

Голові разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

РЕЦЕНЗІЯ

офіційного рецензента, доцента кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, кандидата фізико-математичних наук Бебії Максима Отарійовича на дисертаційну роботу **Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії»**, подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика.

1. Обґрунтування вибору теми дослідження

Субріманова структура на многовиді є одним із розширень ріманової, що активно досліджується у сучасній диференціальній геометрії. Багато з понять ріманової геометрії, зокрема, геодезичні криві та мінімальні підмноговиди, знаходять свої природні узагальнення у субрімановому контексті. Важливість цього розділу геометрії також пов'язана з тим, що субріманові структури можуть бути описані як нелінійні задачі теорії керування. Зокрема, задачі пошуку допустимих керувань тоді відповідає знаходженню горизонтальних кривих, а оптимальним траєкторіям — геодезичні.

У дисертації досліджуються мінімальні поверхні та їхня стійкість у тривимірних субріманових многовидах. Зауважимо, що у загальному випадку властивості мінімальності та стійкості поверхні у рімановому та субрімановому випадках відрізняються, а встановлення стійкості є складною задачею. У дисертації розглядаються, крім іншого, так звані вертикальні поверхні, для яких мінімальність у рімановому та субрімановому сенсах збігаються. Для їхнього дослідження отримані відносно прості загальні формули першої та другої варіацій субріманової площі.

Зважаючи на вищесказане, вважаю вибір теми дисертаційного дослідження обґрунтованим, а результати дисертації важливими в контексті цієї теми.

2. Оцінка змісту дисертації, її завершеності в цілому і оформлення

У **вступі** дисертаційної роботи наведені необхідні відомості про основні елементи дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі,

об'єкт, предмет і методи дослідження, наукова новизна, практичне значення та апробація результатів, особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** наведено основну інформацію, що необхідна для розуміння дослідження, та зроблено огляд літератури з тем субріманової геометрії, її зв'язків з теорією керування, мінімальних гіперповерхонь у ріманових многовидах та їхньої стійкості, а також наявних на даний момент результатів зі стійкості мінімальних поверхонь у субріманових многовидах. Цей огляд є ясним, повним і надає усі потрібні для дослідження початкові дані.

У **другому розділі** розглянуто мінімальні поверхні в універсальному накритті групи $E(2)$ рухів евклідової площини. Отримано формули першої та другої варіації, наведено приклади мінімальних поверхонь та встановлено стійкість деяких із них. Результати порівнюються із відомими даними про мінімальні поверхні у евклідовому просторі, що має ту ж ріманову структуру.

У **третьому розділі** проведено дослідження вертикальних мінімальних поверхонь у довільному тривимірному субрімановому просторі з двовимірним горизонтальним розподілом. Обчислені загальні формули першої та другої варіацій для таких поверхонь і встановлено, що для них мінімальність у рімановому та субрімановому сенсах еквівалентні, а з субріманової стійкості впливає ріманова. Крім того, описано субрімановий аналог оператора Якобі, що є корисним у дослідженнях стійкості в наступному розділі.

Четвертий розділ дисертації присвячено опису вертикальних мінімальних поверхонь у конкретних субріманових просторах. Усі вони є тривимірними унімодулярними групами Лі з інваріантними субрімановими структурами, включно з розглянутою вище групою $E(2)$. У кожному випадку наведено вичерпний список таких поверхонь та встановлена стійкість або нестійкість кожної з них.

Висновки до дисертації послідовно підсумовують отримані результати, що є новими, та містять великий перелік питань до майбутніх досліджень із теми роботи.

Список використаних джерел містить 66 пунктів. Він свідчить про те, що в процесі дослідження були детально вивчені наявні класичні та сучасні результати вітчизняних та закордонних математиків, що стосуються теми дослідження.

В цілому, дисертація є завершеною науковою працею, а її оформлення відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н. І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

4. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації

Всі необхідні базові результати та означення сформульовано у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на згадані базові результати, викладено повністю, нові результати дисертаційної роботи мають повне обґрунтування. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації, цілям та задачам дослідження і адекватно описують основні отримані результати.

5. Основні наукові результати, одержані автором, та їх новизна

Дисертант отримав наступні нові наукові результати:

- Вперше були знайдені варіаційні формули для загальних поверхонь в універсальному накритті групи $E(2)$ та досліджені конкретні поверхні за їхньою допомогою;
- Вперше були розглянуті нормальні варіації субріманової площі вертикальної поверхні у загальному субрімановому многовиді та знайдені відповідні варіаційні формули;
- Вперше було встановлено зв'язок між властивостями мінімальності та стійкості у рімановому й субрімановому сенсах вертикальної поверхні у загальному субрімановому многовиді;
- Вперше було запропоновано аналог оператора Якобі вертикальної мінімальної поверхні у загальному субрімановому многовиді та доведено достатню умову стійкості за його допомогою;
- Були розглянуті нові, на додачу до стандартних, що досліджувалися у літературі раніше, інваріантні субріманові структури на тривимірних групах L_1 , для яких отримано повні описи вертикальних мінімальних поверхонь та досліджено їхню стійкість;
- Було розглянуто нову сімейство неінваріантних субріманових структур на універсальному накритті тривимірної групи L_1 $SL(2, \mathbb{R})$, для якої теж отримано повний опис вертикальних мінімальних поверхонь та досліджено їхню стійкість.

6. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях та апробація результатів дисертації

Результати роботи належним чином опубліковано у трьох статтях у рецензованих виданнях, що входять до переліку фахових видань України, зокрема, у виданні з наукометричної бази SCOPUS (Proceedings of the International Geometry Center, квартал 3 за SCIMAGO), одна з яких без співавторів, а також у тезах доповідей трьох міжнародних конференцій, що засвідчує необхідний рівень їхньої апробації.

7. Дотримання академічної доброчесності

На підставі вивчення тексту дисертації здобувача, наукових праць здобувача та Протоколу контролю оригінальності (перевірку наявності текстових запозичень виконано в антиплагіатній інтернет-системі Strikeplagiarism.com) встановлено, що дисертаційна робота виконана самостійно, відповідає вимогам академічної доброчесності, а її текст не містить академічного плагіату. Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи супроводжуються необхідними посиланнями. Дисертація містить чіткі посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні нові результати роботи.

8. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати доповнюють існуючі дослідження з геометрії мінімальних поверхонь у субріманових просторах і можуть бути використані для подальших досліджень із заявленої тематики, а також у навчальному процесі в університетах України.

9. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До дисертаційної роботи є декілька зауважень.

1. У розділі 1 приділено увагу інтерпретації геометричних задач знаходження горизонтальних шляхів та субріманових геодезичних з точки зору теорії керування, але не вказано, чи існують такого роду інтерпретації для геометричних задач пошуку мінімальних поверхонь і встановлення їхньої стійкості, що розглянуті в роботі.
2. Було б доречно встановити також, чи впливає у загальному випадку з ріманової стійкості вертикальної мінімальної поверхні її субріманова стійкість. Зауважимо, що у всіх конкретних прикладах, що розглянуті в роботі, ці властивості збігаються.
3. Текст дисертації містить деякі граматичні та стилістичні помилки, які, втім, не впливають на сприйняття змісту роботи. Наприклад, на сторінці 118 у посиланні [20] між DOI: та самою адресою варто поставити нерозривний пробіл. Аналогічно, нерозривний пробіл варто поставити на

сторінці 18 між словом «Chapter» та цифрою 3. Є і деякі інші подібні приклади, які суттєво не впливають на якість презентації результатів роботи.

Зазначені зауваження не впливають на високу оцінку якості результатів дисертаційного дослідження і обґрунтованості наведених здобувачем висновків та є, скоріше, спонуканням автора до подальших досліджень.

10. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії», подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика, є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Вона відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

Здобувач Гавриленко Ігор Олегович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика.

Офіційний рецензент, кандидат
фізико-математичних наук
доцент кафедри прикладної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Максим БЕБІЯ

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 16:51:22 07.07.2026

Назва файлу з підписом: Рецензія - Бебія.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 407.7 КБ

Назва файлу без підпису: Рецензія - Бебія.pdf
Розмір файлу без підпису: 390.4 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: БЕБІЯ МАКСИМ ОТАРІЙОВИЧ

П.І.Б.: БЕБІЯ МАКСИМ ОТАРІЙОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 3180107251

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 18:38:59
06.07.2026

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000034CAC2010D33A507

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAAdES-X Long)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2026.05.20 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, старшого наукового співробітника, провідного наукового співробітника відділу диференціальних рівнянь і геометрії Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України Болотова Дмитра Валерійовича на дисертаційну роботу
Гавриленка Ігоря Олеговича
«Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111
Математика з галузі знань 11 Математика та статистика

1. Обґрунтування вибору теми дослідження

Субріманові структури на многовидах є природним узагальненням ріманових, що виникають у різних задачах диференціальної геометрії та теорії керування. Зокрема, контактні структури, тобто цілком неінтегровні гіперрозподіли, що утворюють субріманову структуру разом із метрикою на них, є об'єктом вивчення у контактній геометрії, що тісно пов'язана із симплектичною геометрією. Вивчення мінімальних поверхонь у субріманових многовидах було започатковане у роботах Н. Гарофало, Д.-М. Нью (1996). Мінімальними тут називаються поверхні, які є стаціонарними точками субріманового функціоналу площі, що визначається як інтеграл від довжини ортогональної проєкції одиничного нормального поля поверхні на горизонтальний розподіл. На даний час це активна область досліджень у субрімановій геометрії. Серед її змістовних результатів – детальне дослідження мінімальних поверхонь у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга (М. Ріторе, С. Розалес, А. Хуртадо, Д. Даніеллі, С.Д. Паулс та інші, з 2008 до сьогодні), а також у інших класах тривимірних субріманових многовидів: т. зв. субріманових просторових формах, псевдоермітових та інших (С. Розалес, А. Хуртадо, М. Галлі та ін.). У багатьох з цих робіт

розв'язуються задачі типу відомої теореми С.Н. Бернштейна, тобто даються описи стійких мінімальних поверхонь, що задовольняють певним геометричним умовам (наприклад, відсутність сингулярних точок). Стійкість тут розуміємо традиційним для задач варіаційного числення способом, тобто як невід'ємність других варіацій субріманової площі поверхні з компактними носіями. При цьому стійкі мінімальні поверхні часто вичерпуються вертикальними, тобто такими, що дотична площина у кожній точці поверхні перпендикулярна до площини горизонтального розподілу субріманової структури.

Дисертаційну роботу І. Гавриленка присвячено перш за все саме дослідженню мінімальності вертикальних поверхонь, хоча вона зачіпає й інші теми. Отримавши варіаційні формули для субріманової площі, автору вдається встановити, що довільна така поверхня у тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, субріманова метрика якого визначена як обмеження ріманової, буде мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона мінімальна у відповідному рімановому многовиді, а з її стійкості у субрімановому многовиді випливає стійкість у рімановому многовиді. Ці результати дозволяють далі отримати повні класифікації зв'язних вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних унімодулярних групах Лі з терстонівськими рімановими геометричними структурами та довільними лівоінваріантними горизонтальними розподілами (контактними структурами). Це суттєво розширює, у порівнянні з сучасним станом речей, класи субріманових многовидів, у яких вивчаються та можуть бути описані мінімальні поверхні. Для знайдених поверхонь досліджується також стійкість. Тут стає у нагоді отримане автором узагальнення оператора Якобі на вертикальні мінімальні поверхні, що дозволяє знайти достатню умову стійкості.

Зважаючи на сказане вище, вважаю *тему дисертаційного дослідження актуальною та обґрунтованою*, а результати дисертації важливими й такими, що започатковують новий напрямок досліджень мінімальних поверхонь у субріманових многовидах.

2. Оцінка змісту дисертації, її завершеності в цілому і оформлення

Дисертаційна робота І. Гавриленка складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку загальним обсягом 125 сторінок. Отримані дисертантом результати висвітлені у Розділах **2, 3, 4**.

У **вступі** окреслені всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми дослідження з наданням інформації про попередні результати в рамках окресленої теми, на підставі яких сформульовані мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, його методи, конкретизовано завдання дослідження. Чітко описані отримані результати, зв'язок з науковими програмами та темами, наукова новизна та практичне значення результатів, особистий внесок здобувача. Надано інформацію про апробацію результатів та публікації автора.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям з геометрії субріманових многовидів, необхідних для розуміння постановок задач та використаних методів. Наведено базові відомості з геометрії мінімальних (гіпер)поверхонь у ріманових та субріманових многовидах, зокрема, їхньої стійкості, а також (гіпер)поверхонь постійної середньої кривини та їхніх субріманових аналогів. Зроблено достатньо повний огляд наявних результатів, що стосуються мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії. Особливу увагу приділено субрімановим аналогам теореми Бернштейна.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню мінімальних поверхонь в універсальному накритті групи $E(2)$ власних ізометрій евклідового простору, що наділена евклідовою метрикою та певним «стандартним» горизонтальним розподілом. На відміну від решти роботи, тут розглядаються загальні, а не лише вертикальні поверхні. Основною метою дослідження тут є виведення і застосування формул першої та другої варіації субріманової площі для нормальних варіацій з компактними носіями. У розділі з'ясовано, що жодна з двох властивостей мінімальності поверхні — у рімановому (тобто евклідовому) і субрімановому просторах — не впливає з іншої, для чого побудовані відповідні приклади. Зокрема, показано, що не усі евклідові площини є мінімальними у даному субрімановому многовиді. Формула другої варіації тут використовується для доведення стійкості таких мінімальних площин.

Третій розділ є, на мою думку, центральним у дисертаційній роботі. Його присвячено вивченню вертикальних поверхонь у тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, субріманову метрику якого побудовано як обмеження ріманової. Тут знову автор виводить і застосовує формули першої та другої варіації субріманової площі для нормальних варіацій з компактними носіями. Вони виявляються суттєво простішими, ніж формули для загальних поверхонь з попереднього розділу, і при цьому мають один і той самий вигляд для усіх субріманових многовидів. Зокрема, формула першої варіації виявляється такою ж, як у рімановому випадку, що демонструє тотожність класів мінімальних поверхонь відносно

субріманової та ріманової геометрії. З формули ж другої варіації випливає, що якщо поверхня є стійкою у субрімановій геометрії, то вона стійка і в рімановій. Далі здобувач отримує альтернативний запис формули другої варіації з використанням аналога добре відомого у рімановій геометрії підмноговидів оператора Якобі та доводить достатню умову субріманової стійкості поверхні у термінах цього оператора, аналогічну до встановленої для гіперповерхонь ріманових многовидів Д. Фішер-Колбрі та Р. Шоеном (1980).

Четвертий розділ дисертації присвячено застосуванню методів попереднього розділу до вертикальних поверхонь у конкретних многовидах, а саме у тривимірних унімодулярних групах Лі — універсальному накритті групи $E(2)$, що досліджувалося у другому розділі, групі Гейзенберга, групі Sol та універсальному накритті групи $SL(2, \mathbb{R})$. Кожна з цих груп розглядається з певною стандартною рімановою метрикою. Вибір саме цих груп і метрик пояснюється тим, що вони є терстонівськими геометріями — стандартними об'єктами дослідження у тривимірній рімановій геометрії, що виникають у теоремі Терстона про геометризацию. У кожній із згаданих груп автор розглядає лівоінваріантні цілком неінтегровні розподіли (контактні структури), що задають субріманові структури, та отримує повну класифікацію зв'язних вертикальних мінімальних поверхонь. В силу доведеного у попередньому розділі, ця задача є насправді рімановою. Далі для кожної знайденої поверхні автор виписує формулу другої варіації субріманової площі та різними методами встановлює (не)стійкість: безпосередньо або за допомогою оператора Якобі. Зауважимо, що тут вдається знайти лише один клас нестійких поверхонь: гелікоїди в універсальному накритті групи $E(2)$ зі «стандартною» субрімановою структурою. Крім того, субріманова й ріманова властивості стійкості в усіх знайдених прикладах збігаються. Аналогічні задачі опису вертикальних мінімальних поверхонь у ще двох тривимірних унімодулярних групах Лі — евклідовому просторі з абелевою груповою структурою і тривимірній сфері — є, відповідно, тривіальною і повністю розв'язаною у наявній літературі.

Висновки до розділів та до дисертації підсумовують отримані результати та підкреслюють наукову новизну роботи, а також включають певні питання, що залишилися за межами дисертаційного дослідження. Це демонструє обізнаність автора в сучасному стані проблематики і накреслює шляхи подальшого розвитку тематики роботи.

Список використаних джерел налічує 66 найменувань і свідчить про детальне пропрацювання наявної літератури.

В цілому, дисертація являє собою самостійне, завершене та цілісне наукове дослідження, текст якого написаний з дотриманням вимог наукового стилю мовлення, а **зміст, структура і оформлення відповідають вимогам** «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

3. Основні наукові результати, одержані автором, та їх новизна

Дисертант отримав наступні **нові** наукові результати:

- Отримано формули першої та другої варіацій субріманової площі поверхні в субрімановому універсальному накритті групи $E(2)$ (**Теорема 2.1, Теорема 2.2**);
- Досліджено приклади мінімальних поверхонь у субрімановому універсальному накритті групи $E(2)$ (**Твердження 2.1, Твердження 2.2**) та встановлено стійкість деяких із них (**Твердження 2.3**);
- Обчислено загальні формули першої та другої варіацій субріманової площі вертикальної поверхні у тривимірному субрімановому многовиді (**Теорема 3.1, Теорема 3.2**);
- Запропоновано аналог оператора Якобі для вертикальної мінімальної поверхні у тривимірному субрімановому многовиді (**Твердження 3.1**);
- Описані лівоінваріантні контактні структури на низці тривимірних унімодулярних груп Лі (**Твердження 4.1-4.4**), а також одне сімейство нелівоінваріантних контактних структур на універсальному накритті групи $SL(2, \mathbb{R})$ (**Твердження 4.5**).

На мою думку, особливу цікавість становлять наступні **нові** результати:

- Доведено достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь у термінах оператора Якобі, що є аналогом відомої ріманової теореми Д. Фішер-Колбрі та Р. Шоена (**Теорема 3.3**);
- Для субріманових геометрій на тривимірних унімодулярних групах Лі класифіковані зв'язні вертикальні мінімальні поверхні та встановлено їхню (не)стійкість (**Теореми 4.1-4.5**).

Отримані результати цілком **відповідають заявленій меті та завданням дослідження**.

4. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації

Всі необхідні попередні результати та означення сформульовані у першому розділі дисертаційної роботи та мають належні посилання. Доведення теорем, які спираються на них, викладено чітко і повно, що переконує в **обґрунтованості результатів дисертаційної роботи**. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати. Всі розділи дисертації логічно пов'язані між собою і складають цілісну наукову працю. Доведення отриманих результатів здійснюється завдяки кваліфікованим обчисленням з використанням сучасної геометричної мови. Коректність результатів не викликає сумніву, адже обчислення викладені повністю.

Усі основні результати роботи опубліковані автором у трьох статтях в журналах з належним рецензуванням, зокрема, у одному виданні з наукометричної бази Scopus (Q3) та двох, що входять до переліку фахових видань України, а також у тезах доповідей на трьох міжнародних конференціях, **що цілком засвідчує їхню апробацію**.

5. Практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати складають суттєвий внесок до досліджень, пов'язаних із субрімановими многовидами та мінімальними поверхнями у них. Геометричні властивості таких многовидів та поверхонь можуть бути цікавими також для спеціалістів із математичної теорії керування.

6. Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Із відомостей, що містяться у вступі до дисертаційної роботи, випливає, що її виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н.І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

7. Дотримання академічної доброчесності

Всі використані відомі результати викладені в дисертаційній роботі з необхідними посиланнями. Дисертація містить чіткі посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації.

8. Дискусійні положення та зауваження щодо змісту дисертації

Загальні зауваження та дискусійні положення:

1. У розділі 1 роботи відсутнє обґрунтування, геометричне або з точки зору теорії керування, для поняття субріманового функціоналу площі (Означення 1.6), а отже, й для похідного поняття мінімальності поверхні в субрімановому многовиді.
2. Означення 1.8 мінімальності та стійкості поверхонь надані для варіацій, що визначені за межами сингулярної множини (до речі, варто було навести посилання на конкретні роботи, де ці поняття вводяться саме так). Вважаю, що для загального випадку корисніше було б розглядати варіації, що визначені також у сингулярних точках, наприклад, такі, що дорівнюють у цих точках нулю.
3. У розділі 4 дисертаційної роботи розглядаються терстонівські геометрії, тобто ріманові многовиди, що мають компактні фактормноговиди за діями дискретних підгруп груп ізометрій. Дослідження поверхонь у таких фактормноговидах із субрімановими структурами, їхньої мінімальності та стійкості, становило б особливий інтерес. Хоча у роботі згадуються властивості образів деяких зі знайдених вертикальних поверхонь під дією факторизації, їхнє систематичне дослідження не проводиться.
4. У дисертації, на мою думку, не досліджені детально властивості знайдених контактних структур. Зокрема, для контактної геометрії ключовим є поняття поля Ріба контактної структури. Вертикальні мінімальні поверхні, що описані у роботі, дотикаються до нормальних полів контактних структур, але не з'ясовано, коли ці поля є їхніми полями Ріба. Було б варто відмітити випадки поверхонь, що складаються з інтегральних траєкторій саме полів Ріба.

Зауваження редакційного характеру:

1. На с. 41 роботи відсутнє посилання на доведення твердження про нульову міру сингулярної множини поверхні.

2. На с. 62-63 роботи замість посилання на джерело краще було б безпосередньо перевірити твердження про те, що похідна модуля якобіана функції ϕ_s дорівнює дивергенції поля uN .
3. У Твердженні 3.1 роботи через u позначено функцію з компактним носієм, а у наступній за цим твердженням Теоремі 3.3 – вже додатну функцію на поверхні, носій якої, взагалі кажучи, не є компактным, що створює певну плутанину.

Наведені недоліки та дискусійні положення не впливають на загальний високий рівень досягнутих результатів, а, скоріше, вказують на можливі напрями подальших досліджень.

9. Загальні висновки опонента щодо дисертаційної роботи

На підставі проведеного аналізу вважаю, що дисертаційна робота Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії», подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика, *є завершеною науковою працею, яку виконано на відповідному рівні, і в якій отримано нові науково обґрунтовані результати. Дисертація відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759, а здобувач Гавриленко Ігор Олегович заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика.*

Офіційний опонент

Провідний науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь
і геометрії Фізико-технічного інституту
низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Дмитро БОЛОТОВ

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 17:27:46 07.07.2026

Назва файлу з підписом: Відгук - Болотов-2 (2).pdf
Розмір файлу з підписом: 443.1 КБ

Назва файлу без підпису: Відгук - Болотов-2 (2).verified.pdf
Розмір файлу без підпису: 439.0 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: БОЛОТОВ ДМИТРО ВАЛЕРІЙОВИЧ

П.І.Б.: БОЛОТОВ ДМИТРО ВАЛЕРІЙОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2555200673

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 16:45:59 07.07.2026

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000006EEA2E02C475BF07

Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301

Серійний номер носія особистого ключа: 011

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Кваліфікований

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З позначкою часу від ЕП (CAAdES-T)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2026.05.20 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, професора, доктора фізико-математичних наук,
професора кафедри комп'ютерних методів механіки і процесів керування
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

Пришляка Олександра Олеговича

на дисертаційну роботу **Гавриленка Ігоря Олеговича**

«Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії»,

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії

за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика

Обґрунтування вибору теми дослідження

Мінімальні підмноговиди та, більш загально, підмноговиди з паралельним полем середньої кривини у ріманових многовидах, зокрема мінімальні поверхні та поверхні постійної середньої кривини, є одним із класичних об'єктів дослідження у диференціальній геометрії та варіаційному численні. Одним із найвідоміших результатів, що їх стосуються, є теорема С. Н. Бернштейна, яка стверджує, що явно задана над усією площиною мінімальна поверхня у тривимірному евклідовому просторі є афінною площиною. Узагальнення цієї теореми, одне з яких було отримане О. В. Погореловим, потребує введення класу стійких мінімальних поверхонь, у яких площі компактних областей не зменшуються під діями варіацій.

Останнім часом багато уваги приділяється узагальненням понять мінімальності та стійкості на поверхні у многовидах із субрімановими структурами. У цьому випадку замість ріманового розглядається субрімановий функціонал площі, мінімальні поверхні визначаються як його стаціонарні точки, а стійкі — як поверхні, в яких варіації не зменшують субріманові площі компактних областей. Змістовність таких узагальнень підтверджується, зокрема, наявністю різноманітних аналогів теореми Бернштейна (D. Danielli, N. Garofalo, D.M. Nhieu, S.D. Pauls, 2009, A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales, 2010, M. Galli, 2013, S. Nicolussi, F. Serra Cassano, 2019, P. Young, 2022 та ін.).

Разом із тим, дослідження стійкості мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії ускладнюється відсутністю, на відміну від ріманового випадку, загальних варіаційних формул. Встановлення стійкості навіть конкретної відомої поверхні часто виявляється непростою аналітичною задачею.

Дисертаційна робота І. Гавриленка є суттєвим доповненням до результатів зі стійкості мінімальних поверхонь у субріманових просторах. В роботі розглянуті, крім іншого, вертикальні мінімальні поверхні у субріманових многовидах із двовимірними горизонтальними розподілами. Тут субріманова метрика будується як обмеження ріманової на горизонтальний розподіл, а вертикальність поверхні розуміємо як перпендикулярність її дотичної площини до площини цього розподілу в кожній точці. Цей клас поверхонь сам по собі не є новим, зокрема, саме вертикальні поверхні часто виникають як аналоги афінних площин у згаданих вище узагальненнях теореми Бернштейна, але у роботі І. Гавриленка вперше знайдені загальні формули першої та другої варіації субріманової площі, а також аналог оператора Якобі для вертикальних поверхонь у довільному субрімановому многовиді. Це дозволяє як робити загальні висновки щодо мінімальності та стійкості таких поверхонь, так і отримувати їхні описи для широких класів нових субріманових структур на конкретних многовидах. Саме такі описи зі встановленням стійкості поверхонь складають іншу суттєву частину дисертації. Крім вертикальних, у роботі розглянуті також більш загальні мінімальні поверхні у одній з субріманових геометрій.

На підставі наведених зауважень вважаю тему дисертаційного дослідження актуальною і такою, що відповідає сучасному стану досліджень з геометрії мінімальних поверхонь у субріманових многовидах.

Аналіз змісту дисертації

Дисертаційна робота викладена на 122 сторінках без урахування додатку. Робота складається з анотації (українською та англійською мовами), змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

Вступ складається з необхідних стандартних пунктів, а саме: обґрунтування вибору теми дослідження; мета, завдання і методи дослідження; наукова новизна одержаних результатів; зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами; практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача; апробація результатів дисертації; відомості про публікації автора та структуру дисертації. Згадані пункти містять вичерпну інформацію про

сучасний стан проблематики, ідеї та постановки задач і отримані здобувачем у ході дослідження результати.

Перший розділ є оглядово-інформативним, містить основні означення, формулювання базових теорем, що стосуються субріманових многовидів, мінімальних гіперповерхонь у рімановій та субрімановій геометріях, та достатньо повний огляд наявної літератури з теми. Розділ не містить зайвої інформації та сприяє замкненості викладення основних результатів.

У *другому розділі* розглянуто конкретний приклад субріманового многовиду — універсальне накриття групи власних рухів $E(2)$ евклідового простору. Для довільної поверхні у ньому отримано формулу першої варіації субріманової площі (Теорема 2.1) та критерій мінімальності (Наслідок 2.1), а для довільної мінімальної поверхні — формулу другої варіації (Теорема 2.2). Знайдено низку прикладів мінімальних поверхонь. Суттєвим тут є те, що ріманова метрика, що задає субріманову структуру на даному многовиді, є евклідовою, але не усі знайдені мінімальні поверхні є мінімальними у евклідовому просторі. Й навпаки, знайдено приклади поверхонь, а саме евклідових площин, що є мінімальними у евклідовому, але не у субрімановому сенсі. Для тих площин, що є субріманово мінімальними, доведена стійкість (Твердження 2.3). Також у розділі показано, що, на відміну від добре дослідженого в літературі випадку субріманової групи Гейзенберга, мінімальність поверхні у даному многовиді не є еквівалентною до рвності нулю т. зв. субріманової середньої кривини. Основні результати розділу містяться в Теоремах 2.1 і 2.2, Твердженнях 2.1 – 2.3.

Третій розділ присвячено дослідженню вертикальних мінімальних поверхонь. Для них отримано формулу першої варіації субріманової площі (Теорема 3.1) і показано, що, на відміну від прикладів із попереднього розділу, мінімальність у субрімановому сенсі еквівалентна до мінімальності у рімановому сенсі (Наслідок 3.1). Далі для мінімальної вертикальної поверхні за допомогою формули другої варіації субріманової площі (Теорема 3.2) доведено, що з її стійкості у субрімановому сенсі впливає стійкість у рімановому сенсі (Наслідок 3.2). Крім того, формулу другої варіації подано у альтернативній формі (Твердження 3.1), що дозволяє ввести субрімановий аналог відомого інструменту дослідження мінімальних поверхонь у ріманових многовидах — оператора Якобі — та отримати достатню умову стійкості, аналогічну до встановленої у рімановому випадку Д. Фішер-Колбрі та Р. Шоеном (Теорема 3.3). Таким чином, головні результати розділу презентовані в Теоремах 3.1 – 3.3, Твердженні 3.1.

Четвертий розділ продовжує тематику вертикальних мінімальних поверхонь. У ньому розглянуто низку тривимірних груп Лі з лівоінваріантними рімановими метриками, починаючи з універсального накриття групи $E(2)$, що було введено у другому розділі. Також досліджуються група Гейзенберга Nil, група Sol та універсальне накриття матричної групи $SL(2, \mathbb{R})$. Зауважимо, що усі ці групи входять у добре відомі списки тривимірних унімодулярних груп Лі та тривимірних геометрій Терстона. На кожній із груп розглядається сімейство лівоінваріантних субріманових структур (а на універсальному накритті $SL(2, \mathbb{R})$ – також нелівоінваріантні структури), і для кожної з таких структур результати попереднього розділу дозволяють надати повний опис вертикальних мінімальних поверхонь та встановити їхню стійкість. При цьому нестійкими виявляються лише поверхні з сім'ї гелікоїдів в універсальному накритті $E(2)$. Це становить зміст основних результатів даного розділу, що викладені у Теоремах 4.1 – 4.5.

Висновки до дисертаційної роботи містять повний перелік отриманих в ній нових результатів та огляд відкритих питань.

Список використаних джерел складається з 66 найменувань, з них 6 посилань на роботи здобувача, та свідчить про значний обсяг опрацьованої наукової літератури.

Оцінка змісту дисертації, її завершеності в цілому і оформлення

Враховуючи викладене вище, вважаю, що дисертація представляє собою самостійне, завершене та цілісне наукове дослідження. Текст роботи написаний з дотриманням вимог наукового стилю мовлення, засвідчує про високу математичну культуру автора, її структура узгоджується з логікою та етапністю проведеного здобувачем дослідження.

Зміст, структура, оформлення дисертації та кількість публікацій відповідають вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до

оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Як зазначено у вступі до дисертаційної роботи, її виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н. І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

Основні наукові результати, одержані автором, та їх новизна

На мою думку, серед головних нових результатів, перелічених в дисертації, можна виділити наступні:

1. Вперше були отримані формули першої та другої варіації субріманової площі загальної поверхні в універсальному накритті групи $Li\ E(2)$ та досліджено низку прикладів за їхньою допомогою (Розділ 2).
2. Вперше були отримані загальні формули першої та другої варіації субріманової площі вертикальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом і встановлено зв'язок між властивостями мінімальності та стійкості у рімановому та субрімановому випадках (Розділ 3).
3. Вперше було введено аналог оператора Якобі для загальної вертикальної мінімальної поверхні та отримано достатню умову стійкості за його допомогою (Розділ 3).
4. Вперше було досліджено ряд нестандартних інваріантних та неінваріантних субріманових структур на тривимірних унімодулярних групах Li , для кожної з яких вдалося дати повний опис вертикальних мінімальних поверхонь та їхньої стійкості (Розділ 4).

Окрім згаданих основних результатів можна відзначити важливі нові технічні результати, зокрема, критерії мінімальності для евклідових площин (Твердження 2.1) і для явно заданих поверхонь (Твердження 2.2) в універсальному накритті групи $E(2)$; вираз формули другої варіації через оператор Якобі, що може бути застосований не лише для вертикальних поверхонь

(Твердження 3.1); та критерії цілком неінтегровності лівоінваріантних розподілів на групах Лі (Твердження 4.1 – 4.5).

Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації

Усі твердження дисертаційної роботи чітко сформульовані та забезпечені повними строгими доведеннями. Ці доведення виконані шляхом копітких обчислень, правильність яких не викликає сумнівів. При цьому здобувач всюди, де це можливо, використовує сучасний, безкоординатний стиль обчислень, що підкреслює його кваліфікацію.

Результати дисертації повністю опубліковані у трьох наукових статтях у виданнях, що включені до переліку фахових видань України та наукометричної бази SCOPUS (квартіль Q3), проходили анонімне рецензування і тому є достовірними.

Практичне значення результатів дисертації

Результати роботи мають теоретичний характер та належать до фундаментальної математики, що відповідає профілю кафедри, на якій виконана дисертація. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях з теми дисертації, зокрема, для формулювання і доведення нових теорем типу Бернштейна для широких класів субріманових структур, а також у навчальному процесі для курсів диференціально-геометричної тематики в університетах України.

Апробація результатів дисертації

Робота над дисертацією та апробаційний період випали для І. Гавриленка на період російського вторгнення на територію України. Ця обставина особливо обтяжлива для науковців харківської математичної школи. Незважаючи на такі складні обставини, здобувач доповідав результати дисертаційного дослідження на Міжнародних наукових конференціях «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» (2023, 2024, 2025), Харківському геометричному семінарі (2026), семінарі кафедри комп'ютерних методів механіки і процесів керування Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2026). Тези доповідей на конференціях опубліковані, доповіді на семінарах отримали схвальні оцінки учасників.

Дотримання академічної доброчесності

При ознайомленні з текстом дисертації та публікаціями фактів академічної недоброчесності не встановлено. Усі використання результатів інших авторів мають коректні посилання на першоджерела.

Дискусійні положення та зауваження щодо змісту дисертації

В цілому, дисертаційна робота І. Гавриленка відповідає сформульованим меті та завданням дослідження. Мотивація є обґрунтованою, актуальність підтвердженою. Виконана робота є якісною, результати – достовірними. Між тим, є кілька дискусійних питань та зауважень.

1. У Наслідку 3.2 роботи доведено, що зі стійкості вертикальної мінімальної поверхні у субрімановому сенсі впливає її стійкість у рімановому сенсі. Природним видається питання про справедливість оберненого твердження, відповідь на яке потребувала б доведення в інший бік або побудови контр-прикладу. Хоча це питання згадується в переліку відкритих у висновках до роботи, без відповіді на нього загальне дослідження стійкості вертикальних поверхонь виглядає, на мою думку, неповним.
2. В дисертації слід було б приділити більше уваги опису геометрії тривимірних унімодулярних груп Лі з лівоінваріантними метриками та геометрій Терстона, пояснити важливість розгляду у четвертому розділі дисертації саме таких геометричних об'єктів. Також потребує пояснень питання, чому не розглядалися тривимірні неунімодулярні групи Лі.
3. У роботі не пояснено, чому мінімальні поверхні розглядаються саме в універсальних накриттях груп Лі $E(2)$ (Розділ 2) і $SL(2, \mathbb{R})$ (Розділ 4), а не в самих цих групах. Зв'язок між мінімальністю або стійкістю поверхні в універсальному накритті та її образу під дією накриваючого відображення згадується в одному із зауважень, але не є достатньою мірою дослідженим.
4. З попереднім питанням також пов'язане наступне більш загальне. Хоча стійкість є глобальною властивістю поверхні, у дисертації вона досліджується здебільшого локальними методами. При цьому мінімальність теж виступає як локальна властивість. Тому мало б сенс проаналізувати доведення теорем і встановити, для яких поверхонь ці властивості зберігаються під дією локальних ізометрій субріманових многовидів.

Згадані зауваження не знижують значення отриманих результатів, а скоріше вказують на можливі напрямки подальших досліджень. Як вже було зазначено, у висновках до дисертації здобувач також формулює певні перспективні напрямки.

Загальні висновки опонента щодо дисертаційної роботи

На підставі проведеного аналізу можна зробити висновок, що за своєю актуальністю, обсягом виконаних досліджень, теоретичною і практичною цінністю, науковою новизною, достовірністю отриманих результатів, обґрунтованістю висновків, оформленням роботи дисертаційна робота Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії» є завершеною самостійно виконаною науковою працею, яка відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

Вважаю, що Гавриленко Ігорь Олегович заслуговує на присудження ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика.

Офіційний опонент

доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри
комп'ютерних методів механіки і
процесів керування Київського
національного університету імені
Тараса Шевченка

Олександр ПРИШЛЯК

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 16:57:23 07.07.2026

Назва файлу з підписом: Відгук - Пришляк.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 129.8 КБ

Назва файлу без підпису: Відгук - Пришляк.pdf
Розмір файлу без підпису: 125.7 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ПРИШЛЯК ОЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

П.І.Б.: ПРИШЛЯК ОЛЕКСАНДР ОЛЕГОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2522205617

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 18:08:34 03.07.2026

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000008C189C00FE4DBD07

Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301

Серійний номер носія особистого ключа: 011

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Кваліфікований

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З позначкою часу від ЕП (CAAdES-T)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2026.05.20 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
професору Світлані ІГНАТОВИЧ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, професора кафедри загальної математики Запорізького національного університету, кандидата фізико-математичних наук
Стеганцевої Поліни Георгіївни
на дисертаційну роботу **Гавриленка Ігоря Олеговича**
«Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії в галузі знань
11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Обґрунтування вибору теми дослідження

Дисертаційна робота Гавриленка Ігоря Олеговича присвячена дослідженню мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та умов їх стійкості.

Теорія мінімальних поверхонь виникла із задачі знаходження серед всіх поверхонь зі спільною межею у тривимірному евклідовому просторі поверхні з найменшою площею й швидко розвивалась протягом 19 та 20 століть. Паралельно з'являлися численні узагальнення цієї задачі на багатовимірні ріманові та псевдоріманові простори, наприклад, виділення класів мінімальних поверхонь у цих просторах з додатковими умовами на їх гаусовий образ (або у випадках узагальнення на грассмановий образ поверхні). Важливим питанням теорії мінімальних поверхонь стало питання їх реалізації у охоплюючих просторах, його розв'язання привело до виникнення поняття стійкості мінімальних поверхонь.

Теорія мінімальних поверхонь залишається популярною як серед зарубіжних так і серед вітчизняних науковців. Про це свідчать достатньо регулярні публікації у науковій літературі. Але, незважаючи на досить вагому кількість результатів щодо мінімальних поверхонь, достатньо велика кількість питань залишаються відкритими, зокрема, дослідження вертикальних мінімальних поверхонь у субріманових многовидах та їх стійкості. У дисертаційній роботі досліджується загальна теорія вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах й описуються вертикальні мінімальні поверхні у тривимірних

групах $Li\ Nil$, Sol , універсальних накриттях груп $E(2)$ і $SL(2, R)$ – чотирьох з шести можливих тривимірних однозв'язних унімодулярних груп Li . Враховуючи наявні дослідження щодо груп R^3 і S^3 , можна говорити про певну завершеність дослідження вертикальних мінімальних поверхонь у цих многовидах. Отже, тема дисертації є актуальною.

Оцінка змісту дисертації, її завершеності в цілому і оформлення

Дисертація містить 125 сторінок, складається з анотацій українською й англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, висновків, посилань, додатку.

Текст дисертації є чітко структурованим, викладеним у логічній послідовності.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання роботи, об'єкт, предмет та застосовані методи дослідження, перераховано отримані результати, обґрунтовано їх наукову новизну та практичне значення.

У розділі 1 наведено означення та приклади об'єкту дослідження – підмноговиду у субрімановій геометрії, означення мінімальної поверхні у субрімановій геометрії та поняття стійкості мінімальної поверхні. Проведено огляд дотичних до цих понять результатів, опублікованих у наявній науковій літературі.

У розділі 2 досліджено мінімальні поверхні у тривимірному субрімановому многовиді, що є групою Li й універсальним накриваючим простором групи $E(2)$ власних рухів евклідової площини. Розглянуто особливості, зумовлені лівоінваріантною субрімановою структурою даного многовиду, наведено приклади стійких мінімальних поверхонь.

У розділі 3 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні у тривимірних субріманових многовидах, доведено еквівалентність поняття мінімальності вертикальної поверхні у субрімановому та рімановому сенсах. У підрозділі 3.2 доведено, що умова стійкості вертикальної мінімальної поверхні у субрімановому сенсі є достатньою для її стійкості у рімановому сенсі.

У розділі 4 описано вертикальні мінімальні поверхні у тривимірних групах $Li\ Nil$, Sol , універсальних накриттях груп $E(2)$ і $SL(2, R)$, досліджено їх стійкість. Зокрема, знайдено умови, при яких субріманова структура на універсальному накритті групи $E(2)$ допускає вертикальні мінімальні поверхні, а також виділено всі можливі класи таких поверхонь, як стійких так і нестійких (підрозділ 4.1).

У підрозділі 4.2 (4.3) доведено теорему, що описує всі класи зв'язних вертикальних поверхонь у субрімановому многовиді Nil (Sol), показано, що всі вони є стійкими у субрімановому сенсі, а отже й у рімановому також. Аналогічна класифікаційна теорема доведена у підрозділі 4.4 для вертикальних мінімальних поверхонь у субрімановому універсальному

накритті групи $SL(2, \mathbb{R})$. Особливістю цієї теореми є той факт, що вона дає явний вигляд можливих параметризацій таких поверхонь.

Список використаних джерел містить 60 посилань на роботи інших математиків та 6 посилань на статті та тези доповідей автора, де викладено зміст роботи.

Загалом, вважаю, що дисертація являє собою самостійне, завершене та цілісне наукове дослідження. Матеріал написано у науковому стилі, логічно, зміст дисертації відповідає заявленій тематиці. Оформлення дослідження повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Дисертацію виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н. І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації

Доведення теорем виконане повністю, обчислення не мають помилок. Зважаючи на це, можна зробити висновок про повну обґрунтованість результатів дисертації та коректність висновків.

Хоча використані в роботі методи дослідження й не є новими, але їх застосування у багатьох випадках із субрімановою метрикою вимагало певним чином креативного підходу для врахування вказаних метричних особливостей.

Всі отримані результати опубліковані в трьох статтях у наукових спеціалізованих журналах з кваліфікованим анонімним рецензуванням, що включені до переліку фахових видань України (в тому числі одна стаття у журналі «Proceedings of the International Geometry Center», який включено до міжнародної бази даних Scopus, квартал 3) та трьох тезах міжнародних наукових конференцій.

Основні наукові результати, одержані автором, та їх новизна

В дисертаційній роботі Гавриленка І.О. отримано наступні нові наукові результати:

- Виведено нові формули другої варіації субріманової площі поверхні у субрімановому універсальному накритті групи $E(2)$;
- Знайдено критерій мінімальності евклідової площини у субрімановому універсальному накритті групи $E(2)$ та встановлено її стійкість;
- Доведено теореми про загальний вигляд формул першої та другої варіацій субріманової площі вертикальних поверхонь у довільному субрімановому многовиді;
- Показано, що поняття мінімальності вертикальної поверхні в рімановому сенсі еквівалентне поняттю її мінімальності в субрімановому сенсі;
- Досліджено зв'язок між стійкістю мінімальної вертикальної поверхні в рімановому та субрімановому сенсі;
- Дано повний опис зв'язних вертикальних поверхонь у тривимірних многовидах Nil , Sol , універсальних накриттях груп $E(2)$ і $SL(2, \mathbb{R})$, наділених лівоінваріантними субрімановими структурами (стандартними та нестандартними), досліджена їх стійкість.

Як уже зазначалося, перелічені нові результати дисертаційної роботи є обґрунтованими та достовірними.

Дотримання академічної доброчесності

За результатами перевірки та аналізу дисертаційної роботи Гавриленка І.О. та наявних за її темою публікацій ознак академічного плагіату, фабрикації чи фальсифікації не виявлено. Дисертаційна робота є результатом власних досліджень здобувача. Цитування мають коректні посилання на відповідні джерела.

Практичне значення результатів дисертації

Дисертація є науковою роботою з фундаментальної математики і має теоретичний характер. Результати дисертації можуть бути використані у подальших дослідженнях з геометрії мінімальних поверхонь у субріманових многовидах та в освітньому процесі як курс за вибором для поглибленого вивчення геометрії.

Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

Загальні зауваження та дискусійні положення:

1. В роботі не пояснено, чому саме унімодулярні групи Li обрані в якості конкретних прикладів тривимірних субріманових многовидів і чому не розглядаються, наприклад, неунімодулярні групи Li . Є згадки про

геометрії Терстона, але значення цієї групи геометричних структур не розкриті належним чином.

2. В деяких випадках для полегшення читання роботи було б краще деталізувати пояснення (або викладки). Так, для усіх груп Лі, що розглядаються у роботі, наведено вигляд групових операцій та базисних лівоінваріантних векторних полів, але не пояснено, як здійснюється перехід від групової операції до полів й не надано посилань, які могли б замінити це пояснення. Те ж стосується виведення формул для коваріантного диференціювання. На мою думку, ці переходи варто було б виписати детальніше.

Зауваження редакційного характеру:

1. По всьому тексту роботи використовується «зветься» замість «називається».
2. Одночасно використовуються терміни «цілком неінтегровний розподіл» (с. 32) та «повна неінтегровність розподілу» (с. 33) для одного й того самого поняття.
3. На с. 40 замість виразів «не містять якусь точку...», «не містять якусь геодезичну...» краще використати «існує точка (геодезична), що не належить до...».
4. На с. 86 повинно бути «використаємо метод, що був описаний...».
5. На с. 74 у реченні перед наслідком 4.1 «З неї також випливає наступний частковий результат типу Бернштейна» краще використати слово «частинний» (або «особливий»).
6. Символ Σ використовується для позначення поверхні, але іноді зустрічаються фрази «розшарування Σ » (наприклад, с. 77) або «друга фундаментальна форма Σ » (наприклад, с. 78). Краще було б не опускати слово «поверхня» в такого типу виразах.
7. На с. 115 у формулюванні задачі для можливих майбутніх досліджень «отримання класифікаційних теорем про вертикальні мінімальні поверхні в неунімодулярних тривимірних субріманових групах Лі та встановлення їхньої стійкості» та інших аналогічних замість «встановлення» краще «дослідження».
8. Відсутні дужки для підінтегральних виразів, наприклад, у формулюванні теореми 3.2.
9. На с. 84 й с. 86 запропоновані перепозначення для коефіцієнтів λ і μ , що є різними, хоча з тексту можна зробити висновок, що це одне й те саме перепозначення.
10. Варто було б на с. 35 для групи Гейзенберга надати номери формулам, що описують вигляд групової операції та базисних векторів алгебри Лі цієї групи. На ці номери можна було б дати посилання при отриманні формул (4.6) та (4.7).

Наявні недоліки та дискусійні положення не впливають на загальний високий рівень отриманих результатів.

Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

На підставі проведеного аналізу вважаю, що дисертаційна робота Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії» є завершеною науковою працею, містить вагомий список нових результатів. Дисертаційна робота відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 зі змінами, внесеними згідно з Постановами КМ від 21 березня 2022 р. № 341, від 19 травня 2023 р. № 502 та від 03 травня 2024 р. № 507, та наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження вимог до оформлення дисертацій» зі змінами, внесеними згідно з Наказом Міністерства освіти і науки від 31.05.2019 р. № 759., про що свідчать актуальність теми роботи, новизна отриманих в ній наукових результатів, їх теоретичне та практичне значення.

Вважаю, що автор дисертаційної роботи Гавриленко Ігор Олегович заслуговує на присудження йому ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика з галузі знань 11 Математика та статистика.

Офіційний опонент

професор кафедри загальної математики
Запорізького національного університету,
кандидат фізико-математичних наук,
професор

Поліна СТЕГАНЦЕВА

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 17:12:25 07.07.2026

Назва файлу з підписом: Відгук - Стеганцева.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 279.7 КБ

Назва файлу без підпису: Відгук - Стеганцева.pdf
Розмір файлу без підпису: 276.6 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: СТЕГАНЦЕВА ПОЛІНА ГЕОРГІЇВНА

П.І.Б.: СТЕГАНЦЕВА ПОЛІНА ГЕОРГІЇВНА

Країна: Україна

РНОКПП: 2015314383

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для даних від Надавача): 08:52:21
05.07.2026

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000F4872E0244D6BD07

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: Базовий (CAAdES-BES)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2026.05.20 13:00