

ВИСНОВОК

про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Гавриленка Ігоря Олеговича

«Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії»

яка подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 Математика та статистика

за спеціальністю 111 Математика

1. Оцінка роботи здобувача у процесі підготовки дисертації і виконання індивідуального плану навчальної та наукової роботи.

Аспірант Гавриленко Ігор Олегович виконав у повному обсязі Індивідуальний план виконання освітньо-наукової програми підготовки доктора філософії. Освітня програма в обсязі 40 кредитів ECTS виконана у повному об'ємі. Він успішно склав наступні дисципліни:

- залік з навчальної дисципліни «Філософські засади та методологія наукових досліджень» (100 балів);
- залік з навчальної дисципліни «Іноземна мова для аспірантів» (50 балів);
- залік з навчальної дисципліни «Підготовка наукових публікацій та презентація результатів досліджень» (100 балів);
- залік з навчальної дисципліни «Викладацька практика» (100 балів);
- іспит з навчальної дисципліни «Іноземна мова для аспірантів» (55 балів);
- іспит з навчальної дисципліни «Геометрія груп Лі» (100 балів);
- іспит з навчальної дисципліни «Теорія графів» (75 балів);
- іспит з навчальної дисципліни «Основи теорії представлень» (90 балів).

Всі заплановані види робіт були виконані своєчасно. Здобувач плідно співпрацював з науковими керівниками протягом усього терміну навчання в аспірантурі.

2. Обґрунтування вибору теми дослідження.

Мінімальні поверхні є класичним об'єктом вивчення у диференціальній геометрії та варіаційному численні. Перші роботи з їх математичного дослідження належать ще Л. Ейлеру і Ж.-Л. Лагранжу. *Мінімальна поверхня* у рімановому многовиді визначається зазвичай як критична (стаціонарна) точка функціонала ріманової площі відносно варіацій з компактним носієм, тобто таких, що зберігають межу деякої компактної області. Умова мінімальності є

необхідною, але не достатньою умовою мінімізації площі відносно таких варіацій і еквівалентна рівності нулю середньої кривини H поверхні. Іншими словами, $H = 0$ є рівнянням Ейлера – Лагранжа даної варіаційної задачі.

Достатньою умовою мінімізації площі (причому лише для визначеного класу варіацій) є *стійкість* поверхні – невід'ємність других варіацій її площі. З іншого боку, деякі поверхні *мінімізують площу* серед будь-яких варіацій, а отже автоматично є стійкими. До таких поверхонь, відносяться, зокрема, явно задані у тривимірному евклідовому просторі, тобто графіки функцій $z = f(x, y)$. Відома теорема українського математика С.Н. Бернштейна, яка була опублікована у 1915 році, стверджує, що мінімальна поверхня, що явно задана на \mathbb{R}^2 , є площиною, тобто графіком функції $z = ax + by + c$. Інший український математик О.В. Погорелов був серед тих, хто узагальнив цю теорему на початку 1980-х, показавши, що повна зв'язна орієнтовна стійка мінімальна поверхня у тривимірному евклідовому просторі є площиною. Пізніше О.А. Борисенко отримав узагальнення теореми Бернштейна для двовимірних поверхонь у багатовимірних евклідових просторах та сферах, довівши, зокрема, що явно задана над усією площиною мінімальна поверхня у евклідовому просторі, кут нахилу якої досягає максимального значення, є площиною.

Різноманітні узагальнення теореми Бернштейна дотепер продовжують з'являтися як для евклідового випадку, так і для багатьох інших геометричних структур. Зокрема, дослідження задачі Бернштейна виявилось плідним для поверхонь у *субріманових многовидах*. Такі многовиди, що ще зветься просторами Карно-Каратеодорі й дослідження яких почалося у 1980-х роках, є природним узагальненням ріманових, що корисне, зокрема, для задач теорії керування і нейробіології. У таких многовидах виникає додаткова структура цілком неінтегровний (цілком неголономний) *горизонтальний розподіл*, до якого повинні дотикатися шляхи, що мінімізують відстань між точками. Зазначимо, що професор Харківського університету Д.М. Синцов був одним з перших математиків, що почали вивчати геометричні властивості неголономних систем ще до появи сучасного поняття субріманової структури.

У роботі Н. Гарофало, Д.-М. Ньє з'явилося загальноживане зараз поняття *субріманового функціоналу площі* поверхні як інтеграла від проекції ріманового одиничного нормального поля на горизонтальний розподіл. Тоді мінімальні та стійкі поверхні можна визначати так само, як у рімановому випадку. Існує значний об'єм літератури з мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах: групі Гейзенберга, т. зв. субріманових просторах постійної кривини, інших групах Лі з лівоінваріантними структурами. Зокрема, були отримані теореми типу Бернштейна для різних

субріманових многовидів. Разом з тим, дана тематика ще досить далека від вичерпання.

У згаданих вище та інших роботах з мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії суттєву складність становить знаходження першої та другої варіацій субріманової площі. На відміну від ріманового випадку, в силу залежності цього функціонала від горизонтального розподілу ці формули визначаються конкретною субрімановою структурою та можуть бути досить складними. Тому становить інтерес знаходження класів поверхонь, де такі формули можуть бути описані універсальним чином. У дисертаційній роботі ми досліджуємо один такий клас – *вертикальні поверхні*, у яких дотичні площини в усіх точках перпендикулярні до горизонтальних. Крім існування для них загальних формул варіації, вертикальні мінімальні поверхні цікаві тим, що дозволяють явний опис для широкого класу субріманових структур. У роботі ми ілюструємо це, даючи повні описи для структур, що визначені загальним лівоінваріантними горизонтальними розподілами, на різних тривимірних групах Лі. Важливим також є те, що у згаданих вище результатах типу Бернштейна стійкі поверхні з порожньою сингулярною множиною (тобто такі, що дотична площина у жодній точці не є горизонтальною) частіше за все зводяться саме до вертикальних.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження стійкості мінімальних поверхонь у субріманових просторах.

Основні завдання дисертаційного дослідження:

1. Знайти формулу першої варіації субріманової площі поверхні у субрімановій групі Лі $\widetilde{E}(2)$, за її допомогою охарактеризувати мінімальні поверхні та знайти приклади таких поверхонь.
2. Знайти формулу другої варіації субріманової площі мінімальної поверхні у $\widetilde{E}(2)$, за її допомогою дослідити стійкість знайдених мінімальних поверхонь.
3. Знайти формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, за її допомогою встановити зв'язок між мінімальністю поверхні у рімановому і субрімановому сенсах.
4. Знайти формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, за її допомогою встановити зв'язок між стійкістю поверхні у рімановому і субрімановому сенсах.
5. Визначити аналог оператора Якобі для поверхонь у субрімановій геометрії та сформулювати достатню умову стійкості за допомогою цього оператора.

6. Дати повний опис вертикальних мінімальних поверхонь для різних лівоінваріантних структур на тривимірних групах Лі $\widetilde{E(2)}$, Nil , Sol , $SL(2, \mathbb{R})$ та дослідити їх на стійкість.
7. Описати вертикальні мінімальні поверхні у субрімановій структурі на тривимірній групі Лі, що не є лівоінваріантною, та дослідити ці поверхні на стійкість.

Об'єкт та предмет дослідження.

Об'єктом дослідження є підмноговиди у субрімановій геометрії.

Предметами дослідження є мінімальність та стійкість поверхонь у субрімановій геометрії.

Методи дослідження.

1. Методи субріманової геометрії (використано при побудові субріманових структур).
2. Методи ріманової геометрії (використано при обчисленні коваріантних похідних, тензорів кривини та Річчі).
3. Методи диференціальної геометрії підмноговидів (використано при знаходженні коефіцієнтів першої та другої фундаментальних форм поверхонь, середньої кривини).
4. Методи диференціальних рівнянь (використано при виведенні рівнянь мінімальних поверхонь).
5. Методи варіаційного числення (використано при побудові та дослідженні варіацій).
6. Методи теорії груп Лі (використана класифікація тривимірних груп Лі у побудові лівоінваріантних субріманових структур).
7. Методи теорії алгебр Лі (використано при виборі базисів алгебр Лі тривимірних груп Лі).

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н.І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

4. Особистий внесок дисертанта в отриманні наукових результатів та їх новизна.

1. Вперше були систематично розглянуті вертикальні поверхні у довільному тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, знайдено їхні загальні формули першої та другої варіації, проаналізовані зв'язки між мінімальністю та стійкістю таких поверхонь у рімановому та субрімановому сенсах
2. Вперше було введено оператор Якобі вертикальної мінімальної поверхні у загальному вигляді й доведено достатню умову стійкості в термінах цього оператора.
3. Для тривимірних груп $\widetilde{E}(2)$, Nil , Sol , $SL(2, \mathbb{R})$ вперше були розглянуті загальні лівоінваріантні субріманові структури, що визначені фіксованою лівоінваріантною метрикою і довільним лівоінваріантним горизонтальним розподілом. До цього у літературі для кожної з цих груп розглядалася лише одна «стандартна» структура. Для цих структур були дані повні описи мінімальних вертикальних поверхонь та досліджено їхню стійкість. Крім того, на групі $SL(2, \mathbb{R})$ вперше були досліджені приклади нелівоінваріантних субріманових структур.
4. Для поверхонь у групі Лі $\widetilde{E}(2)$ зі стандартною субрімановою структурою були отримані нові формули першої та другої варіації для довільної (не обов'язково вертикальної) поверхні та критерії мінімальності у різних формах, зокрема, для явно заданих поверхонь.

5. Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій, які захищаються.

Обґрунтованість та достовірність наукових результатів, одержаних Гавриленком І.О. при проведенні досліджень за темою дисертаційної роботи, забезпечується використанням фундаментальних підходів і методів диференціальної геометрії, ріманової геометрії, диференціальних рівнянь, математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії груп та алгебр Лі. Основні результати дисертаційного дослідження опубліковані в індексованих наукових журналах та доповідалися на міжнародних наукових конференціях. Висновки дисертаційної роботи є обґрунтованими.

6. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Отримані результати доповнюють існуючі дослідження з геометрії мінімальних поверхонь та їхньої стійкості і можуть бути використані для подальших досліджень із заявленої тематики.

7. Повнота викладення матеріалів дисертації в роботах, опублікованих автором.

Всі основні результати роботи опубліковано у фахових журналах, індексованих у наукометричній базі SCOPUS з них 1 у журналах квартілю Q3. Дві роботи виконані у співавторстві, одна самостійно. Результати були представлені на трьох конференціях міжнародного рівня, які входять до переліку міжнародних наукометричних баз.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Публікації у фахових виданнях України:

- **Гавриленко І., Петров Є.** Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E}(2)$. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*. 2023. Т 98. С. 50-67.
DOI <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04>
(Особистий внесок здобувача: обчислення формули першої варіації субріманової площі поверхні у групі Лі $\widetilde{E}(2)$, виведення критерію мінімальності поверхні, знаходження формули другої варіації субріманової площі, дослідження декількох прикладів мінімальних поверхонь та їхньої стійкості, опис вертикальних мінімальних поверхонь).
- **Navrylenko I.** The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group $SL(2, \mathbb{R})$. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Math., Appl. Math., Mech.* 2025. Vol 102. P. 30-47.
DOI <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04>

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

- **Navrylenko I., Petrov E.** Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 159-182. (Scopus Q3)
DOI <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04>
(Особистий внесок здобувача: обчислення формул першої та другої варіацій субріманової площі вертикальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним

розподілом, опис вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах Лі Nil та Sol, доведення їхньої стійкості).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

- **Гавриленко І., Петров Є.** Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $E(2)$. *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» Devoted to 160 Anniversary of Dmytro Grave, Odesa, May 29-June~1, 2023.* Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2023. P. 127-129.
URL:<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf>
- **Наврыленко І., Петров Е.** Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 27-30, 2024.* Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2024. P. 50-51.
URL:<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf>
- **Havrylenko I.** Stability of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups. *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 26-29, 2025.* Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2025. P. 41-43.
URL:<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2025/agma2025-theses.pdf>

8. Дотримання академічної доброчесності.

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертаційної роботи з необхідними посиланнями. Дисертація містить чіткі посилання на наукові роботи автора, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

9. Оцінка структури, мови та стилю дисертації.

Матеріал дисертації викладено в логічній послідовності та доступно для сприйняття. Дисертація написана науковим стилем мовлення, структура дисертації відповідає алгоритму здійсненого автором дослідження. Зміст,

структура, оформлення дисертації та кількість публікацій відповідають вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44), наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

10. Відповідність змісту дисертації спеціальності, за якою вона подається до захисту.

За своїм фаховим спрямуванням, науковою новизною і практичною значимістю дисертаційна робота Гавриленка І.О. «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії» повністю відповідає паспорту спеціальності 111 «Математика». Здобувачем повністю виконано освітню та наукову складову третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти.

11. Результати обговорення та проведення презентації. Рекомендація дисертації до захисту.

Здобувач представив основні результати своєї дисертаційної роботи на розширеному засіданні кафедри фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна щодо попередньої експертизи дисертації (Витяг з протоколу № 9 розширеного засідання кафедри фундаментальної математики від 20 квітня 2026 р.) у формі презентації та наукової дискусії після її завершення. На даному засіданні були присутні 18 співробітників із різних наукових та навчальних установ України, із яких 9 докторів наук, 9 кандидатів наук та 2 докторів філософії.

У рамках цього розширеного засідання було ухвалено одноголосно (20 голосів) рекомендувати дисертаційну роботу аспіранта Гавриленка Ігоря Олеговича «Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії» до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111 «Математика».

Головуючий, в.о. завідувача кафедри
фундаментальної математики факультету
математики і інформатики
Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна, доктор філософії

Дмитро СЕЛЮТІН