1}. \quad (4.45)$$

З експериментів зі швидкістю звуку в твердому гелії ми визначаємо значення u , а потім густину фононів. Таким чином, права частина (4.39) містить єдиний невідомий параметр.

Числове значення Δ можна отримати з експериментальних даних [91] для коефіцієнта домішково–фононної дифузії в розчинах з $x = 6 \cdot 10^{-5}$ і $x = 5 \cdot 10^{-4}$. Для цього запишемо вираз для Δ у вигляді

$$D_s = \left(D_{iph}^{(s)-1} + D_{ii}^{-1} \right)^{-1}, \quad (4.46)$$

де D_{ii} – температурно–незалежний внесок домішкової взаємодії у спінову дифузію, який після узгодження з експериментальними даними [90] виявився рівним $D_{ii} = 2.13 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2 / \text{с}$. Результати узгодження представлені на Рис. 4.1 для сумішей двох концентрацій.

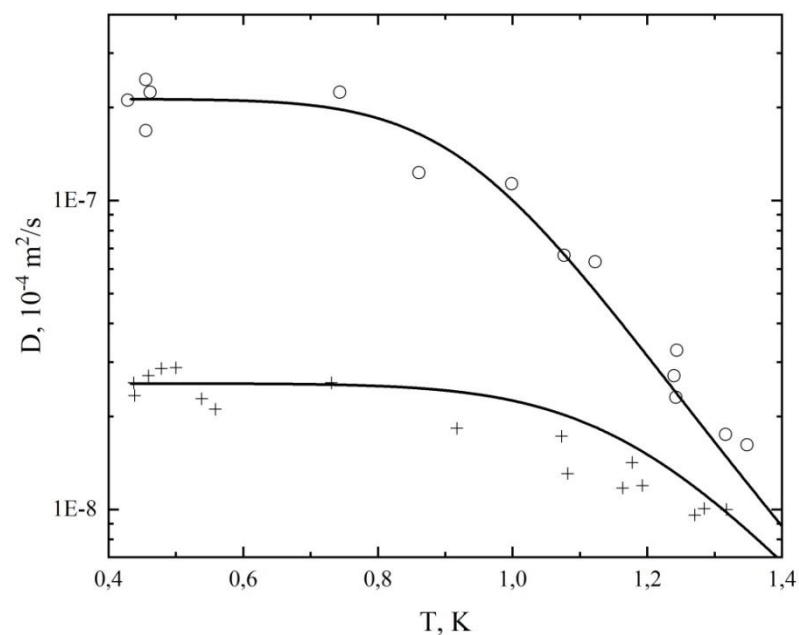


Рис. 4.1. Температурна залежність коефіцієнта спінової дифузії D_s для сумішей двох концентрацій $x = 6 \cdot 10^{-5}$ (кружечки) і $x = 5 \cdot 10^{-4}$ [90]. Суцільні лінії вказують на те, що найкраще відповідає рівнянню (4.47)

Подальше порівняння спостережених і розрахованих значень дає змогу визначити величину домішкової смуги, яка виявилася рівною

$$\Delta = 3.5 \cdot 10^{-4} \text{ К}. \quad (4.47)$$

Отримане значення уточнює результати роботи [90], де наведено лише порядок величини.

4.4 Обговорення інших доказів вільного руху домішок

Ще одним, з нашої точки зору, можливим доказом реального вільного руху квазічастинок домішок ${}^3\text{He}$ крізь твердий кристал ${}^4\text{He}$ є експериментально спостережуване явище надшвидкої гомогенізації пересиченого розчину [120 – 122]. У цих експериментах було виявлено гігантську асиметрію між прямими процесами поділу твердого розчину і зворотним процесом, в якому краплі (тверді або рідкі) чистого ${}^3\text{He}$ розчиняються в твердому кристалі ${}^4\text{He}$. У рамках домішкової моделі квазічастинок розчинення краплі ${}^3\text{He}$ у практично чистому твердому ${}^4\text{He}$ можна розглядати як випаровування вільного газу у вакуум. У цьому випадку на першій стадії вільно рухомі домішки дуже швидко розподіляються по кристалу, а на другій стадії подальше розчинення можна описати в термінах дифузного руху домішкового газу, який характеризується коефіцієнтом масової дифузії D_m (4.33). Зворотний процес, незважаючи на вільний або дифузійний рух домішок з коефіцієнтом D_m , вимагає флуктуаційного утворення і подальшого росту крапель нової фази шляхом додавання окремих домішок. Цей процес є досить повільним, на відміну, наприклад, від випадку рідких пересичених розчинів ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$, де нова фаза (чистий ${}^3\text{He}$) відокремлюється в гравітаційному полі в один макроскопічний шар.

Іншим прикладом фізичного процесу, який може суттєво визначитися вільним рухом домішок, є коливальний рух твердих тіл у розчинах ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$. Одним з них є крутильні коливання в кристалах квантового гелію. Як відомо, при вивченні таких крутильних коливань спостерігалось явище «надтвердого тіла» [123, 124]. З того часу було проведено велику кількість досліджень [125 – 127], поки не вдалося описати фізичну природу цього явища. Нам здається, що проведення аналогічних досліджень у слабких розчинах ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ з відомими особливостями руху домішок може додати додаткові факти для

з'ясування фізичної природи «надтвердого тіла». Ще одна серія експериментів з вивчення коливального руху у квантових середовищах пов'язана з коливаннями кварцових камертонів [5, 6, 7, 21]. Ці експерименти виявилися досить успішними при вивченні цілої низки кінетичних і гідродинамічних властивостей чистого гелію та рідких розчинів ізотопів гелію. Разом з тим, експериментальні [128, 39, 22] і теоретичні [111, 117] дослідження показали, що після переходу від експериментів з чистим гелієм до сумішей часто спостерігалася не тільки нова і несподівана поведінка залежностей спостережуваних величин, а й відкривалися нові явища. З цієї причини автори роботи пропонують продовжити експерименти з вивчення властивостей коливань кварцового камертона не тільки в чистому твердому гелії, а й у слабких твердих розчинах $^3\text{He} - ^4\text{He}$.

4.5 Висновки до розділу

У межах квазічастинкового підходу побудовано газокінетичну модель рідких і твердих розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$ в діапазоні температур і концентрацій, за якого ці системи можна розглядати як суміш двох газів квазічастинок — домішок і фононів. Зокрема, в твердому гелії домішки представлені квазічастинками ^3He , які завдяки ефекту безперервного тунелювання — зумовленого перекриттям хвильових функцій сусідніх атомів ^3He і ^4He та періодичністю кристалічної ґратки — можуть вільно переміщуватись у кристалі.

Розв'язання системи кінетичних рівнянь дозволило отримати явні вирази для коефіцієнтів самодифузії та масової дифузії домішок, а також для коефіцієнта теплопровідності фононно–домішкової системи. Застосування цих виразів дало змогу визначити параметри квазічастинок шляхом порівняння з експериментальними даними з аналізу спінової дифузії та теплопровідності розчинів $^3\text{He} - ^4\text{He}$.

Здобуті явні вирази для дисипативних коефіцієнтів будуть використані в наступних розділах дисертації під час опису експериментальних даних.

РОЗДІЛ 5. ДВОХРЕЖИМНЕ ЗАТУХАННЯ КОЛИВАНЬ КАМЕРТОНА У НАДПЛИННИХ РОЗЧИНАХ ^3He – ^4He

Як ми вже обговорювали це в попередніх розділах, камертон був і залишається не лише об'єктом інтенсивних досліджень, але й методом визначення характеристик гелію [5 – 16], таких як в'язкість, швидкість звуку, нелінійний рух, кавітація тощо. Водночас, хоча більшість експериментально спостережуваних явищ отримали досить коректний теоретичний опис, деякі з них досі залишаються непоясненими. Наприклад, у чистому гелії досить докладно описано загасання камертона і зміну частоти [22, 5, 6]. Врахування генерації першого звуку і в'язкого тертя дозволило описати спостережувані властивості камертона при різних температурах і для досить широкого діапазону розмірів камертона і частот [6 – 14]. Однак у випадку розчину такого задовільного узгодження отримати не вдалося [38, 39].

У цьому розділі дисертації представлено теоретичне дослідження можливих механізмів дисипації енергії, які проявляються в експериментах [22, 38, 39] з кварцовим камертоном у надплинних сумішах ^3He – ^4He з високою концентрацією.

Нагадаємо, що експерименти [38, 39] проводили за різних умов: на закритому і відкритому камертонах, а також у розчинах з різними концентраціями і температурами. Вони показали наявність додаткового демпфування, а врахування ще однієї колективної моди – другого звуку – дало суперечливі результати в інтерпретації цих експериментів.

У цьому розділі ми враховуємо той факт, що в надплинних розчинах, на відміну від чистого гелію, концентраційні та температурні збурення релаксують і поширюються через розчин за двома фізичними механізмами. Один з них – це другий звук, який у чистому гелії спричиняє еволюцію температури та ентропії. Другий механізм – це дифузійна дисипативна хвиля, яка є унікальною для розчинів [40, 108 – 111], і внесок якої до релаксаційних процесів практично завжди залишався неврахованим.

5.1 Основні рівняння

Спочатку наведемо вирази [108 – 111] для релаксації початкового дельтаподібного збурення відносної температури для температури

$$T(x,t) = \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} G^{(Deff)}(x,t) + \frac{1}{2} \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \left(G^{(+)}(x,t) + G^{(-)}(x,t) \right) \quad (5.1)$$

і для концентрації

$$c(x,t) = \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \frac{c_p}{\bar{\sigma}} \left[\frac{1}{2} \left(G^{(+)}(x,t) + G^{(-)}(x,t) \right) - G^{(Deff)}(x,t) \right] \quad (5.2)$$

Тут введено відносно малі зміни температури і концентрації відносно їхніх рівноважних значень $T(x,t) = \delta T(x,t)/T_0$ і $c(x,t) = \delta c(x,t)/c_0$.

При отриманні цих результатів ми використовували співвідношення між амплітудами коливань температури і концентрації у другій звуковій хвилі [106, 129 – 132]

$$c(x,t) = T(x,t) \frac{c_p}{\bar{\sigma}} \quad (5.3)$$

і в дисипативній дифузійній хвилі

$$c(x,t) = -\frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_{2N}^2} \frac{c_p}{\bar{\sigma}} T(x,t) \quad (5.4)$$

Тут, як й в попередніх розділах, $u_2^2 = u_{2\varepsilon}^2 + u_{2N}^2$ це квадрат швидкості другого звуку, c_p це теплоємність, $\bar{\sigma} = \sigma - c \partial \sigma / \partial c$, і σ це ентропія суміші. У рівняннях (5.1, 5.2) ми використовували функцію Гріна

$$G_{D_{eff}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{eff} t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{eff} t}\right), \quad (5.5)$$

що описує релаксацію за рахунок дисипативного механізму ефективної дифузії та функції

$$G_S^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \Gamma_s t}} \exp\left(-\frac{(x \pm u_2 t)^2}{4\Gamma_s t}\right) \quad 5. (6)$$

які описують релаксацію, спричинену поширенням другого звуку. Тут Γ_s коефіцієнт поглинання другого звуку,

$$\Gamma_s = \frac{1}{2} \left(\chi \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \left(1 + \frac{k_T \bar{S}}{C_V c_0} \right)^2 \right), \quad (5.7)$$

і

$$D_{eff} = \frac{\kappa}{c_p} \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \left(1 - k_T \frac{\bar{\sigma}}{c_0 c_p} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2} \right)^2. \quad (5.8)$$

ефективний коефіцієнт дифузії, де κ , D і k_T – коефіцієнти теплопровідності, дифузії та коефіцієнт теплової дифузії відповідно.

Тепер представимо вирази для еволюції концентрації:

$$c(x, t) = \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} G^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \left(G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t) \right) \quad (5.9)$$

і температура

$$T(x, t) = \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \left[\frac{1}{2} (G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t)) - G_{D_{eff}}(x, t) \right] \quad (5.10)$$

у випадку початкового дельта-подібного збурення концентрації.

З рівнянь (5.9, 5.10) і (5.1, 5.2) випливає, що відносний внесок кожної з цих мод у релаксацію суттєво залежить від параметрів розчину, а саме температури і концентрації. Так, при дуже малих концентраціях і досить високих температурах, коли властивості розчину близькі до властивостей чистого гелію, ентропія релаксує по другій звуковій хвилі, а домішки – по дисипативній дифузійній моді. У випадку достатньо низьких температур і достатньо високих концентрацій ситуація може бути протилежною, коли температурні збурення релаксують у дифузійному режимі (у дисипативній тепловій хвилі), а концентраційні – у другій звуковій хвилі.

Зокрема, в розчинах з концентрацією 15% і температурами від 0,4 до 1,5 К, які досліджувалися в роботах [22, 38, 39], реалізується ситуація, в якій відносні внески двох мод стають одного порядку.

5.2 Дві задачі з граничними умовами

Для дослідження коливального камертона в таких розв'язках перейдемо від задачі про еволюцію дельта-подібного початкового збурення, яка необхідна для вивчення довільних початкових збурень, до задачі про випромінювання (і подальше поширення) колективної моди твердою межею при заданих граничних умовах, які є періодичними в часі.

Як першу задачу розглянуто випромінювання стінкою в точці $x = 0$, температура якої змінюється за періодичним законом

$$T(x = 0) = \tilde{T} e^{-i\omega t}, \quad (5.11)$$

і концентрація на межі не порушується

$$c(x=0) = 0. \quad (5.12)$$

Тоді для області $x > 0$ розподіл температури та концентрації в розчині визначається співвідношеннями:

$$T(x, t) = \tilde{T} \left\{ \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} e^{ik_2 x} + \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\} e^{-i\omega t} \quad (5.13)$$

І також

$$c(x, t) = \frac{c_p}{\bar{\sigma}} \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \tilde{T} \left\{ e^{ik_2 x} - e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\} e^{-i\omega t}. \quad (5.14)$$

Тут, $k_2 = \omega / u_2$ хвильовий вектор другого звуку, а

$$\delta_D = \sqrt{\frac{2D_{eff}}{\omega}} \quad (5.15)$$

глибина проникнення або довжина хвилі дисипативної дифузії. Ці співвідношення отримані з відомих співвідношень між амплітудами концентрації і температури в цих режимах та граничних умов (5.11, 5.12).

У випадку суцільної стінки з осцилюючою температурою природніше розглядати інші фізичні граничні умови. Ми повинні забезпечити відсутність домішкового потоку на межі. Якщо розглядати тільки дифузію маси, то отримаємо умову для похідної

$$c'(x=0) = 0. \quad (5.16)$$

В такому випадку ми отримуємо наступний результат для температури і концентрації:

$$T(x,t) = \tilde{T} \left\{ e^{ik_2x} - i \frac{u_{2N}^2 k_2 \delta_D}{u_{2\varepsilon}^2 (1+i)} e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\} e^{-i\omega t} \quad (5.17)$$

і

$$c(x,t) = \frac{c_p}{\bar{\sigma}} \tilde{T} \left\{ e^{ik_2x} + \frac{ik_2 \delta_D}{1+i} e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\} e^{-i\omega t}. \quad (5.18)$$

З цих співвідношень випливає, що одночасно з другим звуком випромінюється також дисипативна хвиля. Ефективність її випромінювання визначається співвідношенням довжин хвиль другого звуку і дифузійної хвилі:

$$k_2 \delta_D = \frac{\omega}{u_2} \delta_D = \frac{2\pi \delta_D}{\lambda_2} \quad (5.19)$$

Нижче ми розглянемо можливі співвідношення між ефективностями випромінювання цих хвиль для конкретного випадку експерименту з камертоном, що коливається.

Як другу задачу розглянемо випромінювання дифузійної моди і другого звуку коливною стінкою із заданою швидкістю коливань границі, як у випадку камертона.

У цьому випадку слід використати граничні умови на потік домішок (5.16) і швидкості нормальної v_n та надплинної v_s компонент гелію

$$v_n(x=0) = v_s(x=0) = V_0 e^{-i\omega t} \quad (5.20)$$

де V_0 – амплітуда коливань стінки.

При такій постановці задачі можна визначити ефективність випромінювання всіх трьох мод: першого звуку, другого звуку і дифузійної хвилі. Нагадаємо, що задачу про одночасне випромінювання першого і другого звуку в чистому гелії та розчинах розв'язано в роботах [105, 107].

5.3 Згасання коливань камертона

У цій роботі ми розглядаємо одночасне випромінювання трьох мод, щоб дослідити їхній внесок у згасання коливань камертона. Для цього використаємо відомі співвідношення між амплітудами гідродинамічних величин у першій і другій звукових хвилях [105, 107], а також врахуємо співвідношення (5.3) і (5.4) для дисипативної дифузійної хвилі. З граничних умов (5.16) і (5.20) отримуємо наступні вирази для збурень температури і концентрації, викликаних коливаннями твердої стінки.

$$T(x,t) = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{c} \frac{V_0}{u_2} \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \left\{ \frac{u_2}{u_1} e^{ik_1x} + e^{ik_2x} - \delta_D k_2 \frac{1+i}{2} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2} e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\}, \quad (5.21)$$

і

$$c(x,t) = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{c} \frac{V_0}{u_2} \left\{ \frac{u_2}{u_1} e^{ik_1x} + e^{ik_2x} + \delta_D k_2 \frac{1+i}{2} e^{-\frac{x}{\delta_D}(1+i)} \right\}. \quad (25.2)$$

Тут $k_1 = \omega / u_1$ це хвильовий вектор першого звуку. Значення

$$\bar{c} = \frac{c}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{T,P} \quad (5.23)$$

визначає «змішування» першого і другого звуків і може мати достатньо великі значення в розчинах, на відміну від чистого гелію, де зв'язок звуків визначається дуже малим коефіцієнтом теплового розширення.

Співвідношення (5.21) і (5.22) дозволяють порівняти інтенсивності випромінювання першого і другого звуків для випромінювання нескінченної плоскої твердої стінки і отримати відомі результати [103, 107]

$$\frac{I_2}{I_1} = \bar{c}^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{u_2}{u_1}. \quad (5.24)$$

При такій геометрії випромінювача ефективність випромінювання другого звуку і дифузійного режиму, безумовно, мала порівняно з першим звуком. В той же час, для коливного камертона інтенсивності випромінювання звуків (акустична тяга) визначаються суттєво іншими співвідношеннями, які обумовлені складною формою камертона. Наприклад, типовий вираз для відносного розширення резонансної кривої акустичного опору в довгохвильовій межі так званої двовимірної моделі камертона має вигляд [104, 16]

$$\frac{\Delta f_a^{(2D)}}{f_0} = C_{2D} \frac{\rho}{m_{eff}} W^2 L_e \frac{3}{64} \left(\frac{2\pi f_0}{u} \right)^4 T^2 (T + D)^2. \quad (5.25)$$

Тут величина m_{eff} – це ефективна маса камертона в гелії, W , L_e , T і D – величини, які визначаються розміром і формою камертона, C_{2D} – геометричний форм–фактор порядку одиниці, f_0 – частота камертона.

Ми бачимо, що ця величина обернено пропорційна четвертому степеню швидкості звуку.

У зв'язку з цим, як було показано в роботах [38, 39], внесок другого звуку в загасання може бути порівняним і навіть переважати над внеском першого звуку. Рівняння (5.25) отримано в [16, 104] для випадку випромінювання першого звуку камертоном у чистому гелії. Аналогічного виразу для випромінювання, зумовленого випромінюванням другого звуку, не отримано

ані для чистого гелію, ані для сумішей. Тобто рівняння (5.25) можна використовувати лише для якісних міркувань (наприклад, з міркувань розмірності) щодо внеску першого і другого звуків в акустичний опір камертона. Такі міркування, зокрема, наведено в роботі [38] для можливого опису спостережуваного в експерименті факту, що внесок другого звуку в демпфування може бути порівняним і навіть переважати над внеском першого звуку.

Водночас у роботах [38, 39] було виявлено різницю в поведінці відкритого камертона і закритого камертона, який знаходився в досить маленькій колбі. Виявилось, що загасання відкритого камертона більше, ніж закритого. Це явище можна пояснити, зокрема, якщо припустити, що в закритому камертоні, на відміну від відкритого, в хвильовій зоні не утворюється хвиля другого звуку.

Справа в тому, що розміри колби не дуже відрізняються від довжини хвилі другого звуку, і можна припустити, що квазіплоска хвиля другого звуку не утворюється. У цьому випадку надлишкове загасання може бути спричинене випромінюванням лише дисипативної моди. Для оцінки ефективності втрат у дисипативній моді порівняно з другим звуком скористаємося рівняннями (5.21, 5.22). З них випливає, що при відношенні $u_2 / u_1 \ll 1$ і температура, і концентрація переважно релаксують у хвилі другого звуку і в дифузійній хвилі, але не в хвилі першого звуку. Відносний внесок цих мод у затухання вилки визначається наступним співвідношенням.

$$\frac{I_D}{I_2} = \frac{2\pi\delta_D}{\lambda_2} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2}. \quad (5.26)$$

Наведемо розрахунки співвідношення (5.26) для розчинів, які були досліджені в роботах [38, 39] для розчинів з концентрацією 15% і для

температур від 0,5 до 1,4 К. Як вираз для ефективного коефіцієнта дифузії D_{eff} [18] за цих умов можна використати наступне

$$D_{eff} = D \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \left(1 + \frac{m_3^* u_1^2}{k_B T} \frac{\bar{\sigma}}{c_p} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2} \right)^2 \quad (5.27)$$

Коефіцієнт масової дифузії D [118] можна визначити з теорії, яка була розроблена в розділі 3 з введенням поняття часу взаємодії примі сей й фононів, або безпосередньо з експериментальних результатів [133].

На рис 5.1. наведено температурну залежність відношення інтенсивностей дифузійної моди до другого звуку (5.26) для суміші 15% ^3He .

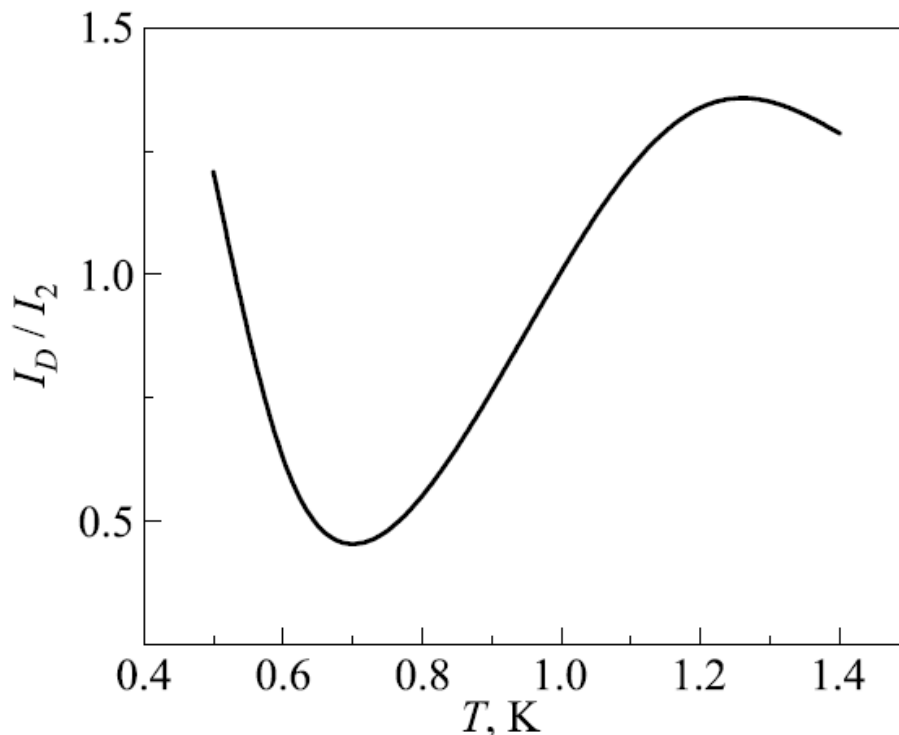


Рис.5.1. Температурна залежність відношення інтенсивностей дифузійної моди до другого звуку (5.26) для суміші 15% ^3He .

З рисунка 5.1 видно, що у всьому діапазоні температур для концентрації 15% внески інтенсивностей другого звукового випромінювання та дифузійної хвилі були одного порядку. Отже, можна зробити висновок, що перевищення порівняно з в'язким тертям і акустичним тертям камертона в розчинах у закритому камертоні може бути зумовлене дифузійним режимом, а у відкритому камертоні – випромінюванням другого звуку і дифузійною хвилею. Для підтвердження цього припущення необхідно розглянути задачу про коливання камертона в досить вузькій циліндричній колбі, розглянувши всі можливі колективні режими надплинних розчинів ^3He – ^4He , а також можливі власні коливання [134 – 135] такої системи рідина – циліндрична оболонка.

5.4 Дисипативний та акустичний механізми перенесення тепла в конденсованих середовищах

Унікальною особливістю таких незвичайних речовин, як надплинні рідини, надпровідники, надзвичайно чисті кристали та наноструктури за певних умов, є здатність передавати тепло майже без опору. Ця особливість зумовлена або чисто квантовою природою цих речовин, або ідеальністю їх кристалічної решітки. У цих випадках існує механізм теплопередачі в звуковій хвилі, так званий другий звук, який являє собою коливання густини теплових збуджень. Тому формальний коефіцієнт теплопровідності таких речовин майже дорівнює нескінченності, і створити в них рівноважний градієнт температури неможливо. Таким чином, ці речовини є ідеальними провідниками тепла. Використання таких речовин для відкачування тепла від нагрівальних елементів обчислювальних пристроїв або елементів для перетворення енергії могло б вирішити проблему теплового балансу в цих пристроях.

У цьому розділі розглядається проблема ефективності тепловідведення в надплинній рідині за рахунок другого звуку в порівнянні з тепловим режимом теплопровідності. Вирішується модельна задача тепловідведення від

коливального джерела тепла в надплинній рідині. Проведено порівняння з експериментальними спостереженнями та розглянуто можливе застосування досліджуваних механізмів як джерел охолодження для обчислювальних пристроїв.

5.4.1 Природа другого звуку

Унікальною особливістю таких незвичайних речовин, як надплинні рідини, надпровідники, надзвичайно чисті кристали та наноструктури за певних умов, є здатність передавати тепло майже без опору. Ця особливість зумовлена або чисто квантовою природою цих речовин, або ідеальністю їх кристалічної решітки. У цих випадках існує механізм теплопередачі в звуковій хвилі, так званий другий звук, який являє собою коливання густини теплових збуджень.

Нагадаємо стисло історію виникнення поняття другого звуку, та його дослідження.

Другий звук вперше досліджувався з надплинним He II, в якому фонон є елементарним збудженням системи. Швидкість другого звуку в рідкому He була передбачена Ландау, використовуючи теорію двох рідин для опису надплинності [17], а пізніше підтверджена експериментально. Передбачувана температурна хвиля була названа Ландау другим звуком на протигагу першому звуку, який є звичайним акустичним звуком (тобто поширення хвилі тиску).

Оскільки фонони є тепловими збудженнями системи, їх кількість залежить від температури. Таким чином, температурну хвилю в системі можна розглядати як хвилю звуку густини у фононному газі. Більше того, майже всі фізичні властивості та особливості звичайного звуку в рідинах і газах можна знайти та узагальнити до другого звуку в газах теплових збуджень. Наприклад, у звичайному газі або рідині неможливо створити стаціонарний градієнт тиску (при нескінченній геометрії або без в'язкості). Цією ж хвилею неможливо створити стаціонарний градієнт температури в надплинній рідині,

якщо немає жодних процесів опору (домішки, граничне тертя тощо). Саме тому надплинність гелію була вперше виявлена як унікальна дуже висока теплопровідність [27], що з'явилася у гелію при температурах нижче лямбда-точки.

Пізніше ідея звуку в газі фононів була узагальнена на фононні системи твердих тіл, таких як надпровідники, діелектрики та наноматеріали. У цих системах фонони відіграють ключову роль у перенесенні тепла, взаємодії з електронами, а також у формуванні колективних збуджень. Зокрема, у діелектриках звук можна розглядати як колективний рух атомів ґратки, що описується акустичними фононами. У наноструктурах і наноматеріалах фононна динаміка суттєво змінюється через квантово-розмірні ефекти. Це відкриває нові можливості для керування теплопровідністю на нанорівні, що критично важливо для сучасної енергетики, термоелектрики, фотоніки та квантових технологій.

Таким чином, концепція звуку у фононному газі, яка виникла спочатку в контексті квантових рідин, виявилася надзвичайно плідною і для опису складних твердотільних систем, де фонони виступають носіями інформації, енергії та взаємодії.

5.4.2 Перенесення тепла другим звуком

Як ми вже згадували вище, формальний коефіцієнт теплопровідності в надплинних середовищах майже дорівнює нескінченності, і створити в них рівноважний градієнт температури неможливо. Однак, було б правильніше сказати, що в таких середовищах теплопередача відбувається не згідно із законом Фур'є:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (5.28)$$

а в акустичній моді другого звуку та описується хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c_{II}^2 \Delta T = 0. \quad (5.29)$$

де $\chi = \kappa / C$ — відношення теплопровідності до теплоємності або коефіцієнт температуропровідності, а c_{II} — швидкість другого звуку.

Для задач теплопередачі варто вказати на суттєві відмінності у розв'язках цих рівнянь для двох типових випадків. Перший з них – це релаксація дельта-подібного початкового збурення температури. Ці розв'язки описуються відповідними функціями Гріна (в одновимірному випадку) для рівняння теплопровідності (5.28):

$$G_\chi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\chi t}\right), \quad (5.30)$$

і для рівняння звуку:

$$G_s(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{4\pi\Gamma_s t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x + c_{II}t)^2}{4\Gamma_s t}\right) + \exp\left(-\frac{(x - c_{II}t)^2}{4\Gamma_s t}\right) \right\}, \quad (5.31)$$

де Γ_s – другий коефіцієнт ослаблення звуку.

На рис. 1 показано типове поширення в просторі початкових збурень у дисипативній хвилі (5.28) та звуковій хвилі (5.29), які описуються співвідношеннями (5.30) та (5.31) відповідно.

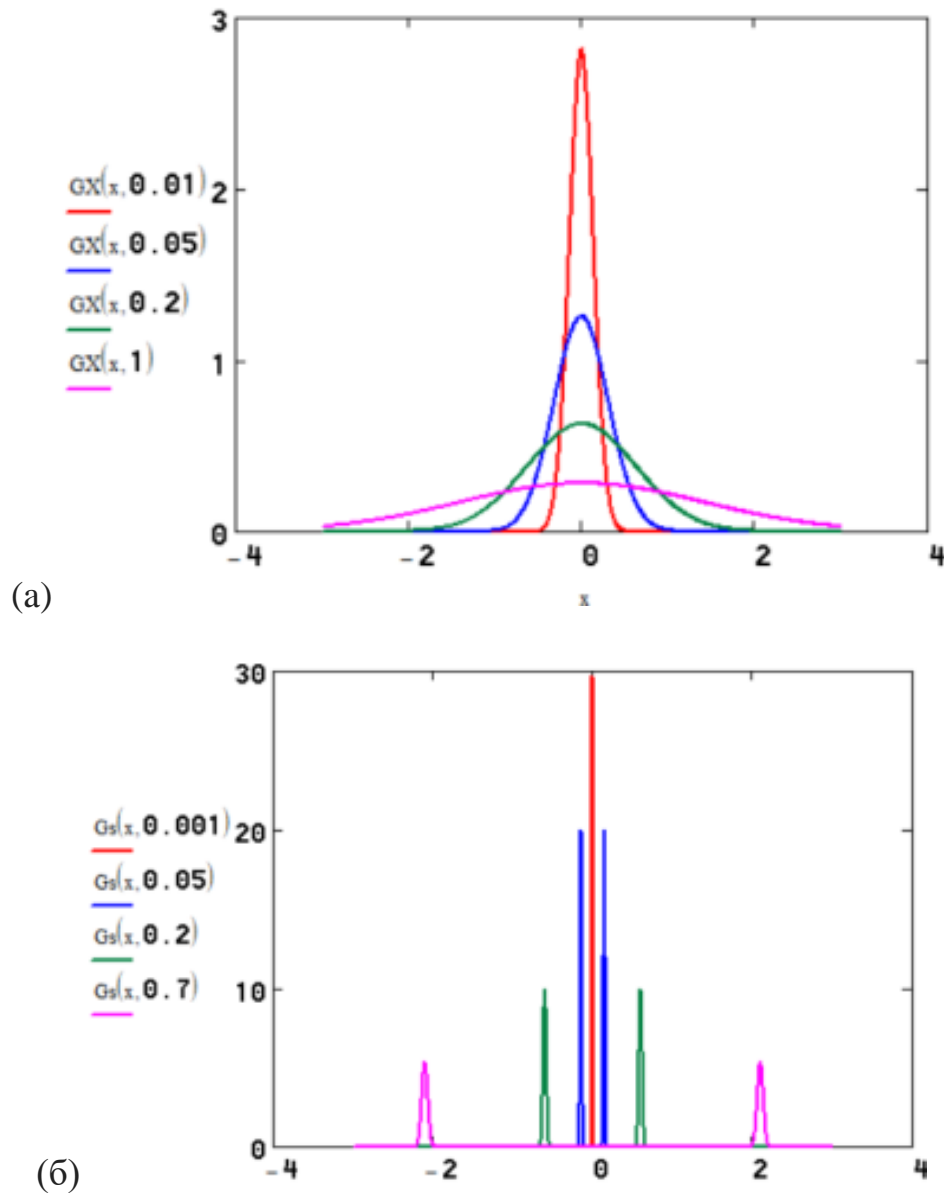


Рис. 5.2. Типові просторові розповсюдження початкових збурень у дисипативній хвилі (а) та звуковій хвилі (б).

Другою типовою проблемою, яка суттєво відрізняє дифузійний (дисипативний) та акустичний (конвективний) теплообмін, є форма стаціонарного температурного профілю в провіднику під дією стаціонарного теплового потоку між гарячим та холодним кінцями. У дифузійному випадку через термічний опір речовини виникає лінійний градієнт температури, що забезпечує дисипативний тепловий потік

$$\mathbf{q}_{diss} = -\kappa \text{grad } T \quad (5.32)$$

Другою типовою проблемою, яка суттєво відрізняє дифузійний (дисипативний) та акустичний (конвективний) теплообмін, є форма стаціонарного температурного профілю в провіднику під дією стаціонарного теплового потоку між гарячим та холодним кінцями. У дифузійному випадку через термічний опір речовини виникає лінійний градієнт температури, що забезпечує дисипативний тепловий потік.

$$\mathbf{q}_{conv} = sT\mathbf{v}_{drift} \quad (5.33)$$

Тут s – густина ентропії теплових збуджень.

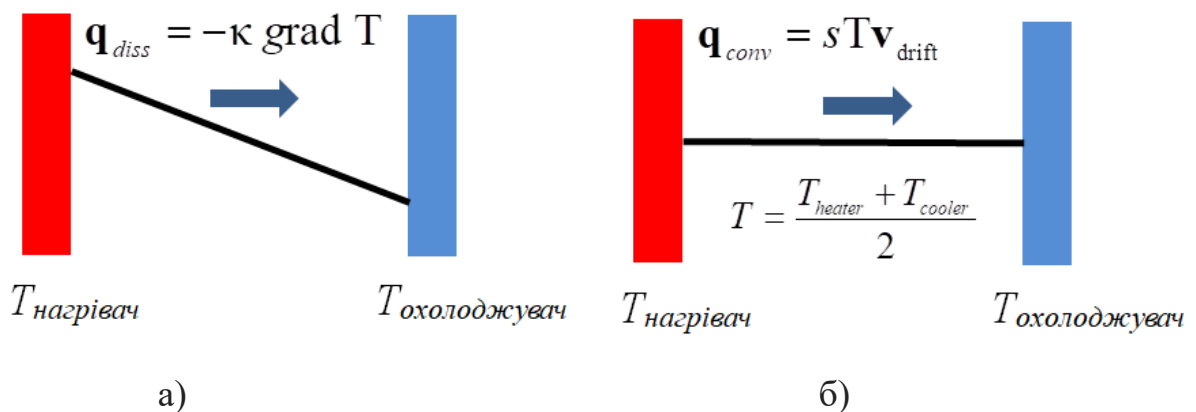


Рис. 5.3. Просторові залежності стаціонарних температурних профілів у дисипативному (а) та акустичному (б) випадках.

На Рис. 5.3 показано типові температурні профілі в стаціонарних станах у дисипативному випадку (5.28) та в акустичному випадку (5.29), (5.33).

Перехід від першого механізму до другого відбувається в лямбда-точці, коли охолоджувальний рідкий гелій перестає кипіти при переході в надплинний стан. Пізніше виявилось, що припинення кипіння пов'язане саме з можливістю існування другого звуку в надплинному стані, а не з самим

переходом у цей стан. Таким чином, саме спостереження явища надплинності послужило першим експериментальним доказом можливості теплопередачі акустичним способом.

5.4.3 Другий звук та дисипативна теплопередача в надплинних сумішах

Ще цікавішою системою виявилися надплинні розчини ізотопів гелію ^3He – ^4He [40]. У цих розчинах атоми ^3He не беруть участі в надплинному русі. Тому очікувалося, що еволюція їх концентрації визначається лише дисипативним процесом дифузії, як у звичайних розчинах. Але участь домішок у русі лише нормальної складової призвела до того, що домішки ^3He також були залучені до другого звуку. Тобто еволюція концентрації домішок відбувається як дисипативним шляхом (5.28) з певним коефіцієнтом дифузії D_{eff} , так і акустично у хвилі другого звуку. Нагадаємо, що швидкість другого звуку в розчинах визначається співвідношенням

$$u_2^2 = u_{2N}^2 + u_{2\varepsilon}^2.$$

Тут u_{2N}^2 – це доданок, що визначається домішками, а $u_{2\varepsilon}^2$ є аналогічним швидкості другого звуку в чистому гелії. У такій ситуації релаксація теплового відхилення відбувається одночасно двома колективними модами розв'язку – дисипативною дифузною модою та акустичною модою другого звуку:

$$T(x,t) = \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} G_{D_{\text{eff}}}(x,t) + \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} G_S(x,t). \quad (5.34)$$

Тут функція $G_{D_{\text{eff}}}(x,t)$ визначається співвідношенням (5.30), коли дисипативний коефіцієнт χ замінюється на D_{eff} , та $G_S(x,t)$ визначається співвідношенням (5.31), коли швидкість звуку c_{II} замінюється на u_2 . Відносна зміна температури

в дисипативних хвилях та другій звуковій хвилі визначається співвідношенням між величинами u_{2N}^2 та $u_{2\epsilon}^2$.

На Рис. 5.4 показано типове поширення в просторі початкових збурень температури в надплинних сумішах $^3\text{He} - ^4\text{He}$ одночасно в дифузійно–дисипативній хвилі (5.28) та хвилі другого звуку (5.29), які описуються співвідношеннями (5.34).

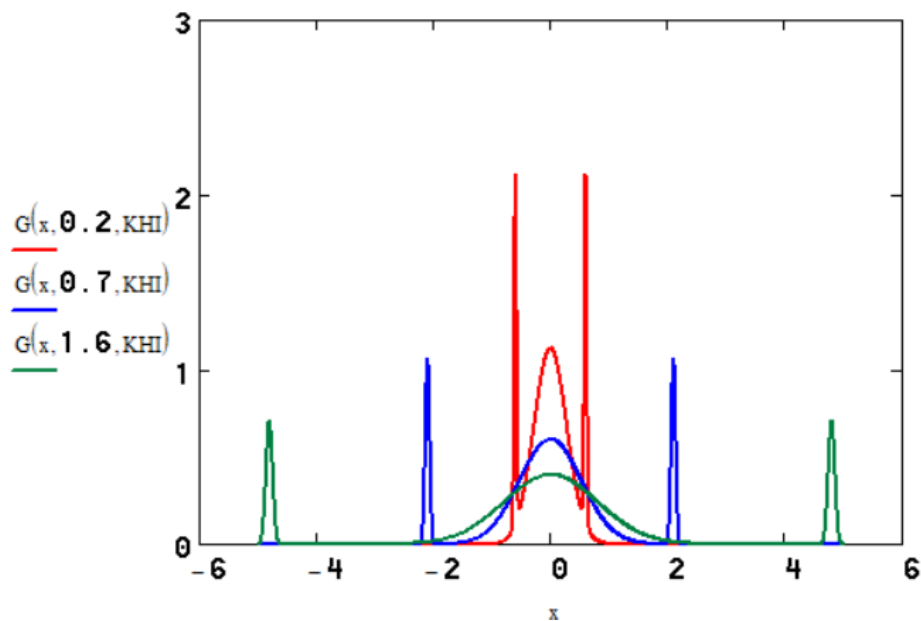


Рис.5.4. Типове просторове поширення початкового збурення температури в надплинних сумішах $^3\text{He} - ^4\text{He}$ одночасно в дифузійно–дисипативній хвилі (5.28) та хвилі другого звуку (5.29).

5.4.4 Відведення тепла за допомогою других звуків у твердих тілах

Можливість існування другого звуку в будь–якій системі квазічастинок призвела до плідного пошуку та відкриття другого звуку в твердих тілах [27]. Тут ми представляємо типовий результат для опису періодичного джерела тепла, що прикладається до одного кінця провідника, якщо можливі як акустичні, так і дисипативні механізми температурної релаксації. На Рис. 5.4

показано еволюцію температури всередині провідника для періодичної граничної умови.

$$T(x,t) = \varepsilon T_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\lambda}\right) + (1-\varepsilon) T_0 e^{-\frac{x}{\Gamma}} \cos\left(\omega \left\{t - \frac{x}{u_2}\right\}\right) \quad (5.35)$$

Тут T_0 та ω – відповідно амплітуда та частота температурних коливань на одному кінці зразка, λ – довжина дисипативної теплової хвилі, u_2 та Γ – відповідно швидкість та затухання другого звуку. Величина ε визначає відносний внесок дифузного та акустичного механізмів.

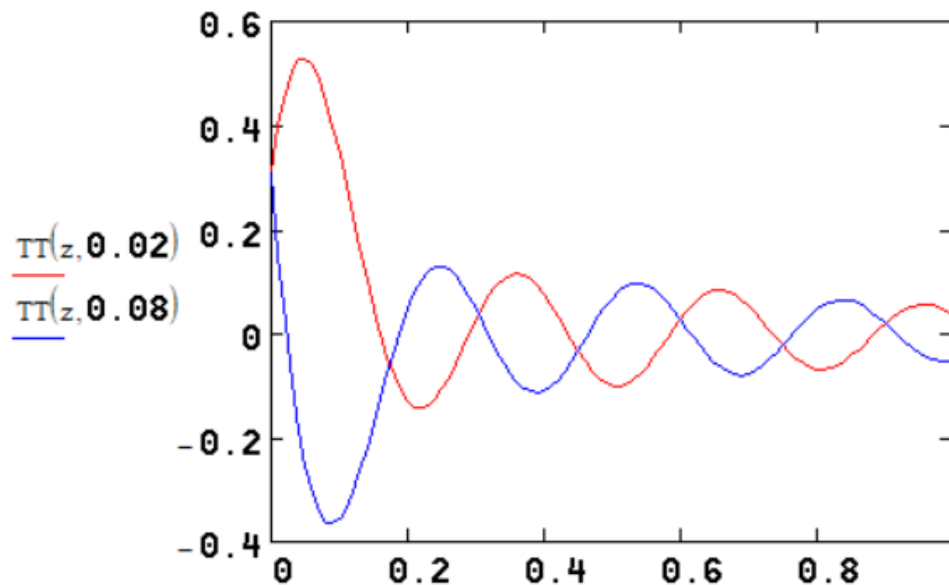


Рис.5.5. Зміна температури (5.35) всередині провідника для періодичної граничної умови у два моменти часу

Особливий практичний інтерес представляє можливість використання другого звуку для контролю теплового балансу в сучасних мікро– та наноелектронних пристроях. Найновіші результати, здається, отримані в результаті експериментальних досліджень графену [32] та графіту [33], а також розгляду теплопередачі звуком у фононній системі у твердих тілах [34, 35] та рідинах [36].. Результати цієї роботи показали, що [32] «другий звук та

інші фононні гідродинамічні ефекти в графіті, графені та, можливо, інших шаруватих та двовимірних матеріалах більше не можна вважати екзотичними явищами з незначним практичним значенням. Ми вважаємо, що фононна гідродинаміка цілком може впливати, наприклад, на характеристики графіту та графену як теплорозподільних матеріалів у мікроелектроніці. Ми очікуємо, що ці розробки відкриють захопливий потенціал для розуміння та маніпулювання явищами переносу на мікро– та нанорівнях».

У цьому контексті особливу увагу заслуговують матеріали, здатні підтримувати фононну гідродинаміку при кімнатних або близьких до них температурах. Сучасні дослідження показують, що в умовах, коли довжина вільного пробігу фононів є меншою за характерні розміри пристрою, але більшою за довжину взаємодії, яка порушує закон збереження імпульсу, виникає так званий гідродинамічний режим переносу тепла. За таких умов можуть виникати й поширюватися квазізвукові хвилі — аналоги другого звуку, що забезпечують швидкий і спрямований перенос енергії.

Особливо перспективним виглядає застосування таких ефектів у масштабах нано– та мікросистем, де класичні механізми теплопровідності виявляються неефективними через надмірне локальне нагрівання. Фононна гідродинаміка, зокрема механізми другого звуку, може запропонувати нетривіальні рішення: від нових способів терморегуляції до побудови теплових логічних елементів або теплових діодів, чутливих до напрямку теплового потоку.

Таким чином, дослідження другого звуку виходить далеко за межі традиційної низькотемпературної фізики та знаходить потенційні міждисциплінарні застосування в матеріалознавстві, нанофізиці, інженерії та прикладній термоелектроніці. Вивчення властивостей та керування цими ефектами відкриває шлях до створення новітніх технологій, у яких тепло буде не лише небажаним побічним продуктом, а повноцінним функціональним ресурсом.

5.5 Висновки до розділу

В результаті виконаного теоретичного дослідження було запропоновано узагальнену гідродинамічну модель, яка враховує обидва механізми переносу збурень у надплинних розчинах ^3He – ^4He : поширення другого звуку та дифузійної дисипативної хвилі. Аналіз цієї моделі дозволив пояснити спостережуване в експериментах [38, 39] додаткове демпфування кварцового камертона, яке не можна було повністю інтерпретувати лише з урахуванням другого звуку. Зокрема, в цьому розділі вперше отримано явні вирази для амплітуд концентраційних і температурних збурень, спричинених коливаннями твердої стінки в гелії.

Показано, що в розчинах з високою концентрацією ^3He внесок дисипативної моди у процес релаксації є суттєвим і може призводити до зникнення або пригнічення резонансної відповіді другого звуку, що узгоджується з експериментальними спостереженнями. Отримані співвідношення, зокрема, дозволяють визначити область температур і концентрацій, де внесок дифузійної моди у випромінювання енергії може бути порівнянний з внеском другого звуку. Зокрема, виявилось, що експерименти з вивчення затухання камертона в розчинах проводилися саме в такій області. Таким чином, врахування теплової (дифузійної) хвилі є критично важливим для адекватного опису механізмів енергетичних втрат у системах з осцилюючими тілами, зануреними в надплинні розчини. Це дає підґрунтя для перегляду попередніх інтерпретацій експериментальних даних та відкриває нові перспективи у вивченні фононної гідродинаміки в багатокомпонентних квантових рідинах.

Також була визначена можливість використання речовин з другим звуком для відкачування тепла від нагрівальних елементів обчислювальних пристроїв або елементів для перетворення енергії, що може вирішити проблему теплового балансу в цих пристроях.

ВИСНОВКИ

Мотивацією для проведення досліджень, викладених у цій дисертації, стали як зростаючі потреби у компактних, високоточних і стабільних методах зондування квантових середовищ, так і наявність значного масиву експериментальних даних щодо надплинних рідин, які досі не мали повного теоретичного пояснення. У результаті виконаної роботи вдалося досягти головної мети дослідження — вивчити фізичні механізми, що визначають взаємодію гідродинамічних мод (першого й другого звуків, в'язких, дифузійних і теплових хвиль) з тілами, які коливаються в рідкому гелії. При цьому були успішно розв'язані основні наукові задачі, а також отримано низку нових результатів.

1. Вперше пояснено експериментально спостережуване збудження стоячих хвиль коливань тиску камертоном, а також детально розглянуто появу та властивості резонансів залежно від температури й тиску гелію. Побудовано теоретичну модель, яка описує фізичні механізми резонансних явищ, що спостерігалися експериментально.
2. Вперше розв'язано задачу про одночасне збудження першого та другого звуків у надплинному гелії внаслідок збудження камертоном хвиль тиску й ентропії, а також пояснено експериментально спостережувані залежності властивостей резонансів від температури та тиску гелію.
3. Вперше отримано явні вирази для коефіцієнтів дифузії, теплопровідності та термодифузії для рідких і твердих розчинів ізотопів гелію, та визначено явний вираз коефіцієнта самодифузії домішок у твердих розчинах ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$.
4. Вперше, шляхом розв'язання повної системи гідродинамічних рівнянь для надплинних розчинів ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$, знайдено дисперсійні співвідношення для першого та другого звуків, а також дисипативних теплових хвиль. Визначено взаємозв'язки між амплітудами всіх гідродинамічних параметрів у цих модах.

5. Вперше доведено, що врахування дисипативної дифузійної теплової хвилі дозволяє пояснити зникнення резонансів другого звуку, які спостерігалися в експерименті.
6. Вперше отримано явні вирази для амплітуд концентраційних та температурних збурень, викликаних коливаннями твердої стінки в гелії. Проведені розрахунки показали, що спостережувана в експерименті різниця в ослабленні відкритого та закритого камертонів може бути зумовлена конкуренцією між механізмами другого звуку та дифузійної хвилі.
7. Вперше продемонстровано, що знайдений у дисертації механізм одночасного поширення енергії в дисипативній хвилі та у звуковій хвилі другого звуку може бути використаний для створення нових ефективних методів тепловідведення в наноструктурах.

Отримані в результаті досліджень результати мають не лише теоретичне, а й прикладне значення. Зокрема, розроблені математичні моделі взаємодії тіл із надплинним середовищем дозволяють не лише інтерпретувати наявні експериментальні дані, але й прогнозувати поведінку таких систем у складних умовах — за наявності просторових неоднорідностей, зовнішніх збурень або в багатокомпонентних середовищах. Таким чином, результати дослідження можуть бути використані як для поглиблення фундаментальних знань про квантові рідини, так і для розвитку високоточних технологій у галузях квантової метрології, кріоінженерії та надпровідникової електроніки.

Теоретичні розробки та запропоновані методики впроваджені в навчальний процес на кафедрі комп'ютерної фізики навчально–наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Крім того, результати можуть бути використані в наукових дослідженнях Інституту енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України, а також у теоретичних і експериментальних роботах Фізико–технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Література

1. Kapitza P. Viscosity of Liquid Helium Below the λ -Point. *Nature*. 1938; Vol. 141. P. 74. DOI: <https://doi.org/10.1038/141074a0>
2. De Troyer A., Van Itterbeek A., Van Den Berg G. J. Measurements on the viscosity of liquid helium by means of the oscillating disc method. *Physica*. 1951; Vol. 17. Iss. 1. P. 50. DOI: [https://doi.org/10.1016/0031-8914\(51\)90036-5](https://doi.org/10.1016/0031-8914(51)90036-5)
3. Dash J.G., Taylor R.D. Hydrodynamics of oscillating disks in viscous fluids: density and viscosity of normal fluid in pure ^4He from 1,2 K to the lambda point. *Phys. Rev. Lett.* 1957; Vol. 105. Iss. 1. P. 7.
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.7>
4. Welber B. Damping of a torsionally oscillating cylinder in liquid helium at various temperatures and densities. *Phys. Rev.* 1960; Vol. 119. Iss 6. P. 1816.
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.119.1816>
5. Clubb D.O., Buu O.V.L., Bowley R.M., Nyman R., and Owers-Bradley J.R. Quartz Tuning Fork Viscometers for Helium Liquids. *Low Temp. Phys.* 2004; Vol. 136. P. 1. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:JOLT.0000035368.63197.16>
6. Friedt J.-M., Carry É. Introduction to the quartz tuning fork. *Am. J. Phys.* 2007; Vol. 75. P. 415. DOI: <https://doi.org/10.1119/1.2711826>
7. Blaauwgeers R., Blažková M., Človečko M., Eltsov V.B., de Graaf R., Hosio J., Krusius M., Schmoranzer D., Schoepe W., Skrbek L., Skyba P., Solntsev R.E., Zmeev D.E. Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids, *Low Temp. Phys.* 2007; Vol. 146. P. 537.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-006-9279-4>
8. Blazkova M., Človečko M., Gazo E., Skrbek L., and Skyba P. Quantum Turbulence Generated and Detected by a Vibrating Quartz Fork *Low Temp. Phys.* 2007; Vol. 148. P. 305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-007-9389-7>

9. Blazkova M., Schmoranzer D., and Skrbek L. Transition from laminar to turbulent drag in flow due to a vibrating quartz fork. *Phys. Rev. E.* 2007; Vol. 75. Iss. 3. P. 025302. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.025302>
10. Blazkova M., Schmoranzer D., and Skrbek L. On cavitation in liquid helium in a flow due to a vibrating quartz fork. *Low Temp. Phys.* 2008. Vol. 34. Iss. 4. P. 298. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2908890>
11. Blažková M., Človečko M., Eltsov V., Gažo E., de Graaf R., Hosio J., Krusius M., Schmoranzer D., Schoepe W., Skrbek L., Skyba P., Solntsev R., and Vinen W. Vibrating quartz fork – a tool for cryogenic helium research. *Low Temp. Phys.* 2008; Vol. 150. Iss. 3/4. P. 525. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-007-9587-3>
12. Pentti, E. M., Tuoriniemi, J. T., Salmela, A. J. et al. Quartz tuning fork in helium. *Low Temp. Phys.* 2008; Vol. 150. Iss. 3/4. P. 555. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-007-9583-7>
13. Pentti E., Tuoriniemi, J. T., Salmela, A. J. et al. Solubility of ^3He in ^4He at millikelvin temperatures up to the melting pressure measured by a quartz tuning fork. *Phys. Rev. B.* 2008; Vol. 78. Iss. 6. P. 064509. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.064509>
14. Bradley D.I., Fear M.I., Fisher S.N. et al. Transition to turbulence for a quartz tuning fork in superfluid ^4He . *Low Temp. Phys.* 2009; Vol. 156. Iss. 3/6. P. 116. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-009-9901-3>
15. Blazkova M., Schmoranzer D., Skrbek L. et al. Generation of turbulence by vibrating forks and other structures in superfluid ^4He . *Phys. Rev. B.* 2009; Vol. 79. Iss. 5. P. 054522. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.054522>
16. Bradley D., Človečko M., Fisher S. et. al. Crossover from hydrodynamic to acoustic drag on quartz tuning forks in normal and superfluid ^4He . *Phys. Rev. B.* 2012. Vol. 85. Iss. 1. P. 014501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.014501>
17. Landau L. Theory of the Superfluidity of Helium II. *Phys. Rev.* 1941; Vol. 60. P. 356. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.60.356>

18. Khalatnikov I. M. An Introduction To The Theory Of Superfluidity, *CRC Press*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429502897>
19. Peshkov V.P. Determination of the velocity of propagation of the second sound in helium II. *Report of an international conference on fundamental particles and low temperature*. Cavendish Laboratory. 22–27 July, 1946, Cambridge, p. 19 (Taylor & Francis, London 1947). Reprinted by R. Donnelly, Department of Physics, University of Oregon (1993).
20. Andreev A.P., Khalatnikov I.E. On the temperature dependence of the velocity of sound in liquid helium. *J. Low Temp.Phys.* 1970, Vol. 2. Iss. 2. P. 173. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00628173>
21. Gritsenko I. A., Klokol K.A., Sokolov S. S. and Sheshin G.A. Dissipation of the kinetic energy of a tuning fork immersed in superfluid helium at different oscillation frequencies. *Fiz. Nyzk. Temp.* 2016; Vol. 42. P. 28. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4940343>
22. Rudavskii E. Ya., Chagovets V. K., Sheshin G. A., Vrakina V. A. Dissipation mechanisms of tuning fork vibrations in superfluid ^3He – ^4He solutions. *Low Temp. Phys.* 2020; Vol. 46. Iss. 1. P. 41. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0000362>
23. Chagovets V. K., Kapuza S. S., Sokolov S. S., Vrakina V. A., Chagovets T. V. Viscosity of concentrated superfluid mixtures ^3He – ^4He when vibrating a quartz tuning fork. *Low Temp. Phys.* 2022; Vol. 48. Iss. 9. P. 667. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0013279>
24. Ward J. C., Wilks J. The velocity of second sound in liquid helium near the absolute zero. *Philos. Mag.* 1951; Vol. 42. P. 314. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786445108561271>
25. Ward J. C., Wilks J. Second Sound and thermomechanical effect at very low temperatures. *Philos. Mag.* 1952; Vol. 43. P. 48. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786440108520965>
26. Dingle R. V. The velocity of second sound in various media. *Proc. Phys. Soc. London*. 1952; Vol. 65. Iss. 396. P. 1044.

27. Guyer R. A., Krumhansl J. A. Thermal conductivity, second sound, and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals. *Phys. Rev.* 1966; Vol. 148. P. 778. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.148.778>
28. Ackermann C.C., Bertman B., Fairbank H.A., Guyer R.A. Second Sound in solid Helium. *Phys. Rev. Letters.* 1966; Vol. 16. P. 789. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.16.789>
29. Ackerman C. C., Overton W. C. Second Sound in solid Helium – 3. *Phys. Rev. Letters.* 1969; Vol. 22. P. 764. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.764>
30. McNelly T.F., Rogers S.J., Chanin D.J., Rollefson R.J., Goubau W.M., Schmidt G.E. , Krumhansl J.A., Pohl R.O. Heat pulses in NaF: Onset of second sound. *Phys. Rev. Letters.* 1970; Vol. 24. P. 100. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.24.100>
31. Narayanamurti V., Dunes R. C. Observation of second sound in Bismuth. *Phys. Rev. Lett.* 1972; Vol. 28. Iss. 22. P. 1461. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.1461>
32. Huberman S, Duncan RA, Chen K, Song B, Chiloyan V, Ding Z, Maznev AA, Chen G, Nelson KA Observation of second sound in graphite at temperatures above 100 K. *Science.* 2019; Vol. 364. Iss. 6438. P. 375. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.aav3548>
33. Ding, Z., Chen, K., Song, B. et al. Observation of second sound in graphite over 200 K. *Nat Commun.* 2022; Vol. 13. Iss. 285. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-021-27907-z>
34. Sangyeop Lee, Xun Li Hydrodynamic phonon transport: past, present and prospects. *Nanoscale Energy Transport.* 2020; DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-1738-2ch1>
35. Xu Mingtian Thermal oscillations, second sound and thermal resonance in phonon hydrodynamics. *Proc. R. Soc.* 2021; Vol. 477. Iss. 2247. P. 20200913. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2020.0913>

36. Wei Chen Heat transfer at speed of sound. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2021; Vol. 177. Iss. 5. P. 121529. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121529>
37. Salmela A., Tuoriniemi J., Rysti, J. Acoustic Resonances in Helium Fluids Excited by Quartz Tuning Forks. *J Low. Temp. Phys.* 2011; Vol. 162. P. 678. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-010-0246-8>
38. Bakhvalova V. A., Gritsenko I. A., Rudavskii E. Ya., Chagovets V. K., Sheshin G. A. Studies of kinetic processes in a concentrated ^3He - ^4He solution using an oscillating tuning fork. *Low Temp. Phys.* 2015; Vol. 41. Iss. 7. P. 502. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4927312>
39. Bakhvalova V.A., Chagovets V.K., Gritsenko I.A. *et al.* The Damping and Drag Coefficient of Quartz Tuning Fork in Superfluid ^3He - ^4He Solutions in the Laminar Flow. *J. Low. Temp. Phys.* 2017; Vol. 187. P. 413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-016-1712-8>
40. Nemchenko K., Rogova S. Heat and ^3He Transfer by Second Sound in Superfluid Helium. *Low. Temp. Phys.* 2010; Vol. 151. P. 9. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2009.10.009>
41. Eselson B.N., Ivantsov V.G., Koval V.A., Rudavskii E.Ya., Serbin I.A. Properties of liquid and solid helium. $\text{He}^3 - \text{He}^4$ solutions: Handbook. *Kyiv: Naukova Dumka*. 1982; 231 p.
42. Ptukha T.P. Thermal Conductivity and Diffusion of Weak $^3\text{He} - ^4\text{He}$ Solutions in the Temperature Range from the λ Point to 0.6 K. *JETP*. 1960; Vol. 13. Iss. 6. P. 1112.
43. Chui T. C. P., Lipa J. A. Behaviour of the thermal conductivity of dilute $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures in superfluid phase. *Phys.Rev.R.* 1989; Vol. 40. Iss. 7. P.4306. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.4306>
44. Abel V. R., Whetley J.C. Experimental thermal conductivity of two dilute solutions of ^3He in superfluid ^4He . *Phys.Rev.Lett.* 1968; Vol.21. Iss. 17. P.1231. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.21.1231>

45. Rosebaum R.L., Landau L., Ekstien Y. Temperature, pressure, and concentration dependence of thermal conductivity of very dilute solutions of ^3He in superfluid ^4He . *Journ. Low Temp. Phys.* 1974; Vol. 14. Iss. 1/2. P.131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00655864>
46. Creywall D.S. Thermal conductivity measurements in liquid ^4He below 0.7 K. *Phys. Rev. B.* 1981; Vol. 23. Iss. 5. P. 2152. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.23.2152>
47. Guillon F., Harrison J.P., McMullen T., Tyler A. Heat transfer between phonons and quasi-particles in dilute mixture of ^3He in ^4He . *Phys. Rev. Lett.* 1981; Vol. 47. Iss. 6. P. 435. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.47.435>
48. McMullen T. Theory of heat transfer between phonons and quasiparticle in dilute solutions of ^3He in ^4He . *J. Low Temp. Phys.* 1983. Vol. 51. Iss. 1-2. P. 33. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00683412>
49. Guillon F., Harrison J.P., Sachrajda A, Atkins D. Thermal resistance between phonon and quasiparticle excitations in dilute mixtures of ^3He - ^4He . *J. Low Temp. Phys.* 1984; Vol. 57. Iss. 1-2. P. 95. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00681518>
50. Khalatnikov I.M., Zharkov V.N. Theory of Diffusion and Thermal Conductivity for Dilute Solutions of ^3He in Helium II. *JETP.* 1957; Vol. 5. Iss. 5. P. 905.
51. G. Baym, C. Ebner. Phonon-quasiparticle interaction in dilute solutions of ^3He in superfluid ^4He : I. Phonon thermal conductivity and ultrasonic attenuation. *Phys. Rev.* 1967; Vol. 164. Iss. 1. P. 235. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.164.235>
52. Adamenko I.N., Nemchenko K.E., Tsyganok V.I. Dissipative processes in superfluid ^3He - ^4He solutions. *JETP.* 1989; Vol. 69. Iss. 4. P. 731.
53. Adamenko I. N., Nemchenko K. E. Thermal conductivity of the binary gas of thermal excitations. *Czechoslovak Journ. Phys.* 1996; Vol. 46. Iss. 1. P. 73. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02569452>
54. Adamenko I. N., Nemchenko K. E. Heat transfer and diffusion in multicomponent classical and quantum systems. *Cond. Matt. Phys.* 1996; Iss. 8. P. 3. DOI: <https://doi.org/10.5488/CMP.8.3>

55. Adamenko I. N., Nemchenko K. E., Zhukov A.V. George T. F. Quantum diffusion of impuritons in the gas of phonons in quantum mixtures of helium isotopes. *Low Temp. Phys.* 1998; Vol. 111. Iss. 3/4. P. 603. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022205718791>
56. Adamenko I. N., Nemchenko K. E., Zhukov A.V., Um C.-I., George T. F., Pandey L. N. Diffusion of Impurity excitations in superfluid and solid ^3He - ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.* 1998; Vol. 111. Iss. 1/2. P. 145. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022254426233>
57. Mikheev V. A., Rudavskii E. Ya., Chagovets V. K., Sheshin G. A. Nucleation and phase separation in superfluid solutions of ^3He - ^4He upon a change in concentration. *Low Temp. Phys.* 1994; Vol. 20. Iss. 7. P. 485. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0033667>
58. Lifshitz I.M., Poleskii V.N., Khokhlov V.A. Kinetics of nucleation and stratification of dilute ^3He - ^4He solutions under pressure at low temperatures. *JETP*. 1978; Vol. 47. Iss. 1. P. 137.
59. Adamenko I.N., Chervanov A.I., Nemchenko K.E., Mikheev V.A., Rudavskii E.Ya., Chagovets V.K. and Sheshin G.A. Nucleation and growth of the new phase in the supersaturated ^3He - ^4He superfluid solutions. *Low Temp. Phys.* 1994; V.95. Iss. 5/6. P.492. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00754742>
60. Bodensohn J., Klesy S., Leiderer P. Homogeneous nucleation in liquid ^3He - ^4He mixtures. *Europhys. Lett.* 1989; Vol. 8. Iss. 1. P. 59. DOI: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/8/1/011>
61. Onuki A. Second sound in phase separating ^3He - ^4He mixtures. *Journ. Phys. Soc.Jap.* 1991; Vol. 60. Iss. 4. P. 1176. DOI: <https://doi.org/10.1143/JPSJ.60.1176>
62. Onuki A. Sound propagation in phase separating liquids. *Phys. Rev. A.* 1991; Vol. 43. Iss. 12. P. 6740. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.6740>
63. Adamenko I. N., Nemchenko K. E., Tsyganok V.I. Acoustic and dielectric properties of oversaturated ^3He - ^4He superfluid mixtures. *Europhys. Conf. Abs.* 1993; Vol. 17A. Iss. 5. P. 957.

64. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, V.I. Tsyganok The influence of ^3He nucleation on acoustic and dielectric properties of ^3He - ^4He superfluid supersaturated solutions. *Physica B*. 1994; Vol. 194. P. 869. DOI: [https://doi.org/10.1016/0921-4526\(94\)90764-1](https://doi.org/10.1016/0921-4526(94)90764-1)
65. Gorkov L.P., Pitaevskii L.P. On the Scattering of Light in ^3He - ^4He Mixtures. *JETP*. 1958; Vol. 6. Iss. 3. P. 486.
66. Griffin A. Hydrodynamic modes in ^3He - ^4He mixtures at the critical point. *Can. J. Phys.* 1969; Vol. 47. Iss. 4. P. 429. DOI: <https://doi.org/10.1139/p69-057>
67. Nemchenko K. È. Relaxation of concentration and temperature in superfluid mixtures ^3He - ^4He at low temperatures. *Low Temp. Phys.* 1997; Vol. 23. Iss. 8. P. 599. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.593444>
68. Nemchenko K. È. Kinetics of diffusion mode in a phonon-impuriton system of ^3He - ^4He mixtures of quantum liquids. *Low Temp. Phys.* 1998; Vol. 24. Iss. 10. P. 708. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.593671>
69. The Theory Of The Viscosity Of Helium Ii: Ii. Calculation Of The Viscosity Coefficient, Editor(s): D. Ter Haar, Collected Papers of L.D. Landau, Pergamon, 1965, Pages 511-531.
70. Zadorozhko A. A., Rudavskii È. Ya., Chagovets V. K., Sheshin G. A., and Kitsenko Yu. A. Viscosity and relaxation processes in the phonon-roton system of He II. *Low Temp. Phys.* 2009; Vol. 35. P. 100. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3075937>
71. Maris H.J. Hydrodynamics of Superfluid Helium below 0.6 °K.I. Viscosity of the Normal Fluid. *Phys. Rev. A*. 1980 (1973); Vol. 8. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.8.1980>
72. Niemetz M., Schoepe W. Stability of Laminar and Turbulent Flow of Superfluid ^4He at mK Temperatures Around an Oscillating Microsphere. *L T Phys.* 2004; Vol. 135. P. 447. <https://doi.org/10.1023/B:JOLT.0000029507.98543.1d>
73. Lea M.J., Fozooni M., Retz D.W. The transverse acoustic impedance of He II. *Low Temp. Phys.* 1984; Vol. 54. P. 303. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00683280>

74. Woods A.D.B., Hollis Hallett A.C The viscosity of liquid helium II between 0.79° K and the lambda point. *Can. J. Phys.* 1963; Vol. 41. P. 596. DOI: <https://doi.org/10.1139/p63-062>
75. Andronikashvili, E.L. and Mamaladze, Yu G. Quantization of macroscopic motions and hydrodynamics of rotating helium II. *Rev. Mod. Phys.* 1966; Vol. 38. P. 567.
76. Divišová H., Lang J., Rotter M., Schmoranzler D. Measurement of viscosity in small volumes of fluids by tuning fork oscillators. *EPJ Web of Conf.* 2012; Vol. 25. P.01008. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20122501008>
77. Zadorozhko A.A., Kalko T.V., Nemchenko K.E., Rudavskii E.Ya., Chagovets V.K., Sheshin G.A. Relaxation of temperature and concentration in superfluid ^3He – ^4He mixtures. Effective thermal conductivity. *Low Temp. Phys.* 2004; Vol. 30. P. 122. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1645163>
78. Behringer R.P., Meyer H. Diffusive relaxation processes in liquid ^3He – ^4He mixtures. I. Normal phase. *Low Temp. Phys.* 1982; Vol. 46. P. 407. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00683908>;
79. Tuttle J., Zhong F., Meyer H. Relaxation times and mass diffusion in superfluid dilute ^3He – ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.* 1991; Vol. 82. P. 15. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00681548>
80. Murphy D., Meyer H. Heat transport in dilute mixtures of ^3He in superfluid ^4He . *Low Temp. Phys.* 1997; Vol. 107. P. 175. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02396840>
81. Andreev A. F., Lifshitz I. M. Quantum Theory of Defects in Crystals. *JETP* 1969; Vol. 29. P. 1107.
82. Guyer R. A., Zane L. I. Mass Fluctuation Waves. *Phys. Rev. Lett.* 1970; Vol. 24. P. 660. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.24.660>
83. Andreev A. F. Diffusion in quantum crystals. *Sov. Phys. Usp.* 1976; Vol. 19. P. 137. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1976v019n02ABEH005133>
84. Grigoriev V. N. Diffusion in solid helium (A review). *Low Temp. Phys.* 1997; Vol. 23. P. 3. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.593334>

85. Pushkarev I. Concerning impuriton diffusion in solid ^4He . *JETP Lett.* 1974; Vol. 19. P. 386.
86. Kagan Yu., Maksimov L. A., Theory of particle transport in extremely narrow band. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1973; Vol. 65. P. 751.
87. Kagan Yu., Klinger M. I. Theory of quantum diffusion of atoms in crystals. *J. Phys. C* 1974; Vol. 7. P. 2791. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3719/7/16/012>
88. Slyusarev V. A., Strzhemechny M. A., Burakhovich I. A. Quantum diffusion of He^3 in solid He^4 . I. The role of impurity interaction anisotropy. *Sov. J. Low Temp. Phys.* 1977 Vol. 3. P. 591. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0029570>
89. Grigoriev V. N., Eselson B. N., Mikheev V. A. New singularities in quantum diffusion of ^3He in solid helium. *JETP Lett.* 1973; Vol. 18. P. 169.
90. Eselson B. N., Mikheev V. A., Grigoriev V. N., Mikhin N. P. Quantum diffusion of ^3He impuritons in solid ^4He . *JETP*, 1973; Vol. 74. P. 2311.
91. Grigoriev V. N., Eselson B. N., Mikheev V. A., Slyusarev V. A., Strzhemechny M. A., Shulman Yu. E. ^3He impurity excitations in solid ^4He . *J. Low Temp. Phys.* 1973; Vol. 13. P. 65. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00654398>
92. Grigoriev V. N., Eselson B. N., Mikheev V. A. Diffusion of He^3 in the body-centered cubic and hexagonal close packed phases of isotopic helium solutions. *JETP*. 1974; Vol. 39. P. 153.
93. Gritsenko I. A., Dubchak T. A., Mykhailenko K. A., Sokolov S. S., Sheshin G. A. Nonlinear phenomena in the vibrations of a quartz tuning fork immersed in superfluid helium. *Low Temp. Phys.* 2018; Vol. 44. Iss. 1. P. 36. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5020894>
94. Vrakina V. A., Rudavskii E. Ya., Sokolov S. S., Chagovets V. K., Sheshin G. A., Chagovets T. V. The critical velocity of transition to turbulence in ^3He - ^4He liquid solutions. *Low Temp. Phys.* 2020; Vol. 46. Iss. 10. P. 971. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0001906>
95. Kapuza S. S., Chagovets V. K., Sokolov S. S., Vrakina V. A., Chagovets T. V. The turbulent drag force in superfluid ^3He - ^4He mixtures under oscillations of a

- quartz tuning fork. *Low Temp. Phys.* 2021; Vol. 47. Iss. 10. P. 805. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0006059>
96. Chagovets V. K., Kapuza S. S., Sokolov S. S., Chagovets T. V. Cavitation generated by vibrating quartz tuning fork in concentrated ^3He - ^4He mixture. *Low Temp. Phys.* 2023; Vol. 49. Iss. 5. P. 583. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0017820>
97. Chagovets V. K., Syvokon V. E., Sokolov S. S. Influence of acoustic modes on resonance properties of a quartz tuning fork immersed in superfluid ^4He and liquid mixtures ^3He - ^4He . *Low Temp. Phys.* 2024; Vol. 50. Iss. 10. P. 875. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0028633>
98. Dash J. G., Taylor R. D. Density and Viscosity of Normal Fluid in Dilute Solutions of ^3He in ^4He *Phys. Rev.* 1957; Vol. 107. P. 1228. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.1228>
99. Webeler R. W. H., Allen G. Viscosity measurements of dilute solutions of helium-3 in superfluid helium-4 between 0.1 and 1.2°K *Phys. Letters A* 1969; Vol. 29. Iss. 2. P. 93. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(69\)91053-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(69)91053-6)
100. Bertinat M. P., Betts D. S., Brewer D. F., Butterworth G. J. Effective Viscosity of Dilute Solutions of Liquid ^3He in ^4He between 20 mK and 1 K. *Phys. Rev. Letters* 1972; Vol. 28. Iss. 8. P. 472. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.472>
101. Kuenhold S. A., Crum D. B., and Sarwinski R. E. The viscosity of dilute solutions of ^3He in ^4He at low temperatures. *Phys. Lett. A* 1972; Vol. 41. P. 13. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(72\)90611-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(72)90611-1)
102. Sheshin G. A., Zadorozhko A. A., Rudavskii E. Ya., Chagovets V. K., Skrbek L., Blažkova M. Characteristics of the transition to turbulence in superfluid ^4He at low temperatures. *Low Temp. Phys.* 2008; Vol. 34. Iss. 11. P. 875. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.3009577>
103. Rudavskii E. Ya., Serbin I. A. Excitation of First and Second Sound in ^3He - ^4He Solutions. *JETP* 1967; Vol. 24. Iss. 6. P. 1294.
104. Schmoranzer D., La Mantia M., Sheshin G., Gritsenko I., Zadorozhko A., Rotter M., Skrbek L. Acoustic Emission by Quartz Tuning Forks and Other

- Oscillating Structures in Cryogenic ^4He Fluids. *J Low Temp Phys.* 2011; Vol. 163. P. 317. DOI <https://doi.org/10.1007/s10909-011-0353-1>
105. Vikhtinskaya T. G., Herashchenko N. O., Nemchenko K. E. Second sound resonances in superfluid ^3He – ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.*, 2022; Vol. 48. Iss. 2. P 117. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0009290>
106. Herashchenko N.O., Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu. Sound resonances in supercritical and superfluid helium. *Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія «Фізика», вип. 34, 2021. с. 33–35.* DOI: <https://doi.org/10.26565/2222-5617-2021-34-05>
107. Herashchenko N., Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Collective mode resonances in superfluid ^3He – ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.* 2023; Vol. 49. Iss. 2. P. 171. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0016841>
108. Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Excitation of concentration and temperature fluctuations by vibrating bodies in superfluid ^3He – ^4He solution. *Low Temp. Phys.* 2018; Vol. 44. P. 1066. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5055849>
109. Nemchenko K., Rogova S. Second Sound Contribution to Temperature Gradient Evolution in Superfluid Mixtures. *J. Low Temp. Phys.* 2008; Vol. 150. P. 187. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-007-9528-1>
110. Nemchenko K., Rogova S. Resonances in systems with two different types of heat transfer. *J. Mod. Phys. Lett. B* 2012; Vol. 26. Iss. 23. P. 1230015. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217984912300153>
111. Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Heat Transfer in ^3He – ^4He Mixtures in Cylindrical Geometry. *J. Low Temp. Phys.* 2017; Vol. 187. P. 324. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-017-1761-7>
112. Herashchenko N. O., Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Second sound resonances in superfluid ^3He – ^4He mixtures. *II International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021.* Book of Abstracts. 6 – 12 June 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 103.
113. Herashchenko N. O., Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Sound resonances in critical and superfluid helium. *International Conference for Young Professionals*

in Physics and Technology 2021. Book of Abstracts. 26 – 30 April 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 38.

114. Herashchenko N. O., Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Influence of dissipative diffusion mode to the resonances of second sound generated by oscillating quartz tuning forks in superfluid helium. *Quantum Fluids and Solids – QFS 2021 International Online Conference. Participation certificate. 10–19 August 2021, Bangalore, India.*

115. Herashchenko N. O., Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Collective mode resonances in superfluid ^3He – ^4He mixtures. *LT29 – 29th International Conference on Low Temperature Physics. Poster. 18–24 August 2022, Sapporo, Japan.*

116. Herashchenko N. O., Vikhtinskaya T.G., Nemchenko Ye.K., Nemchenko K.E., Rogova S.Yu. Resonances of Closed Vibrating Fork in Superfluid ^3He – ^4He Mixtures. *III International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2023. Book of Abstracts. 5–11 June 2023, Kharkiv, Ukraine, p. 103.*

117. Herashchenko N. O., Nemchenko E. K., Nemchenko K. E., Vikhtinskaya T. G. Kinetic properties of solid ^3He – ^4He mixtures in the model of freely moving impurities. *Low Temp. Phys.* 2022; Vol. 48. Iss. 8. P. 583. DOI: <https://doi.org/10.1063/10.0012645>

118. Adamenko I. N., Zhukov A. V., Nemchenko K. E., George T. F. Diffusion in liquid and solid solutions ^3He – ^4He . *Low Temp. Phys.* 1997; Vol. 23. P. 428. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.593385>

119. Golub A.A., Svatko S.V. Density dependence of the thermal conductivity of HCP ^3He solution in ^4He . Analysis of phonon scattering mechanism. *Fiz. Nizk. Temp.* 1981; Vol. 7. Iss. 8. P. 970.

120. Ganishin A.V., Maidanov V.A., Omelaenko N.F., Pensev A.A., Rudavskii E.Ya., Rybalko A.S. Anomalously rapid transport of matter during dissolution of solid clusters of ^3He in separated ^3He – ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.* 1998; Vol. 24. P. 840. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.593688>

121. Grigoriev V.N., Maidanov V.A., Pensev A.A., Polev A.V., Rubets S.P., Rudavskii E.Ya., Rybalko A.S., Syrnikov E.V. Giant asymmetry of the processes of separation and homogenization of ^3He – ^4He solid mixtures. *Low Temp. Phys.* 2005; Vol. 31. Iss. 1. P. 32. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1820353>
122. Gritsenko I.A., Maidanov V.A., Rubets S.P., Rudavskii E.Ya., Rybalko A.S. Effect of phase separation kinetics on the homogenization kinetics of solid solution of ^4He in ^3He . *Low Temp. Phys.* 2018; Vol. 44. P. 301. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5030452>
123. Kim E., Chan M. H. W. Probable observation of a supersolid helium phase *Nature* 2004; Vol. 427. Iss. 6971. P. 225-7. <https://doi.org/10.1038/nature02220>
124. Hallock R. Is solid helium a supersolid? *Physics Today* 2015; Vol. 68. Iss. 5. P. 30. DOI: <https://doi.org/10.1063/PT.3.2782>
125. Chan M. H. W., Hallock R. B., Reatto L. Overview on Solid ^4He and the Issue of Supersolidity. *J. Low Temp. Phys.* 2013; Vol. 172. P. 317. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10909-013-0882-x>
126. Day J., Beamish J. R. Low-temperature shear modulus changes in solid ^4He and connection to supersolidity. *Nature* 2007; Vol. 450. P. 853. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature06383>
127. Kim D. Y., Chan M. H. W. Absence of Supersolidity in Solid Helium in Porous Vycor Glass. *Phys. Rev. Lett.* 2012; Vol. 109. P. 155301. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.155301>;
128. Riecki T.S., Manninen M.S., Tuoriniemi J.T. Decoupling of first sound from second sound in dilute ^3He -superfluid ^4He mixtures. *Phys. Rev. B* 2016; Vol. 94. P. 224514. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.224514>
129. Amrit J., Herashchenko N., Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two–mode dissipation of oscillating tuning fork in ^3He – ^4He superfluid mixtures. *Low Temp. Phys.* 2025. Vol. 51. Iss. 1. P. 5. <https://doi.org/10.1063/10.0034553>
130. Herashchenko N. O., Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Mutual transformation of acoustic and thermal waves in superfluid liquids. *International*

Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020. Book of Abstracts. 8 – 14 June 2020, Kharkiv, Ukraine, p. 86.

131. Herashchenko N., Amrit J., Nemchenko K., Rogova S. Effectiveness of heat transfer by sound and thermal conductivity in superfluid. *20th International Conference of Young Scientists on Energy and Natural Sciences Issues*. Book of Abstracts. 21–23 May 2024, Kaunas, Lithuania, p. 63.

132. Herashchenko N., Amrit J., Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two-step energy dissipation of oscillating tuning fork in ^3He – ^4He superfluid mixtures. *VI International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2024*. Book of Abstracts. 3–7 June 2024, Kharkiv, Ukraine, p. 124.

133. Lamoreaux S. K., Archibald G., Barnes P. D. et al Measurement of the ^3He mass diffusion coefficient in superfluid ^4He over the 0.45–0.95 K temperature range. *Europhys. Lett.* 2002; Vol. 58. Iss. 5. P. 718. DOI: <https://doi.org/10.1209/epl/i2002-00408-4>

134. Choudhary N., Degtyarev K., Strelnikova E., Rana S. Liquid induced vibrations of partially liquid-filled elastic cylindrical-conical shells. *Vibroengineering Procedia* 2024; Vol. 54. P. 122. DOI: <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24033>

135. Choudhary N., Kumar N., Strelnikova E., Gnitko V., Kriutchenko D., Degtyariov K. Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *J. King Saud University – Science* 2021; Vol. 33. Iss. 8. P. 101589. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589>

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у закордонному періодичному науковому виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus

1. Vikhtinskaya T. G., **Herashchenko N. O.**, Nemchenko K. E.. Second sound resonances in superfluid ^3He - ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.*, 2022; Vol. 48. Iss. 2. P 117. (Scopus, Q3). <https://doi.org/10.1063/10.0009290>
(Особистий внесок здобувача: участь у постановці, обговоренні та розв'язання поставленої задачі, проведенні розрахунків, оформлення тексту роботи)
2. **Herashchenko N. O.**, Nemchenko E. K., Nemchenko K. E., Vikhtinskaya T. G. Kinetic properties of solid ^3He - ^4He mixtures in the model of freely moving impuritons. *Low Temp. Phys.* 2022; Vol. 48. Iss. 8. P. 583. (Scopus, Q3).
<https://doi.org/10.1063/10.0012645>
(Особистий внесок здобувача: визначення мети дослідження, теоретичне обґрунтування підходів до розв'язання задачі, проведення розрахунків та підготовка текстової частини роботи)
3. **Herashchenko N.**, Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Collective mode resonances in superfluid ^3He - ^4He mixtures. *Low Temp. Phys.* 2023; Vol. 49. Iss. 2. P. 171. (Scopus, Q3). <https://doi.org/10.1063/10.0016841>
(Особистий внесок здобувача: формулювання дослідницької задачі, її аналітичне опрацювання, розрахункова частина, укладання тексту роботи згідно з вимогами наукового стилю)
4. Amrit J., **Herashchenko N.**, Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two-mode dissipation of oscillating tuning fork in ^3He - ^4He superfluid mixtures. *Low Temp. Phys.* 2025. Vol. 51. Iss. 1. P. 5. (Scopus, Q3).
<https://doi.org/10.1063/10.0034553>

(Особистий внесок здобувача: формулювання наукової проблематики, участь у розробці концепції статті, аналіз літературних джерел, проведення розрахунків та підготовка тексту публікації)

Публікації у наукових виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України

5. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu. Sound resonances in supercritical and superfluid helium. Вісник ХНУ імені В.Н. Каразіна, серія «Фізика», вип. 34, 2021. с. 33–35

<https://doi.org/10.26565/2222-5617-2021-34-05>

(Особистий внесок здобувача: обговоренні методів розв'язання, виконано аналітичні розрахунки, оформленні результатів у вигляді наукової праці.

Особистий внесок Немченка К.Е.: постановка задачі, розподіл завдань, написання статті.

Особистий внесок Віхтинської Т.Г.: аналітичні розв'язання модельних задач, інтегрування диференціальних рівнянь, перевірка тексту роботи, редагування, обговорення та аналіз результатів.

Особистий внесок Рогової С.Ю.: чисельні розрахунки та написання програм, побудова графіків, обговорення та аналіз результатів.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

6. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Mutual transformation of acoustic and thermal waves in superfluid liquids. *International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2020*. Book of Abstracts. 8 – 14 June 2020, Kharkiv, Ukraine, p. 86.

7. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Sound resonances in critical and superfluid helium. *International Conference for Young Professionals in*

Physics and Technology 2021. Book of Abstracts. 26 – 30 April 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 38.

8. **Herashchenko N.O.**, Nemchenko K.E., Vikhtinskaya T.G. Second sound resonances in superfluid $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mixtures. *II International Advanced Study Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2021*. Book of Abstracts. 6 – 12 June 2021, Kharkiv, Ukraine, p. 103.

9. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Influence of dissipative diffusion mode to the resonances of second sound generated by oscillating quartz tuning forks in superfluid helium. *Quantum Fluids and Solids – QFS 2021 International Online Conference*. Participation certificate. 10–19 August 2021, Bangalore, India.

10. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Rogova S.Yu., Nemchenko K.E. Collective mode resonances in superfluid $^3\text{He}-^4\text{He}$ mixtures. *LT29 – 29th International Conference on Low Temperature Physics*. Poster. 18–24 August 2022, Sapporo, Japan.

11. **Herashchenko N.O.**, Vikhtinskaya T.G., Nemchenko Ye.K., Nemchenko K.E., Rogova S.Yu. Resonances of Closed Vibrating Fork in Superfluid $^3\text{He}-^4\text{He}$ Mixtures. *III International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2023*. Book of Abstracts. 5–11 June 2023, Kharkiv, Ukraine, p. 103.

12. **Herashchenko N.**, Amrit J., Nemchenko K., Rogova S. Effectiveness of heat transfer by sound and thermal conductivity in superfluid. *20th International Conference of Young Scientists on Energy and Natural Sciences Issues*. Book of Abstracts. 21–23 May 2024, Kaunas, Lithuania, p. 63.

13. **Herashchenko N.**, Amrit J., Nemchenko K., Rogova S., Vikhtinskaya T. Two-step energy dissipation of oscillating tuning fork in $^3\text{He}-^4\text{He}$ superfluid mixtures. *VI International Conference Condensed Matter and Low Temperature Physics 2024*. Book of Abstracts. 3–7 June 2024, Kharkiv, Ukraine, p. 124.

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 14:54:33 10.06.2025

Назва файлу з підписом: Herashchenko_diss.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 1.7 МБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Herashchenko_diss.pdf
Розмір файлу без підпису: 1.9 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Геращенко Надія Олексіївна
П.І.Б.: Геращенко Надія Олексіївна
Країна: Україна
РНОКПП: 3608502627

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 14:54:28 10.06.2025

Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг
Серійний номер: 382367105294AF9704000000ACD58800946BEE03
Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Кваліфікований
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAdES-X Long)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.02.05 13:00