

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Гавриленко Ігор Олегович**

УДК: 514.7

## **ДИСЕРТАЦІЯ**

### **МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ У СУБРІМАНОВІЙ ГЕОМЕТРІЇ**

Спеціальність 111 Математика  
(Галузь знань 11 Математика та статистика)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ І. О. Гавриленко

Науковий керівник: Петров Євген В'ячеславович,  
кандидат фізико-математичних наук.

Харків – 2026

# Анотація

*Гавриленко І.О.* Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2026.

Дисертацію присвячено дослідженню стійкості мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії, зокрема, отриманню класифікаційних теорем для окремих класів мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових групах Лі та тверджень про їхню стійкість.

**Метою** дисертаційної роботи є дослідження стійкості мінімальних поверхонь у субріманових просторах.

**Об'єктом дослідження** є підмноговиди у субрімановій геометрії.

**Предметом дослідження** є мінімальність та стійкість поверхонь у субрімановій геометрії.

Для дослідження використано **методи** диференціальної геометрії, зокрема, ріманової та субріманової геометрії, геометрії підмноговидів, диференціальних рівнянь, варіаційного числення, теорії груп та алгебр Лі.

**Перший розділ** дисертаційної роботи містить базові відомості про субріманову геометрію, приклади субріманових многовидів, що використовуються у роботі, поняття мінімальності та стійкості гіперповерхонь, зокрема поверхонь, у рімановій та субрімановій геометрії, усі необхідні означення та огляд наявної літератури, що присвячена мінімальним підмноговидам у субріманових многовидах та їхній стійкості.

**Другий розділ** дисертаційної роботи присвячено дослідженню поверхонь у тривимірному многовиді  $\widetilde{E}(2)$ , тобто універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну

субріманову структуру. Ця група описується як простір  $\mathbb{R}^3$  з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Лівоінваріантна метрика при цьому є евклідовою. У підрозділі 2.1 виводиться нова формула першої варіації субріманової площі поверхні у  $\widetilde{E(2)}$ . Тут і далі  $N$  позначає одиничне нормальне поле зануреної орієнтовної поверхні  $\Sigma$  у многовиді  $M$ , субріманова структура якого визначена двовимірним цілком неінтегровним розподілом  $\mathcal{H}$  і обмеженням на нього ріманової метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , що визначена на  $M$ . Зокрема, для  $\widetilde{E(2)}$  розподіл  $\mathcal{H}$  ортогональний до  $X_3$ . *Субрімановою площею* області  $D \subset \Sigma$  зветься

$$A(D) = \int_D |N^h| d\Sigma,$$

де  $N^h$  – ортогональна проєкція поля  $N$  на  $\mathcal{H}$ . *Нормальною варіацією* поверхні  $\Sigma$ , що задана гладкою функцією  $u$  з компактним носієм, зветься відображення  $\varphi: \Sigma \times I \rightarrow M$ , що визначене умовою  $\varphi_s(p) = \exp_p(s u(p) N(p))$ , де  $I$  – деякий окіл нуля в  $\mathbb{R}$ ,  $\exp_p$  – ріманове експоненційне відображення. Через  $A(s) = A(\Sigma_s)$  тоді позначаємо субріманову площу поверхні варіації  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ .

**Теорема 2.1** *Нехай  $\Sigma$  – поверхня у  $\widetilde{E(2)}$ . Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u d\Sigma.$$

Тут  $\Sigma_0$  – множина *сингулярних точок*  $\Sigma$ , у яких  $N^h = 0$ ,  $Z$  – *характеристичне векторне поле*, яке у точці  $p \in \Sigma \setminus \Sigma_0$  утворюється з  $\nu^h(p) = N^h(p)/|N^h(p)|$  обертанням на прямий кут у площині  $\mathcal{H}_p$ ,  $B$  – оператор Вейнгартена  $\Sigma$  відносно  $N$ .

Поверхня  $\Sigma$  називається *мінімальною*, якщо  $A'(0) = 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . Мінімальна поверхня

$\Sigma$  зветься *стійкою*, якщо  $A''(0) \geq 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . З попередньої формули виведено наступний критерій мінімальності поверхонь.

**Наслідок 2.1** *Поверхня  $\Sigma$  у  $\widetilde{E}(2)$  мінімальна тоді й тільки тоді, коли на  $\Sigma \setminus \Sigma_0$*

$$\langle B(Z), Z \rangle = \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle.$$

Звідси також було отримано критерій мінімальності для явно заданих поверхонь і показано, що з мінімальності загальної поверхні у рімановому сенсі не впливає мінімальність у субрімановому сенсі або навпаки.

У підрозділі 2.2 виводиться наступна нова формула другої варіації субріманової площі.

**Теорема 2.2** *Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня у  $\widetilde{E}(2)$ . Тоді друга нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має вигляд:*

$$\begin{aligned} A''(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} & \left( |N^h|^{-1} (Z(u) - \langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u)^2 - \right. \\ & - 2|N^h| \langle B(Z), S \rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3 \rangle \langle B(Z), S \rangle Z(u)u + \\ & + 4\langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle \langle B(S), S \rangle u^2 + \\ & + 2(1 - 2|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u)u + \\ & \left. + |N^h| (2 - 3|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u^2 \right) d\Sigma. \end{aligned}$$

Тут  $S$  – поле, що доповнює  $Z$  до ортонормованого репера на  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . За допомогою цієї формули ми встановили, що мінімальні евклідові площини є стійкими.

**Третій розділ** дисертаційної роботи присвячено дослідженню вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та їхньої стійкості. У підрозділі 3.1 використане наступне означення вертикальної поверхні:

**Означення 3.1** *Поверхня  $\Sigma$  у тривимірному субрімановому многовиді  $M$  з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$  зветься *вертикальною*,*

якщо її дотична площина  $T_p\Sigma$  перпендикулярна до горизонтальної площини субріманової структури  $\mathcal{H}_p$  (тобто їхні вектори нормалі ортогональні) у кожній точці  $p$  поверхні.

Далі в цьому підрозділі ми знайшли загальну формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді.

**Теорема 3.1** *Нехай  $\Sigma$  – вертикальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді  $M$  з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ . Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H u \, d\Sigma,$$

де  $H$  – ріманова середня кривина  $\Sigma$ .

**Наслідок 3.1** *Вертикальна поверхня є мінімальною в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона є мінімальною в рімановому сенсі, тобто коли  $H = 0$ .*

У підрозділі 3.2 ми обчислили формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні.

**Теорема 3.2** *Нехай  $\Sigma$  – вертикальна мінімальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді  $M$  з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ . Тоді друга нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має вигляд:*

$$A''(0) = \int_{\Sigma} - (X(u) - \langle \nabla_N X, N \rangle u)^2 + |\nabla_{\Sigma} u|^2 - \\ - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 \, d\Sigma,$$

де  $\nabla$  і  $\text{Ric}$  – ріманова зв'язність та тензор Річчі  $M$  відповідно,  $X$  – одиничне нормальне поле  $\mathcal{H}$ , що є дотичним до  $\Sigma$  в силу вертикальності,  $\nabla_{\Sigma}$  і  $|B|$  – рімановий градієнт і норма другої фундаментальної форми  $\Sigma$  відповідно.

**Наслідок 3.2** Якщо вертикальна мінімальна поверхня є стійкою в субрімановому сенсі, вона також є стійкою в рімановому сенсі.

У підрозділі 3.3 було введено нове поняття оператора Якобі для вертикальних поверхонь. Для цього ми спочатку показали, що отриману формулу другої варіації можна записати у вигляді

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - f u^2 d\Sigma$$

для деякої функції  $f$ .

**Твердження 3.1** Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною в тривимірному субрімановому многовиді, друга варіація субріманової площі якої має вигляд як вище для ортонормованого репера  $\{X, Z\}$  на  $\Sigma$  (зокрема вертикальна). Тоді її можна переписати у вигляді

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} uL(u) d\Sigma$$

де  $L$  – оператор Якобі на просторі гладких функцій на  $\Sigma$ :

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(u) + f u.$$

Оператор Якобі  $L$ , що виникає у цьому твердженні, є аналогом ріманового оператора Якобі. Зокрема, він теж є лінійним оператором на  $C^\infty(\Sigma)$ . Далі ми довели наступну достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь:

**Теорема 3.3** Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня в тривимірному субрімановому многовиді з порожньою сингулярною множиною, другою варіацією субріманової площі, що має вигляд як вище, та оператором Якобі  $L$ . Якщо існує гладка додатна функція  $u$  на  $\Sigma$  така, що  $L(u) \leq 0$ , то  $\Sigma$  є стійкою.

**Четвертий розділ** дисертаційної роботи присвячено опису вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах Лі  $\widetilde{E(2)}$ ,  $Nil$ ,  $Sol$  та  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  та дослідженню їхньої стійкості. У підрозділі 4.1 було

доведено наступне:

**Теорема 4.1** *Нехай субріманова структура на  $\widetilde{E}(2)$  визначена двовимірним лівоінваріантним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

*і  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$ . Вона допускає вертикальні мінімальні поверхні тоді й тільки тоді, коли  $\mu = 0$ .*

*При  $\mu = 0$  зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня у  $\widetilde{E}(2)$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у евклідовій площині  $z = z_0$  або паралельно перенесеному стандартному гелікоїді*

$$(x - x_0) \cos(z + \alpha) + (y - y_0) \sin(z + \alpha) = 0,$$

*де  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$  (відповідно, є однією з цих поверхонь).*

*При цьому площини є стійкими, а гелікоїди – нестійкими.*

У підрозділі 4.2 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні у групі  $Nil$ , що описується як простір  $\mathbb{R}^3$  з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

і доведено наступну класифікаційну теорему:

**Теорема 4.2** *Нехай субріманова структура на  $Nil$  визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3).$$

*Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в цьому субрімановому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у вертикальній евклідовій площині над довільною прямою в площині  $(x, y)$  при  $\lambda = \mu = 0$ , і над прямою з напрямним вектором  $(\lambda, \mu)$  в іншому випадку (відповідно, є такою площиною).*

*Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже й у рімановому сенсі.*

У підрозділі 4.3 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні в групі  $Sol$ , що описана як простір  $\mathbb{R}^3$  з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

і доведено класифікаційну теорему:

**Теорема 4.3** *Нехай субріманова структура на  $Sol$  визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} (\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

і  $\lambda\mu \neq 0$ .

Якщо  $\nu \neq 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в цьому субрімановому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у циліндрі, що параметризований або як

$$r(s, t) = \left( x_0 - \frac{\lambda}{\nu} e^{-s}, t, s \right),$$

або як

$$r(s, t) = \left( t, y_0 + \frac{\mu}{\nu} e^s, s \right)$$

(відповідно, є таким циліндром).

Якщо  $\nu = 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у горизонтальній евклідовій площині  $z = z_0$  або  $\lambda = \pm\mu$ , а поверхня є областю в «гіперболічному гелікоїді» з параметризацією

$$r(s, t) = \left( x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} s, y_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^t s, t \right)$$

(відповідно, є однією з цих поверхонь).

Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже й у рімановому сенсі.

У підрозділі 4.4 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні у групі  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , що є, зокрема, універсальним накриттям розшарування одиничних векторів гіперболічної площини та може бути представлена

як множина  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$  з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_2 = -y \sin z \frac{\partial}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial}{\partial y} + \sin z \frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Доведено наступну класифікаційну теорему:

**Теорема 4.4** *Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$  з лівоінваріантною субрімановою структурою, що визначається горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X_1^\perp$ , є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю або у півплощині  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , або у гелікоїдальній поверхні з однією з наступних параметризацій:*

$$r(s, t) = (x_0 - t \sin s, t \cos s, s), \quad t \in (0, +\infty),$$

$$r(s, t) = (x_0 \pm t - t \sin s, t \cos s, s), \quad t \in (0, +\infty),$$

$$r(s, t) = (x_0 + y_0 \text{sh } t - y_0 \text{ch } t \sin s, y_0 \text{ch } t \cos s, s), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r(s, t) = (x_0 \pm y_0 \text{ch } t - y_0 \text{sh } t \sin s, y_0 \text{sh } t \cos s, s), \quad t \in (0, +\infty),$$

$$s \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(відповідно, є однією з перелічених поверхонь). Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому сенсі.

Далі у цьому підрозділі ми ввели нове сімейство нелівоінваріантних субріманових структур з використанням іншого ортонормованого базису

$$Y_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

для якого теж довели класифікаційну теорему:

**Теорема 4.5** *Нехай субріманова структура на  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$  визначається двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$$

і  $\lambda \neq -1$ . Ця субріманова структура допускає вертикальні мінімальні поверхні лише при  $\lambda = 0$  та  $\lambda = 1$ .

Якщо  $\mu \neq 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна

поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у евклідовій півплощині  $x = x_0$  при  $\lambda = 0$  або у евклідовій півплощині  $z = z_0$  при  $\lambda = 1$  (відповідно, є такою площиною).

Якщо  $\mu = 0$  та  $\lambda = 1$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю або у евклідовій півплощині  $z = z_0$ , або у циліндрі з параметризацією

$$r(s, t) = \left( s, y_0 \cos t, z_0 + \sqrt{2}t \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right),$$

де  $k \in \mathbb{Z}$  (відповідно, є одною з таких поверхонь).

Якщо  $\mu = \lambda = 0$ , то повна (відповідно, повна зв'язна) поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у циліндрі (відповідно, циліндр) над геодезичною у гіперболічній площині  $\mathbb{H}^2$ .

Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому сенсі.

Усі перелічені тут результати роботи є новими. Зокрема, результати розділу 3 дозволили нам у розділі 4 розглянути широкі класи інваріантних та неінваріантних субріманових структур на тривимірних групах Лі, що раніше не досліджувалися.

**Ключові слова:** субрімановий многовид, лівоінваріантна метрика, ріманова зв'язність, метрична топологія, задача керування, нелінійна керована система, оптимізація, група Карно, алгебра Лі, мінімальна поверхня, вертикальна поверхня, потік, стійкість, середня кривина, оператор Якобі.

# Abstract

*Ihor O. Havrylenko.* Minimal surfaces in sub-Riemannian geometry. – Qualifying scientific work in the form of a manuscript.

A thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Specialty 111 Mathematics (11 Mathematics and Statistics). – V.N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2026.

The thesis is devoted to the study of stability of minimal surfaces in sub-Riemannian geometry, in particular, to classification theorems for certain classes of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups and to their stability.

**The purpose** of the thesis is to study the stability of minimal surfaces in sub-Riemannian spaces.

**The research object** is submanifolds in sub-Riemannian geometry.

**The subject of research** is the minimality and the stability of surfaces in sub-Riemannian geometry.

The research uses **the methods** of differential geometry, in particular, Riemannian and sub-Riemannian geometry, geometry of submanifolds, differential equations, calculus of variations, and Lie theory.

**The first chapter** of the thesis contains the basics of sub-Riemannian geometry, examples of sub-Riemannian manifolds used in the research, the notions of minimality and stability of hypersurfaces, in particular, surfaces, in Riemannian and sub-Riemannian geometry, all the necessary definitions, and a review of the existing literature devoted to minimal submanifolds in sub-Riemannian manifolds and their stability.

**The second chapter** of the thesis is devoted to the study of surfaces in the three-dimensional manifold  $\widetilde{E}(2)$ , i.e., the universal covering of the group of orientation-preserving Euclidean plane isometries, which has a left-invariant sub-Riemannian structure. This group is described as the space  $\mathbb{R}^3$  with an

orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}.$$

The left-invariant metric here is Euclidean. In Section 2.1 we derive a new formula for the first sub-Riemannian area variation of a surface in  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ . From here on,  $N$  denotes the unit normal field of an immersed orientable surface  $\Sigma$  in a manifold  $M$ , whose sub-Riemannian structure is defined by a two-dimensional totally non-integrable distribution  $\mathcal{H}$  and the restriction to  $\mathcal{H}$  of a Riemannian metric  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $M$ . In particular, for  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ , the distribution  $\mathcal{H}$  is orthogonal to  $X_3$ . The *sub-Riemannian area* of a domain  $D \subset \Sigma$  is defined as

$$A(D) = \int_D |N^h| d\Sigma,$$

where  $N^h$  is the orthogonal projection of the field  $N$  onto  $\mathcal{H}$ . The *normal variation* of a surface  $\Sigma$  given by a smooth function  $u$  with compact support is defined as the map  $\varphi: \Sigma \times I \rightarrow M$ , which is determined by the condition  $\varphi_s(p) = \exp_p(s u(p) N(p))$ , where  $I$  is some neighborhood of zero in  $\mathbb{R}$  and  $\exp_p$  is the Riemannian exponential map. By  $A(s) = A(\Sigma_s)$  we denote the sub-Riemannian area of the variation surface  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ .

**Theorem 2.1** *Let  $\Sigma$  be a surface in  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ . Then its first normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function  $u$  with compact support has the following form:*

$$A'(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u d\Sigma.$$

Here,  $\Sigma_0$  is the set of *singular points* of  $\Sigma$ , i.e., those where  $N^h = 0$ ,  $Z$  is the *characteristic vector field* that at each point  $p \in \Sigma \setminus \Sigma_0$  is obtained from  $\nu^h(p) = N^h(p)/|N^h(p)|$  by a right angle rotation in the plane  $\mathcal{H}_p$ ,  $B$  is the Weingarten operator of  $\Sigma$  with respect to  $N$ .

A surface  $\Sigma$  is called *minimal*, if  $A'(0) = 0$  for any normal variation with compact support in  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . A minimal surface  $\Sigma$  is called *stable*, if  $A''(0) \geq 0$  for any normal variation with compact support in  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . The following criterion

for the minimality of surfaces is derived from the previous formula.

**Corollary 2.1** *A surface  $\Sigma$  in  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$  is minimal if and only if*

$$\langle B(Z), Z \rangle = \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle.$$

on  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ .

From this, a minimality criterion for graphs was also obtained, and it was shown that the minimality in the Riemannian sense does not imply the minimality in the sub-Riemannian sense, or vice versa.

In Section 2.2, we derive the following new formula for the second sub-Riemannian area variation.

**Theorem 2.2** *Let  $\Sigma$  be a minimal surface in  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ . Then its second normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function  $u$  with compact support has the following form:*

$$\begin{aligned} A''(0) = & \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} \left( |N^h|^{-1} (Z(u) - \langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u)^2 - \right. \\ & - 2|N^h| \langle B(Z), S \rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3 \rangle \langle B(Z), S \rangle Z(u)u + \\ & + 4\langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle \langle B(S), S \rangle u^2 + \\ & + 2(1 - 2|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u)u + \\ & \left. + |N^h| (2 - 3|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u^2 \right) d\Sigma. \end{aligned}$$

Here  $S$  is the field that together with  $Z$  forms an orthonormal frame on  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ .

Using this formula, we proved that minimal Euclidean planes are stable.

**The third chapter** of the thesis is devoted to the study of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds and their stability. In Section 3.1 we use the following definition of a vertical surface:

**Definition 3.1** A surface  $\Sigma$  in a three-dimensional sub-Riemannian manifold  $M$  with a two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H}$  is called *vertical*, if its tangent plane  $T_p\Sigma$  is perpendicular to the horizontal plane  $\mathcal{H}_p$  of the sub-Riemannian structure (i.e., their normal vectors are orthogonal) at every point  $p$  of the surface.

In this section, we obtained a general first sub-Riemannian area variation

formula of a vertical surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold.

**Theorem 3.1** *Let  $\Sigma$  be a vertical surface in a 3-dimensional sub-Riemannian manifold  $M$  with a two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H}$ . Then its first normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function  $u$  with compact support has the following form:*

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H u \, d\Sigma,$$

where  $H$  is the Riemann mean curvature of  $\Sigma$ .

**Corollary 3.1** *A vertical surface is minimal in the sub-Riemannian sense if and only if it is minimal in the Riemannian sense, i.e.,  $H = 0$ .*

In Section 3.2, we calculated the second sub-Riemannian area variation formula of a vertical minimal surface.

**Theorem 3.2** *Let  $\Sigma$  be a vertical minimal surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold  $M$  with a two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H}$ . Then its second normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function  $u$  with compact support has the following form:*

$$A''(0) = \int_{\Sigma} - (X(u) - \langle \nabla_N X, N \rangle u)^2 + |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 \, d\Sigma,$$

where  $\nabla$  and  $\text{Ric}$  are the Riemannian curvature and Ricci tensor of  $M$ , respectively,  $X$  is the unit normal field of  $\mathcal{H}$ , which is tangent to  $\Sigma$  due to its verticality,  $\nabla_{\Sigma}$  and  $|B|$  are the Riemannian gradient and the norm of the second fundamental form of  $\Sigma$ , respectively.

**Corollary 3.2** *If a vertical minimal surface is stable in the sub-Riemannian sense, it is also stable in the Riemannian sense.*

In Section 3.3, we introduced a new notion of the Jacobi operator for vertical surfaces. To do this, we first showed that the the second variation formula can be rewritten as

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - f u^2 \, d\Sigma$$

for some function  $f$ .

**Proposition 3.1** *Let  $\Sigma$  be a minimal surface with empty singular set in a three-dimensional sub-Riemannian manifold whose second sub-Riemannian area variation has the form as above for an orthonormal frame  $\{X, Z\}$  on  $\Sigma$  (in particular, vertical). Then it can be rewritten as*

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} uL(u) d\Sigma$$

where  $L$  is the Jacobi operator on the space of smooth functions on  $\Sigma$ :

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(u) + f u.$$

The Jacobi operator  $L$ , that appears in this statement, is similar to the Riemannian Jacobi operator. In particular, it is also a linear operator on  $C^\infty(\Sigma)$ . Next, we proved the following sufficient condition for the stability of vertical minimal surfaces:

**Theorem 3.3** *Let  $\Sigma$  be a minimal surface in a 3-dimensional sub-Riemannian manifold with empty singular set, the second sub-Riemannian area variation as above, and the Jacobi operator  $L$ . If there exists a smooth positive function  $u$  on  $\Sigma$  such that  $L(u) \leq 0$ , then  $\Sigma$  is stable.*

**The fourth section** of the thesis is devoted to the description of vertical minimal surfaces in three-dimensional Lie groups  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ ,  $Nil$ ,  $Sol$ , and  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  and to the study of their stability. In subsection 4.1, the following was proven:

**Theorem 4.1** *Let a sub-Riemannian structure on  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$  be defined by a two-dimensional left-invariant distribution  $\mathcal{H} = X^\perp$ , where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

and  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$ . It allows vertical minimal surfaces if and only if  $\mu = 0$ .

When  $\mu = 0$ , a connected (resp., complete connected) vertical surface in  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$  is minimal if and only if it is a subset either of a Euclidean plane  $z = z_0$  or of a helicoid

$$(x - x_0) \cos(z + \alpha) + (y - y_0) \sin(z + \alpha) = 0,$$

where  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$  (resp., is one of these surfaces). In this case, planes are stable and helicoids are unstable.

In Section 4.2, we consider vertical minimal surfaces in the group *Nil*, that is described as the space  $\mathbb{R}^3$  with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

and the following classification theorem is proved:

**Theorem 4.2** *Let a sub-Riemannian structure on Nil be defined by a left-invariant two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H} = X^\perp$ , where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3).$$

*A connected (resp., complete connected) vertical surface in this sub-Riemannian manifold is minimal if and only if it is a subset of a vertical Euclidean plane over an arbitrary straight line in the  $(x, y)$ -plane for  $\lambda = \mu = 0$  or over a straight line with the direction  $(\lambda, \mu)$  otherwise (resp., is such a plane).*

*All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.*

In Section 4.3, we consider vertical minimal surfaces in the group *Sol*, which is described as the space  $\mathbb{R}^3$  with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

and prove the classification theorem:

**Theorem 4.3** *Let a sub-Riemannian structure on Sol be defined by a left-invariant two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H} = X^\perp$ , where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

*and  $\lambda\mu \neq 0$ .*

*If  $\nu \neq 0$ , then a connected (resp., complete connected) vertical surface in this sub-Riemannian manifold is minimal if and only if it is a subset of a cylinder parameterized either as*

$$r(s, t) = \left( x_0 - \frac{\lambda}{\nu} e^{-s}, t, s \right),$$

or as

$$r(s, t) = \left( t, y_0 + \frac{\mu}{\nu} e^s, s \right)$$

(resp., is such a cylinder).

If  $\nu = 0$ , then the connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if either it is a subset of a horizontal Euclidean plane  $z = z_0$ , or  $\lambda = \pm\mu$  and the surface is a subset of a «hyperbolic helicoid» parameterized as

$$r(s, t) = \left( x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} s, y_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^t s, t \right)$$

(resp., is such a surface).

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

In Section 4.4, we consider vertical minimal surfaces in the group  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ , that is, in particular, the universal covering of the unit tangent bundle of the hyperbolic plane and can be described as the set  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$  with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$\begin{aligned} X_1 &= y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 &= -y \sin z \frac{\partial}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial}{\partial y} + \sin z \frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

The following classification theorem has been proven:

**Theorem 4.4** *A connected (resp., complete connected) vertical surface in  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  with the left-invariant sub-Riemannian structure defined by the horizontal distribution  $\mathcal{H} = X_1^\perp$  is minimal if and only if it is a subset either of a half-plane  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , or of a helicoidal surface with one of the following parameterizations:*

$$\begin{aligned} r(s, t) &= (x_0 - t \sin s, t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\ r(s, t) &= (x_0 \pm t - t \sin s, t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\ r(s, t) &= (x_0 + y_0 \sinh t - y_0 \cosh t \sin s, y_0 \cosh t \cos s, s), & t \in \mathbb{R}, \\ r(s, t) &= (x_0 \pm y_0 \cosh t - y_0 \sinh t \sin s, y_0 \sinh t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\ s &\in \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), & k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(resp., is one of such surfaces). All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

Also in this subsection, we introduced a new family of non-left-invariant sub-Riemannian structures using another orthonormal basis

$$Y_1 = y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

for which we also proved a classification theorem:

**Theorem 4.5** *Let a sub-Riemannian structure on  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$  be defined by a two-dimensional horizontal distribution  $\mathcal{H} = X^\perp$ , where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$$

and  $\lambda \neq -1$ . This sub-Riemannian structure allows vertical minimal surfaces only for  $\lambda = 0$  and  $\lambda = 1$ .

If  $\mu \neq 0$ , then a connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset of a Euclidean half-plane  $x = x_0$  for  $\lambda = 0$  or of a Euclidean half-plane  $z = z_0$  for  $\lambda = 1$  (resp., is such a plane).

If  $\mu = 0$  and  $\lambda = 1$ , then a connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset either of the Euclidean half-plane  $z = z_0$ , or of a cylinder parameterized as

$$r(s, t) = \left( s, y_0 \cos t, z_0 + \sqrt{2} t \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right),$$

where  $k \in \mathbb{Z}$  (resp., is one of such surfaces).

If  $\mu = \lambda = 0$ , then the connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset of a cylinder (resp., is a cylinder) over a geodesic in the hyperbolic plane.

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

All of the results listed above are new. In particular, the results of Chapter 3 allowed us to consider in Chapter 4 extensive classes of invariant and non-invariant sub-Riemannian structures on three-dimensional Lie groups that had not been studied before.

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, Riemannian connection, metric topology, control problem, nonlinear control system, optimization, Carnot group, Lie algebra, minimal surface, vertical surface, flow, stability, mean curvature, Jacobi operator.

# Список публікацій здобувача

## Публікації у фахових виданнях України:

1. **Гавриленко І., Петров Є.** Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. 2023. Т. 98. С. 50-67.

**DOI:** [10.26565/2221-5646-2023-98-04](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04)

**Ключові слова:** субрімановий многовид, лівоінваріантна метрика, мінімальна поверхня, стійкість.

*(Особистий внесок здобувача: обчислення формули першої варіації субріманової площі поверхні у групі Лі  $\widetilde{E}(2)$ , виведення критерію мінімальності поверхні, знаходження формули другої варіації субріманової площі, дослідження декількох прикладів мінімальних поверхонь та їхньої стійкості, опис вертикальних мінімальних поверхонь.*

*Особистий внесок співавтора: постановка задачі, пропозиції прикладів, уточнення формулювань результатів та доведення субріманової нестійкості стандартного гелікоїда, редагування статті, конкретизація висновків.)*

2. **Havrylenko I.** The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Math., Appl. Math., Mech.* 2025. Vol. 102. P. 30-47.

**DOI:** [10.26565/2221-5646-2025-102-02](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2025-102-02)

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, minimal surface, Jacobi operator, stability.

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. **Havrylenko I.**, Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 159-182. (Scopus Q3)

DOI: [10.15673/pigc.v18i2.3009](https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3009)

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, minimal surface, stability.

(Особистий внесок здобувача: обчислення формул першої та другої варіацій субріманової площі вертикальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, опис вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах  $Li\ Nil$  та  $Sol$ , доведення їхньої стійкості.

Особистий внесок співавтора: постановка задачі, запропоновані техніки розв'язання та уточнення формулювань, редагування статті, конкретизація висновків.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. **Гавриленко І.**, Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» Devoted to 160 Anniversary of Dmytro Grave, Odesa, May 29-June 1, 2023*. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2023. P. 127-129.

URL: [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf)

5. **Havrylenko I.**, Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *International Scientific Online*

*Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 27-30, 2024. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2024. P. 50-51.*

**URL:** [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf)

6. **Havrylenko I.** Stability of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups. *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 26-29, 2025. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2025. P. 41-43.*

**URL:** [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2025/agma2025-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2025/agma2025-theses.pdf)

# Зміст

Вступ . . . . .	25
1 Базові відомості та огляд літератури . . . . .	32
1.1 Субріманові многовиди та їхні приклади . . . . .	32
1.2 Стійкість мінімальних гіперповерхонь у рімановій геометрії . . . . .	37
1.3 Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії та їхня стійкість . . . . .	41
2 Мінімальні поверхні у субрімановому многовиді $\widetilde{E}(2)$ . . . . .	47
2.1 Формула першої варіації та мінімальні поверхні . . . . .	47
2.2 Формула другої варіації . . . . .	56
2.3 Висновки до розділу . . . . .	59
3 Вертикальні мінімальні поверхні у тривимірних субріманових многовидах . . . . .	60
3.1 Вертикальні поверхні та формула першої варіації для них . . . . .	60
3.2 Формула другої варіації для вертикальних поверхонь . . . . .	64
3.3 Оператор Якобі для вертикальних поверхонь . . . . .	66
3.4 Висновки до розділу . . . . .	69
4 Вертикальні мінімальні поверхні у тривимірних групах $L_1$ та їхня стійкість . . . . .	70

4.1	Вертикальні мінімальні поверхні в групі $\widetilde{E}(2)$ . . . . .	70
4.2	Вертикальні мінімальні поверхні в групі $Nil$ . . . . .	75
4.3	Вертикальні мінімальні поверхні в групі $Sol$ . . . . .	81
4.4	Вертикальні мінімальні поверхні в групі $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	90
4.5	Висновки до розділу . . . . .	110
	Висновки до дисертації . . . . .	112
	Список використаних джерел . . . . .	117

# Вступ

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Мінімальні поверхні є класичним об'єктом вивчення у диференціальній геометрії та варіаційному численні. Перші роботи з їх математичного дослідження належать ще Л. Ейлеру і Ж.-Л. Лагранжу. *Мінімальна поверхня* у рімановому многовиді визначається зазвичай як критична (стаціонарна) точка функціонала ріманової площі відносно варіацій з компактним носієм, тобто таких, що зберігають межу деякої компактної області. Умова мінімальності є необхідною, але не достатньою умовою *мінімізації площі* відносно таких варіацій і еквівалентна рівності нулю середньої кривини  $H$  поверхні. Іншими словами,  $H = 0$  є рівнянням Ейлера – Лагранжа даної варіаційної задачі.

Достатньою умовою мінімізації площі (причому лише для визначеного класу варіацій) є *стійкість* поверхні – невід'ємність других варіацій її площі. З іншого боку, деякі поверхні мінімізують площу серед будь-яких варіацій, а отже, автоматично є стійкими. До таких поверхонь, відносяться, зокрема, явно задані у тривимірному евклідовому просторі, тобто графіки функцій  $z = f(x, y)$ . У дослідженні явно заданих та більш загальних стійких мінімальних поверхонь у просторах сталої кривини суттєвим є внесок українських математиків. Відома теорема С.Н. Бернштейна, яка була опублікована у 1915 році в журналі Харківського математичного товариства, стверджує, що мінімальна поверхня, що явно задана на  $\mathbb{R}^2$ , є площиною, тобто графіком функції  $z = ax + by + c$ . О.В. Погорелов довів аналогічні теореми для гіперповерхонь у сферах, отримав необхідні та достатні умови стійкості мінімальних поверхонь у гіперболічному просторі та був серед тих, хто узагальнив теорему Бернштейна на початку 1980-х років, показавши, що повна зв'язна орієнтовна стійка мінімальна поверхня у тривимірному евклідовому просторі є площиною. Пізніше О.А. Борисенко отримав узагальнення теореми Бернштейна для двовимірних поверхонь у багатови-

мірних евклідових просторах та сферах, довівши, зокрема, що явно задана над усією площиною мінімальна поверхня у евклідовому просторі, кут нахилу якої досягає максимального значення, є площиною.

Різноманітні узагальнення теореми Бернштейна дотепер продовжують з'являтися як для евклідового випадку ([10, 11, 43]), так і для багатьох інших геометричних структур. Зокрема, дослідження задачі Бернштейна виявилось плідним для поверхонь у *субріманових многовидах*. Такі многовиди, що ще зветься *просторами Карно – Каратеодорі* й дослідження яких почалося у 1980-х роках, є природним узагальненням ріманових, що корисне, зокрема, для задач теорії керування і нейробіології. У таких многовидах виникає додаткова структура – цілком неінтегровний (цілком неголономний) *горизонтальний розподіл*, до якого повинні дотикатися шляхи, що мінімізують відстань між точками. Зазначимо, що професор Харківського університету Д.М. Синцов був одним з перших математиків, що почали вивчати геометричні властивості неголономних систем ще до появи сучасного поняття субріманової структури.

У роботі [20] з'явилося загальновживане зараз поняття *субріманового функціоналу площі* поверхні як інтеграла від проєкції ріманового одиничного нормального поля на горизонтальний розподіл. Тоді мінімальні та стійкі поверхні можна визначати так само, як у рімановому випадку. Існує значний об'єм літератури з мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та їхніх багатовимірних узагальнень: групі Гейзенберга, групах Карно, псевдоермітових многовидах, т. зв. субріманових просторах сталої кривини, інших групах Лі з лівоінваріантними структурами ([7, 8, 18, 32, 54]). Теореми типу Бернштейна для різних субріманових многовидів були отримані, зокрема, у [3, 13, 14, 17, 19, 22, 33, 36, 47, 50, 58, 64]. Разом з тим, дана тематика ще досить далека від вичерпання.

У процитованих вище та інших роботах з мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії суттєву складність становить знаходження першої та

другої варіації субріманової площі. На відміну від ріманового випадку, в силу залежності цього функціонала від горизонтального розподілу, ці формули визначаються конкретною субрімановою структурою та можуть бути досить складними. Тому становить інтерес знаходження класів поверхонь, де такі формули можуть бути описані універсальним чином. У дисертаційній роботі ми досліджуємо один такий клас – *вертикальні поверхні*, у яких дотичні площини в усіх точках перпендикулярні до горизонтальних. Крім існування для них загальних формул варіації, вертикальні мінімальні поверхні цікаві тим, що дозволяють явний опис для широкого класу субріманових структур. У роботі ми ілюструємо це, даючи повні описи для структур, що визначені загальними лівоінваріантними горизонтальними розподілами, на різних тривимірних групах Лі. Важливим також є те, що у цитованих вище результатах типу Бернштейна стійкі поверхні з порожньою сингулярною множиною (тобто такі, що дотична площина у жодній точці не є горизонтальною) частіше за все зводяться саме до вертикальних.

### **Мета і завдання дослідження.**

- *Мета* – дослідження стійкості мінімальних поверхонь у субріманових просторах.
- *Об'єкт дослідження* – підмноговиди у субрімановій геометрії.
- *Предмет дослідження* – мінімальність та стійкість поверхонь у субрімановій геометрії.
- *Завдання дослідження:*
  1. Знайти формулу першої варіації субріманової площі поверхні у субрімановій групі Лі  $\widetilde{E}(2)$ , за її допомогою охарактеризувати мінімальні поверхні та знайти приклади таких поверхонь.
  2. Знайти формулу другої варіації субріманової площі мінімальної поверхні у  $\widetilde{E}(2)$ , за її допомогою дослідити стійкість знайдених

мінімальних поверхонь.

3. Знайти формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, за її допомогою встановити зв'язок між мінімальністю поверхні у рімановому і субрімановому сенсах.
  4. Знайти формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, за її допомогою встановити зв'язок між стійкістю поверхні у рімановому і субрімановому сенсах.
  5. Визначити аналог оператора Якобі для поверхонь у субрімановій геометрії та сформулювати достатню умову стійкості за допомогою цього оператора.
  6. Дати повний опис вертикальних мінімальних поверхонь для різних лівоінваріантних структур на тривимірних групах Лі  $\widetilde{E(2)}$ ,  $Nil$ ,  $Sol$ ,  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  та дослідити їх на стійкість.
  7. Описати вертикальні мінімальні поверхні у субрімановій структурі на тривимірній групі Лі, що не є лівоінваріантною, та дослідити ці поверхні на стійкість.
- *Методи дослідження.* У дисертаційній роботі використано методи диференціальної геометрії, зокрема, ріманової та субріманової геометрії, геометрії підмноговидів, диференціальних рівнянь, варіаційного числення, теорії груп та алгебр Лі.

**Наукова новизна отриманих результатів.** У дисертаційній роботі вперше були систематично розглянуті вертикальні поверхні у довільному тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, знайдено їхні загальні формули першої та другої варіації,

проаналізовані зв'язки між мінімальністю та стійкістю таких поверхонь у рімановому та субрімановому сенсах.

У дисертаційній роботі було введено оператор Якобі вертикальної мінімальної поверхні у загальному вигляді й доведено достатню умову стійкості поверхні в термінах цього оператора.

Для тривимірних груп Лі  $\widetilde{E(2)}$ ,  $Nil$ ,  $Sol$ ,  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  у дисертаційній роботі вперше були розглянуті загальні лівоінваріантні субріманові структури, що визначені фіксованою лівоінваріантною метрикою і довільним лівоінваріантним горизонтальним розподілом. До цього у літературі для кожної з цих груп розглядалася лише одна «стандартна» структура. Для цих структур були дані повні описи мінімальних вертикальних поверхонь та досліджено їхню стійкість. Крім того, на групі  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  вперше були досліджені приклади нелівоінваріантних субріманових структур.

Для поверхонь у групі Лі  $\widetilde{E(2)}$  зі стандартною субрімановою структурою у дисертаційній роботі були отримані нові формули першої та другої варіації для довільної (не обов'язково вертикальної) поверхні та критерії мінімальності у різних формах, зокрема, для явно заданих поверхонь.

#### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри, у рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» та в рамках конкурсу математичних проєктів фонду імені Н.І. Ахієзера 2025 року, коли результати досліджень були відзначені стипендією фонду.

**Практичне значення отриманих результатів.** Робота носить теоретичний характер. Результати роботи доповнюють і розширюють наявні знання з мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії та їхньої стійкості. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях з цієї тематики,

зокрема, для формулювання і доведення нових теорем типу Бернштейна для широких класів субріманових структур.

**Особистий внесок здобувача.** Дисертаційна робота є самостійним науковим дослідженням автора. Постановка задачі була здійснена науковим керівником Є.В. Петровим. Роботи [66], [27] виконані у співпраці з науковим керівником, робота [28] виконана здобувачем особисто. Усі результати, що представлені в розділах 2-4 дисертації, були отримані автором особисто. Протягом усього дослідження вони активно обговорювалися з науковим керівником. Результати, що належать іншим математикам, згадуються за необхідності для повноти викладення та супроводжуються необхідними посиланнями.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались і обговорювались на наступних конференціях:

1. Гавриленко І., Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» Devoted to 160 Anniversary of Dmytro Grave, Odesa, May 29-June 1, 2023.
2. Havrylenko I., Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 27-30, 2024.
3. Havrylenko I. Stability of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups. International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 26-29, 2025.

**Публікації.** Всі основні результати роботи в повній мірі опубліковані у фахових журналах, пройшли апробацію на наукових конференціях. Результати дисертації містяться у трьох статтях [66], [27], [28], з яких одна

написана без співавторів, і в тезах доповідей на трьох конференціях [65], [25], [26].

**Структура дисертації.** Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків до дисертації, переліку використаних джерел та додатку. Повний об'єм дисертаційної роботи становить 125 сторінок, з них обсяг основного тексту – 92 сторінки, 4 рисунки по тексту, список використаних джерел із 66 найменувань на 6 сторінках, один додаток на 3 сторінках.

# 1 Базові відомості та огляд літератури

## 1.1 Субріманові многовиди та їхні приклади

Поняття субріманового многовиду є одним з природних узагальнень ріманової структури. Ці об'єкти відіграють важливу роль у сучасній диференціальній геометрії та теорії керування. У цьому розділі під гладкістю будемо розуміти нескінченну гладкість, якщо не зазначене інше.

**Означення 1.1.** *Гладкий векторний розподіл  $\mathcal{H}$  на гладкому рімановому многовиді  $M$  зветься цілком неінтегровним (цілком неголономним), якщо в деякому околі  $U$  кожної точки  $M$  має локальний базис із гладких векторних полів  $\{X_1, \dots, X_m\}$  такий, що значення цих полів та їхніх дужок Лі вигляду  $[\dots [[X_{i_1}, X_{i_2}], X_{i_3}], \dots, X_{i_k}]$  утворюють у кожній точці  $p$  околу  $U$  повну систему у дотичному просторі  $T_p M$ .*

Ця властивість є у певному сенсі протилежною до властивості інтегровності розподілу, тобто існування у нього інтегрального шарування, яка згідно з *теоремою Фробеніуса* (див. [61]) еквівалентна тому, що дужка Лі будь-яких двох векторних полів, що містяться у розподілі, також міститься у ньому. На многовиді  $M$  непарної вимірності  $2m + 1$  цілком неінтегровний гіперрозподіл (тобто  $2m$ -вимірний) ще зветься *контактною структурою*. Зауважимо також, що розподіл  $\mathcal{H}$  задає на  $M$  (взагалі кажучи, нелінійну) *задачу керування*, що локально має вигляд  $\gamma' = \sum_{i=1}^m (u^i X_i)_\gamma$  для базису  $\{X_1, \dots, X_m\}$  цього розподілу, де  $\gamma$  – шукана траєкторія системи, а функції  $u^i$  задають керування (див. [5, 38]).

**Означення 1.2.** *Субрімановим многовидом зветься трійка  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ , де  $M$  – гладкий многовид,  $\mathcal{H}$  – цілком неінтегровний гладкий векторний розподіл на  $M$ , що зветься горизонтальним розподілом, а  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  – гладке поле евклідових скалярних добутків на  $\mathcal{H}$ , що зветься субрімановою метрикою.*

Зокрема, для тривіального розподілу, що збігається з дотичним розширенням  $M$  (тобто  $\mathcal{H}_p = T_p M$  для будь-якої точки  $p \in M$ ) субрімановий многовид таким чином є рімановим. У більш загальному випадку, якщо  $M$  рімановий, субріманову метрику можна побудувати як обмеження на  $\mathcal{H}$  ріманової метрики  $M$ . Субріманові структури, що побудовані саме таким чином, ми й будемо розглядати у подальшому. У контексті задач керування субріманова метрика може задавати критерії *оптимізації*, за якими обирається розв'язок задачі (траєкторія).

**Означення 1.3.** Абсолютно неперервна крива  $\gamma: I \rightarrow M$  (тобто неперервна і така, що майже для усіх  $t \in I$  визначений дотичний вектор  $\gamma'(t)$  так, що виконуються формули Ньютона – Лейбниця у локальних координатах) у субрімановому многовиді  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ , що визначена на проміжку  $I$ , зветься горизонтальною, якщо вона дотикається до горизонтального розподілу:  $\gamma'(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}$  для усіх  $t \in I$ , де визначений  $\gamma'(t)$ . (Субрімановою) довжиною горизонтальної кривої  $\gamma$  зветься

$$l(\gamma) = \int_I \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathcal{H}}} dt.$$

Субрімановою (внутрішньою) відстанню (або відстанню Карно – Каратеодорі) між точками  $p, q \in M$  у субрімановому многовиді  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  зветься інфімум довжин горизонтальних абсолютно неперервних шляхів  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ , що з'єднують ці точки, тобто таких, що  $\gamma(a) = p$  і  $\gamma(b) = q$ .

Властивість повної неінтегровності горизонтального розподілу відіграє ключову роль у доведенні наступної теореми.

**Теорема 1.1** (П.К. Рашевський, В.-Л. Чжоу). Для будь-яких двох точок  $p$  і  $q$  субріманового многовиду  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ , що належать до одної зв'язної компоненти  $M$ , існує горизонтальний шлях, що їх поєднує.

Звідси випливає, що субріманова відстань між будь-якими точками  $p, q \in$

$M$  є скінченною, якщо многовид  $M$  (лінійно) зв'язний, більш того, є метрикою на  $M$ , метрична топологія якої збігається з вихідною топологією  $M$ . Із загальних властивостей внутрішніх метрик також випливає, що, якщо відповідний метричний простір повний, то між будь-якими двома його точками існує горизонтальна *найкоротша*, тобто шлях, довжина якого дорівнює відстані між точками. Для задач керування горизонтальні шляхи відповідають допустимим траєкторіям, а найкоротші – оптимальним. Попередня теорема тоді гарантує існування допустимих траєкторій між довільними початковою та кінцевою точками, тобто *повну керованість* задачі. Доведення цих фактів, дослідження субріманових найкоротших та *геодезичних* (кривих, що є найкоротшими на достатньо малих проміжках), огляд інших питань субріманової геометрії та її застосувань див. у [5, 38, 40, 46].

Наступний клас субріманових многовидів було введено у [49, 51]:

**Означення 1.4.** *Однозв'язна група Лі  $G$  зветься групою Карно ступеня  $k \geq 2$ , якщо її алгебра Лі  $\mathfrak{g}$  є прямою сумою нетривіальних векторних підпросторів  $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$  таких, що  $[V_1, V_i] = V_{i+1}$  для  $1 \leq i \leq k-1$  і  $[V_1, V_k] = 0$ .*

З цієї умови випливає, що  $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$  для будь-яких  $i$  та  $j$ . Зокрема, будь-яка група Карно нільпотентна, а отже дифеоморфна  $\mathbb{R}^n$ . Лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H}$ , що породжений  $V_1$ , є цілком неінтегровним в силу попереднього означення, тому будь-яка субріманова метрика на ньому задає субріманову структуру на  $G$ . Класичним прикладом групи Карно є  $(2m+1)$ -вимірна група Гейзенберга  $Nil^{2m+1}$ . Її алгебра Лі має базис  $\{X_1, \dots, X_{2m+1}\}$ , ненульовими дужками Лі якого є лише  $[X_i, X_{m+i}] = -[X_{m+i}, X_i] = X_{2m+1}$  для усіх  $i$  від 1 до  $m$ , тому це група Карно ступеня 2, де  $V_1$  є лінійною оболонкою  $\{X_1, \dots, X_{2m}\}$ . Якщо ототожнити  $Nil^{2m+1}$  з простором  $\mathbb{R}^{2m+1}$ , то у його глобальних координатах  $(x^1, \dots, x^{2m+1})$  групо-

ва операція матиме вигляд

$$(x^1, \dots, x^{2m+1}) (y^1, \dots, y^{2m+1}) = \\ = \left( x^1 + y^1, \dots, x^{2m} + y^{2m}, x^{2m+1} + y^{2m+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x^i y^{m+i} - x^{m+i} y^i) \right),$$

а базисні вектори алгебри Лі відповідатимуть лівоінваріантним полям

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{x^{m+i}}{2} \frac{\partial}{\partial x^{2m+1}}, \quad 1 \leq i \leq m, \\ X_{m+i} = \frac{\partial}{\partial x^{m+i}} + \frac{x^i}{2} \frac{\partial}{\partial x^{2m+1}}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X_{2m+1} = \frac{\partial}{\partial x^{2m+1}}.$$

Побудуємо субріманову структуру на  $Nil^{2m+1}$  з лівоінваріантним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ , що породжений полями  $\{X_1, \dots, X_{2m}\}$  (він також є прикладом контактної структури), і субрімановою метрикою, для якої ці поля утворюють ортонормовану систему у кожній точці. Ця метрика є таким чином лівоінваріантною і може бути описана як обмеження на  $\mathcal{H}$  лівоінваріантної метрики на  $Nil^{2m+1}$ , що визначена ортонормованим базисом з полів  $\{X_1, \dots, X_{2m+1}\}$ . Зокрема, тривимірна група Гейзенберга  $Nil^3$  з цією метрикою, яку далі будемо позначати просто через  $Nil$ , є одною з тривимірних геометрій Терстона ([59, 62]). У розділі 4.2 ми розглянемо також інші субріманові структури на ній.

У подальшому будемо називати структуру субріманового многовиду  $(G, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  на групі Лі  $G$  лівоінваріантною, якщо горизонтальний розподіл  $\mathcal{H}$  і субріманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  є лівоінваріантними, зокрема, якщо  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  є обмеженням на  $\mathcal{H}$  лівоінваріантної метрики, що задана на  $G$ , як у попередньому прикладі. Такі субріманові структури існують не лише на групах Карно.

Так, тривимірна група Гейзенберга включається до сімейства тривимірних субріманових многовидів, що були описані у [58] як субріманові простори сталої кривини (просторові форми)  $\mathbb{M}(\kappa)$  для  $\kappa = -1, 0, 1$ . Раніше вони виникали, зокрема, у [15] як тривимірні субріманові однорідні простори, тобто такі, на яких група ізометрій діє транзитивно, з максимальною вимірністю 4 такої групи. З топологічної точки зору вони є уні-

версальними накриттями над розшаруваннями одиничних дотичних векторів двовимірних просторів сталої кривини  $\kappa$ , а субріманові структури на них будуються у [58] за допомогою сасакієвих структур на розшаруваннях. А саме,  $\mathbb{M}(0) = Nil$  – це група Гейзенберга з описаною вище структурою,  $\mathbb{M}(1) = \mathbb{S}^3$  – тривимірна сфера зі стандартною метрикою сталої кривини, субріманова структура на якій визначена цією метрикою і горизонтальним розподілом, що ортогональний до поля Хопфа

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w}$$

(у координатах простору  $\mathbb{R}^4 \supset \mathbb{S}^3$ ), а  $\mathbb{M}(-1) = \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  – універсальне накриття групи  $SL(2, \mathbb{R})$  дійсних матриць порядку 2 з визначником 1, що буде детально описана далі у розділі 4.4. Усі ці простори є групами Лі з лівоінваріантними субрімановими структурами (зокрема, на  $\mathbb{S}^3 = SU(2)$  розглядається стандартна структура, що визначена множенням одиничних кватерніонів або унітарних матриць порядку 2 з визначником 1), але серед них лише  $Nil$  може бути групою Карно, бо інші дві групи Лі є простими.

Іншими прикладами тривимірних груп Лі, на яких природним чином виникають лівоінваріантні субріманові структури, є група власних рухів евклідової площини  $E(2)$  та її універсальний накриваючий простір  $\widetilde{E(2)}$  (див. її детальний опис далі у розділі 2.1), а також група  $Sol$  (розділ 4.3). Ці групи розв'язні, але не нільпотентні (це впливатиме з формул (2.2) і (4.15) відповідно), тому не можуть мати структури груп Карно. Зауважимо також, що перелічені тут тривимірні групи Лі є унімодулярними ([48]), а ріманові метрики на них, що задають стандартні субріманові структури, усі включаються до списку тривимірних геометрій Терстона.

## 1.2 Стійкість мінімальних гіперповерхонь у рімановій геометрії

Надамо необхідні відомості, що стосуються мінімальних гіперповерхонь у ріманових многовидах та їхньої стійкості. Доведення наведених тут фактів та інші деталі можна знайти у [12, 60].

Нехай  $\Sigma$  – гладка занурена  $n$ -вимірна гіперповерхня у рімановому многовиді  $M$  (тут і далі під гладкістю гіперповерхонь, зокрема поверхонь, розуміємо  $C^2$ -гладкість, якщо не вказане інше),  $N$  – її одиничне нормальне поле. Це поле може бути глобально коректно визначене і є тоді гладким, зокрема, у випадку орієнтовної гіперповерхні у орієнтовному многовиді. У загальному випадку воно визначене принаймні локально в околі кожної точки. Тут і далі позначатимемо через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ріманову метрику  $M$ , через  $\nabla$  – ріманову зв'язність (Леві-Чівіта) цієї метрики, через  $B$  – оператор Вейнгартена гіперповерхні  $\Sigma$  відносно  $N$ . Таким чином,  $B(X) = -\nabla_X N$  для будь-якого дотичного векторного поля  $X$  на  $\Sigma$ , а значення другої фундаментальної форми  $\Sigma$  від дотичних полів  $X$  та  $Y$  дорівнює  $\langle \nabla_X Y, N \rangle = \langle B(X), Y \rangle$ . Функція середньої кривини  $\Sigma$  визначається рівністю

$$H = \frac{1}{n} \text{Tr } B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle B(E_i), E_i \rangle = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} N, E_i \rangle = -\frac{1}{n} \text{div}_\Sigma N, \quad (1.1)$$

де  $\{E_1, \dots, E_n\}$  – (локальний) ортонормований репер векторних полів індукованої метрики (першої фундаментальної форми)  $\Sigma$ , а  $\text{div}_\Sigma$  – функціонал дивергенції цієї метрики. У наступному означенні вважаємо, що  $N$  визначене принаймні на носії функції  $u$ .

**Означення 1.5.** *Нормальною варіацією гіперповерхні  $\Sigma$ , що задана гладкою функцією  $u$ , будемо називати відображення  $\varphi: \Sigma \times I \rightarrow M$ , що визначене умовою*

$$\varphi_s(p) = \exp_p(s u(p) N(p)),$$

де  $I$  – деякий відкритий окіл нуля в  $\mathbb{R}$ , а  $\exp_p$  – ріманове експоненційне

відображення.

Іншими словами, ми будемо варіацію, випускаючи геодезичні з точки  $p$  у нормальному напрямку  $u(p)N(p)$ . З властивостей експоненційного відображення (див, наприклад, [29]) випливає, що для  $s$  із достатньо малого інтервалу  $I$  відображення  $\varphi_s$  є дифеоморфізмами між  $\Sigma$  та гіперповерхнями варіації  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ . Тут і в подальшому ми будемо розглядати лише нормальні варіації з компактним носієм, вважаючи замикання носія функції  $u$  в означенні 1.5 компактним. Іншими словами, ми вважаємо, що  $u$  дорівнює нулю на межі деякої компактної області та за її межами.

Позначимо через  $V(s) = V(\Sigma_s)$  рімановий об'єм гіперповерхні варіації  $\Sigma_s$ , що відповідає параметру  $s$ . Тоді  $V'(0)$  зветься *першою (нормальною) варіацією об'єму* гіперповерхні, що відповідає  $\varphi$ , а  $V''(0)$  – *другою*. Зауважимо, що для обчислення першої та другої варіацій достатньо знайти об'єм образу носія  $u$ , замикання якого є компактним. Гіперповерхня  $\Sigma$  зветься *мінімальною*, якщо  $V'(0) = 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм, зокрема, коли носії відповідних функцій  $u$  в  $\Sigma$  мають найменші об'єми серед гіперповерхонь варіації. Таким чином, мінімальними називають стаціонарні точки функціонала ріманового об'єму для описаної вище варіаційної задачі. Відповідне рівняння Ейлера – Лагранжа можна записати з використанням *формули першої варіації* гіперповерхні

$$V'(0) = -n \int_{\Sigma} H u \, d\Sigma, \quad (1.2)$$

де  $d\Sigma$  – ріманова форма об'єму індукованої метрики  $\Sigma$ . Звідси випливає, що  $\Sigma$  мінімальна тоді й тільки тоді, коли середня кривина  $H = 0$ . Друга варіація об'єму мінімальної гіперповерхні, що відповідає  $\varphi$  з означення 1.5, обчислюється за допомогою ріманової *формули другої варіації*

$$V''(0) = \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 \, d\Sigma, \quad (1.3)$$

де  $\text{Ric}(N, N)$  – значення тензора Річчі многовиду  $M$  у напрямку нормаль-

ного поля  $N$ ,  $|\nabla_\Sigma u|^2$  – квадрат довжини ріманового градієнта  $u$  (у індукованій метриці  $\Sigma$ ),  $|B|^2$  – квадрат норми другої квадратичної форми гіперповерхні. Вони можуть бути знайдені за формулами

$$|\nabla_\Sigma u|^2 = \sum_{i=1}^n E_i(u)^2, \quad |B|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle B(E_i), E_j \rangle^2,$$

у позначеннях як вище. Мінімальна гіперповерхня  $\Sigma$  зветься *стійкою*, якщо  $V''(0) \geq 0$  для будь-яких функцій  $u$  з компактним носієм на  $M$ . Стійкість таким чином еквівалентна тому, що  $\Sigma$  мінімізує об'єми компактних областей серед гіперповерхонь варіації. Формулу другої варіації також можна переписати у вигляді

$$V''(0) = - \int_{\Sigma} uL(u) d\Sigma,$$

де  $L$  – оператор Якобі гіперповерхні. Це лінійний оператор на просторі гладких функцій на  $\Sigma$ , що визначений формулою

$$L(u) = \Delta_\Sigma u + (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u. \quad (1.4)$$

Тут  $\Delta_\Sigma$  – лапласіан (оператор Лапласа – Бельтрамі) індукованої метрики  $\Sigma$ . Якщо  $L(u) = 0$  для  $u$  з компактним носієм, поле  $uN$  зветься (*нормальним*) *полем Якобі* на  $\Sigma$ . Існування такого ненульового поля є достатньою умовою нестійкості гіперповерхні. З іншого боку, оператор Якобі може бути використаний для доведення стійкості за допомогою наступної теореми.

**Теорема 1.2** (Д. Фішер-Колбрі, Р. Шоен, [16]). *Нехай  $\Sigma$  – повна некомпактна мінімальна гіперповерхня у рімановому многовиді, для якої визначене гладке одиничне нормальне векторне поле  $N$ . Ця гіперповерхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли на ній існує гладка додатна функція  $u$ , що задовольняє рівнянню  $L(u) = 0$ .*

Класична теорема С.Н. Бернштейна стверджує, що мінімальна явно задана поверхня  $z = f(x, y)$  у тривимірному евклідовому просторі  $\mathbb{E}^3$ , що визначена на усій координатній площині  $(x, y)$ , є площиною, тобто функція  $f$  є лінійною. Зауважимо, що явно задані мінімальні поверхні мінімі-

зують площу, отже, є стійкими. Тому узагальненням теореми Бернштейна є наступний результат, що був отриманий незалежно О.В. Погорєловим, М. до Кармо і К.К. Пенгом ([6]) та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном ([16]). В останньому з цих доведень було використано теорему 1.2.

**Теорема 1.3.** *Повна зв'язна орієнтовна мінімальна поверхня  $\Sigma$  у  $\mathbb{E}^3$  є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною.*

Пізніше у [57] було показано, що повних зв'язних неорієнтовних стійких мінімальних поверхонь у  $\mathbb{E}^3$  не існує. Узагальнення теореми 1.3 для гіперповерхонь у  $\mathbb{E}^4$  було нещодавно отримане у [10], також опубліковані препринти з узагальненнями для гіперповерхонь у  $\mathbb{E}^5$  ([11]) і  $\mathbb{E}^6$  ([43]). Відомий результат [4] свідчить про те, що узагальнення теореми Бернштейна, а отже й теореми 1.3, не виконується для гіперповерхонь у евклідових просторах вимірності більшої за 7. Для гіперповерхонь у просторах сталої ненульової кривини існують й інші узагальнення теореми Бернштейна. Так, О.В. Погорєлов показав, що, якщо дотичні гіперплощини компактної мінімальної гіперповерхні у сфері не містять якусь точку або якщо ця гіперповерхня однозв'язна та її дотичні гіперплощини не містять якусь геодезичну, то це цілком геодезична гіперсфера.

Аналогічно до мінімальних,  $n$ -вимірні гіперповерхні з ненульовою сталою середньою кривиною можуть бути охарактеризовані як стаціонарні точки функціонала  $n$ -вимірного ріманового об'єму відносно варіацій, що зберігають  $(n + 1)$ -вимірний рімановий об'єм, який обмежує гіперповерхня. Стійкість для таких гіперповерхонь визначається теж відносно такого роду варіацій. Відомо, що повна зв'язна орієнтовна поверхня у  $\mathbb{E}^3$  з ненульовою сталою середньою кривиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли це сфера ([41]), а для довільної вимірності компактна зв'язна орієнтовна гіперповерхня з ненульовою сталою середньою кривиною у просторі сталої кривини є стійкою тоді й тільки тоді, коли це геодезична гіперсфера ([1, 2]).

### 1.3 Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії та їхня стійкість

Тут і далі нехай  $\Sigma$  – ( $C^2$ -гладка занурена) поверхня у тривимірному субрімановому многовиді  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ , субріманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  якого буде-ється як обмеження на горизонтальний розподіл  $\mathcal{H}$  деякої ріманової метри-ки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на  $M$ . Використаємо для  $\Sigma$  ті ж позначення, що у попередньому розділі, зокрема її одиничне нормальне поле (у рімановому сенсі) познача-тимемо через  $N$ . Сингулярна множина  $\Sigma_0$  цієї поверхні складається з тих її точок  $p$ , для яких дотична площина  $T_p\Sigma$  збігається з  $\mathcal{H}_p$  (сингулярних). Позначимо через  $N^h$  ортогональну проєкцію поля  $N$  на  $\mathcal{H}$  (субріманове нормальне поле). Тоді можна описати сингулярну множину  $\Sigma$  як

$$\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N^h(p) = 0\}.$$

Решту точок поверхні будемо називати *регулярними*. Тут, як і у побудові субріманової внутрішньої відстані, суттєвою є повна неінтегровність роз-поділу  $\mathcal{H}$ , бо з неї випливає, що  $\Sigma_0$  має нульову ріманову площу: майже усі точки поверхні є регулярними.

**Означення 1.6.** *Субріманова площа області  $D \subset \Sigma$  визначається як*

$$A(D) = \int_D |N^h| d\Sigma,$$

де довжина  $|N^h|$  субріманового нормального поля обчислюється відповід-но до субріманової метрики, а  $d\Sigma$  – ріманова форма площі індукованої метрики (першої фундаментальної форми)  $\Sigma$ .

Зауважимо, що хоча одиничне нормальне поле  $N$ , взагалі кажучи, не є коректно глобально визначеним у загальному випадку, довжина його про-єкції  $|N^h|$  визначена однозначно, тому попередні означення мають сенс. Тим не менш, починаючи з цього місця, ми вважатимемо усі поверхні  $\Sigma$  та многовиди  $M$  орієнтовними, а поле  $N$  – глобально заданим. Визначимо

нормальну варіацію поверхні  $\Sigma$ , що задана гладкою функцією  $u$ , так само, як у рімановому випадку, за означенням 1.5:

$$\varphi: \Sigma \times I \rightarrow M: \varphi_s(p) = \exp_p(su(p)N(p)) \quad (1.5)$$

Тут знову розглядаємо лише варіації з компактними носіями. Крім того, вважаємо, що носії варіацій містяться у множині регулярних точок  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . Позначимо через  $A(s) = A(\Sigma_s)$  субріманову площу поверхні варіації  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ , що відповідає параметру  $s$ :

$$A(s) = A(\Sigma_s) = \int_{\Sigma_s} |N_s^h| d\Sigma_s, \quad (1.6)$$

де  $N_s^h$  – субріманове нормальне поле  $\Sigma_s$ , а  $d\Sigma_s$  – ріманова форма площі її індукованої метрики. Наступні означення повторюють їхні ріманові аналоги з попереднього розділу.

**Означення 1.7.**  $A'(0)$  зветься першою (нормальною) варіацією субріманової площі поверхні  $\Sigma$ , що відповідає  $\varphi$ , а  $A''(0)$  – другою.

Знову ж, для обчислення першої та другої варіацій достатньо знаходити площі образів носія  $u$ , що має компактне замикання.

**Означення 1.8.** Поверхня  $\Sigma$  зветься мінімальною, якщо  $A'(0) = 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . Мінімальна поверхня  $\Sigma$  зветься стійкою, якщо  $A''(0) \geq 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ .

Таким чином, як і у рімановому випадку, мінімальними поверхнями ми називаємо стаціонарні точки субріманового функціонала площі, а стійкими – мінімальні поверхні, що мінімізують площі компактних областей серед поверхонь варіації.

Поняття субріманової площі поверхні у субрімановому многовиді та мінімальності такої поверхні було вперше запропоноване у [20]. У подальшому такі поверхні досліджувалися в різних субріманових геометріях. Особливо

ретельно вивченим є випадок субріманової тривимірної групи Гейзенберга  $Nil$  (див. опис її та інших субріманових многовидів, що згадуватимуться далі, вище у розділі 1.1; тут ми позначаємо глобальні координати на  $Nil$  через  $(x, y, z)$ ). Мінімальним поверхням у цій субрімановій геометрії були присвячені, проміж інших, роботи [8, 9, 52, 54] (див. також короткий огляд у [55]). Зокрема, у [8] було дано опис сингулярних множин таких поверхонь, а у [54] було отримано формулу першої варіації для цього випадку і показано, що поверхня  $\Sigma$  у  $Nil$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли її *субріманова середня кривина* нульова в регулярних точках, а  $\Sigma$  є об'єднанням *характеристичних кривих*, що перетинають сингулярну множину ортогонально (див. пояснення цих понять далі у розділі 2.1). Дослідження стійкості мінімальних поверхонь у  $Nil$  було проведене Д. Даніеллі, Н. Гарофало, Д.М. Нью і С.Д. Паулсом у [14] для випадку вкладених поверхонь та А. Хуртадо, М. Ріторе і С. Росалесом у [33] для занурених (див. також [13]), де були отримані формули другої варіації та наступний аналог теореми Бернштейна.

**Теорема 1.4.** *Повна зв'язна орієнтовна мінімальна поверхня у  $Nil$  з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли є вертикальною (тобто паралельною до осі  $z$ ) евклідовою площиною.*

Тут і далі поверхня зветься *повною*, якщо вона повна відносно індукованої ріманової метрики. У [33] попередній результат було далі використано для доведення наступної більш загальної теореми типу Бернштейна, що є аналогом теореми 1.3.

**Теорема 1.5.** *Повна зв'язна орієнтовна мінімальна поверхня у  $Nil$  є стійкою тоді й тільки тоді, коли це евклідова площина або поверхня, що ізометрична до гіперболічного параболоїда  $z = \frac{1}{2}xy$ .*

Інші постановки задачі Бернштейна для поверхонь у групі Гейзенберга, зокрема поверхні меншої гладкості, ніж  $C^2$ , досліджувалися, зокрема,

у [47, 56, 19, 50, 24, 64], див. також монографію [7]. Окремі результати, що стосуються задач Бернштейна для мінімальних гіперповерхонь у групах Гейзенберга  $Nil^{2m+1}$  вищих вимірностей було отримано у [3, 23, 53]. Нещодавно у [21, 22] задача Бернштейна була розглянута також для поверхонь у тривимірній групі Гейзенберга з *субфінслеровою* структурою, що узагальнює субріманову, при цьому було отримано аналог теореми 1.5. Див. також досить повний огляд літератури з гіперповерхонь у групах Гейзенберга та задач Бернштейна для них у нещодавньому препринті [23].

У циклі робіт А. Хуртадо і С. Росалеса [32, 58, 34, 35, 36, 37] наведені вище результати було узагальнено на більш загальний випадок поверхонь у тривимірних субріманових просторах сталої кривини  $\mathbb{M}(\kappa)$ , що є стаціонарними точками функціонала субріманової площі відносно варіацій, які зберігають обмежений поверхнею тривимірний рімановий об'єм, і є таким чином аналогом поверхонь сталої середньої кривини для цих просторів. Стійкість таких поверхонь теж визначається аналогічно до ріманового випадку. У [58] було показано, що ці поверхні дійсно мають сталу субріманову середню кривину за межами сингулярної множини (нульову, якщо не враховувати умову збереження об'єму, тобто для мінімальних поверхонь) і що, якщо повна поверхня сталої субріманової середньої кривини  $H$  стійка, то  $H^2 + \kappa \leq 0$ , причому рівність досягається лише для *вертикальних* поверхонь, тобто таких, дотичні площини яких перпендикулярні до горизонтального розподілу (див. далі розділ 3). Звідси при  $\kappa = 0$ , тобто для групи Гейзенберга, впливає узагальнення теореми 1.4 на поверхні сталої середньої кривини, при  $\kappa = 1$ , тобто для субріманової сфери, – неіснування повних стійких поверхонь сталої середньої кривини з порожньою сингулярною множиною і при  $\kappa = -1$ , тобто для  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , – обмеження  $H^2 \leq 1$  на середню кривину таких поверхонь. У [32, 34] для  $\kappa = -1, 0, 1$  і довільного  $H$  такого, що  $H^2 + \kappa > 0$ , були побудовані поверхні в  $\mathbb{M}(\kappa)$  сталої середньої кривини  $H$  з непорожніми сингулярними множинами – т. зв.

сфери Пансю – і доведено їхню стійкість, а у [37] – показано, що, більш того, у субрімановій сфері ці поверхні мінімізують площу. Сфери Пансю будуються як об'єднання субріманових геодезичних, що поєднують певні пари точок простору. У [36] було отримано аналог теореми 1.5 для повних зв'язних вкладених поверхонь сталої середньої кривини в  $\mathbb{M}(\kappa)$  при  $\kappa \geq 0$ . А саме, було показано, що в групі Гейзенберга такі поверхні вичерпуються поверхнями, що перелічені у теоремі 1.5, та сферами Пансю, а у субрімановій сфері – лише сферами Пансю. У [35] досліджувалися інші приклади поверхонь сталої середньої кривини у  $\mathbb{M}(\kappa)$  та їхня стійкість, при цьому було знайдено стійкі поверхні у  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  з  $H^2 < 1$  (зокрема мінімальні) та порожньою сингулярною множиною, що не є вертикальними.

Формули другої варіації у різних формах було також отримано у [8, 17] для поверхонь у тривимірних псевдоермітових многовидах, у [18] для поверхонь у групі *Sol*, у [44, 45] для гіперповерхонь у групах Карно, і у [31] для гіперповерхонь у т. зв. *вертикально жорстких* субріманових многовидах, що узагальнюють групи Карно. Зауважимо, що у [45] для дослідження стійкості було отримано аналог теореми 1.2 (точніше, достатньої умови стійкості у ній) для мінімальної гіперповерхні у групі Карно, а у [35] – для мінімальної поверхні у тривимірному субрімановому просторі сталої кривини. Мінімальні поверхні в групі  $\widetilde{\text{E}}(2)$  досліджувалися, зокрема, у [30], де також обговорювалося застосування таких поверхонь до задач математичного моделювання в нейробіології, але питання стійкості не розглядалися, і у [17], де було отримано аналоги теореми Бернштейна (див. детальніше про це у розділі 4.1).

Таким чином, опис мінімальних поверхонь та їхньої стійкості у субрімановій геометрії здійснено лише для обмеженого списку стандартних структур, а їхнє дослідження у загальному випадку далеке від завершення. Одна зі складностей, які тут виникають, полягає в тому, що друга і навіть перша варіації субріманової площі поверхні істотно залежать від субріманово-

вої структури, тобто не існує загальних формул цих варіацій, на відміну від ріманового випадку (формули (1.2) і (1.3) відповідно): їх необхідно виводити для кожного субріманового многовиду. Крім того, ці формули можуть бути досить складними навіть для простих структур. Прикладом цього є формули другої варіації для поверхонь у групі Гейзенберга ([33]) і групі  $\widetilde{E}(2)$  (теорема 2.2 далі). Тому доцільно розглядати спеціальні класи мінімальних поверхонь, для яких варіації можуть бути обчислені в загальному випадку. У розділах 3 і 4 ми досліджуємо один такий клас: вертикальні поверхні.

## 2 Мінімальні поверхні

### у субрімановому многовиді $\widetilde{E}(2)$

У даному розділі роботи розглядаються мінімальні поверхні у групі Лі  $\widetilde{E}(2)$ , що є універсальним накриваючим простором групи  $E(2)$  власних рухів евклідової площини, з лівоінваріантною субрімановою структурою, їхні формули варіації субріманової площі, приклади мінімальних і зокрема стійких поверхонь.

#### 2.1 Формула першої варіації та мінімальні поверхні

Оскільки група  $\widetilde{E}(2)$  однозв'язна і розв'язна (це впливає з (2.2) нижче), її можна описати як простір  $\mathbb{R}^3$  з координатами  $(x, y, z)$ . Тут  $(x, y)$  відповідає вектору паралельного перенесення, а  $z$  – куту обертання руху площини. Тоді груповий добуток визначається множенням рухів

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x' \cos z - y' \sin z, y + x' \sin z + y' \cos z, z + z'),$$

звідки впливає, що лівоінваріантні векторні поля

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.1)$$

утворюють базис алгебри Лі. Ненульовими дужками Лі цих полів є

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = X_1. \quad (2.2)$$

Визначимо на  $\widetilde{E}(2)$  лівоінваріантну ріманову метрику  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ортонормованим базисом векторних полів  $\{X_1, X_2, X_3\}$ . Помітимо, що вона евклідова. У літературі, зокрема у [30, 17], зазвичай розглядається субріманова структура, для якої горизонтальним є лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H}$ , що породжений базисом  $\{X_1, X_2\}$ . Дійсно, він цілком неінтегровний в силу (2.2). У якості субріманової метрики на цьому розподілі розглянемо обмеження евклідової метрики на  $\mathcal{H}$ .

Нехай  $\nabla$  – ріманова зв'язність метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тоді з формули Кошуля

та (2.2) (або просто з (2.1) і того, що  $\nabla$  пласка) отримуємо

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_1 &= \nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_1} X_3 = \nabla_{X_2} X_2 = \nabla_{X_3} X_1 = \\ &= \nabla_{X_3} X_2 = \nabla_{X_3} X_3 = 0, \quad \nabla_{X_2} X_1 = -X_3, \quad \nabla_{X_2} X_3 = X_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Також, оскільки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  евклідова, її оператор кривини нульовий.

Тут і далі у роботі ми будемо використовувати наступні позначення, що стосуються орієнтовної поверхні  $\Sigma$  у орієнтовному тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ , зокрема у  $\widetilde{E}(2)$ . У такої поверхні коректно визначені гладкі глобальне одиничне нормальне поле  $N$  та субріманове нормальне поле  $N^h = N - \langle N, X_3 \rangle X_3$ , тобто ортогональна проєкція  $N$  на  $\mathcal{H}$ . На регулярній частині  $\Sigma \setminus \Sigma_0$  поверхні визначимо тоді *горизонтальне гаусове відображення*  $\nu^h = \frac{N^h}{|N^h|}$  та *характеристичне векторне поле*  $Z$ , яке у кожній регулярній точці  $p$  поверхні  $\Sigma$  утворюється з  $\nu^h(p)$  обертанням на прямиий кут у площині  $\mathcal{H}_p$  (в орієнтації, що визначена вектором нормалі  $X_3(p)$  цієї площини). Це поле є дотичним до  $\Sigma$  за побудовою. Його інтегральні траєкторії зветься *характеристичними кривими* поверхні. Позначимо через  $S = \langle N, X_3 \rangle \nu^h - |N^h| X_3$  векторне поле, що доповнює  $Z$  у кожній регулярній точці поверхні до ортонормованого базису її дотичної площини. Через  $B: X \mapsto -\nabla_X N$ , як раніше, позначатимемо оператор Вейнгартена  $\Sigma$ , за допомогою якого будемо виражати її другу фундаментальну форму  $\langle B(\cdot), \cdot \rangle$ . У обчисленні першої та другої варіацій тут ми застосовуватимемо техніку, що подібна до використаної у роботі [33].

**Теорема 2.1** (Формула першої варіації поверхні у  $\widetilde{E}(2)$ ). *Нехай  $\Sigma$  – поверхня у  $\widetilde{E}(2)$ . Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u \, d\Sigma. \quad (2.4)$$

*Доведення.* Отже, розглянемо нормальну варіацію  $\varphi$ , що визначена  $u$  за правилом (1.5). Позначимо через  $N_s$  ріманове одиничне нормальне поле

поверхні варіації  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ . Таким чином,  $N_s^h = N_s - \langle N_s, X_3 \rangle X_3 \in$  ортогональною проєкцією  $N_s$  на  $\mathcal{H}$ . Тоді горизонтальне гаусове відображення  $\nu_s^h = \frac{N_s^h}{|N_s^h|}$  поверхні варіації  $\Sigma_s$  визначене на її регулярній множині  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ , де  $(\Sigma_s)_0 = \{p \in \Sigma \mid N_s^h(p) = 0\}$  – сингулярна множина поверхні  $\Sigma_s$ . Її характеристичне векторне поле  $Z_s$  визначене на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$  обертанням  $\nu_s^h$  у  $\mathcal{H}$  на прямий кут, як описано вище, а поле  $S_s = -\langle N_s, X_3 \rangle \nu_s^h + |N_s^h| X_3$  разом із  $Z_s$  утворюють рухомий ортонормований базис (репер) дотичного розширення поверхні  $\Sigma_s$  на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ . Коли  $s = 0$ , тобто для вихідної поверхні  $\Sigma$ , ми маємо  $N_0 = N$ ,  $N_0^h = N^h$ ,  $\nu_0^h = \nu^h$ ,  $S_0 = S$  та  $Z_0 = Z$ .

Згідно з (1.6), субріманова площа  $\Sigma_s$  дорівнює

$$A(s) = \int_{\Sigma_s} |N_s^h| d\Sigma_s = \int_{\Sigma} |N_s^h \circ \varphi_s| |\mathbf{J} \varphi_s| d\Sigma,$$

де  $\mathbf{J} \varphi_s$  – якобіан дифеоморфізму  $\varphi_s: \Sigma \rightarrow \Sigma_s$ , аналогічно до виведення ріманової формули першої варіації, наприклад, у [12, Ch. 1, § 1]. Згадаймо, що тут ми інтегруємо по компактному носію функції  $u$ . Тоді

$$A'(s) = \int_{\Sigma} |N_s^h|'_s |\mathbf{J} \varphi_s| + |N_s^h \circ \varphi_s| |\mathbf{J} \varphi_s|'_s d\Sigma, \quad (2.5)$$

де через  $|N_s^h|'_s$  ми насправді позначаємо похідну функції  $|N_s^h \circ \varphi_s|$  на  $\Sigma \times I$  за  $s$ . Таким чином,

$$A'(0) = \int_{\Sigma} |N_s^h|'_{s=0} + |\mathbf{J} \varphi_s|'_{s=0} d\Sigma, \quad (2.6)$$

бо  $|\mathbf{J} \varphi_0| = |N_0^h| = 1$ .

Зробимо деякі допоміжні обчислення. Продиференціюємо рівність  $N_s^h = N_s - \langle N_s, X_3 \rangle X_3$  у напрямку довільного вектора  $v$  тривимірного простору:

$$\begin{aligned} \nabla_v N_s^h &= \nabla_v N_s - \langle \nabla_v N_s, X_3 \rangle X_3 - \langle N_s, \nabla_v X_3 \rangle X_3 - \langle N_s, X_3 \rangle \nabla_v X_3 = \\ &= (\nabla_v N_s)^h - \langle N_s, \nabla_v X_3 \rangle X_3 - \langle N_s, X_3 \rangle \nabla_v X_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Оскільки поля  $\nu_s^h$ ,  $Z_s$  та  $X_3$  утворюють ортонормований репер на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ , і  $\langle \nabla_v \nu_s^h, \nu_s^h \rangle = 0$ ,

$$\nabla_v \nu_s^h = \langle \nabla_v \nu_s^h, Z_s \rangle Z_s + \langle \nabla_v \nu_s^h, X_3 \rangle X_3,$$

де, оскільки  $\nu_s^h = |N_s^h|^{-1}N_s^h$  і  $Z_s$  ортогональне до  $N_s^h$ ,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_v \nu_s^h, Z_s \rangle &= |N_s^h|^{-1} \langle \nabla_v N_s^h, Z_s \rangle = \\ &= |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_v N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle \langle \nabla_v X_3, Z_s \rangle)\end{aligned}$$

за (2.7). Тому

$$\nabla_v \nu_s^h = |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_v N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle \langle \nabla_v X_3, Z_s \rangle) Z_s - \langle \nu_s^h, \nabla_v X_3 \rangle X_3, \quad (2.8)$$

де ми також використали  $\langle \nu_s^h, X_3 \rangle = 0$ . Оскільки  $|N_s^h| = \langle N_s^h, \nu_s^h \rangle$  у регулярних точках  $\Sigma_s$ , похідна цієї функції в напрямку  $v$  дорівнює

$$v(|N_s^h|) = \langle \nabla_v N_s^h, \nu_s^h \rangle + \langle N_s^h, \nabla_v \nu_s^h \rangle = \langle \nabla_v N_s^h, \nu_s^h \rangle.$$

Таким чином, з (2.7) випливає, що

$$v(|N_s^h|) = \langle \nabla_v N_s, \nu_s^h \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle \langle \nabla_v X_3, \nu_s^h \rangle. \quad (2.9)$$

За побудовою нормальної варіації  $\varphi$  у евклідовому просторі поле  $U = d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$  дорівнює  $uN_0 = uN$ , де під  $N$  у даному випадку розуміємо паралельно перенесене уздовж нормалей до поверхні  $\Sigma$  її одиничне нормальне поле. Звідси і з (2.9) випливає, що

$$|N_s^h|'_s = U(|N_s^h|) = \langle \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle \langle \nabla_U X_3, \nu_s^h \rangle. \quad (2.10)$$

Поля  $S_s$ ,  $Z_s$  і  $N_s$  також утворюють ортонормований репер у регулярних точках  $\Sigma_s$ , і  $\langle \nabla_U N_s, N_s \rangle = 0$ , тому

$$\begin{aligned}\nabla_U N_s &= \langle \nabla_U N_s, S_s \rangle S_s + \langle \nabla_U N_s, Z_s \rangle Z_s = \\ &= -\langle N_s, \nabla_U S_s \rangle S_s - \langle N_s, \nabla_U Z_s \rangle Z_s = -\langle N_s, \nabla_{S_s} U \rangle S_s - \langle N_s, \nabla_{Z_s} U \rangle Z_s,\end{aligned}$$

де остання рівність випливає з того, що  $[U, S_s] = [U, Z_s] = 0$  (знову ж, як у доведенні ріманової формули першої варіації). Зокрема, при  $s = 0$

$$\begin{aligned}(\nabla_U N_s)_{s=0} &= -\langle N, \nabla_S(uN) \rangle S - \langle N, \nabla_Z(uN) \rangle Z = \\ &= -S(u)S - Z(u)Z,\end{aligned} \quad (2.11)$$

бо  $N$  одиничне, тому (2.10) приймає вигляд

$$\begin{aligned}|N_s^h|'_{s=0} &= \langle -Z(u)Z - S(u)S, \nu^h \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_N X_3, \nu^h \rangle u = \\ &= -\langle N, X_3 \rangle S(u) - |N^h| \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h \rangle u\end{aligned} \quad (2.12)$$

в силу рівностей  $S = \langle N, X_3 \rangle \nu^h - |N^h| X_3$ ,  $N = |N^h| \nu^h + \langle N, X_3 \rangle X_3$  і (2.3).

Як показано, наприклад, у [12, Ch. 1, § 1], перша похідна модуля якобіана  $\varphi_s$  в нулі дорівнює дивергенції поля варіації  $U = uN$ :

$$\begin{aligned} |J\varphi_s|'_{s=0} &= \operatorname{div}_\Sigma(uN) = \langle \nabla_Z(uN), Z \rangle + \langle \nabla_S(uN), S \rangle = \\ &= (\langle \nabla_Z N, Z \rangle + \langle \nabla_S N, S \rangle) u = -(\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle) u. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким чином, вираз під інтегралом у (2.6) має вигляд

$$\begin{aligned} |N_s^h|'_{s=0} + |J\varphi_s|'_{s=0} &= -\langle N, X_3 \rangle S(u) - |N^h| \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h \rangle u - \\ &- |N^h| (\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle) u. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Проведемо ще кілька допоміжних обчислень. Оскільки  $\nu^h = \langle \nu^h, X_1 \rangle X_1 + \langle \nu^h, X_2 \rangle X_2$ , з (2.3) випливає  $\nabla_{\nu^h} X_3 = \langle \nu^h, X_2 \rangle X_1$ . За побудовою тоді  $Z = -\langle \nu^h, X_2 \rangle X_1 + \langle \nu^h, X_1 \rangle X_2$ , тому  $\nabla_Z X_3 = \langle \nu^h, X_1 \rangle X_1$  в силу (2.3), і, таким чином,

$$\langle \nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h \rangle = \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle = -\langle \nabla_Z X_3, Z \rangle. \quad (2.15)$$

Звідси ж маємо

$$\langle \nabla_{\nu^h} X_3, Z \rangle = -\langle \nu^h, X_2 \rangle^2, \quad \langle \nabla_Z X_3, \nu^h \rangle = \langle \nu^h, X_1 \rangle^2. \quad (2.16)$$

Зокрема, оскільки  $\nu^h$  одиничний,  $\langle \nabla_Z X_3, \nu^h \rangle - \langle \nabla_{\nu^h} X_3, Z \rangle = 1$ .

Зауважимо тепер, що, оскільки  $Z$  і  $S = \langle N, X_3 \rangle \nu^h - |N^h| X_3$  одиничні, а поля  $\nu^h$ ,  $Z$  та  $X_3$  утворюють ортонормований репер в регулярних точках,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma S &= \langle \nabla_Z S, Z \rangle + \langle \nabla_S S, S \rangle = -\langle S, \nabla_Z Z \rangle = \\ &= -\langle S, \nu^h \rangle \langle \nabla_Z Z, \nu^h \rangle - \langle S, X_3 \rangle \langle \nabla_Z Z, X_3 \rangle = \\ &= \langle N, X_3 \rangle \langle Z, \nabla_Z \nu^h \rangle - |N^h| \langle Z, \nabla_Z X_3 \rangle. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\nabla_Z \nu^h = |N^h|^{-1} (\langle \nabla_Z N, Z \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_Z X_3, Z \rangle) Z - \langle \nabla_Z X_3, \nu^h \rangle X_3$$

в силу (2.8), враховуючи (2.15), (2.16) та означення оператора Вейнгартена  $B$ , маємо

$$\begin{aligned} \nabla_Z \nu^h &= -|N^h|^{-1} (\langle B(Z), Z \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) Z - \\ &- \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 X_3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

звідси випливає з урахуванням (2.15)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma S &= -\langle N, X_3 \rangle |N^h|^{-1} (\langle B(Z), Z \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) + \\ &\quad + |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle. \end{aligned}$$

Оскільки поле  $N$  одиничне,  $|N^h|^2 + \langle N, X_3 \rangle^2 = 1$ , тому остаточно маємо

$$\operatorname{div}_\Sigma S = -|N^h|^{-1} (\langle N, X_3 \rangle \langle B(Z), Z \rangle - \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle). \quad (2.18)$$

За властивостями дивергенції тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma(\langle N, X_3 \rangle u S) &= S(\langle N, X_3 \rangle u) + \langle N, X_3 \rangle u \operatorname{div}_\Sigma S = \\ &= \langle \nabla_S N, X_3 \rangle u + \langle N, \nabla_S X_3 \rangle u + \langle N, X_3 \rangle S(u) - \\ &\quad - \langle N, X_3 \rangle |N^h|^{-1} (\langle N, X_3 \rangle \langle B(Z), Z \rangle - \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u = \\ &= -\langle B(S), X_3 \rangle u + \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu^h} X_3, N \rangle u + \langle N, X_3 \rangle S(u) - \\ &\quad - |N^h|^{-1} \langle B(Z), Z \rangle u + |N^h| \langle B(Z), Z \rangle u + |N^h|^{-1} \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle u, \end{aligned}$$

де у останній рівності знову використали  $|N^h|^2 + \langle N, X_3 \rangle^2 = 1$ . Оскільки поле  $B(S)$  є дотичним до поверхні  $\Sigma$ ,

$$\langle B(S), X_3 \rangle = \langle B(S), S \rangle \langle S, X_3 \rangle + \langle B(S), Z \rangle \langle Z, X_3 \rangle = -|N^h| \langle B(S), S \rangle.$$

Враховуючи також, що  $\nabla_{\nu^h} X_3$  ортогональне до  $X_3$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma(\langle N, X_3 \rangle u S) &= |N^h| (\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h \rangle) u + \\ &\quad + \langle N, X_3 \rangle S(u) + |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u. \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (2.14) набуває вигляду

$$\begin{aligned} |N_s^h|'_{s=0} + |J \varphi_s|'_{s=0} &= -\operatorname{div}_\Sigma(\langle N, X_3 \rangle u S) + \\ &\quad + |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle) u. \end{aligned}$$

Підставляючи це у (2.6) і враховуючи, що  $\int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} \operatorname{div}_\Sigma(\langle N, X_3 \rangle u S) d\Sigma = 0$  в силу теореми Стокса, оскільки це інтеграл від дивергенції гладкого поля, що дорівнює нулю за межами компактної підмножини  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ , отримуємо потрібну формулу першої варіації (2.4).  $\square$

**Наслідок 2.1** (Критерій мінімальності). *Поверхня  $\Sigma$  у  $\widetilde{E}(2)$  мінімальна тоді й тільки тоді, коли у всіх її регулярних точках*

$$\langle B(Z), Z \rangle = \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle. \quad (2.19)$$

Аналогічно до формули (1.1) для ріманової середньої кривини, *субрімановою середньою кривиною* поверхні  $\Sigma$  називають  $H = -\frac{1}{2}\operatorname{div}_\Sigma \nu^h$ . Зокрема, у [54] було показано, що поверхня  $\Sigma$  у групі Гейзенберга є мінімальною тоді й тільки тоді, коли  $H = 0$  в регулярних точках, а  $\Sigma$  є об'єднанням характеристичних кривих, що перетинають сингулярну множину (яка складається з кривих та ізольованих точок) ортогонально. Схожі результати мають місце, зокрема, для поверхонь у інших субріманових просторах сталої кривини ([58]) та гіперповерхонь у групах Карно ([44, 45]). Обчислимо цю функцію для нашого випадку. З (2.8) випливає, що

$$\begin{aligned}\nabla_S \nu^h &= |N^h|^{-1} (\langle \nabla_S N, Z \rangle - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_S X_3, Z \rangle) Z - \langle \nabla_S X_3, \nu^h \rangle X_3 = \\ &= -|N^h|^{-1} (\langle B(S), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle^2 \langle \nabla_{\nu^h} X_3, Z \rangle) Z - \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu^h} X_3, \nu^h \rangle X_3.\end{aligned}$$

Враховуючи (2.15), (2.16) і самоспряженість оператора Вейнгартена, отримуємо

$$\begin{aligned}\nabla_S \nu^h &= -|N^h|^{-1} (\langle B(Z), S \rangle - \langle N, X_3 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2) Z - \\ &\quad - \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle X_3.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Звідси і з (2.17) маємо

$$\begin{aligned}-2H &= \operatorname{div}_\Sigma \nu^h = \langle \nabla_Z \nu^h, Z \rangle + \langle \nabla_S \nu^h, S \rangle = \\ &= |N^h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle (1 + |N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle).\end{aligned}$$

Порівнюючи цей вираз з (2.19), бачимо, що для поверхонь у  $\widetilde{E}(2)$  мінімальність, взагалі кажучи, не рівносильна рівності субріманової середньої кривини нулю. Застосуємо тепер отриманий критерій мінімальності до найпростішого класу поверхонь – евклідових площин.

**Твердження 2.1.** *Евклідова площина у  $\widetilde{E}(2)$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це горизонтальна (тобто перпендикулярна до осі  $z$ ) або вертикальна (тобто паралельна до осі  $z$ ) площина.*

*Доведення.* Оскільки для площини  $B = 0$ , (2.19) набуває вигляду

$$\langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle = 0,$$

тобто

$$\langle N, X_1 \rangle \langle N, X_2 \rangle \langle N, X_3 \rangle = 0.$$

Одиничний нормальний вектор  $N = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$  тут сталий, і, в силу (2.1), умовою мінімальності таким чином є

$$(a \cos z + b \sin z) c (a \sin z - b \cos z) = 0.$$

Зокрема, регулярними є точки, для яких  $(a \cos z + b \sin z)^2 + c^2 > 0$ . Для вертикальної площини  $c = 0$ , а для горизонтальної  $a = b = 0$ , тому вони мінімальні. З іншого боку, якщо площина похила, тобто  $c \neq 0$  і  $a^2 + b^2 > 0$ , а  $z$  приймає усі дійсні значення, попередня умова не виконується для усіх  $z$ , бо функції  $a \cos z + b \sin z$  і  $a \sin z - b \cos z$  приймають значення 0 лише у злічених множинах точок. Таким чином, похилі площини не є мінімальними.  $\square$

Зауважимо, що вживання слова «вертикальний» тут неузгоджене з його використанням у подальших розділах. Для кращого розуміння класу мінімальних поверхонь даної геометрії запишемо також рівняння мінімальності для одного з типів явно заданих поверхонь.

**Твердження 2.2** (Критерій мінімальності для явно заданих поверхонь).  
Нехай поверхня у  $\widetilde{E}(2)$  задана рівнянням  $y = f(x, z)$ . Вона буде мінімальною тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} & -\cos^2 z f_z^2 f_{xx} + (2 \cos^2 z f_x f_z - \sin 2z f_z) f_{xz} + \\ & + (-\cos^2 z f_x^2 + \sin 2z f_x - \sin^2 z) f_{zz} - \\ & - \frac{1}{2} \sin 2z f_x^2 f_z - \cos 2z f_x f_z + \frac{1}{2} \sin 2z f_z = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

для усіх  $(x, z)$  таких, що  $(f_x \cos z - \sin z)^2 + f_z^2 > 0$ .

*Доведення.* Для даної поверхні

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\delta} \left( f_x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + f_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{\delta} ((f_x \cos z - \sin z) X_1 + f_z X_2 + (f_x \sin z + \cos z) X_3) \end{aligned}$$

в силу (2.1), де позначили  $\delta = \sqrt{1 + f_x^2 + f_z^2}$ . Тому

$$N^h = \frac{1}{\delta} ((f_x \cos z - \sin z)X_1 + f_z X_2), \quad \langle N, X_3 \rangle = \frac{1}{\delta} (f_x \sin z + \cos z).$$

Якщо позначити  $\Delta = \sqrt{(f_x \cos z - \sin z)^2 + f_z^2}$ , то  $|N^h| = \frac{\Delta}{\delta}$ , умовою регулярності буде  $\Delta \neq 0$ , і в регулярних точках

$$\nu^h = \frac{1}{\Delta} ((f_x \cos z - \sin z)X_1 + f_z X_2),$$

тому за побудовою

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\Delta} (-f_z X_1 + (f_x \cos z - \sin z)X_2) = \\ &= -\frac{1}{\Delta} f_z \cos z \left( \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{\Delta} (f_x \cos z - \sin z) \left( \frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Позначимо через  $Z^1$  і  $Z^2$  коефіцієнти біля базисних векторних полів поверхні  $\frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y}$  і  $\frac{\partial}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial y}$  відповідно у попередньому виразі. Оскільки в координатах  $(x, z)$  коефіцієнти другої фундаментальної форми явно заданої поверхні мають вигляд

$$b_{11} = -\frac{f_{xx}}{\delta}, \quad b_{12} = -\frac{f_{xz}}{\delta}, \quad b_{22} = -\frac{f_{zz}}{\delta},$$

маємо після розкриття дужок

$$\begin{aligned} \langle B(Z), Z \rangle &= \sum_{i,j=1}^n b_{ij} Z^i Z^j = \frac{1}{\delta \Delta^2} (-\cos^2 z f_z^2 f_{xx} + \\ &+ (2 \cos^2 z f_x f_z - \sin 2z f_z) f_{xz} + (-\cos^2 z f_x^2 + \sin 2z f_x - \sin^2 z) f_{zz}). \end{aligned}$$

Тоді, в силу (2.19), прирівнюючи цей вираз до

$$\langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle = \frac{1}{\delta \Delta^2} (f_x \sin z + \cos z) (f_x \cos z - \sin z) f_z,$$

отримаємо умову мінімальності, що має вигляд (2.21).  $\square$

Крім ортогональних до осі  $z$  площин  $y = ax + b$ , прикладами розв'язків рівняння (2.21) є наведені у [17] поверхні  $y = a \cos z + b$  та  $y = x + a(\sin z + \cos z) + b$ , де  $a$  і  $b$  сталі. Аналогічні рівняння можна виписати для поверхонь вигляду  $x = f(y, z)$  і  $z = f(x, y)$ . Ці приклади демонструють, зокрема, що з мінімальності поверхні у евклідовому сенсі не впливає її субріманова мінімальність або навпаки.

## 2.2 Формула другої варіації

Тепер перейдемо до питання про стійкість поверхонь у  $\widetilde{E(2)}$ , обчисливши другу варіацію субріманової площі.

**Теорема 2.2** (Формула другої варіації поверхні у  $\widetilde{E(2)}$ ). *Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня у  $\widetilde{E(2)}$ . Тоді друга нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має вигляд:*

$$\begin{aligned} A''(0) = & \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} \left( |N^h|^{-1} (Z(u) - \langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u)^2 - \right. \\ & - 2|N^h| \langle B(Z), S \rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3 \rangle \langle B(Z), S \rangle Z(u) u + \\ & + 4\langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle \langle B(S), S \rangle u^2 + \\ & + 2(1 - 2|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u) u + \\ & \left. + |N^h| (2 - 3|N^h|^2) \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u^2 \right) d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.22)$$

*Доведення.* Продовжимо міркування з доведення теореми 2.1, використовуючи ті ж позначення. З (2.5) та рівності  $|J\varphi_0| = 1$  випливає

$$A''(0) = \int_{\Sigma} |N_s^h|''_{s=0} + 2|N_s^h|'_{s=0} |J\varphi_s|'_{s=0} + |N_0^h \circ \varphi_0| |J\varphi_s|''_{s=0} d\Sigma \quad (2.23)$$

Перш за все, перепишемо формулу (2.10) у більш зручному для подальшого диференціювання вигляді. В силу (2.3),

$$\begin{aligned} \nabla_U X_3 &= \langle U, X_2 \rangle X_1 = u \langle N, X_2 \rangle X_1, \\ \nabla_U X_1 &= -\langle U, X_2 \rangle X_3 = -u \langle N, X_2 \rangle X_3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

отже, (2.10) приймає вигляд

$$|N_s^h|'_s = \langle \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle u \langle N, X_2 \rangle \langle \nu_s^h, X_1 \rangle.$$

Тут  $u$  та  $\langle N, X_2 \rangle$  не залежать від  $s$ , тому, диференціюючи, отримуємо

$$\begin{aligned} |N_s^h|''_s &= U(|N_s^h|'_s) = \langle \nabla_U \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle + \langle \nabla_U N_s, \nabla_U \nu_s^h \rangle - \\ & - (\langle \nabla_U N_s, X_3 \rangle + \langle N_s, \nabla_U X_3 \rangle) \langle N, X_2 \rangle \langle \nu_s^h, X_1 \rangle u - \\ & - \langle N_s, X_3 \rangle \langle N, X_2 \rangle (\langle \nabla_U \nu_s^h, X_1 \rangle + \langle \nu_s^h, \nabla_U X_1 \rangle) u. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Також з (2.8), (2.24) та рівності  $\langle Z_s, X_1 \rangle = -\langle \nu_s^h, X_2 \rangle$  випливає, що

$$\begin{aligned} \nabla_U \nu_s^h &= |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_U N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X_3 \rangle \langle \nabla_U X_3, Z_s \rangle) Z_s - \\ &\quad - \langle \nabla_U X_3, \nu_s^h \rangle X_3 = |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_U N_s, Z_s \rangle + \\ &\quad + \langle N_s, X_3 \rangle \langle N, X_2 \rangle \langle \nu_s^h, X_2 \rangle u) Z_s - \langle N, X_2 \rangle \langle \nu_s^h, X_1 \rangle u X_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Підрахуємо значення доданків виразу (2.25) при  $s = 0$ . Оскільки поля  $Z_s$ ,  $S_s$  та  $N_s$  утворюють ортонормовані репери на регулярних множинах поверхонь варіації, а  $\nu_s^h$  ортогональне до  $Z_s$ ,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_U \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle &= \langle \nabla_U \nabla_U N_s, S_s \rangle \langle S_s, \nu_s^h \rangle + \langle \nabla_U \nabla_U N_s, N_s \rangle \langle N_s, \nu_s^h \rangle = \\ &= -\langle N_s, X_3 \rangle (2\langle \nabla_U N_s, \nabla_U S_s \rangle + \langle N_s, \nabla_U \nabla_U S_s \rangle) - |N_s^h| \langle \nabla_U N_s, \nabla_U N_s \rangle = \\ &= -\langle N_s, X_3 \rangle (2\langle \nabla_U N_s, \nabla_{S_s} U \rangle + \langle N_s, \nabla_U \nabla_{S_s} U \rangle) - |N_s^h| \langle \nabla_U N_s, \nabla_U N_s \rangle, \end{aligned}$$

де друга рівність випливає з того, що другі похідні виразів  $\langle N_s, S_s \rangle = 0$  та  $\langle N_s, N_s \rangle = 1$  у напрямку  $U$  дорівнюють нулю, а третя – з  $[S_s, U] = 0$ . Тут  $\nabla_U \nabla_{S_s} U$  дорівнює оператору кривини евклідової метрики  $R(U, S_s)U = 0$ , бо  $\nabla_U U = [U, S_s] = 0$ . З (2.11), означення оператора Вейнгартена і того, що  $Z$  та  $S$  у регулярних точках утворюють ортонормовані базиси дотичних площин, випливає, що

$$\begin{aligned} \langle \nabla_U N_s, \nabla_{S_s} U \rangle_{s=0} &= -\langle Z(u)Z + S(u)S, \nabla_S N \rangle u = \\ &= (\langle B(S), Z \rangle Z(u) + \langle B(S), S \rangle S(u)) u = B(S)(u)u \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\langle \nabla_U \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle_{s=0} = -2\langle N, X_3 \rangle B(S)(u)u - |N^h| (Z(u)^2 + S(u)^2). \quad (2.27)$$

При  $s = 0$  рівняння (2.26) приймає вигляд

$$\begin{aligned} (\nabla_U \nu_s^h)_{s=0} &= |N^h|^{-1} (-Z(u) + \langle N, X_3 \rangle \langle N, X_2 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle u) Z - \\ &\quad - \langle N, X_2 \rangle \langle \nu^h, X_1 \rangle u X_3 = -|N^h|^{-1} Z(u)Z + \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u Z - \\ &\quad - |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle u X_3. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Звідси маємо з урахуванням формули  $S = \langle N, X_3 \rangle \nu^h - |N^h| X_3$

$$\begin{aligned} \langle \nabla_U N_s, \nabla_U \nu_s^h \rangle_{s=0} &= |N^h|^{-1} Z(u)^2 - \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 Z(u)u - \\ &\quad - |N^h|^2 \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u)u, \\ \langle \nabla_U N_s, X_3 \rangle_{s=0} &= |N^h| S(u). \end{aligned} \quad (2.29)$$

З (2.24) випливає, що

$$\langle N_s, \nabla_U X_3 \rangle_{s=0} = \langle N, X_2 \rangle \langle N, X_1 \rangle u = |N^h|^2 \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle u. \quad (2.30)$$

З (2.28) та рівності  $\langle Z, X_1 \rangle = -\langle \nu^h, X_2 \rangle$  отримуємо

$$\langle \nabla_U \nu_s^h, X_1 \rangle_{s=0} = |N^h|^{-1} \langle \nu^h, X_2 \rangle Z(u) - \langle N, X_3 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle^3 u. \quad (2.31)$$

Нарешті, з (2.24) також маємо

$$\langle \nu_s^h, \nabla_U X_1 \rangle_{s=0} = 0, \quad (2.32)$$

бо  $\nu^h$  ортогональне до  $X_3$ . Підставимо (2.27) і (2.29)–(2.32) у (2.25), приведемо подібні та спростимо:

$$\begin{aligned} |N_s^h|''_{s=0} &= -2\langle N, X_3 \rangle B(S)(u)u - |N^h|(Z(u)^2 + S(u)^2) + \\ &+ |N^h|^{-1} (Z(u) - \langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u)^2 - \\ &- 2|N^h|^2 \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u)u - |N^h|^3 \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Як показано, наприклад, у [60, с. 50-51], для евклідової метрики

$$\begin{aligned} |J \varphi_s|''_{s=0} &= (\operatorname{div}_\Sigma U)^2 + \langle \nabla_Z U, N \rangle^2 + \langle \nabla_S U, N \rangle^2 - \\ &- \langle \nabla_Z U, Z \rangle^2 - 2\langle \nabla_Z U, S \rangle \langle \nabla_S U, Z \rangle - \langle \nabla_S U, S \rangle^2 = \\ &= \langle \nabla_Z U, N \rangle^2 + \langle \nabla_S U, N \rangle^2 + 2(\langle \nabla_Z U, Z \rangle \langle \nabla_S U, S \rangle - \langle \nabla_Z U, S \rangle \langle \nabla_S U, Z \rangle). \end{aligned}$$

Перепишемо цю рівність у термінах оператора Вейнгартена з урахуванням його самоспряженості:

$$|J \varphi_s|''_{s=0} = Z(u)^2 + S(u)^2 + 2(\langle B(Z), Z \rangle \langle B(S), S \rangle - \langle B(Z), S \rangle^2) u^2. \quad (2.34)$$

Залишилося підставити (2.12) (врахувавши (2.15)), (2.13), (2.33) і (2.34) у вираз під інтегралом формули (2.23):

$$\begin{aligned} &|N_s^h|''_{s=0} + 2|N_s^h|'_{s=0} |J \varphi_s|'_{s=0} + |N_0^h \circ \varphi_0| |J \varphi_s|''_{s=0} = \\ &= -2\langle N, X_3 \rangle \langle B(S), Z \rangle Z(u)u - 2\langle N, X_3 \rangle \langle B(S), S \rangle S(u)u + \\ &+ |N^h|^{-1} (Z(u) - \langle N, X_3 \rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u)^2 - \\ &- 2|N^h|^2 \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle S(u)u - |N^h|^3 \langle \nu^h, X_1 \rangle^2 \langle \nu^h, X_2 \rangle^2 u^2 + \\ &+ 2\langle N, X_3 \rangle (S(u) + |N^h| \langle \nu^h, X_1 \rangle \langle \nu^h, X_2 \rangle u) (\langle B(Z), Z \rangle + \langle B(S), S \rangle) u + \\ &+ 2|N^h| (\langle B(Z), Z \rangle \langle B(S), S \rangle - \langle B(Z), S \rangle^2) u^2. \end{aligned}$$

Після підстановки умови мінімальності поверхні (2.19) та деяких спрощень

звідси отримуємо потрібну формулу (2.22).  $\square$

**Твердження 2.3.** *Усі мінімальні евклідові площини у  $\widetilde{E}(2)$  є стійкими.*

*Доведення.* В силу твердження 2.1, мінімальна площина є або вертикальною, і тоді  $\langle \nu^h, X_2 \rangle = 0$ , або горизонтальною, і тоді  $\langle N, X_3 \rangle = \langle \nu^h, X_1 \rangle = 0$ .

Оскільки, крім того,  $B = 0$ , формула (2.22) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N^h|^{-1} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0,$$

що й означає стійкість.  $\square$

Формули першої та другої варіації для поверхонь у псевдоермітових тривимірних ріманових многовидах, що включають, зокрема,  $\widetilde{E}(2)$ , у іншій формі було отримані М. Галлі у [17], звідки було отримано аналог теореми Бернштейна для  $\widetilde{E}(2)$  (див. далі розділ 4.1).

## 2.3 Висновки до розділу

Розділ присвячено дослідженню поверхонь у тривимірному многовиді  $\widetilde{E}(2)$ , тобто універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну субріманову структуру. Як результат, ми

- обчислили формулу першої варіації субріманової площі поверхні, з якої вивели критерій мінімальності, та встановили, що мінімальність не є еквівалентною до рівності нулю субріманової середньої кривини поверхні;
- показали, що евклідова площина є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі  $z$ , де координата  $z$  відповідає куту обертання власного руху;
- обчислили формулу другої варіації субріманової площі та за її допомогою встановили, що мінімальні евклідові площини є стійкими.

Результати розділу опубліковано у статті [66].

## 3 Вертикальні мінімальні поверхні

### у тривимірних субріманових многовидах

Розділ присвячено отриманню загальних формул першої та другої варіації, а також дослідженню аналога оператора Якобі вертикальних мінімальних поверхонь у довільному тривимірному субрімановому многовиді.

#### 3.1 Вертикальні поверхні

##### та формула першої варіації для них

Наступне поняття є стандартним для літератури з субріманової геометрії.

**Означення 3.1.** Поверхня  $\Sigma$  у тривимірному субрімановому многовиді  $(M, \mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$  зветься вертикальною, якщо її дотична площина  $T_p\Sigma$  перпендикулярна до горизонтальної площини субріманової структури  $\mathcal{H}_p$  (тобто їхні вектори нормалі ортогональні) у кожній точці  $p$  поверхні.

У позначеннях попередніх розділів вертикальні поверхні характеризуються еквівалентними умовами  $\langle N, X \rangle = 0$ , де  $X$  – нормальне поле  $\mathcal{H}$ ,  $|N^h| = 1$  або  $N = N^h = \nu^h$ . Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок. Також їх можна визначити як інваріантні відносно потоку векторного поля  $X$ , що визначає горизонтальний розподіл. Вертикальні поверхні у субріманових просторах сталої кривини (з їхніми стандартними структурами) раніше описувалися у [32, 54, 58], але їхнє систематичне дослідження у довільних тривимірних субріманових многовидах, наскільки нам відомо, не здійснювалося. Наступна теорема демонструє, що формула першої варіації для таких поверхонь має той же вигляд, що й ріманова формула (1.2).

**Теорема 3.1** (Формула першої варіації вертикальної поверхні). *Нехай  $\Sigma$  – вертикальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді  $M$  з дво-*

вимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ . Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має наступний вигляд:

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H u \, d\Sigma, \quad (3.1)$$

де  $H$  – ріманова середня кривина  $\Sigma$ .

*Доведення.* Початок доведення і позначення будуть тими ж, що у доведенні теореми 2.1. Зауважимо, що поверхні варіації  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$  тут не обов'язково є вертикальними. Позначимо через  $X$  одиничне нормальне поле горизонтального розподілу  $\mathcal{H}$ . Як раніше, через  $N_s$  позначається одиничне нормальне поле  $\Sigma_s$ , а  $N_s^h = N_s - \langle N_s, X \rangle X$  є ортогональною проєкцією  $N_s$  на  $\mathcal{H}$ . Горизонтальне гаусове відображення  $\nu_s^h = \frac{N_s^h}{|N_s^h|}$  поверхні  $\Sigma_s$  визначене на її регулярній множині  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ , де  $(\Sigma_s)_0 = \{p \in \Sigma \mid N_s^h(p) = 0\}$  – сингулярна множина. Характеристичне векторне поле  $Z_s$  на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$  утворене з  $\nu_s^h$  обертанням у  $\mathcal{H}$  на прямий кут і утворює разом з полем  $S_s = -\langle N_s, X \rangle \nu_s^h + |N_s^h| X$  рухомий ортонормований репер на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ . Згідно з (1.6), субріманова площа  $\Sigma_s$  дорівнює

$$A(s) = \int_{\Sigma_s} |N_s^h| \, d\Sigma_s = \int_{\Sigma} |N_s^h \circ \varphi_s| |\mathbf{J} \varphi_s| \, d\Sigma,$$

тому

$$A'(s) = \int_{\Sigma} |N_s^h|'_s |\mathbf{J} \varphi_s| + |N_s^h \circ \varphi_s| |\mathbf{J} \varphi_s|'_s \, d\Sigma \quad (3.2)$$

і, отже,

$$A'(0) = \int_{\Sigma} |N_s^h|'_{s=0} + |N_s^h \circ \varphi_s|'_{s=0} \, d\Sigma, \quad (3.3)$$

Диференціюючи рівність  $N_s^h = N_s - \langle N_s, X \rangle X$  у напрямку дотичного вектора  $v$  до  $M$  у точці  $\Sigma_s$ , отримаємо

$$\nabla_v N_s^h = \nabla_v N_s - \langle \nabla_v N_s, X \rangle X - \langle N_s, \nabla_v X \rangle X - \langle N_s, X \rangle \nabla_v X. \quad (3.4)$$

Використаємо ортонормований репер  $\{\nu_s^h, Z_s, X\}$  на  $\Sigma_s \setminus (\Sigma_s)_0$ :

$$\nabla_v \nu_s^h = \langle \nabla_v \nu_s^h, Z_s \rangle Z_s + \langle \nabla_v \nu_s^h, X \rangle X,$$

де з (3.4), рівностей  $\nu_s^h = |N_s^h|^{-1} N_s^h$  і  $\langle Z_s, N_s^h \rangle = 0$  маємо

$$\begin{aligned} \langle \nabla_v \nu_s^h, Z_s \rangle &= |N_s^h|^{-1} \langle \nabla_v N_s^h, Z_s \rangle = \\ &= |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_v N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X \rangle \langle \nabla_v X, Z_s \rangle). \end{aligned}$$

Звідси та з рівності  $\langle \nu_s^h, X \rangle = 0$  маємо

$$\nabla_v \nu_s^h = |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_v N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X \rangle \langle \nabla_v X, Z_s \rangle) Z_s - \langle \nu_s^h, \nabla_v X \rangle X, \quad (3.5)$$

Оскільки  $|N_s^h| = \langle N_s^h, \nu_s^h \rangle$  у регулярних точках  $\Sigma_s$ , похідна цієї функції в напрямку  $v$  дорівнює

$$v(|N_s^h|) = \langle \nabla_v N_s^h, \nu_s^h \rangle + \langle N_s^h, \nabla_v \nu_s^h \rangle = \langle \nabla_v N_s^h, \nu_s^h \rangle.$$

Отже, з (3.4) випливає, що

$$v(|N_s^h|) = \langle \nabla_v N_s, \nu_s^h \rangle - \langle N_s, X \rangle \langle \nabla_v X, \nu_s^h \rangle. \quad (3.6)$$

За побудовою нормальної варіації  $\varphi$  у означенні 1.5, поле  $U = d\varphi \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)$  є дотичним до геодезичних  $s \mapsto \exp(suN) = \exp(suN_0)$ . З (3.6) тоді маємо

$$|N_s^h|'_s = U(|N_s^h|) = \langle \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle - \langle N_s, X \rangle \langle \nabla_U X, \nu_s^h \rangle. \quad (3.7)$$

Значення полів  $S_s, Z_s$  і  $N_s$  також утворюють ортонормовані бази у регулярних точках  $\Sigma_s$ , і  $\langle \nabla_U N_s, N_s \rangle = 0$ , тому

$$\begin{aligned} \nabla_U N_s &= \langle \nabla_U N_s, S_s \rangle S_s + \langle \nabla_U N_s, Z_s \rangle Z_s = \\ &= -\langle N_s, \nabla_U S_s \rangle S_s - \langle N_s, \nabla_U Z_s \rangle Z_s = -\langle N_s, \nabla_{S_s} U \rangle S_s - \langle N_s, \nabla_{Z_s} U \rangle Z_s, \end{aligned}$$

де використали  $[U, S_s] = [U, Z_s] = 0$ . Зокрема, для  $s = 0$  маємо

$$\begin{aligned} (\nabla_U N_s)_{s=0} &= -\langle N, \nabla_X(uN) \rangle X - \langle N, \nabla_Z(uN) \rangle Z = \\ &= -X(u)X - Z(u)Z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

оскільки  $|N| = 1$ , отже з (3.7) випливає, що

$$|N_s^h|'_{s=0} = \langle -X(u)X - Z(u)Z, N \rangle - \langle N, X \rangle \langle \nabla_{uN} X, N \rangle = 0, \quad (3.9)$$

оскільки  $\Sigma$  є вертикальною. Як показано в [12, Ch. 1, § 1], перша похідна

$|J \varphi_s|$  в нулі дорівнює дивергенції поля варіації  $uN$ :

$$\begin{aligned} |J \varphi_s|'_{s=0} &= \operatorname{div}_\Sigma(uN) = \langle \nabla_X(uN), X \rangle + \langle \nabla_Z(uN), Z \rangle = \\ &= (\langle \nabla_X N, X \rangle + \langle \nabla_Z N, Z \rangle) u = -(\langle B(X), X \rangle + \langle B(Z), Z \rangle) u = -2Hu \end{aligned}$$

за означенням (1.1) середньої кривини  $H$ . З (3.3), (3.9) та попередньої рівності отримуємо потрібну формулу (3.1).  $\square$

**Наслідок 3.1.** *Вертикальна поверхня є мінімальною в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона є мінімальною в рімановому сенсі, тобто  $H = 0$ .*

Також для вертикальних поверхонь субріманова середня кривина

$$-\frac{1}{2} \operatorname{div}_\Sigma \nu^h = -\frac{1}{2} \operatorname{div}_\Sigma N = H$$

збігається з рімановою середньою кривиною, тому вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли її субріманова середня кривина дорівнює нулю.

Зауважимо, що для вертикальних поверхонь повна неінтегровність горизонтального розподілу вже не виглядає настільки ж суттєвою, як для довільних, де з неї випливає, що сингулярна множина має міру нуль. Адже тепер ми з самого початку будемо поверхню перпендикулярною до розподілу і з гарантовано порожньою сингулярною множиною. Щоправда, як зазначалося у попередньому доведенні, поверхні варіації вже, взагалі кажучи, не є вертикальними, але з міркувань неперервності для малих значень параметра варіації їхні сингулярні множини можна вважати все ще порожніми. Тому аналог вертикальних поверхонь можна будувати також для структур з інтегровними двовимірними горизонтальними розподілами, що задають шарування многовиду  $M$ : у цьому випадку вони будуть перпендикулярними до таких шарувань. Функціонал площі при цьому можна визначити аналогічним чином. Ми можемо припустити, що основні результати цього розділу залишаться справедливими й у цьому випадку.

## 3.2 Формула другої варіації

### для вертикальних поверхонь

Тепер знайдемо другу варіацію у вертикальному випадку.

**Теорема 3.2** (Формула другої варіації вертикальної поверхні). *Нехай  $\Sigma$  – вертикальна мінімальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді  $M$  з двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ . Тоді друга нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією  $u$  з компактним носієм, має вигляд:*

$$A''(0) = \int_{\Sigma} - (X(u) - \langle \nabla_N X, N \rangle u)^2 + |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 d\Sigma, \quad (3.10)$$

де  $\nabla$  і  $\text{Ric}$  – ріманова зв'язність та тензор Річчі  $M$  відповідно,  $X$  – одиничне нормальне поле  $\mathcal{H}$ , що є дотичним до  $\Sigma$  в силу вертикальності,  $\nabla_{\Sigma}$  і  $|B|$  – рімановий градієнт і норма другої фундаментальної форми  $\Sigma$  відповідно.

*Доведення.* Продовжимо доведення теореми 3.1, використовуючи ті ж позначення (пор. також із доведенням теореми 2.2). З (3.2) та (3.9) випливає, що

$$A''(0) = \int_{\Sigma} |N_s^h|''_{s=0} |J \varphi_0| + 2 |N_s^h|'_{s=0} |J \varphi_s|'_{s=0} + |N_0^h \circ \varphi_0| |J \varphi_s|''_{s=0} d\Sigma = \int_{\Sigma} |N_s^h|''_{s=0} + |J \varphi_s|''_{s=0} d\Sigma. \quad (3.11)$$

Диференціюючи (3.7) у напрямку  $U$ , отримуємо

$$\begin{aligned} |N_s^h|''_s = U(|N_s^h|'_s) &= \langle \nabla_U \nabla_U N_s, \nu_s^h \rangle + \langle \nabla_U N_s, \nabla_U \nu_s^h \rangle - \\ &- (\langle \nabla_U N_s, X \rangle + \langle N_s, \nabla_U X \rangle) \langle \nabla_U X, \nu_s^h \rangle - \\ &- \langle N_s, X \rangle (\langle \nabla_U \nabla_U X, \nu_s^h \rangle + \langle \nabla_U X, \nabla_U \nu_s^h \rangle). \end{aligned} \quad (3.12)$$

За формулою (3.5),

$$\nabla_U \nu_s^h = |N_s^h|^{-1} (\langle \nabla_U N_s, Z_s \rangle - \langle N_s, X \rangle \langle \nabla_U X, Z_s \rangle) Z_s - \langle \nu_s^h, \nabla_U X \rangle X,$$

тож з (3.8) і вертикальності  $\Sigma$  маємо

$$(\nabla_U \nu_s^h)_{s=0} = -Z(u)Z - u\langle \nabla_N X, N \rangle X. \quad (3.13)$$

Розглядаючи другу похідну рівності  $\langle N_s, N_s \rangle = 1$  у напрямку  $U$ , отримуємо

$$2\langle \nabla_U \nabla_U N_s, N_s \rangle + 2\langle \nabla_U N_s, \nabla_U N_s \rangle = 0,$$

отже, при  $s = 0$  з (3.8) випливає, що

$$\langle (\nabla_U \nabla_U N_s)_{s=0}, N \rangle = -X(u)^2 - Z(u)^2.$$

Разом з (3.13) це означає, що при  $s = 0$  рівняння (3.12) набуває вигляду

$$\begin{aligned} |N_s^h|_{s=0}'' &= -X(u)^2 - Z(u)^2 + \\ &+ \langle -X(u)X - Z(u)Z, -Z(u)Z - u\langle \nabla_N X, N \rangle X \rangle - \\ &- (\langle -X(u)X - Z(u)Z, X \rangle + u\langle \nabla_N X, N \rangle) u\langle \nabla_N X, N \rangle = \\ &= -(X(u) - u\langle \nabla_N X, N \rangle)^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де ми знову використали (3.13) і вертикальність  $\Sigma$ .

З виведення ріманової формули другої варіації ([12, Ch. 1, § 8]) випливає, що

$$\begin{aligned} |J \varphi_s|_{s=0}'' &= X(u)^2 + Z(u)^2 - \text{Ric}(N, N) u^2 - \\ &- (\langle B(X), X \rangle^2 + 2\langle B(X), Z \rangle^2 + \langle B(Z), Z \rangle^2) u^2 = \\ &= |\nabla_\Sigma u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2, \end{aligned}$$

тому (3.10) випливає з (3.11), (3.14) і звідси.  $\square$

**Наслідок 3.2.** *Якщо вертикальна мінімальна поверхня є стійкою в субрімановому сенсі, вона також є стійкою в рімановому сенсі.*

*Доведення.* З (3.10) випливає, що

$$A''(0) \leq \int_{\Sigma} |\nabla_\Sigma u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 d\Sigma,$$

де права частина згідно з (1.3) є рімановою другою варіацією поверхні  $\Sigma$ . Таким чином, з умови стійкості  $A''(0) \geq 0$  для нормальних варіацій з компактним носієм випливає стійкість у рімановому сенсі.  $\square$

Наприклад, субріманова тривимірна сфера (див. розділ 1.1) – це стан-

дартна тривимірна сфера  $\mathbb{S}^3$ , що вкладена в евклідовий простір  $\mathbb{E}^4$  з координатами  $(x, y, z, w)$  разом з горизонтальним розподілом, що ортогональний до поля Хопфа

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w}$$

і є таким чином цілком неінтегровним та лівоінваріантним відносно структури групи Лі  $\mathbb{S}^3$ , а субріманова метрика є обмеженням стандартної ріманової метрики сфери сталої кривини. У [32] було показано, що повні зв'язні вертикальні мінімальні поверхні у цій субрімановій геометрії є торами Кліффорда. Добре відомо (див., наприклад, [12, Ch. 1, § 8]), що вони не є стійкими в рімановому сенсі, а отже, і в субрімановому сенсі. Пізніше у [58] було показано, що у цьому просторі не існує стійких у субрімановому сенсі поверхонь з порожньою сингулярною множиною (що включають вертикальні).

Також у [66] ми отримали формулу другої варіації для вертикальних мінімальних поверхонь у групі  $\widetilde{\mathbb{E}(2)}$ , що є окремим випадком теореми 3.2.

### 3.3 Оператор Якобі для вертикальних поверхонь

Перепишемо формулу (3.10) другої варіації вертикальної мінімальної поверхні  $\Sigma$ , врахувавши рівність  $|\nabla_{\Sigma} u|^2 = X(u)^2 + Z(u)^2$ :

$$\begin{aligned} A''(0) = & \int_{\Sigma} Z(u)^2 + 2\langle \nabla_N X, N \rangle u X(u) - \\ & - (\langle \nabla_N X, N \rangle^2 + \text{Ric}(N, N) + |B|^2) u^2 d\Sigma, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Знову скористаємось тим, що інтеграл по  $\Sigma$  від дивергенції гладкого поля  $\langle \nabla_N X, N \rangle u^2 X$  дорівнює нулю за теоремою Стокса, оскільки  $u$  має компактний носій. З іншого боку, ця дивергенція дорівнює

$$\begin{aligned} \text{div}_{\Sigma} (\langle \nabla_N X, N \rangle u^2 X) = & 2\langle \nabla_N X, N \rangle u X(u) + \\ & + (X(\langle \nabla_N X, N \rangle) + \langle \nabla_N X, N \rangle \text{div}_{\Sigma} X) u^2, \end{aligned}$$

де  $\operatorname{div}_\Sigma X = \langle \nabla_X X, X \rangle + \langle \nabla_Z X, Z \rangle = \langle \nabla_Z X, Z \rangle$  через ортонормованість  $\{X, Z\}$ . Це означає, що (3.15) можна переписати як

$$A''(0) = \int_\Sigma Z(u)^2 - f u^2 d\Sigma \quad (3.16)$$

для деякої функції  $f$ . Сформулюємо наступні твердження і теорему для усіх поверхонь, формула другої варіації яких має такий вигляд (зокрема вертикальних). Зауважимо, що для їхніх доведень вже не буде суттєвим, що  $X$  – нормальне поле горизонтального розподілу, тому ми можемо вважати  $\{X, Z\}$  довільним ортонормованим репером на поверхні.

**Твердження 3.1.** *Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною в тривимірному субрімановому многовиді, друга варіація субріманової площі якої має вигляд (3.16) для ортонормованого репера  $\{X, Z\}$  на  $\Sigma$ . Тоді її можна переписати у вигляді*

$$A''(0) = - \int_\Sigma u L(u) d\Sigma \quad (3.17)$$

де  $L$  – оператор Якобі на просторі гладких функцій на  $\Sigma$ :

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(u) + f u. \quad (3.18)$$

*Доведення.* Зауважимо, що, аналогічно до  $\operatorname{div}_\Sigma X$  вище,  $\operatorname{div}_\Sigma Z = \langle \nabla_X Z, X \rangle + \langle \nabla_Z Z, Z \rangle = \langle \nabla_X Z, X \rangle$ , тому в (3.18)

$$L(u) = Z(Z(u)) + Z(u) \operatorname{div}_\Sigma Z + f u = \operatorname{div}_\Sigma(Z(u)Z) + f u.$$

Звідси, оскільки  $u$  має компактний носій,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(uZ(u)Z) d\Sigma = \int_\Sigma Z(u)^2 + u \operatorname{div}_\Sigma(Z(u)Z) d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma Z(u)^2 + u(L(u) - f u) d\Sigma, \end{aligned}$$

звідки й випливає (3.17). □

Оператор Якобі  $L$ , що виникає у попередньому твердженні, є аналогом ріманового оператора Якобі, що визначається формулою (1.4). Зокрема, він

теж є лінійним оператором на  $C^\infty(\Sigma)$ , як і у рімановому випадку. Покажемо тепер, що аналог достатньої умови стійкості з теореми 1.2 може бути сформульований у субрімановому випадку за допомогою цього оператора.

**Теорема 3.3** (Достатня умова стійкості). *Нехай  $\Sigma$  – мінімальна поверхня в тривимірному субрімановому многовиді з порожньою сингулярною множиною, другою варіацією субріманової площі, що має вигляд (3.16), та оператором Якобі  $L$ , що визначений формулою (3.18). Якщо існує гладка додатна функція  $u$  на  $\Sigma$  така, що  $L(u) \leq 0$ , то  $\Sigma$  є стійкою.*

*Доведення.* Оскільки  $u > 0$ , ми можемо визначити  $v = \ln u$  на  $\Sigma$ . Похідні цієї функції мають вигляд

$$Z(v) = \frac{Z(u)}{u}, \quad Z(Z(v)) = \frac{Z(Z(u))}{u} - \frac{Z(u)^2}{u^2}.$$

Звідси, з (3.18) і з  $L(u) \leq 0$  випливає, що

$$\operatorname{div}_\Sigma(Z(v)Z) = Z(Z(v)) + \langle \nabla_X Z, X \rangle Z(v) \leq -Z(v)^2 - f. \quad (3.19)$$

Для будь-якої гладкої функції  $w$  на  $\Sigma$  з компактним носієм виконується

$$\operatorname{div}_\Sigma(w^2 Z(v)Z) = \operatorname{div}_\Sigma(Z(v)Z) w^2 + 2Z(v)Z(w)w.$$

Інтеграл від цієї дивергенції по  $\Sigma$  дорівнює нулю, тому з (3.19) та нерівності Коші – Буняковського – Шварца маємо

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (f + Z(v)^2) w^2 d\Sigma &\leq - \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma(Z(v)Z) w^2 d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma 2Z(v)Z(w)w d\Sigma \leq \int_\Sigma Z(v)^2 w^2 + Z(w)^2 d\Sigma, \end{aligned}$$

отже, для варіації, що визначена функцією  $w$ , друга варіація (3.16) є невід'ємною:

$$A''(0) = \int_\Sigma Z(w)^2 - f w^2 d\Sigma \geq 0,$$

що й означає стійкість  $\Sigma$ . □

Інші субріманові аналоги достатньої умови стійкості в теоремі 1.2 були отримані в [35, 45]. Відкритим залишається питання, чи є аналог необхідної

умови теореми 1.2, що є складнішою для доведення, також справедливим, тобто чи впливає зі стійкості повної некомпактної поверхні  $\Sigma$  існування такої функції  $u > 0$ , що  $L(u) = 0$ .

### 3.4 Висновки до розділу

Розділ присвячено дослідженню вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та їхньої стійкості. Як результат, ми у даному розділі

- обчислили формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом і вивели з неї, що вертикальна поверхня мінімальна в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона мінімальна в рімановому сенсі;
- обчислили формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом і вивели з неї, що зі стійкості поверхні в субрімановому сенсі впливає стійкість у рімановому сенсі;
- запропонували субрімановий аналог оператора Якобі для вертикальних поверхонь і довели достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь, що аналогічна до теореми Д. Фішер-Колбрі та Р. Шоена: якщо поверхня допускає додатну функцію з недодатним оператором Якобі, то вона є стійкою.

Результати розділу опубліковані в статтях [27] і [28].

## 4 Вертикальні мінімальні поверхні

### у тривимірних групах Лі та їхня стійкість

У цьому розділі ми знаходимо вертикальні мінімальні поверхні та досліджуємо їхню стійкість у тривимірних групах Лі  $\widetilde{E(2)}$ ,  $Nil$ ,  $Sol$  та  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  із лівоінваріантними субрімановими структурами. Більш детально, для кожної з цих груп ми фіксуватимемо лівоінваріантну ріманову метрику та розглядатимемо різноманітні лівоінваріантні двовимірні цілком неінтегровні розподіли, що будуть визначати субріманові структури в якості горизонтальних розподілів. У  $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$  ми розглянемо, крім того, сімейство нелівоінваріантних розподілів. Зауважимо, що ці чотири групи Лі разом з  $\mathbb{R}^3$  і  $\mathbb{S}^3$  вичерпують усі тривимірні однозв'язні унімодулярні групи Лі з точністю до ізоморфізму (див. [48]), але на абелевій групі  $\mathbb{R}^3$  не існує лівоінваріантних двовимірних цілком неінтегровних розподілів, а на групі  $\mathbb{S}^3$  зі стандартною метрикою сталої кривини усі такі розподіли ізометричні, тому всі субріманові структури описаного вище вигляду ізометричні стандартній, що була досліджена у [32].

#### 4.1 Вертикальні мінімальні поверхні в групі $\widetilde{E(2)}$

Групу  $\widetilde{E(2)}$  було описано на початку розділу 2.1. Тут так само розглядатимемо на ній лівоінваріантну евклідову метрику, але крім стандартної субріманової структури, горизонтальний розподіл якої породжено полями  $X_1$  та  $X_2$  лівоінваріантного базису (2.1), введемо у розгляд лівоінваріантний горизонтальний розподіл загального вигляду.

**Твердження 4.1.** *Лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H} = X^\perp$ , що ортогональний до одиничного лівоінваріантного поля*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3) \quad (4.1)$$

на групі  $\widetilde{E(2)}$ , цілком неінтегровний тоді й тільки тоді, коли  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$ .

*Доведення.* Дійсно, при  $\lambda = \nu = 0$  розподіл, що ортогональний до  $X = X_2$ , інтегровний, бо  $[X_1, X_3] = 0$  згідно з (2.2). Нехай тепер  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$  і  $\mu \neq 0$ . Тоді поля  $-\mu X_1 + \lambda X_2$ ,  $-\nu X_2 + \mu X_3$  утворюють базис  $\mathcal{H} = X^\perp$ , і, в силу (2.2), їхньою дужкою Лі буде  $\mu(\lambda X_1 + \nu X_3)$ , що разом з цими двома полями утворює базис дотичного простору у кожній точці  $\widetilde{E(2)}$ . Те ж саме буде справедливим при  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$ ,  $\mu = 0$  для базису  $\mathcal{H}$  з полів  $-\nu X_1 + \lambda X_3$ ,  $X_2$  та їхньої дужки Лі  $-\lambda X_1 - \nu X_3$ .  $\square$

У якості субріманової метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  тут і далі будемо брати обмеження лівоінваріантної ріманової метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на групі (у нашому випадку евклідової) на  $\mathcal{H}$ . Зауважимо, що випадок  $\lambda = \mu = 0$  відповідає стандартній субрімановій структурі на  $\widetilde{E(2)}$ .

**Теорема 4.1.** *Нехай субріманова структура на  $\widetilde{E(2)}$  визначена двовимірним лівоінваріантним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

*і  $\lambda^2 + \nu^2 > 0$ . Вона допускає вертикальні мінімальні поверхні тоді й тільки тоді, коли  $\mu = 0$ .*

*При  $\mu = 0$  зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня у  $\widetilde{E(2)}$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у евклідовій площині  $z = z_0$  або паралельно перенесеному стандартному гелікоїді*

$$(x - x_0) \cos(z + \alpha) + (y - y_0) \sin(z + \alpha) = 0,$$

*де  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}$  (відповідно, коли вона є однією з цих поверхонь). При цьому площини є стійкими, а гелікоїди – нестійкими.*

*Доведення.* Помітимо, що в силу (2.1)

$$\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3 = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \left( \sin(z + \alpha) \frac{\partial}{\partial x} - \cos(z + \alpha) \frac{\partial}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.2)$$

для  $\alpha$  з формулювання теореми.

Згадаємо, що за наслідком 3.1 вертикальні поверхні є мінімальними тоді й тільки тоді, коли вони мінімальні у евклідовому сенсі. В силу того, що поле  $X$  є дотичним до вертикальної поверхні  $\Sigma$  у будь-якій її точці, ця поверхня складається з проміжків інтегральних траєкторій  $X$ , або, що те ж саме, інтегральних траєкторій  $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} X = \lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3$  з (4.2) (повних траєкторій у повному випадку). При  $\mu \neq 0$  такими траєкторіями є гвинтові лінії. Оскільки для різних значень  $\alpha$  вони відрізняються лише паралельним перенесенням уздовж осі  $z$ , що є евклідовою ізометрією, далі можемо без обмеження загальності вважати, що  $\alpha = 0$ , тобто  $\lambda = 0$ ,  $\nu = 1$ . Тоді інтегральні траєкторії можна параметризувати у вигляді  $s \mapsto \left(x_0 - \frac{1}{\mu} \cos s, y_0 - \frac{1}{\mu} \sin s, s\right)$ . Оскільки вони трансверсальні до площини  $(x, y)$ , поверхня  $\Sigma$  параметризується як поверхня перенесення

$$r(s, t) = (x(t), y(t), 0) + \left(-\frac{1}{\mu} \cos s, -\frac{1}{\mu} \sin s, s\right).$$

Тут можна вважати параметр  $t$  напрямної кривої натуральним (у евклідовому сенсі, тобто так, що  $x'^2 + y'^2 = 1$ ). Знайдемо першу і другу фундаментальну форму поверхні, обчисливши перші та другі похідні:

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{1}{\mu} \sin s \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \cos s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu} X, \quad r_t = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}, \\ r_{ss} &= \frac{1}{\mu} \cos s \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \sin s \frac{\partial}{\partial y}, \quad r_{st} = 0, \quad r_{tt} = x'' \frac{\partial}{\partial x} + y'' \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Тому одиничне нормальне поле має вигляд  $N = \frac{1}{\delta} \left(-y' \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{\partial}{\partial y} + \sigma \frac{\partial}{\partial z}\right)$ , де позначаємо  $\sigma = \frac{1}{\mu} (y' \sin s + x' \cos s)$  і  $\delta = \sqrt{1 + \sigma^2}$ . Таким чином, коефіцієнти фундаментальних форм дорівнюють

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle r_s, r_s \rangle = \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2}, \quad g_{12} = \langle r_s, r_t \rangle = \frac{1}{\mu} (x' \sin s - y' \cos s), \\ g_{22} &= \langle r_t, r_t \rangle = 1, \quad b_{11} = \langle r_{ss}, N \rangle = \frac{1}{\mu \delta} (x' \sin s - y' \cos s), \quad b_{12} = \langle r_{st}, N \rangle = 0, \\ b_{22} &= \langle r_{tt}, N \rangle = \frac{1}{\delta} (-x'' y' + y'' x') = -\frac{K}{\delta}, \end{aligned}$$

де  $K$  – кривина напрямної кривої у евклідовій площині  $(x, y)$ . Умова  $H = 0$  мінімальності поверхні  $\Sigma$ , що еквівалентна до рівності  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} +$

$b_{22}g_{11} = 0$ , тоді зводиться до

$$\mu(x' \sin s - y' \cos s) - (\mu^2 + 1)K = 0.$$

Це може виконуватися для усіх  $(s, t)$  лише при  $x' = y' = 0$ , що призводить до протиріччя.

При  $\mu = 0$  інтегральними траєкторіями поля  $X$  згідно з (4.2) є горизонтальні евклідові прямі з напрямними векторами  $(\sin(z + \alpha), -\cos(z + \alpha), 0)$ . Отже, поверхня  $\Sigma$  міститься у лінійчатій та має параметризацію

$$r(s, t) = (x(t), y(t), z(t)) + s(\sin(z(t) + \alpha), -\cos(z(t) + \alpha), 0), \quad (4.3)$$

де  $(x, y, z)$  – натурально параметризована (знову в евклідовому сенсі, тобто  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ ) інтегральна траєкторія характеристичного поля  $Z$ , тому виконується умова

$$x' \sin(z + \alpha) - y' \cos(z + \alpha) = 0 \quad (4.4)$$

ортогональності  $Z$  і  $S = -X_3$ . Зокрема, для площин можна покласти  $x = t \cos(z_0 + \alpha)$  і  $y = t \sin(z_0 + \alpha)$  при сталій  $z = z_0$ , а для гелікоїдів – взяти сталі  $x = x_0$  та  $y = y_0$  і  $z = t$ . Аналогічно, до попередньої частини доведення, далі, не обмежуючи загальність, можемо вважати, що  $\alpha = 0$ . Для такої поверхні базис дотичних площин утворюють поля

$$r_s = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} = X_3, r_t = (x' + sz' \cos z) \frac{\partial}{\partial x} + (y' + sz' \sin z) \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z},$$

тому  $N = \frac{1}{\delta} \left( z' \cos z \frac{\partial}{\partial x} + z' \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \sigma \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , де  $\sigma = x' \cos z + y' \sin z + sz'$  і  $\delta = \sqrt{(z')^2 + \sigma^2}$ . Обчислюючи також другі похідні, знаходимо з урахуванням (4.4) коефіцієнти другої фундаментальної форми поверхні  $\Sigma$ :

$$b_{11} = 0, b_{12} = \frac{(z')^2}{\delta}, b_{22} = \frac{1}{\delta} ((x''z' - x'z'') \cos z + (y''z' - y'z'') \sin z).$$

Оскільки коефіцієнти першої фундаментальної форми дорівнюють, зокрема,  $g_{11} = 1$  і  $g_{12} = 0$  в силу (4.4), умова мінімальності поверхні  $H = 0$  тут еквівалентна до  $b_{22} = 0$ , тобто

$$(x''z' - x'z'') \cos z + (y''z' - y'z'') \sin z = 0.$$

З умови (4.4) випливає, що  $(x', y') = \lambda(\cos z, \sin z)$  для деякої функції  $\lambda$ , тому попереднє рівняння набуває вигляду

$$\lambda' z' - z'' \lambda = 0, \quad (4.5)$$

а умова натуральності параметра  $t$  дає  $\lambda^2 + (z')^2 = 1$ . Тому на проміжках, де  $\lambda = 0$ , маємо  $z' = \pm 1$ ,  $x' = y' = 0$ , тобто поверхня (4.3) є стандартним гелікоїдом, що паралельно перенесений уздовж площини  $(x, y)$ . На проміжках, де  $\lambda \neq 0$ , умова (4.5) означає, що  $(\frac{z'}{\lambda})' = 0$ , тобто  $z' = \lambda c$  для деякого сталого  $c$ . З умови натуральності параметра тоді отримуємо, що  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$  і  $z' = a = \pm \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$  сталі, отже,  $z = z_0 + at$  і  $(x', y') = \lambda(\cos(z_0 + at), \sin(z_0 + at))$ . Тоді при  $a = 0$  рівняння (4.3) задає площину  $z = z_0$ , а при  $a \neq 0$  – знову паралельно перенесений стандартний гелікоїд.

Згадаємо, що евклідові площини є стійкими (в субрімановому сенсі) за твердженням 2.3. Стандартні гелікоїди ж нестійкі у субрімановому сенсі в силу наслідку 3.2, оскільки добре відомо, що вони нестійкі в рімановому сенсі як поверхні у евклідовому просторі. Це випливає з теореми 1.3 або перевіряється безпосередньо.  $\square$

Таким чином, попередня теорема дає приклади субріманових структур, для яких не існує вертикальних мінімальних поверхонь. З неї також випливає наступний частковий результат типу Бернштейна.

**Наслідок 4.1.** *У групі  $\widetilde{E}(2)$  з евклідовою метрикою і лівоінваріантною субрімановою структурою, що визначена горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де  $X$  має вигляд (4.1), вертикальні стійкі мінімальні поверхні існують лише при  $\mu = 0$ , і кожна така повна зв'язна поверхня є евклідовою площиною  $z = z_0$ .*

Більш того, у [17] було показано, що при  $\mu = 0$  евклідові площини  $z = z_0$  вичерпують повні зв'язні вертикальні стійкі мінімальні поверхні з порожніми сингулярними множинами. Можна припустити, що при  $\mu \neq 0$  таких поверхонь не існує.

Зазначимо, що сама група Лі  $E(2)$  власних рухів евклідової площини дифеоморфна циліндру  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , причому базис (2.1) переводиться диференціалами накриваючого відображення  $(x, y, z) \mapsto (x, y, e^{zi})$  у коректно визначений базис лівоінваріантних полів на  $E(2)$  з тими ж дужками Лі. Тому ми можемо так само визначити лівоінваріантну (в даному випадку локально евклідову) метрику на  $E(2)$ , для якої цей базис ортонормований, та лівоінваріантні субріманові структури, що визначені такими ж розподілами, як у твердженні 4.1. Таким чином, накриваюче відображення перетворюється на локальну ізометрію, що зберігає субріманову структуру, зокрема, переводить вертикальні мінімальні поверхні у вертикальні мінімальні, отже, твердження теореми 4.1 залишається справедливим для поверхонь, що є образами перелічених там під дією накриваючого відображення (при цьому властивості стійкості теж зберігаються).

## 4.2 Вертикальні мінімальні поверхні в групі $Nil$

Нагадаємо, що тривимірна група Гейзенберга  $Nil$  – це простір  $\mathbb{R}^3$  з координатами  $(x, y, z)$ , на якому структура групи Лі задається множенням

$$(x, y, z)(x', y', z') = \left( x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \right) \quad (4.6)$$

і визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.7)$$

Єдиними ненульовими дужками Лі цих полів є

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3. \quad (4.8)$$

Розглянемо на групі  $Nil$  лівоінваріантну ріманову метрику  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  таку, що  $\{X_1, X_2, X_3\}$  є ортонормованим базисом у кожній точці. Вона таким чином має вигляд

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = dx^2 + dy^2 + \left( dz + \frac{y}{2} dx - \frac{x}{2} dy \right)^2. \quad (4.9)$$

Тут і далі через  $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$  позначатимемо базис лівоінваріантних 1-форм, що дуальний до  $\{X_1, X_2, X_3\}$ . З вигляду дужок Лі (4.8) отримаємо, що, згідно з формулою Кошуля, ріманова зв'язність  $\nabla$  метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  визначається рівностями

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_2 &= -\nabla_{X_2} X_1 = \frac{X_3}{2}, & \nabla_{X_2} X_3 &= \nabla_{X_3} X_2 = \frac{X_1}{2}, \\ \nabla_{X_3} X_1 &= \nabla_{X_1} X_3 = -\frac{X_2}{2}, & \nabla_{X_1} X_1 &= \nabla_{X_2} X_2 = \nabla_{X_3} X_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

і що її тензор Річчі дорівнює (див., наприклад, [48])

$$\text{Ric} = -\frac{1}{2}(\omega^1)^2 - \frac{1}{2}(\omega^2)^2 + \frac{1}{2}(\omega^3)^2. \quad (4.11)$$

Згадаємо, що при побудові стандартної субріманової структури на  $Nil$  (див. посилання у розділі 1.3) у якості горизонтального розподілу  $\mathcal{H}$  беруть розподіл, що породжений базисом  $\{X_1, X_2\}$ . З (4.8) випливає, що цей лівоінваріантний розподіл дійсно є цілком неінтегровним. Аналогічно до попереднього розділу, узагальнимо цю структуру, розглянувши довільний лівоінваріантний горизонтальний розподіл.

**Твердження 4.2.** *Двовимірний лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H}$  на групі  $Nil$  є цілком неінтегровним тоді й тільки тоді, коли він трансверсальний до поля  $X_3$ , тобто ортогональний до одиничного лівоінваріантного поля*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3) \quad (4.12)$$

для деяких  $\lambda$  і  $\mu$ .

*Доведення.* Якщо  $\mathcal{H} = X^\perp$  для поля  $X$  вигляду (4.12), то його базис можна побудувати з полів  $X_1 - \lambda X_3$  і  $X_2 - \mu X_3$ , які разом з дужкою Лі  $[X_1 - \lambda X_3, X_2 - \mu X_3] = X_3$  утворюють базис на  $Nil$ . З іншого боку, якщо  $\mathcal{H}$  містить  $X_3$ , то він є інтегровним, оскільки  $[X_3, Y] = 0$  для будь-якого лівоінваріантного поля  $Y$ .  $\square$

Слова «вертикальна площина» у наступній теоремі використовуються у стандартному значенні «паралельна до осі  $z$ ».

**Теорема 4.2.** Нехай субріманова структура на  $Nil$  визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3).$$

Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в цьому субрімановому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у вертикальній евклідовій площині над довільною прямою в площині  $(x, y)$  при  $\lambda = \mu = 0$ , і над прямою з напрямним вектором  $(\lambda, \mu)$  в іншому випадку (відповідно, є такою площиною).

Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже й у рімановому сенсі.

*Доведення.* Як і у доведенні теореми 4.1, щоб побудувати вертикальну поверхню  $\Sigma$ , будемо проводити інтегральні траєкторії поля

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \left( 1 - \frac{1}{2}\lambda y + \frac{1}{2}\mu x \right) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

через точки напрямної кривої  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ . Ці траєкторії є евклідовими прямими, й ми отримаємо наступну параметризацію  $\Sigma$ :

$$r(s, t) = (x(t), y(t), z(t)) + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} \left( \lambda s, \mu s, s + \frac{-\lambda s y(t) + \mu s x(t)}{2} \right).$$

Таким чином, похідні

$$r_s = X, r_t = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \left( z' + \frac{-\lambda s y' + \mu s x'}{2\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} \right) \frac{\partial}{\partial z} = x' X_1 + y' X_2 + \delta X_3,$$

де  $\delta = z' + \frac{1}{2}(x'y - xy') + \frac{-\lambda s y' + \mu s x'}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}$ , утворюють базис дотичного розшарування  $\Sigma$ . Звідси та з (4.10) отримуємо коваріантні похідні

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} (\mu X_1 - \lambda X_2), \\ \nabla_{r_t} r_s &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} ((\mu\delta + y')X_1 - (\lambda\delta + x')X_2 + (-\lambda y' + \mu x')X_3), \\ \nabla_{r_t} r_t &= (x'' + y''\delta)X_1 + (y' - x'\delta)X_2 + \delta'_t X_3. \end{aligned}$$

Одиничне нормальне поле поверхні  $\Sigma$  має вигляд

$$N = \frac{1}{\Delta\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} ((\mu\delta - y')X_1 - (\lambda\delta - x')X_2 + (\lambda y' - \mu x')X_3),$$

де  $\Delta = \frac{\sqrt{(\mu\delta - y')^2 + (\lambda\delta - x')^2 + (\lambda y' - \mu x')^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}$ . Отже, коефіцієнти другої фундаментальної форми  $\Sigma$  мають вигляд

$$\begin{aligned} b_{11} &= \langle \nabla_{r_s} r_s, N \rangle = \frac{(\lambda^2 + \mu^2)\delta - \lambda x' - \mu y'}{\Delta(\lambda^2 + \mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \\ b_{12} &= \langle \nabla_{r_t} r_s, N \rangle = \frac{(\lambda^2 + \mu^2)\delta^2 - x'^2 - y'^2 - (\lambda y' - \mu x')^2}{2\Delta(\lambda^2 + \mu^2 + 1)}, \\ b_{22} &= \langle \nabla_{r_t} r_t, N \rangle = \frac{1}{\Delta\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} (x'y'' - x''y' - \\ &\quad - (\lambda y'' - \mu x'' + x'^2 + y'^2)\delta + (\lambda x' + \mu y')\delta^2 + (\lambda y' - \mu x')\delta'_t). \end{aligned}$$

Враховуючи, що коефіцієнти першої фундаментальної форми поверхні  $\Sigma$  дорівнюють

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = \frac{\lambda x' + \mu y' + \delta}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}, \quad g_{22} = x'^2 + y'^2 + \delta^2,$$

запишемо умову мінімальності  $H = 0$ , яка еквівалентна до рівності  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$ . Вона має вигляд  $f(t)s + g(t) = 0$  для деяких функцій  $f$  і  $g$  й тому еквівалентна системі  $f = g = 0$ . Тут  $f = \frac{(\mu x' - \lambda y')^3}{\Delta(\lambda^2 + \mu^2 + 1)^2}$ . Отже, або  $\lambda = \mu = 0$ , або  $(x, y)$  є евклідовою прямою з напрямним вектором  $(\lambda, \mu)$ . У першому випадку інтегральні траєкторії  $X$  є вертикальними прямими, тому можна покласти  $z = 0$ . Умова  $g = 0$  тоді еквівалентна рівності  $x'y'' - x''y' = 0$ , таким чином,  $\Sigma$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли  $(x, y)$  є довільною прямою, а  $r(s, t) = (x(t), y(t), s)$  визначає вертикальну евклідову площину над цією прямою. У другому випадку, змінюючи параметр  $t$  за необхідності, ми можемо припустити, що  $x = x_0 + \lambda t$ ,  $y = y_0 + \mu t$ . Ці функції задовольняють умові  $g = 0$ , тому така поверхня  $\Sigma$  є мінімальною. Оскільки в цьому випадку інтегральні криві  $X$  є прямими, проєкції яких на площину  $(x, y)$  також мають напрямний вектор  $(\lambda, \mu)$ ,  $\Sigma$  знову є (у повному випадку) вертикальною евклідовою площиною.

Відомо (див. [33] або подальше доведення), що у випадку  $\lambda = \mu = 0$  всі вертикальні евклідові площини є стійкими в субрімановому сенсі. Звідси випливає, зокрема, що вони є стійкими в рімановому сенсі. Для другого з випадків, що розглянуті у попередньому абзаці, маємо  $N =$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (\mu X_1 - \lambda X_2)$ , і коефіцієнтами другої фундаментальної форми є

$$b_{11} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2 + 1}, \quad b_{12} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}(\delta + 1)}{2\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}, \quad b_{22} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\delta.$$

Нагадаємо, що характеристичне поле  $Z$  обирається так, що  $\{r_s = X, Z\}$  є ортонормованим репером на дотичному розшаруванні  $\Sigma$ . Тоді

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} (-\lambda X_1 - \mu X_2 + (\lambda^2 + \mu^2)X_3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}(\delta - 1)} \left( -(\lambda^2 + \mu^2 + \delta)r_s + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}r_t \right) \end{aligned}$$

(тут  $\delta \neq 1$ , оскільки параметризація  $\Sigma$  є регулярною), отже,

$$\langle B(X), Z \rangle = \frac{-(\lambda^2 + \mu^2 + \delta)b_{11} + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}b_{12}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}(\delta - 1)} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 1}{2(\lambda^2 + \mu^2 + 1)}.$$

З умови мінімальності маємо

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -b_{11} = -\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\lambda^2 + \mu^2 + 1},$$

отже,

$$|B|^2 = 2\langle B(X), X \rangle^2 + 2\langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

Зауважимо, що  $|B|^2$  має те ж саме значення також для  $\lambda = \mu = 0$  і будь-якої вертикальної евклідової площини. З (4.11) випливає, що  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1}{2}$ . Зокрема, стійкість  $\Sigma$  у рімановому сенсі випливає з рівності  $\text{Ric}(N, N) + |B|^2 = 0$  згідно з формулою (1.3).

Для будь-якої вертикальної евклідової площини  $\Sigma$  нормальне поле  $N$  є лінійною комбінацією  $X_1$  і  $X_2$ . Тому, якщо  $\lambda = \mu = 0$ , тобто  $X = X_3$ , то з (4.10) випливає, що  $\nabla_N X$  ортогональне до  $N$ . В іншому випадку  $N = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} (\mu X_1 - \lambda X_2)$ , тому  $\nabla_N X = \frac{1}{2}Z$ . У будь-якому разі,  $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$ , отже, формула другої варіації (3.15) має вигляд

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0$$

що й означає стійкість  $\Sigma$ . □

Різні теореми типу Бернштейна для *Nil* обговорювалися у розділі 1.3. Усі вони стосуються стандартної субріманової структури на цій групі. Зокре-

ма, згідно з теоремою 1.4, повні зв'язні стійкі мінімальні поверхні з непорожніми сингулярними множинами вичерпуються вертикальними евклідовими площинами, що в силу теореми 4.2 також є в точності повними зв'язними стійкими мінімальними вертикальними поверхнями у цій геометрії. Відкритим є питання, чи буде аналогічне твердження справедливим і для інших структур та класів поверхонь, що розглядаються у теоремі 4.2.

Як уже згадувалося, група  $Nil$  з метрикою (4.9) є однією з тривимірних геометрій Терстона ([59, 62]). Це означає існування у неї дискретних підгруп групи ріманових ізометрій, факторпростори за діями яких (т. зв. *нільмноговиди*) компактні. У якості прикладу такої підгрупи можна розглянути множину точок групи  $Nil$  з парними цілими координатами  $(x, y, z)$ . Дійсно, це підгрупа в силу (4.6), й вона діє на  $Nil$  дискретно лівими зсувами, що є ізометріями, оскільки метрика лівоінваріантна. Як показано у [59], відповідний нільмноговид має топологічну структуру розшарування над тором  $T^2$ , шарами якого є кола  $S^1$ . В силу лівоінваріантності, на нього можна перенести описані у цьому розділі метрику та субріманові структури за допомогою канонічної проєкції аналогічно до конструкції для  $E(2)$  наприкінці попереднього розділу. З вигляду множення (4.6) випливає, що при факторизації вертикальні евклідові площини над прямими в площині  $(x, y)$  з раціональними кутовими коефіцієнтами (зокрема,  $x = x_0$  та  $y = y_0$ ) перейдуть у компактні поверхні в цьому нільмноговиді. В силу локальності міркувань у доведенні теореми 4.2, описані там площини тоді перейдуть у стійкі (в субрімановому та рімановому сенсах) вертикальні мінімальні компактні поверхні у ньому. Можна припустити, що аналогічні приклади можна побудувати й для інших нільмноговидів.

### 4.3 Вертикальні мінімальні поверхні в групі $Sol$

Тривимірну групу Лі  $Sol$  можна описати як матричну, що складається з дійсних матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вона ототожнюється з простором  $\mathbb{R}^3$  з координатами  $(x, y, z)$  і має добуток

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^zy', z + z') \quad (4.13)$$

Звідси випливає, що

$$X_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.14)$$

є базисом лівоінваріантних векторних полів. Ненульовими дужками Лі цих полів є

$$[X_1, X_3] = -[X_3, X_1] = X_1, \quad [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = -X_2, \quad (4.15)$$

звідки, зокрема, випливає, що ця група розв'язна, але не нільпотентна.

Якщо ввести лівоінваріантну метрику  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , для якої базис (4.14) є ортонормованим, отримаємо тривимірну терстонівську геометрію  $Sol$  ([59, 62]).

Отже, ця метрика дорівнює

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2. \quad (4.16)$$

З (4.15) маємо за формулою Кошуля для ріманової зв'язності  $\nabla$  метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_1 &= -\nabla_{X_2} X_2 = -X_3, \quad \nabla_{X_1} X_3 = X_1, \quad \nabla_{X_2} X_3 = -X_2, \\ \nabla_{X_1} X_2 &= \nabla_{X_2} X_1 = \nabla_{X_3} X_1 = \nabla_{X_3} X_2 = \nabla_{X_3} X_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Також із результатів [48] випливає, що тензор Річчі даної метрики визначається рівністю

$$\text{Ric} = -2(\omega^3)^2. \quad (4.18)$$

Як і у попередніх двох випадках, спочатку знайдемо всі лівоінваріантні

субріманові структури на  $Sol$ , які визначаються фіксованою лівоінваріантною метрикою  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , що описана вище, та довільним розподілом.

**Твердження 4.3.** *Лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H} = X^\perp$ , що ортогональний до одиничного лівоінваріантного поля*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3) \quad (4.19)$$

*на групі  $Sol$ , є цілком неінтегровним тоді й тільки тоді, коли  $\lambda\mu \neq 0$ .*

*Доведення.* Дійсно, якщо  $\lambda \neq 0$ , то базис  $\mathcal{H}$  утворюють поля  $-\mu X_1 + \lambda X_2$  і  $-\nu X_1 + \lambda X_3$ . Разом зі своєю дужкою Лі  $[-\mu X_1 + \lambda X_2, -\nu X_1 + \lambda X_3] = \lambda(-\mu X_1 - \lambda X_2)$  вони утворюють також базис на  $Sol$ , тобто  $\mathcal{H}$  є цілком неінтегровним, тоді й тільки тоді, коли  $\mu \neq 0$ . Якщо  $\lambda = 0$ , то  $\mathcal{H}$  є інтегровним, оскільки він натягнутий на  $X_1$  і  $-\nu X_2 + \mu X_3$ , де  $[X_1, -\nu X_2 + \mu X_3] = \mu X_1$ . Звідси й випливає потрібне твердження.  $\square$

Зокрема, у роботі [18] було розглянуто лівоінваріантну субріманову структуру на  $Sol$ , що відповідає  $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\nu = 0$  у (4.19), досліджено окремі властивості мінімальних поверхонь і знайдено їхні приклади. Знайдені там поверхні мають непорожні сингулярні множини, тому не належать до класів, що описані нами у наступній теоремі.

**Теорема 4.3.** *Нехай субріманова структура на  $Sol$  визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

*і  $\lambda\mu \neq 0$ .*

*Якщо  $\nu \neq 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в цьому субрімановому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у циліндрі, що параметризований або як*

$$r(s, t) = \left( x_0 - \frac{\lambda}{\nu} e^{-s}, t, s \right), \quad (4.20)$$

або як

$$r(s, t) = \left( t, y_0 + \frac{\mu}{\nu} e^s, s \right) \quad (4.21)$$

(відповідно, є таким циліндром).

Якщо  $\nu = 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у горизонтальній евклідовій площині  $z = z_0$  або  $\lambda = \pm\mu$ , а поверхня є областю в «гіперболічному гелікоїді» (див. рис. 4.1) з параметризацією

$$r(s, t) = \left( x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t}s, y_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^t s, t \right) \quad (4.22)$$

(відповідно, є однією з цих поверхонь).

Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже й у рімановому сенсі.

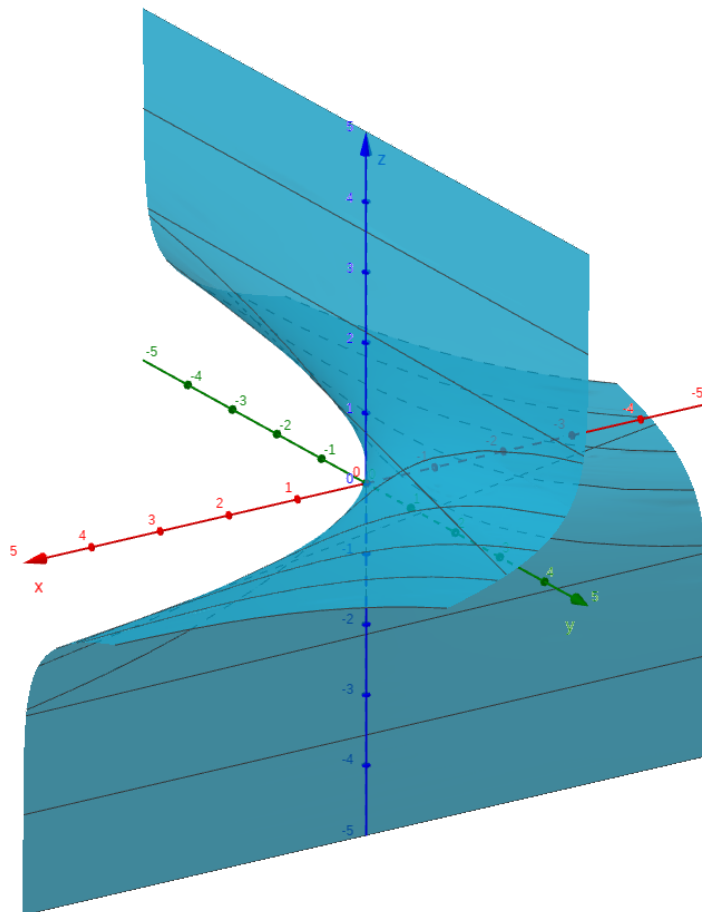


Рис. 4.1: Поверхня з параметризацією  $r(s, t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t}s, \frac{1}{\sqrt{2}} e^t s, t \right)$  («гіперболічний гелікоїд»)

*Доведення.* Знову ж, вертикальна поверхня  $\Sigma$  складається з (проміжків) інтегральних траєкторій поля

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} \left( \lambda e^{-z} \frac{\partial}{\partial x} + \mu e^z \frac{\partial}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Зауважимо, що вигляд цих кривих залежить від коефіцієнта  $\nu$ . Для  $\nu \neq 0$ , поділивши на нього і позначивши  $\frac{\lambda}{\nu}$  та  $\frac{\mu}{\nu}$  знову через  $\lambda$  та  $\mu$  відповідно, ми можемо покласти  $\nu = 1$  у подальших міркуваннях. У цьому випадку інтегральні траєкторії є «гіперболічними гвинтовими лініями», які можна параметризувати у вигляді  $s \mapsto (x_0 - \lambda e^{-s}, y_0 + \mu e^s, s)$ . Тому ми можемо будувати поверхню  $\Sigma$ , проводячи ці лінії через точки горизонтальної на прямої кривої  $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ , що дає параметризацію

$$r(s, t) = (x(t) - \lambda e^{-s}, y(t) + \mu e^s, s). \quad (4.23)$$

Дотичні векторні поля тоді мають вигляд

$$\begin{aligned} r_s &= \lambda e^{-s} \frac{\partial}{\partial x} + \mu e^s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} X, \\ r_t &= x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} = x' e^s X_1 + y' e^{-s} X_2, \end{aligned}$$

тож коефіцієнтами першої фундаментальної форми є

$$g_{11} = \lambda^2 + \mu^2 + 1, \quad g_{12} = \lambda x' e^s + \mu y' e^{-s}, \quad g_{22} = x'^2 e^{2s} + y'^2 e^{-2s},$$

а з (4.17) маємо коваріантні похідні

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \lambda X_1 - \mu X_2 + (-\lambda^2 + \mu^2) X_3, \\ \nabla_{r_t} r_s &= x' e^s X_1 - y' e^{-s} X_2 + (-\lambda x' e^s + \mu y' e^{-s}) X_3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= x'' e^s X_1 + y'' e^{-s} X_2 + (-x'^2 e^{2s} + y'^2 e^{-2s}) X_3. \end{aligned}$$

Оскільки одиничним нормальним полем поверхні  $\Sigma$  є

$$N = \frac{1}{\Delta} (-y' e^{-s} X_1 + x' e^s X_2 + (\lambda y' e^{-s} - \mu x' e^s) X_3),$$

де  $\Delta = \sqrt{y'^2 e^{-2s} + x'^2 e^{2s} + (\lambda y' e^{-s} - \mu x' e^s)^2}$ , друга фундаментальна форма поверхні визначається коефіцієнтами

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{\Delta} (-\lambda y' e^{-s} - \mu x' e^s - \lambda^3 y' e^{-s} - \mu^3 x' e^s + \lambda \mu (\lambda x' e^s + \mu y' e^{-s})), \\ b_{12} &= \frac{1}{\Delta} (-(2 + \lambda^2 + \mu^2) x' y' + \lambda \mu (x'^2 e^{2s} + y'^2 e^{-2s})), \end{aligned}$$

$$b_{22} = \frac{1}{\Delta} \left( -x'y'' + x'y' - (\lambda x'e^s + \mu y'e^{-s})x'y'' + \mu x'^3 e^{3s} + \lambda y'^3 e^{-3s} \right).$$

Звідси випливає, що умова мінімальності  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$  еквівалентна рівності

$$(\lambda x'e^s + \mu y'e^{-s})x'y' + (\lambda^2 + \mu^2 + 1)(-x''y' + x'y'') = 0.$$

Звідси і з умови  $\lambda\mu \neq 0$  випливає, що  $\Sigma$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли або  $x' = 0$ , або  $y' = 0$ . Після можливої заміни параметра  $t$  ми можемо вважати, що або  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = t$ , або  $x(t) = t$ ,  $y(t) = y_0$ . Підставляючи це в (4.23), знову замінюючи параметр  $t$  і повертаючись до довільного  $\nu \neq 0$ , отримуємо циліндричні поверхні з параметризаціями (4.20) і (4.21) відповідно.

Доведемо стійкість для другого випадку, тобто для  $x(t) = t$ ,  $y(t) = y_0$  в (4.23). Доведення для першого випадку є аналогічним. Отже, маємо  $N =$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}} (X_2 - \mu X_3) \text{ і}$$

$$b_{11} = \frac{-\mu(1 - \lambda^2 + \mu^2)}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad b_{12} = \frac{\lambda\mu e^s}{\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad b_{22} = \frac{\mu e^{2s}}{\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Поле  $X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} r_s$  утворює ортонормований репер на дотичному розшаруванні  $\Sigma$  разом з характеристичним полем

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \sqrt{\mu^2 + 1}} \left( (\mu^2 + 1)X_1 - \lambda\mu X_2 - \lambda X_3 \right) = \\ &= \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \sqrt{\mu^2 + 1}} r_s + \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}{\sqrt{\mu^2 + 1} e^s} r_t. \end{aligned}$$

Отже,

$$\langle B(X), Z \rangle = \frac{-\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1) \sqrt{\mu^2 + 1}} b_{11} + \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1} e^s} b_{12} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1}$$

і, оскільки

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -\frac{b_{11}}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} = -\frac{-\mu(1 - \lambda^2 + \mu^2)}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1) \sqrt{\mu^2 + 1}},$$

за умовою мінімальності, маємо

$$|B|^2 = 2\langle B(X), X \rangle^2 + 2\langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{2\mu^2}{\mu^2 + 1}.$$

Звідси та з (4.18) отримуємо, що  $\text{Ric}(N, N) + |B|^2 = 0$ . З (4.17) випливає,

що

$$\nabla_N X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} \sqrt{\mu^2 + 1}} (-X_2 + \mu X_3),$$

тож  $\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}$ , і з (3.15) отримуємо другу варіацію

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} u X(u) + \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} u^2 d\Sigma. \quad (4.24)$$

Щоб спростити цей вираз, використаємо метод, що було описано на початку розділу 3.3. З (4.17) випливає, що

$$\nabla_Z X = \frac{1}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1) \sqrt{\mu^2 + 1}} ((\mu^2 + 1)X_1 + \lambda\mu X_2 - \lambda(2\mu^2 + 1)X_3).$$

Використовуючи цю рівність обчислимо дивергенцію поля  $X$  за допомогою ортонормованого репера  $\{X, Z\}$ :

$$\operatorname{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_X X, X \rangle + \langle \nabla_Z X, Z \rangle = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}},$$

отже,

$$\operatorname{div}_{\Sigma} (u^2 X) = 2uX(u) + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} u^2.$$

Поле  $u^2 X$  має компактний носій, тому інтеграл його дивергенції по  $\Sigma$  дорівнює нулю, тож (4.24) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0$$

що й означає стійкість  $\Sigma$ .

Для випадку  $\nu = 0$  можна вважати, що  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ , знову перепозначивши  $\lambda$  і  $\mu$  за необхідності. Інтегральні траєкторії  $X$  є тоді евклідовими прямими  $s \mapsto (x_0 + \lambda e^{-z_0} s, y_0 + \mu e^{z_0} s, z_0)$ , тому, проводячи їх через точки напрямної кривої  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ , отримуємо наступну параметризацію поверхні  $\Sigma$ :

$$r(s, t) = \left( x(t) + \lambda e^{-z(t)} s, y(t) + \mu e^{z(t)} s, z(t) \right). \quad (4.25)$$

У цьому випадку

$$\begin{aligned} r_s &= \lambda X_1 + \mu X_2 = X, \quad r_t = (x' - \lambda z' e^{-z} s) \frac{\partial}{\partial x} + (y' + \mu z' e^z s) \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= (x' e^z - \lambda z' s) X_1 + (y' e^{-z} + \mu z' s) X_2 + z' X_3, \end{aligned}$$

отже,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = \lambda x' e^z + \mu y' e^{-z} + (-\lambda^2 + \mu^2) z' s,$$

$$g_{22} = (x' e^z - \lambda z' s)^2 + (y' e^{-z} + \mu z' s)^2 + z'^2$$

та

$$\nabla_{r_s} r_s = (-\lambda^2 + \mu^2) X_3, \quad \nabla_{r_t} r_s = (-\lambda x' e^z + \mu y' e^{-z} + z' s) X_3,$$

$$\nabla_{r_t} r_t = (x'' e^z + 2x' z' e^z - \lambda z'' s - \lambda z'^2 s) X_1 +$$

$$+ (y'' e^{-z} - 2y' z' e^{-z} + \mu z'' s - \mu z'^2 s) X_2 +$$

$$+ \left( z'' - (x' e^z - \lambda z' s)^2 + (y' e^{-z} + \mu z' s)^2 \right) X_3$$

з (4.17). Це разом з виглядом одиничного нормального поля

$$N = \frac{1}{\Delta} (\mu z' X_1 - \lambda z' X_2 + (\lambda y' e^{-z} - \mu x' e^z + 2\lambda \mu z' s) X_3),$$

де  $\Delta = \sqrt{z'^2 + (\lambda y' e^{-z} - \mu x' e^z + 2\lambda \mu z' s)^2}$ , дозволяє обчислити коефіцієнти другої фундаментальної форми:

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta} (-\lambda^2 + \mu^2) (\lambda y' e^{-z} - \mu x' e^z + 2\lambda \mu z' s),$$

$$b_{12} = \frac{1}{\Delta} (-\lambda x' e^z + \mu y' e^{-z} + z' s) (\lambda y' e^{-z} - \mu x' e^z + 2\lambda \mu z' s),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\Delta} (\mu x'' z' e^z + 2\mu x' z'^2 e^z - \lambda y'' z' e^{-z} + 2\lambda y' z'^2 e^{-z} - 2\lambda \mu z' z'' s) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \left( z'' - (x' e^z - \lambda z' s)^2 + (y' e^{-z} + \mu z' s)^2 \right) (\lambda y' e^{-z} - \mu x' e^z + 2\lambda \mu z' s).$$

Умова мінімальності тоді може бути записана у вигляді

$$0 = b_{11} g_{22} - 2b_{12} g_{12} + b_{22} g_{11} = f(t) s + g(t)$$

і тому еквівалентна системі  $f = g = 0$ . Тут  $f = \frac{2\lambda\mu(-\lambda^2 + \mu^2)z'^3}{\Delta}$ , отже, якщо  $\Sigma$  є мінімальною, то  $z' = 0$  або  $\lambda = \pm\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (нагадаємо, що  $\lambda\mu \neq 0$ ).

Розглянемо випадок  $z' = 0$ , коли повна поверхня  $\Sigma$  є горизонтальною евклідовою площиною  $z = z_0$ . Тоді умова  $g = 0$  також виконується, отже,  $\Sigma$  є мінімальною. Ми можемо покласти  $x(t) = t$  і  $y(t) = 0$  у її параметризації (4.25) (зауважимо, що інтегральні траєкторії  $X$  є трансверсальними до цієї прямої, оскільки  $\lambda\mu \neq 0$ ). У цьому випадку  $N = -X_3$  і, отже,  $Z = \mu X_1 - \lambda X_2 = -\frac{\lambda}{\mu} r_s + \frac{1}{\mu e^{z_0}} r_t$ . Звідси та з

$$b_{11} = \lambda^2 - \mu^2, \quad b_{12} = \lambda e^{z_0}, \quad b_{22} = e^{2z_0}$$

отримуємо, як вище,

$$|B|^2 = 2\langle B(X), X \rangle^2 + 2\langle B(X), Z \rangle^2 = 2b_{11}^2 + 2\left(-\frac{\lambda}{\mu}b_{11} + \frac{1}{\mu e^{z_0}}b_{12}\right)^2 = 2.$$

Оскільки  $\text{Ric}(N, N) = -2$  за (4.18) і  $\nabla_N X = 0$  за (4.17), з (3.15) отримуємо  $A''(0) \geq 0$ , як вище, а отже й стійкість  $\Sigma$ .

Нехай тепер  $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (випадок  $\lambda = -\mu$  розглядається аналогічно) і  $z' \neq 0$ . Це означає, що, замінюючи параметр  $t$  за необхідності, ми можемо покласти  $z(t) = t$ . Також ми можемо, як вище, вважати, що  $y(t) = 0$ , оскільки  $\lambda\mu \neq 0$  і тому інтегральні траєкторії  $X$  трансверсальні до площини  $y = 0$ . Тоді умова  $g = 0$  еквівалентна  $x'' + 2x' = 0$ , тобто  $x(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$  для деяких дійсних  $C_1$  і  $C_2$ . Підставляючи це в (4.25), отримуємо

$$r(s, t) = \left( C_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} (\sqrt{2} C_2 e^{-t} + s), \frac{1}{\sqrt{2}} e^t s, t \right).$$

Замінивши параметр  $s$  на  $\sqrt{2} C_2 e^{-t} + s$ , отримуємо параметризацію (4.22) для повної поверхні  $\Sigma$ , що зображена на рис. 4.1. Доведемо стійкість  $\Sigma$  за допомогою такої параметризації, тобто для  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = y_0$  і  $z(t) = t$  у (4.25). Таким чином,

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 + s X_3 \right)$$

і, отже,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \left( -\frac{s}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{s}{\sqrt{2}} X_2 + X_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} r_t.$$

Оскільки  $\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -b_{11} = 0$  в силу мінімальності  $\Sigma$ , а  $b_{12} = \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}$ ,

$$|B|^2 = 2\langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{2b_{12}^2}{1+s^2} = \frac{2s^4}{(1+s^2)^2}.$$

Разом з рівностями  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{2s^2}{1+s^2}$  за (4.18) та  $\nabla_N X = -\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} X_3$  за (4.17) це призводить до наступного вигляду формули другої варіації (3.15):

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{2s}{1+s^2} u X(u) + \frac{s^2}{(1+s^2)^2} u^2 d\Sigma. \quad (4.26)$$

Щоб переписати цей вираз, ми знову використаємо дивергенцію  $X$ :  $\nabla_Z X =$

$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} X_3$  з (4.17), отже,

$$\operatorname{div}_\Sigma X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = \frac{s}{1+s^2},$$

та

$$\operatorname{div}_\Sigma \left( \frac{s}{1+s^2} u^2 X \right) = \frac{2s}{1+s^2} u X(u) + \frac{1}{(1+s^2)^2} u^2.$$

Інтеграл цієї дивергенції по  $\Sigma$  так само дорівнює нулю, тому (4.26) прийме вигляд

$$A''(0) = \int_\Sigma Z(u)^2 + \frac{1}{1+s^2} u^2 d\Sigma \geq 0,$$

звідки випливає стійкість  $\Sigma$ . □

Поверхні  $z = z_0$  і (4.22) були раніше знайдені Л. Масальцевим, який у [42] досліджував мінімальні поверхні в  $Sol$ , що утворюються інтегральними траєкторіями  $X$  для «стандартної» структури, визначеної умовами  $\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\nu = 0$  у (4.19), (ці траєкторії є геодезичними даного ріманового многовиду). Ця стаття містить помилку в обчисленні формули для  $H$ , яка, однак, не впливає на правильність її результатів.

Наскільки нам відомо, аналогі теорема Бернштейна для  $Sol$  не довелися навіть у випадку стандартної структури.

Аналогічно до  $Nil$  (див. міркування наприкінці попереднього розділу), терстонівська геометрія  $Sol$  з метрикою (4.16) теж має дискретні групи ріманових ізометрій, факторпростори за діями яких, що зветься *солвмноговидами*, компактні. Зокрема, для дискретних підгруп (решіток) у  $Sol$ , що діють лівими зсувами, ми так само можемо переносити на солвмноговиди описані у даному розділі лівоінваріантні субріманові структури. У [59] показано, що евклідові площини  $z = z_0$ , що утворюють інваріантне відносно лівих зсувів шарування в силу (4.13), факторизуються в поверхні, що можуть бути дифеоморфні  $\mathbb{R}^2$ ,  $S^1 \times \mathbb{R}$ , листу Мебіуса, тору  $T^2$  або плящі Клейна. Оскільки доведення теореми 4.3 має локальний характер, такі поверхні є прикладами стійких (в субрімановому та рімановому сенсах) вер-

тикальних мінімальних поверхонь у солвмноговидах, зокрема компактних. Залишається відкритим питання, чи мають інші поверхні, що перелічені у теоремі, компактні факторизації.

#### 4.4 Вертикальні мінімальні поверхні в групі $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$

Через  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  ми позначаємо універсальне накриття спеціальної лінійної групи  $SL(2, \mathbb{R})$  (що також збігається з універсальним накриттям  $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$  проєктивної спеціальної лінійної групи). Як було показано, зокрема, у [59], цей многовид також можна описати як універсальне накриття одиничного дотичного розшарування гіперболічної площини  $\mathbb{H}^2$  з метрикою Сасаки. Таким чином, використовуючи модель  $\mathbb{H}^2$  на півплощині, ми можемо представити  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  як півпростір  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ . Накриваюче відображення  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$  у цих координатах має вигляд (див. [29, Ch. 2] або [39])

$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{z}{2} & \sin \frac{z}{2} \\ -\sin \frac{z}{2} & \cos \frac{z}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

а групова структура індукована матричним множенням у  $SL(2, \mathbb{R})$ . Звідси можна вивести, що лівоінваріантні векторні поля

$$\begin{aligned} X_1 &= y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 &= -y \sin z \frac{\partial}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial}{\partial y} + \sin z \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.28)$$

утворюють базис алгебри Лі даної групи з ненульовими дужками Лі

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -[X_2, X_1] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = -[X_3, X_2] = X_1, \\ [X_3, X_1] &= -[X_1, X_3] = X_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Звідси, зокрема, випливає, що група  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  проста. Оберемо на ній лівоінваріантну метрику  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  так, що базис (4.28) ортонормований. Оскільки дуальний базис у даному випадку складається з форм

$$\omega^1 = \frac{\cos z dx + \sin z dy}{y}, \quad \omega^2 = \frac{-\sin z dx + \cos z dy}{y}, \quad \omega^3 = \frac{dx + y dz}{y},$$

метрика має вигляд

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + (dx + y dz)^2}{y^2} \quad (4.30)$$

і є згаданою вище метрикою Сасаки, а  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$  з нею утворює ще одну тривимірну терстонівську геометрію ([59, 62]). При цьому евклідова ортогональна проєкція  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  є рімановою субмерсією на гіперболічну площину. Використовуючи формулу Кошуля, виведемо з дужок (4.29), що ріманова зв'язність  $\nabla$  метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  визначається рівностями

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} X_2 &= -\nabla_{X_2} X_1 = -\frac{X_3}{2}, \quad \nabla_{X_2} X_3 = -\frac{X_1}{2}, \quad \nabla_{X_3} X_2 = -\frac{3X_1}{2}, \\ \nabla_{X_3} X_1 &= \frac{3X_2}{2}, \quad \nabla_{X_1} X_3 = \frac{X_2}{2}, \quad \nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{X_2} X_2 = \nabla_{X_3} X_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

З [48] також випливає, що тензор Річчі цієї метрики має вигляд

$$\text{Ric} = -\frac{3}{2}(\omega^1)^2 - \frac{3}{2}(\omega^2)^2 + \frac{1}{2}(\omega^3)^2. \quad (4.32)$$

Як у попередніх розділах, з (4.29) випливає наступна характеристика цілком неінтегровних лівоінваріантних розподілів.

**Твердження 4.4.** *Лівоінваріантний розподіл  $\mathcal{H} = X^\perp$ , що ортогональний до одиничного лівоінваріантного поля*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3) \quad (4.33)$$

*на групі  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$ , є цілком неінтегровним тоді й тільки тоді, коли  $\lambda^2 + \mu^2 \neq \nu^2$ .*

*Доведення.* Як у доведенні твердження 4.3, при  $\lambda \neq 0$  базис  $\mathcal{H}$  складають поля  $-\mu X_1 + \lambda X_2$  і  $-\nu X_1 + \lambda X_3$ , дужка Лі яких дорівнює

$$[-\mu X_1 + \lambda X_2, -\nu X_1 + \lambda X_3] = \lambda(\lambda X_1 + \mu X_2 - \nu X_3)$$

і утворює разом з ними базис на групі тоді й тільки тоді, коли  $\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 \neq 0$ . Якщо ж  $\lambda = 0$ , то  $\mathcal{H}$  натягнутий на  $X_1$  і  $-\nu X_2 + \mu X_3$ , де  $[X_1, -\nu X_2 + \mu X_3] = -\mu X_2 + \nu X_3$ , і у цьому випадку необхідною і достатньою умовою цілком неінтегровності є  $\mu^2 - \nu^2 \neq 0$ .  $\square$

Зокрема, поклавши  $\lambda = \mu = 0$  у (4.33), отримаємо лівоінваріантний

розподіл  $\mathcal{H}$ , що ортогональний до  $X_3$ . Субріманову структуру на  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$ , що визначена метрикою  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і горизонтальним розподілом  $\mathcal{H}$ , будемо називати стандартною. Вона досліджувалася раніше, зокрема, у [58, 34, 35]. Для цієї структури вертикальні поверхні складаються з (проміжків) інтегральних кривих  $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ , тобто вертикальних евклідових прямих, і, отже, у зв'язному випадку є областями у вертикальних циліндрах, які можна параметризувати як  $r(s, t) = (x(t), y(t), s)$ . Як було показано, наприклад, у [39] або у [63], ріманова (а отже й субріманова) середня кривина такої поверхні дорівнює геодезичній кривині напрямної кривої  $t \mapsto (x(t), y(t))$  відносно стандартної метрики  $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$  моделі  $\mathbb{H}^2$  на півплощині. Таким чином, вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли напрямна крива є геодезичною. Іншими словами, повні зв'язні вертикальні мінімальні поверхні мають вигляд  $\pi^{-1}(\gamma)$ , де  $\pi: \widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{H}^2: (x, y, z) \mapsto (x, y)$  є рімановою субмерсією, а  $\gamma$  є повною геодезичною в  $\mathbb{H}^2$ . Субріманова стійкість таких поверхонь встановлювалася в [58], але ми перевіримо її також у доведенні теореми 4.5 для повноти викладення.

Дослідження вертикальних мінімальних поверхонь для лівоінваріантної субріманової структури з горизонтальним розподілом, що ортогональний до поля (4.33), у загальному вигляді становить певні обчислювальні складнощі через будову інтегральних траєкторій цього поля. Тому тут крім стандартної структури ми обмежимося лише випадком  $\mu = \nu = 0$  у (4.33), коли лівоінваріантний горизонтальний розподіл  $\mathcal{H}$  ортогональний до  $X_1$ . Його вертикальні мінімальні поверхні описані у наступній теоремі.

**Теорема 4.4.** *Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в  $\widetilde{\text{SL}(2, \mathbb{R})}$  з лівоінваріантною субрімановою структурою, що визначається горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X_1^\perp$ , є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю або у півплощині  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , або у гелікоїдаль-*

ній поверхні з однією з наступних параметризацій (див. рис. 4.2-4.4):

$$\begin{aligned}
r(s, t) &= (x_0 - t \sin s, t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\
r(s, t) &= (x_0 \pm t - t \sin s, t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\
r(s, t) &= (x_0 + y_0 \operatorname{sh} t - y_0 \operatorname{ch} t \sin s, y_0 \operatorname{ch} t \cos s, s), & t \in \mathbb{R}, \\
r(s, t) &= (x_0 \pm y_0 \operatorname{ch} t - y_0 \operatorname{sh} t \sin s, y_0 \operatorname{sh} t \cos s, s), & t \in (0, +\infty), \\
s &\in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), & k \in \mathbb{Z}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(відповідно, є однією з перелічених поверхонь). Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому сенсі.

*Доведення.* Вертикальна поверхня  $\Sigma$  для цієї структури утворена (проміжками) інтегральних траєкторій поля

$$X = X_1 = y \cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.35}$$

Інтегруючи, отримуємо для третьої координати  $z' = -\cos z$ , тобто або  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , або  $z(\sigma) = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} C e^\sigma + 2\pi k$  для  $C > 0$  та  $k \in \mathbb{Z}$ , що строго спадає від значення  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$  до  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , де  $\sigma$  – натуральний параметр. Це означає, що в другому випадку ми можемо використовувати  $z$  як параметр  $z = s \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$  цієї кривої.

У першому випадку  $\Sigma$  міститься у півплощині  $z = z_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $y > 0$ , яку можна параметризувати як  $r(s, t) = (t, e^s, z_0)$ . Тоді

$$r_s = e^s \frac{\partial}{\partial y} = \pm X_1, \quad r_t = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{e^s} (\mp X_2 + X_3), \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp X_2 - X_3),$$

в силу (4.28). Тут і далі в дослідженні цієї поверхні верхні знаки відповідають парним значенням  $k$ , а нижні – непарним. Згідно з (4.31), коваріантні похідні цих полів дорівнюють

$$\nabla_{r_s} r_s = 0, \quad \nabla_{r_t} r_s = \frac{1}{2e^s} (\pm 3X_2 - X_3), \quad \nabla_{r_t} r_t = \pm \frac{2}{e^{2s}} X_1,$$

отже, маємо коефіцієнти фундаментальних форм

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \frac{2}{e^{2s}}, \quad b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2} e^s}.$$

Звідси відразу бачимо, що ці півплощини справді мінімальні, і що  $|B|^2 = \frac{2b_{12}^2}{g_{11}g_{22}} = \frac{1}{2}$ , оскільки репер  $\{r_s, r_t\}$  ортогональний. Крім того,  $\operatorname{Ric}(N, N) =$

$-\frac{1}{2}$  за (4.32), отже,  $|B|^2 + \text{Ric}(N, N) = 0$ . Також із (4.31) випливає, що  $\nabla_N X = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-3X_2 \mp X_3)$ , тому  $\langle \nabla_N X, N \rangle = \pm 1$ , і формула другої варіації (3.15) набуває вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 \pm 2uX(u) - u^2 d\Sigma.$$

Зауважимо, що поле  $X = X_1$  має нульову дивергенцію в  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  згідно з (4.31). З іншого боку, ми можемо обчислити цю дивергенцію в точках  $\Sigma$ , використовуючи ортонормований базис  $\{X, Z, N\}$  та враховуючи, що  $\langle \nabla_X X, X \rangle = 0$ , оскільки  $|X| = 1$ :  $0 = \langle \nabla_Z X, Z \rangle + \langle \nabla_N X, N \rangle$ . Отже,  $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = \mp 1$ . З цього отримуємо, що  $\text{div}_{\Sigma}(u^2 X) = 2uX(u) \mp u^2$ . Інтеграл від цієї дивергенції по  $\Sigma$  дорівнює нулю для функцій  $u$  з компактними носіями, звідки випливає, що

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0,$$

отже,  $\Sigma$  є стійкою.

Таким чином, відтепер ми можемо розглядати поверхні  $\Sigma$ , що утворені (проміжками) інтегральних траєкторій поля (4.35) з параметром  $z = s$ . Це гвинтові лінії, що трансверсальні до півплощин  $z = z_0$ , тому ми можемо проводити їх через точки напрямної кривої вигляду  $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ , де  $y(t) > 0$ . Інтегруючи (4.35), отримуємо параметризацію

$$r(s, t) = (x(t) - y(t) \sin s, y(t) \cos s, s) \quad (4.36)$$

поверхні  $\Sigma$  (зауважимо, що  $y$  в (4.35) відповідає  $y(t) \cos s$  тут). Тоді, згідно з (4.28),

$$\begin{aligned} r_s &= -y \cos s \frac{\partial}{\partial x} - y \sin s \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{\cos s} X_1 = -\frac{1}{\cos s} X, \\ r_t &= (x' - y' \sin s) \frac{\partial}{\partial x} + y' \cos s \frac{\partial}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{y \cos s} (x' \cos s X_1 + (y' - x' \sin s) X_2 + (x' - y' \sin s) X_3), \\ N &= \frac{1}{\Delta} (-(x' - y' \sin s) X_2 + (y' - x' \sin s) X_3), \end{aligned}$$

де позначили  $\Delta = \sqrt{(x' - y' \sin s)^2 + (y' - x' \sin s)^2}$ . З (4.31) отримуємо ко-

варіантні похідні

$$\begin{aligned}\nabla_{r_s} r_s &= -\frac{\sin s}{\cos^2 s} X_1, \\ \nabla_{r_t} r_s &= -\frac{1}{2y \cos^2 s} (3(x' - y' \sin s) X_2 + (y' - x' \sin s) X_3), \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{1}{y^2 \cos^2 s} ((x'' y - x' y') \cos^2 s - 2(y' - x' \sin s)(x' - y' \sin s)) X_1 \\ &\quad ((y'' - x'' \sin s) y - (y' - x' \sin s) y' + 2x'(x' - y' \sin s)) \cos s X_2 \\ &\quad ((x'' - y'' \sin s) y - (x' - y' \sin s) y') \cos s X_3,\end{aligned}$$

і, таким чином, коефіцієнти другої фундаментальної форми поверхні  $\Sigma$  дорівнюють

$$\begin{aligned}b_{11} &= 0, \quad b_{12} = \frac{1}{2\Delta y \cos^2 s} (3(x' - y' \sin s)^2 - (y' - x' \sin s)^2), \\ b_{22} &= \frac{1}{\Delta y^2 \cos s} ((x'' y' - x' y'') y \cos^2 s - 2x'(x' - y' \sin s)^2).\end{aligned}$$

Зокрема, для мінімальних поверхонь  $\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = 0$ , отже,  $|B|^2 = 2 \langle B(Z), X \rangle^2$ . Оскільки коефіцієнти першої фундаментальної форми мають вигляд

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{1}{\cos^2 s}, \quad g_{12} = -\frac{x'}{y \cos s}, \\ g_{22} &= \frac{1}{y^2 \cos^2 s} ((x')^2 \cos^2 s + (y' - x' \sin s)^2 + (x' - y' \sin s)^2),\end{aligned}$$

умова мінімальності  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$  еквівалентна рівнянню

$$(x'' y' - x' y'') y + x' ((x')^2 - (y')^2) = 0. \quad (4.37)$$

Спочатку розглянемо розв'язок  $x = x_0$ . Тоді ми можемо покласти  $y(t) = t$  для  $t > 0$  і отримати з (4.36) першу параметризацію в (4.34), тобто область у стандартному гелікоїді (див. ліву частину рис. 4.2). У цьому випадку  $N = \frac{1}{\Delta} (\sin s X_2 + X_3)$ , де  $\Delta = \sqrt{1 + \sin^2 s}$ , та

$$\begin{aligned}b_{11} = b_{22} &= 0, \quad b_{12} = \frac{3 \sin^2 s - 1}{2\Delta t \cos^2 s}, \quad Z = \frac{1}{\Delta} (X_2 - \sin s X_3) = \frac{t \cos s}{\Delta} r_t, \\ |B|^2 &= 2 \langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{2t^2 \cos^4 s}{\Delta^2} b_{12}^2 = \frac{(3 \sin^2 s - 1)^2}{2\Delta^4}.\end{aligned}$$

Також маємо  $\text{Ric}(N, N) = \frac{-3 \sin^2 s + 1}{2\Delta^2}$  за (4.32) та  $\nabla_N X = \frac{1}{2\Delta} (3X_2 + \sin s X_3)$  з (4.31), отже,  $\langle \nabla_N X, N \rangle = \frac{2 \sin s}{\Delta^2}$ . Таким чином, друга варіація поверхні

дорівнює

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{4 \sin s}{1 + \sin^2 s} uX(u) - \frac{3 \sin^4 s + 1}{(1 + \sin^2 s)^2} u^2 d\Sigma.$$

в силу (3.15). Тут теж використаємо спосіб, що було описано на початку розділу 3.3. Знову ж таки,  $\operatorname{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{2 \sin s}{\Delta^2}$ .

Таким чином,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Sigma} \left( \frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} u^2 X \right) &= \left( X \left( \frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} \right) + \frac{\sin s}{1 + \sin^2 s} \operatorname{div}_{\Sigma} X \right) u^2 + \\ &+ \frac{2 \sin s}{1 + \sin^2 s} uX(u) = -\frac{\sin^4 s + 1}{(1 + \sin^2 s)^2} u^2 + \frac{2 \sin s}{1 + \sin^2 s} uX(u). \end{aligned}$$

Оскільки інтеграл від цього виразу дорівнює нулю для  $u$  з компактним носієм,

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{\cos^2 s}{1 + \sin^2 s} u^2 d\Sigma \geq 0,$$

і тому  $\Sigma$  є стійкою.

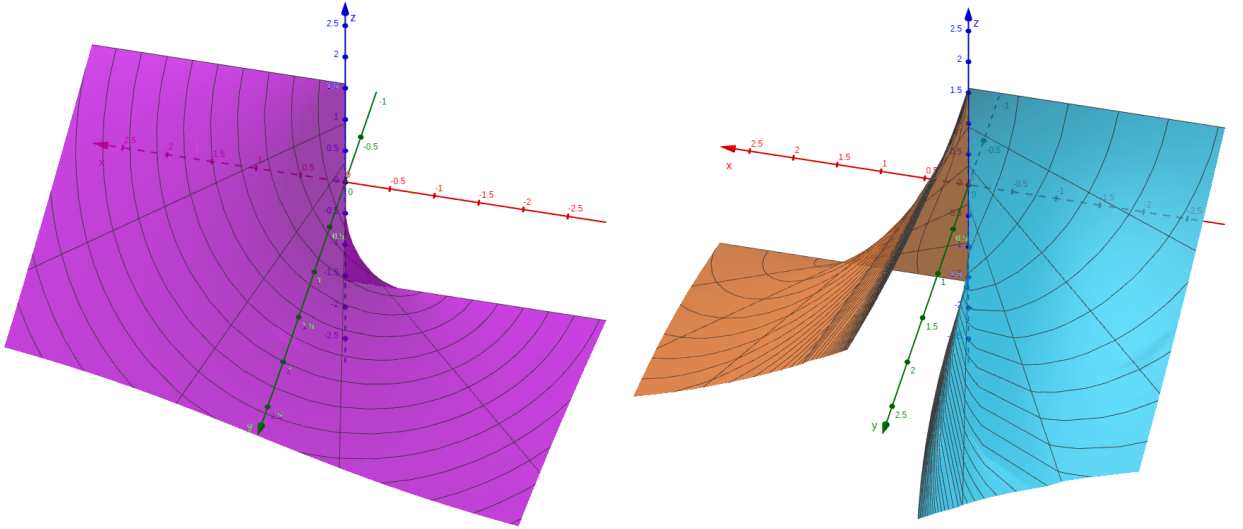


Рис. 4.2: Гелікоїдальні поверхні з параметризаціями (для  $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ )  
 $r(s, t) = (-t \sin s, t \cos s, s)$  (зліва),  $r(s, t) = (t - t \sin s, t \cos s, s)$   
і  $r(s, t) = (-t - t \sin s, t \cos s, s)$  (справа)

У випадку  $x' \neq 0$  запишемо (4.37) як рівняння для функції  $y = y(x)$  та отримаємо  $yy'' + (y')^2 = 1$ , тобто  $(y^2)'' = 2$ , отже,  $y^2 = (x - x_0)^2 + C$ . Для  $C = 0$  ми можемо покласти  $x(t) = x_0 \leq t$  та  $y(t) = t > 0$ , отримавши таким чином другу параметризацію в (4.34) з (4.36). Для  $C > 0$  ми отримуємо

третю параметризацію в (4.34) з  $x(t) = x_0 + y_0 \operatorname{sh} t$  та  $y(t) = y_0 \operatorname{ch} t$ , де  $y_0 > 0$ , і тому  $C = y_0^2 > 0$ . Нарешті, четверта параметризація відповідає  $x(t) = x_0 \pm y_0 \operatorname{ch} t$  та  $y(t) = y_0 \operatorname{sh} t$  для  $t > 0$ , таким чином,  $C = -y_0^2 < 0$ . Отже, в цих двох останніх випадках криві  $(x, y)$  є гіперболами в півплощині  $y > 0$ .

Для випадку  $x(t) = x_0 \pm t$  та  $y(t) = t$  (відповідні поверхні зображено на рис. 4.2 справа) із загальних формул отримуємо  $\Delta = \sqrt{2}(1 \mp \sin s)$ ,  $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp X_2 + X_3)$  та

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{1 \mp \sin s}{\sqrt{2} t \cos^2 s}, \quad b_{22} = \frac{\mp 2(1 \mp \sin s)}{\sqrt{2} t^2 \cos s},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 \pm X_3) = \frac{\cos s (\cos s r_s + t r_t)}{\sqrt{2}(1 \mp \sin s)},$$

$$|B|^2 = 2 \langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{\cos^4 s (\cos s b_{11} + t b_{12})^2}{(1 \mp \sin s)^2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки поле  $N$  (з точністю до знака) таке ж саме, як у випадку  $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$  вище, тут також  $\operatorname{Ric}(N, N) = -\frac{1}{2}$  та  $\langle \nabla_N X, N \rangle = \pm 1$ . Решта доведення стійкості для  $\Sigma$  також дослівно та ж сама, як і у тому випадку.

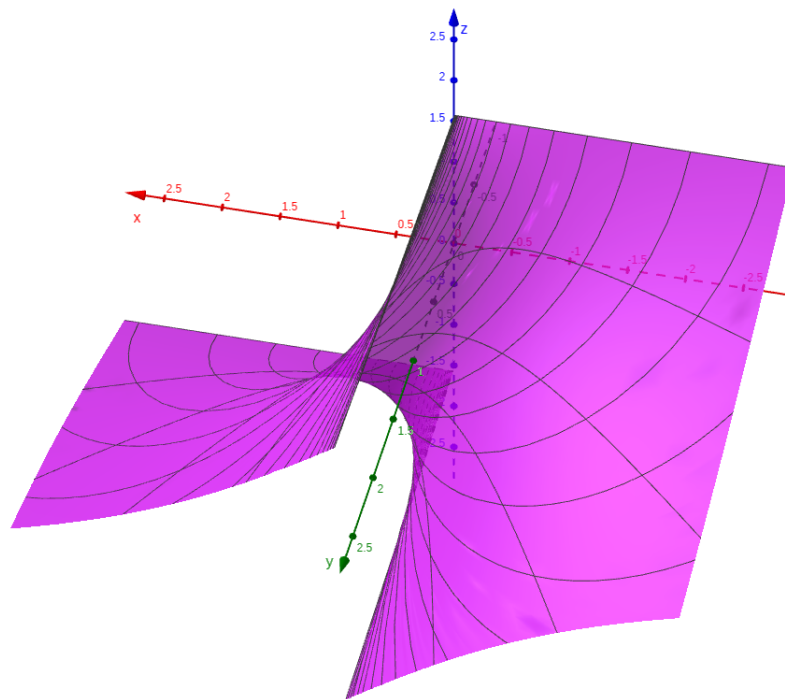


Рис. 4.3: Гелікоїдальна поверхня з параметризацією (для  $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ )  
 $r(s, t) = (\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \sin s, \operatorname{ch} t \cos s, s)$

Для третьої параметризації в списку (4.34) (таку поверхню зображено на рис. 4.3) маємо  $x(t) = x_0 + y_0 \operatorname{sh} t$ ,  $y(t) = y_0 \operatorname{ch} t$ , а для четвертої маємо  $x(t) = x_0 \pm y_0 \operatorname{ch} t$ ,  $y(t) = y_0 \operatorname{sh} t$  (дві поверхні на рис. 4.4).

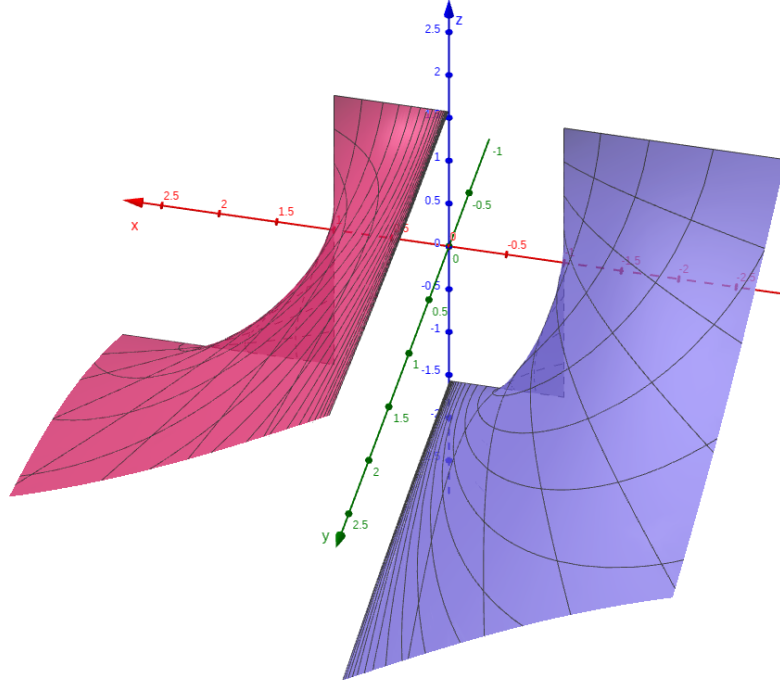


Рис. 4.4: Гелікоїдальні поверхні з параметризаціями (для  $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ )  
 $r(s, t) = (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \sin s, \operatorname{sh} t \cos s, s)$   
і  $r(s, t) = (-\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \sin s, \operatorname{sh} t \cos s, s)$

Позначимо  $\alpha = x' - y' \sin s$ ,  $\beta = y' - x' \sin s$  для всіх цих випадків. Тоді

$$r_t = \frac{1}{y \cos s} (x' \cos s X_1 + \beta X_2 + \alpha X_3), \quad N = \frac{1}{\Delta} (-\alpha X_2 + \beta X_3),$$

де  $\Delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Зауважимо, що  $\alpha^2 - \beta^2 = y_0^2 \cos^2 s$  для третьої параметризації в (4.34) та  $\alpha^2 - \beta^2 = -y_0^2 \cos^2 s$  для четвертої.

Із наведених вище загальних формул,

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2y\Delta \cos^2 s}, \quad b_{22} = -\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{y\Delta \cos s}.$$

Нагадаємо, що  $r_s = -\frac{1}{\cos s} X_1 = -\frac{1}{\cos s} X$ , тому для характеристичного поля поверхні маємо

$$Z = \frac{1}{\Delta} (\beta X_2 + \alpha X_3) = \frac{\cos s (x' \cos s r_s + y r_t)}{\Delta},$$

$$|B|^2 = 2 \langle B(Z), X \rangle^2 = \frac{\cos^4 s (x' \cos s b_{11} + y b_{12})^2}{\Delta^2} = \frac{(3\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\Delta^4}.$$

Оскільки  $\text{Ric}(N, N) = \frac{-3\alpha^2 + \beta^2}{2\Delta^2}$  з (4.32) та  $\nabla_N X = \frac{1}{\Delta} (3\beta X_2 - \alpha X_3)$  з (4.31), звідки випливає  $\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{2\alpha\beta}{\Delta^2}$ , формула другої варіації (3.15) набуває в даному випадку вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{4\alpha\beta}{\Delta^2} uX(u) - \frac{(3\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2}{\Delta^4} u^2 d\Sigma.$$

Ще раз використаємо дивергенцію:  $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = -\langle \nabla_N X, N \rangle = \frac{2\alpha\beta}{\Delta^2}$ . Безпосереднім обчисленням отримуємо, що  $X\left(\frac{\alpha\beta}{\Delta^2}\right) = \frac{y_0^4 \cos^4 s}{\Delta^4} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\Delta^4}$ , отже,

$$\text{div}_{\Sigma} \left( \frac{\alpha\beta}{\Delta^2} u^2 X \right) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2}{\Delta^4} u^2 + \frac{2\alpha\beta}{\Delta^2} uX(u).$$

Інтеграл від цієї дивергенції дорівнює нулю для  $u$  з компактним носієм, тому остаточно

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta^2} u^2 d\Sigma.$$

Для четвертого випадку в (4.34) вираз під цим інтегралом завжди невід'ємний, тому маємо стійкість  $\Sigma$ . Нарешті, для доведення стійкості у третьому випадку використаємо субрімановий оператор Якобі поверхні  $\Sigma$ , що був описаний у розділі 3.3. Оскільки  $\nabla_X Z = \frac{1}{2\Delta} (\alpha X_2 - \beta X_3)$  з (4.31),  $\langle \nabla_X Z, X \rangle = 0$ . Згідно з твердженням 3.1, оператор Якобі тоді має вигляд

$$\begin{aligned} L(u) &= Z(Z(u)) + \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} u = \\ &= \frac{y_0 \text{ch } t \cos s}{\Delta} \left( \cos s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{y_0 \text{ch } t \cos s}{\Delta} (\cos s u_s + u_t) \right) + \\ &+ \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} u = \frac{y_0^2 \cos^2 s}{\Delta^2} (\text{ch}^2 t \cos^2 s u_{ss} + 2 \text{ch}^2 t \cos s u_{st} + \text{ch}^2 t u_{tt} + \\ &+ \cos s \text{ch } t (\text{sh } t - \sin s \text{ch } t) u_s + \text{ch } t \text{sh } t u_t + u) \end{aligned}$$

Зокрема, для функцій  $u = u(t)$ , що не залежать від  $s$ ,  $L(u) = 0$  тоді й тільки тоді, коли

$$\text{ch}^2 t u_{tt} + \text{sh } t \text{ch } t u_t + u = 0.$$

Серед розв'язків  $u(t) = \frac{C_1}{\text{ch } t} + C_2 \text{th } t$  цього рівняння Штурма – Ліувілля є додатний  $u(t) = \frac{1}{\text{ch } t} > 0$ . Згідно з теоремою 3.3, це означає, що поверхня  $\Sigma$  є стійкою.  $\square$

Зауважимо також, що подібний опис з точністю до ріманової ізометрії матиме місце у загальному випадку при  $\nu = 0$  у (4.33), тобто для будь-якої субріманової структури з горизонтальним розподілом вигляду  $\mathcal{H} = (\lambda X_1 + \mu X_2)^\perp$ . Дійсно, поле  $X$  для такого випадку можна отримати з  $X_1$  обертанням навколо осі з напрямним вектором  $X_3$  в алгебрі Лі, що однозначно визначає ізометрію  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ , яка зберігає на місці одиницю  $(0, 1, 0)$  цієї групи і диференціалом якої в одиниці є дане обертання. Зокрема, для цього більш загального випадку ми теж можемо стверджувати, що усі вертикальні мінімальні поверхні є стійкими.

Враховуючи запис (4.30) метрики  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ми можемо розглянути також простіший ортонормований репер

$$\begin{aligned} Y_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} = \cos z X_1 - \sin z X_2, \\ Y_2 &= y \frac{\partial}{\partial y} = \sin z X_1 + \cos z X_2, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial z} = X_3, \end{aligned} \quad (4.38)$$

що було запропоновано у [39] і де поля  $Y_1$  та  $Y_2$  не є лівоінваріантними. З (4.29) випливає, що єдиною ненульовою дужкою Лі полів (4.38) є  $[Y_1, Y_2] = -[Y_2, Y_1] = -Y_1 - Y_3$ . З (4.31) випливає, що

$$\begin{aligned} \nabla_{Y_1} Y_2 &= -Y_1 - \frac{Y_3}{2}, \quad \nabla_{Y_2} Y_1 = \frac{Y_3}{2}, \quad \nabla_{Y_2} Y_3 = \nabla_{Y_3} Y_2 = -\frac{Y_1}{2}, \\ \nabla_{Y_3} Y_1 &= \nabla_{Y_1} Y_3 = \frac{Y_2}{2}, \quad \nabla_{Y_1} Y_1 = Y_2, \quad \nabla_{Y_2} Y_2 = \nabla_{Y_3} Y_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

а з (4.32) – що

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Y_1, Y_1) &= \text{Ric}(Y_2, Y_2) = -\frac{3}{2}, \\ \text{Ric}(Y_3, Y_3) &= \frac{1}{2}, \quad \text{Ric}(Y_i, Y_j) = 0, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Аналогічно до твердження 4.4, розглянемо двовимірний розподіл, що ортогональний до довільної лінійної комбінації полів (4.38) зі сталими коефіцієнтами. Тепер він вже не буде лівоінваріантним, за винятком розподілу, що ортогональний до  $Y_3 = X_3$  (і відповідає таким чином стандартній субрімановій структурі, що обговорювалася вище).

**Твердження 4.5.** *Розподіл  $\mathcal{H} = X^\perp$  на  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ , одиничне нормальне поле якого  $X$  є лінійною комбінацією полів  $Y_1, Y_2, Y_3$  зі сталими коефі-*

цієнтами, є цілком неінтегровним тоді й тільки тоді, коли це поле має вигляд

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3), \quad (4.41)$$

де  $\lambda \neq -1$ .

*Доведення.* Дійсно, якщо одиничне  $X$  має вигляд  $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2)$ , то  $Y_3$  належить до його ортогонального розподілу  $\mathcal{H}$ . Оскільки  $[Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0$ , цей розподіл є інтегровним. Отже, коефіцієнт при  $Y_3$  у  $X$  повинен бути ненульовим, тобто, не зменшуючи загальності, ми можемо вважати, що  $X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$ . У цьому випадку  $\{Y_1 - \lambda Y_3, Y_2 - \mu Y_3\}$  є базисом  $\mathcal{H}$ . Дужка Лі  $-Y_1 - Y_3$  цих полів утворює з ними лінійно незалежну трійку, тобто  $\mathcal{H}$  є цілком неінтегровним, тоді й тільки тоді, коли  $\lambda \neq -1$ .  $\square$

Як у всіх попередніх випадках, введемо на  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  субріманову структуру, що визначена фіксованою метрикою  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  і горизонтальним розподілом з попереднього твердження.

**Теорема 4.5.** *Нехай субріманова структура на  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$  визначається двовимірним горизонтальним розподілом  $\mathcal{H} = X^\perp$ , де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$$

*і  $\lambda \neq -1$ . Ця субріманова структура допускає вертикальні мінімальні поверхні лише при  $\lambda = 0$  та  $\lambda = 1$ .*

*Якщо  $\mu \neq 0$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у евклідовій півплощині  $x = x_0$  при  $\lambda = 0$  або у евклідовій півплощині  $z = z_0$  при  $\lambda = 1$  (відповідно, є такою площиною).*

*Якщо  $\mu = 0$  та  $\lambda = 1$ , то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю*

або у евклідовій півплощині  $z = z_0$ , або у циліндрі з параметризацією

$$r(s, t) = \left( s, y_0 \cos t, z_0 + \sqrt{2}t \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad (4.42)$$

де  $k \in \mathbb{Z}$  (відповідно, є одною з таких поверхонь).

Якщо  $\mu = \lambda = 0$ , то повна (відповідно, повна зв'язна) поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у циліндрі (відповідно, циліндр) над геодезичною у гіперболічній площині  $\mathbb{H}^2$ .

Усі ці поверхні є стійкими в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому сенсі.

*Доведення.* Підставляючи (4.38) у (4.41), отримуємо

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}} \left( \lambda y \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y} + (-\lambda + 1) \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (4.43)$$

У випадку  $\mu \neq 0$  інтегральні траєкторії цього поля трансверсальні до евклідових площин  $y = y_0$  (нагадаємо, що  $y > 0$ ), тому ми можемо побудувати будь-яку повну зв'язну вертикальну поверхню  $\Sigma$  субріманової структури, провівши ці траєкторії через точки на прямої кривої  $t \mapsto (x(t) + \lambda/\mu, 1, z(t))$ , та отримати наступну параметризацію  $\Sigma$ :

$$r(s, t) = \left( x(t) + \frac{\lambda}{\mu} e^{\mu s}, e^{\mu s}, z(t) + (-\lambda + 1)s \right). \quad (4.44)$$

Диференціюючи, отримуємо

$$r_s = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1} X, \quad r_t = x' \frac{\partial}{\partial x} + z' \frac{\partial}{\partial z} = x' e^{-\mu s} Y_1 + (x' e^{-\mu s} + z') Y_3.$$

Звідси та з (4.39), коваріантні похідні даних полів мають вигляд

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= (\lambda + 1)(-\mu Y_1 + \lambda Y_2), \\ \nabla_{r_t} r_s &= -\frac{\mu}{2}(3x' e^{-\mu s} + z') Y_1 + \frac{1}{2}(3\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' + x' e^{-\mu s}) Y_2 - \frac{\mu}{2} x' e^{-\mu s} Y_3, \\ \nabla_{r_t} r_t &= x'' e^{-\mu s} Y_1 + (2(x')^2 e^{-2\mu s} + x' z' e^{-\mu s}) Y_2 + (x'' e^{-\mu s} + z'') Y_3. \end{aligned}$$

Одиничне нормальне поле поверхні  $\Sigma$  дорівнює

$$N = \frac{1}{\Delta} \left( (\mu x' e^{-\mu s} + \mu z') Y_1 - (\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' - x' e^{-\mu s}) Y_2 - \mu x' e^{-\mu s} Y_3 \right),$$

де позначаємо

$$\Delta = \sqrt{(\mu x' e^{-\mu s} + \mu z')^2 + (\lambda x' e^{-\mu s} + \lambda z' - x' e^{-\mu s})^2 + (\mu x' e^{-\mu s})^2}.$$

Отже, коефіцієнтами другої фундаментальної форми  $\Sigma$  є

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\lambda + 1}{\Delta} (-(\lambda^2 + \mu^2)(x'e^{-\mu s} + z') + \lambda x'e^{-\mu s}), \\ b_{12} &= \frac{1}{2\Delta} (-(\lambda^2 + \mu^2)(3x'e^{-\mu s} + z')(x'e^{-\mu s} + z') + \\ &\quad + (1 + 2\lambda + \mu^2)(x')^2 e^{-2\mu s}), \\ b_{22} &= \frac{1}{\Delta} (-x'(2x'e^{-\mu s} + z')((\lambda - 1)x'e^{-\mu s} + \lambda z')e^{-\mu s} + \\ &\quad + \mu(x''z' - x'z'')e^{-\mu s}). \end{aligned}$$

Враховуючи коефіцієнти першої фундаментальної форми цієї поверхні

$$g_{11} = \lambda^2 + \mu^2 + 1, \quad g_{12} = (\lambda + 1)x'e^{-\mu s} + z', \quad g_{22} = (x')^2 e^{-2\mu s} + (x'e^{-\mu s} + z')^2,$$

можемо записати умову мінімальності  $H = 0$ , тобто  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$ , у вигляді

$$f_3(t)e^{-3\mu s} + f_2(t)e^{-2\mu s} + f_1(t)e^{-\mu s} + f_0(t) = 0, \quad (4.45)$$

де  $f_3 = (x')^3(\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 + \mu^2)$ , тому має бути  $x = x_0$  або  $\lambda = 1$ .

Якщо  $x = x_0$ , то з регулярності  $\Sigma$  впливає  $z' \neq 0$ , тому можна покласти  $z(t) = t$ , не втрачаючи загальності. Тоді в (4.45) маємо  $f_0 = \lambda(\lambda^2 + \mu^2) = 0$ , отже,  $\lambda = 0$ . Таким чином,  $\Delta = |\mu|$  і для  $N = Y_1$

$$b_{11} = -\mu, \quad b_{12} = -\frac{\mu}{2}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \mu^2 + 1, \quad g_{12} = g_{22} = 1,$$

що означає  $H = 0$ . У цьому випадку параметризація (4.44) набуває вигляду

$$r(s, t) = (x_0, e^{\mu s}, t + s),$$

тобто є параметризацією півплощини  $x = x_0, y > 0$ . Характеристичне поле  $Z$  має бути таким, щоб базис  $\{X, Z, N\}$  був ортонормованим. Тоді

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}}(-Y_2 + \mu Y_3) = -\frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2 + 1}}r_s + \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu}r_t,$$

звідки

$$\langle B(Z), X \rangle = -\frac{1}{\mu(\mu^2 + 1)}b_{11} + \frac{1}{\mu}b_{12} = \frac{-\mu^2 + 1}{2(\mu^2 + 1)}$$

та, враховуючи рівність  $\langle B(X), X \rangle + \langle B(Z), Z \rangle = 2H = 0$ ,

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{\mu^2 + 1}b_{11} = \frac{\mu}{\mu^2 + 1}.$$

Отже,

$$|B|^2 = \langle B(X), X \rangle^2 + 2 \langle B(X), Z \rangle^2 + \langle B(Z), Z \rangle^2 = \frac{1}{2}.$$

З (4.40) маємо  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{3}{2}$ , а з (4.39) –

$$\nabla_N X = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \left( -\mu Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 - \frac{\mu}{2} Y_3 \right),$$

тому  $\langle \nabla_N X, N \rangle = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$ . Отже, формула другої варіації (3.15) приймає вигляд

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \frac{2\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} uX(u) + \frac{1}{\mu^2 + 1} u^2 d\Sigma.$$

Знову використовуємо дивергенцію способом, що був описаний після (3.15).

З (4.39),  $\nabla_Z X = \frac{-\mu^2 + 1}{2(\mu^2 + 1)} Y_1$ , таким чином,  $\text{div}_{\Sigma} X = \langle \nabla_Z X, Z \rangle = 0$ , і тому  $\text{div}_{\Sigma} (u^2 X) = 2uX(u)$ . Для функції  $u$  з компактним носієм інтеграл цього виразу по  $\Sigma$  дорівнює нулю, звідки маємо

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + \frac{1}{\mu^2 + 1} u^2 d\Sigma \geq 0,$$

тобто  $\Sigma$  є стійкою.

У випадку, коли  $\lambda = 1$ , маємо  $f_0 = (z')^3(\mu^2 + 1) = 0$  у рівнянні (4.45), таким чином, аналогічно до попереднього випадку,  $z = z_0$ ,  $x(t) = t$ , і (4.44) набуває вигляду

$$r(s, t) = \left( t + \frac{1}{\mu} e^{\mu s}, e^{\mu s}, z_0 \right).$$

Це означає, що  $\Sigma$  – це півплощина  $z = z_0$ ,  $y > 0$ . У доведенні попередньої теореми ми вже перевіряли мінімальність такої поверхні, використавши дещо іншу параметризацію. Тут же маємо  $\Delta = \sqrt{2}|\mu|e^{-\mu s}$  та

$$b_{11} = -\sqrt{2}\mu, \quad b_{12} = -\frac{\mu e^{-\mu s}}{\sqrt{2}}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \mu^2 + 2, \quad g_{12} = 2e^{-\mu s}, \quad g_{22} = 2e^{-2\mu s}.$$

для  $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_3)$ , звідки знову ж впливає мінімальність  $\Sigma$ . Її характеристичним полем є

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 + 2}} (\mu Y_1 - 2Y_2 + \mu Y_3) = -\frac{\sqrt{2}}{\mu\sqrt{\mu^2 + 2}} r_s + \frac{e^{\mu s} \sqrt{\mu^2 + 2}}{\sqrt{2}\mu} r_t.$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}\langle B(Z), X \rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{\mu(\mu^2 + 2)} b_{11} + \frac{e^{\mu s}}{\sqrt{2}\mu} b_{12} = \frac{-\mu^2 + 2}{2(\mu^2 + 2)}, \\ \langle B(Z), Z \rangle &= -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{\mu^2 + 2} b_{11} = \frac{\sqrt{2}\mu}{\mu^2 + 2},\end{aligned}$$

таким чином,

$$|B|^2 = 2 \langle B(X), X \rangle^2 + 2 \langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{1}{2},$$

що раніше іншим способом було отримано у доведенні теореми 4.4. Згідно з (4.39),

$$\nabla_N X = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu^2 + 2}} \left( -\frac{\mu}{2} Y_1 + Y_2 - \frac{\mu}{2} Y_3 \right),$$

тому  $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$ . Оскільки  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1}{2}$  з (4.40), друга варіація (3.15) тепер набуває вигляду

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 d\Sigma \geq 0,$$

звідки впливає стійкість  $\Sigma$ .

Якщо  $\mu = \lambda = 0$ , то, як було зазначено вище, поверхня  $\Sigma$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли міститься у циліндрі над геодезичною  $\mathbb{H}^2$ . Доведемо її субріманову стійкість. Використавши тут параметризацію  $r(s, t) = (x(t), y(t), s)$  для такої поверхні, розглянемо дотичні поля

$$r_s = X = Y_3, \quad r_t = x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{y} (x' Y_1 + y' Y_2 + x' Y_3).$$

Припускаючи без втрати загальності, що  $x'^2 + y'^2 = 1$ , отримуємо звідси одиничне нормальне поле  $N = -y' Y_1 + x' Y_2$ . З (4.39),

$$\nabla_{r_s} r_s = 0, \quad \nabla_{r_t} r_s = \frac{1}{2y} (-y' Y_1 + x' Y_2),$$

тому

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{1}{2y},$$

Оскільки характеристичне поле  $\Sigma$  дорівнює

$$Z = x' Y_1 + y' Y_2 = y r_t - x' r_s,$$

використовуючи знайдені коефіцієнти другої фундаментальної форми, отри-

муємо, що  $\langle B(X), Z \rangle = y b_{12} - x' b_{11} = \frac{1}{2}$ . Оскільки

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -b_{11} = 0$$

в силу мінімальності поверхні  $\Sigma$ ,  $|B|^2 = 2\langle B(X), Z \rangle^2 = \frac{1}{2}$ . З (4.40) маємо  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{3}{2}$ . Нормальне поле  $N$  є лінійною комбінацією  $Y_1$  і  $Y_2$ , тому з (4.39) випливає рівність  $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$ . Отже, формула другої варіації (3.15) у цьому випадку має вигляд

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 + u^2 d\Sigma \geq 0.$$

Тому поверхня  $\Sigma$  дійсно є стійкою.

Таким чином, у подальшому доведенні ми можемо вважати, що  $\lambda \neq 0$ . У цьому випадку інтегральні траєкторії  $X$  – це евклідові прямі, що трансверсальні до півплощин  $x = x_0$  (див. (4.43)), тому ми можемо проводити їх через точки кривої  $t \mapsto (0, y(t), z(t))$ , щоб отримати параметризацію

$$r(s, t) = (\lambda y(t)s, y(t), z(t) + (-\lambda + 1)s) \quad (4.46)$$

поверхні  $\Sigma$ . Тепер маємо

$$\begin{aligned} r_s &= \sqrt{\lambda^2 + 1}X = \lambda Y_1 + Y_3, \\ r_t &= \lambda y' s \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{y} (\lambda y' s Y_1 + y' Y_2 + (\lambda y' s + y z') Y_3), \\ g_{11} &= \lambda^2 + 1, \quad g_{12} = \frac{1}{y} (\lambda(\lambda + 1)y' s + y z'), \\ g_{22} &= \frac{1}{y^2} ((y')^2(2\lambda^2 s^2 + 1) + 2\lambda y y' z' s + y^2(z')^2), \\ N &= \frac{1}{\Delta} (-y' Y_1 - \lambda((\lambda - 1)y' s + y z') Y_2 + \lambda y' Y_3), \end{aligned}$$

де  $\Delta = \sqrt{(y')^2 + \lambda^2((\lambda^2((\lambda - 1)y' s + y z')^2 + \lambda^2(y')^2)}$ . З (4.39),

$$\begin{aligned} \nabla_{r_s} r_s &= \lambda(\lambda + 1)Y_2, \\ \nabla_{r_t} r_s &= \frac{1}{2y} (-y' Y_1 + \lambda((3\lambda + 1)y' s + y z') Y_2 + \lambda y' Y_3), \\ \nabla_{r_t} r_t &= \frac{1}{y^2} ((\lambda(y y'' - 3(y')^2)s - y y' z') Y_1 + (y y'' - (y')^2 + \\ &\quad + \lambda y'(2\lambda y' s + y z')s) Y_2 + (\lambda(y y'' - (y')^2)s + y^2 z'') Y_3), \end{aligned}$$

і тому

$$b_{11} = -\frac{\lambda^2(\lambda + 1)}{\Delta} ((\lambda - 1)y' s + y z'),$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= \frac{1}{2\Delta y} ((\lambda^2 + 1)(y')^2 - \lambda^2((3\lambda + 1)y's + yz')((\lambda - 1)y's + yz')), \\
b_{22} &= \frac{1}{\Delta y^2} (-y'(\lambda(yy'' - 3(y')^2)s - yy'z') - \lambda((\lambda - 1)y's + yz') \cdot \\
&\quad \cdot (yy'' - (y')^2 + \lambda y'(2\lambda y's + yz')s) + \lambda y'(\lambda(yy'' - (y')^2)s + y^2 z'')).
\end{aligned}$$

У цьому випадку умову мінімальності  $b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0$  можна записати як

$$h_3(t)s^3 + h_2(t)s^2 + h_1(t)s + h_0(t) = 0, \quad (4.47)$$

де  $h_3 = (y'\lambda(\lambda - 1))^3$ , тому для мінімальної  $\Sigma$  має бути  $y = y_0$  або  $\lambda = 1$ . Але для першого з цих випадків (якщо покласти  $z(t) = t$  та  $N = -Y_2$ )

$$b_{11} = -\lambda(\lambda + 1), \quad b_{12} = -\frac{\lambda}{2}, \quad b_{22} = 0, \quad g_{11} = \lambda^2 + 1, \quad g_{12} = g_{22} = 1,$$

і з  $H = 0$  отримуємо  $\lambda = 0$ , що є суперечністю. Отже,  $\lambda = 1$ . Далі, перевіривши, що в цьому випадку  $h_1 = h_2 = 0$  та обчисливши  $h_0$  в (4.47), отримуємо наступну умову мінімальності поверхні  $\Sigma$ :

$$2(y'z'' - y''z') = y(z')^3.$$

Ми вже знаємо, що півплощини  $z = z_0$  є мінімальними, і наведене вище доведення їхньої стійкості залишається правильним для  $\mu = 0$ :  $|B|^2 + \text{Ric}(N, N) = 0$  незалежно від субріманової структури, а  $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$  (де  $N = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_3)$ ) є справедливим для  $\lambda = 1$  та будь-яких  $\mu$ , тому друга варіація залишається тією ж. Тому в решті цього доведення ми можемо вважати  $z' \neq 0$  та переписати попереднє рівняння у вигляді  $y'' = -\frac{y}{2}$  для  $y = y(z)$ . Отже,  $y = y_0 \cos \frac{z-z_0}{\sqrt{2}}$ . Це означає, що ми можемо підставити  $y = y_0 \cos t$  та  $z = z_0 + \sqrt{2}t$  у (4.46), де  $y_0 > 0$  та  $z_0$  позначають значення відповідних функцій у точці 0, а параметр  $t$  обирається так, що  $y > 0$ . Зауважимо, що  $\Sigma$  міститься у циліндрі, параметризацію якого можна переписати у вигляді (4.42), замінивши параметр  $s$ , але тут ми продовжимо використовувати параметризацію (4.46):

$$r(s, t) = \left( sy_0 \cos t, y_0 \cos t, z = z_0 + \sqrt{2}t \right).$$

Тепер маємо  $\Delta = \sqrt{2}y_0$ , і, за попередніми формулами,

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin t Y_1 - \sqrt{2} \cos t Y_2 - \sin t Y_3 \right),$$

$$b_{11} = -2 \cos t, \quad b_{12} = \frac{\sqrt{2} s \sin 2t - \cos 2t}{\sqrt{2} \cos t},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\cos t Y_1 - \sqrt{2} \sin t Y_2 + \cos t Y_3 \right) = \frac{\sqrt{2} s \sin t - \cos t}{\sqrt{2}} r_s + \cos t r_t,$$

$$\langle B(Z), X \rangle = \frac{\sqrt{2} s \sin t - \cos t}{2} b_{11} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} b_{12} = \frac{1}{2},$$

$$\langle B(Z), Z \rangle = -\langle B(X), X \rangle = -\frac{1}{2} b_{11} = \cos t.$$

Таким чином, отримуємо  $|B|^2 = \frac{1+4\cos^2 t}{2}$  та  $\text{Ric}(N, N) = -\frac{1+2\cos^2 t}{2}$  з (4.40).

Нарешті, з (4.39) маємо

$$\nabla_N X = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos t Y_1 + \sqrt{2} \sin t Y_2 - \cos t Y_3 \right),$$

тому  $\langle \nabla_N X, N \rangle = 0$ . Отже, тут друга варіація має вигляд

$$A''(0) = \int_{\Sigma} Z(u)^2 - \cos^2 t u^2 d\Sigma.$$

Для доведення стійкості знову застосуємо субрімановий оператор Якобі поверхні  $\Sigma$ . Згідно з (4.39),

$$\nabla_X Z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( 3 \sin t Y_1 - \sqrt{2} \cos t Y_2 + \sin t Y_3 \right),$$

таким чином,  $\langle \nabla_X Z, X \rangle = \sin t$ . За твердженням 3.1, оператор Якобі записується як

$$L(u) = Z(Z(u)) + \sin t Z(u) + \cos^2 t u = \frac{(\sqrt{2} s \sin t - \cos t)^2}{2} u_{ss} + \cos^2 t u_{tt} + \\ + \frac{2 \cos t (\sqrt{2} s \sin t - \cos t)}{\sqrt{2}} u_{st} + \frac{\sqrt{2} s (1 + \sin^2 t) - \sin t \cos t}{\sqrt{2}} u_s + \cos^2 t u.$$

Знову ж, обмежимо  $L$  на функції вигляду  $u = u(t)$ :

$$L(u) = \cos^2 t (u_{tt} + u).$$

Таким чином, серед розв'язків  $u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$  рівняння  $L(u) = 0$  існує додатний  $u(t) = \cos t > 0$ . Отже, поверхня  $\Sigma$  є стійкою в силу теореми 3.3.  $\square$

Зокрема, тут ми отримуємо подальші, крім тих, що були описані у те-

оремі 4.1 для  $\widetilde{E}(2)$ , приклади субріманових структур, які не допускають вертикальних мінімальних поверхонь. Наголосимо ще раз, що субріманові структури з попередньої теореми не є лівоінваріантними крім випадку  $\lambda = \mu = 0$ , що відповідає стандартній структурі.

У [35] для стандартної субріманової структури на  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  було отримано приклади повних зв'язних стійких мінімальних поверхонь з порожніми сингулярними множинами, що не є вертикальними. Таким чином, було показано, що аналог теореми Бернштейна для мінімальних поверхонь тут не має місця. Втім, у [58] такий аналог було отримано для поверхонь у цій структурі сталої середньої кривини 1: повна зв'язна поверхня з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли є вертикальною. Як зазначалося вище, такі поверхні є циліндрами над оріколами у гіперболічній площині. Властивості поверхонь сталої середньої кривини для більш загальних структур, що вивчаються у даному розділі, наскільки нам відомо, у літературі ще не розглядалися.

Аналогічно до зауваження наприкінці розділу 4.1, накриваюче відображення (4.27) дозволяє перенести побудовані у цьому розділі ріманову та субріманові структури на саму матричну групу  $SL(2, \mathbb{R})$ , що дифеоморфна  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , так, що це відображення є локальною ізометрією, а його диференціали зберігають площини горизонтального розподілу, тому вертикальні мінімальні поверхні переходять у вертикальні мінімальні. Тоді їх опис для відповідних структур локально виглядає так само, як у теоремах 4.4 і 4.5, ці поверхні є образами перелічених там під дією накриваючого відображення й так само є стійкими.

Також, оскільки  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  з метрикою (4.30) є терстонівською геометрією, вона має компактні факторпростори за діями дискретних груп ізометрій аналогічно до *Nil* та *Sol*, тому можна також досліджувати образи поверхонь з теорем 4.4 і 4.5 під діями відповідних канонічних проєкцій. У випадку, коли дискретна група ізометрій діє лівими зсувами, вони бу-

дуть являти собою приклади стійких вертикальних мінімальних поверхонь у компактних субріманових фактормноговидах  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ .

## 4.5 Висновки до розділу

Розділ присвячено опису вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах Лі та вивченню їхньої стійкості. Як результат, ми

- описали зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для субріманових структур, що визначені лівоінваріантними двовимірними горизонтальними розподілами загального вигляду на групі Лі  $\widetilde{E}(2)$  з евклідовою метрикою, знайшли структури, що не допускають таких поверхонь, та виділили поверхні, що є стійкими (тут і далі – в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому);
- описали зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для субріманових структур, що визначені лівоінваріантними двовимірними горизонтальними розподілами загального вигляду на групах Лі *Nil* та *Sol* з їхніми стандартними лівоінваріантними метриками та довели, що всі такі поверхні є стійкими;
- описали зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для нестандартної лівоінваріантної субріманової структури на групі Лі  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  та довели, що всі такі поверхні є стійкими;
- розглянули нове сімейство нелівоінваріантних субріманових структур, що залежать від двох параметрів, на групі Лі  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , знайшли значення параметрів, для яких існують вертикальні мінімальні поверхні, описали такі зв'язні поверхні та довели, що всі вони є стійкими.

Зауважимо також, що ортонормовані базиси лівоінваріантних полів, які ми використовували для тривимірних унімодулярних груп Лі у цьому розділі та позначали через  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , є тими самими, що було використано

у [48] для дослідження загальних лівоінваріантних метрик на таких групах і що позначалися там через  $\{e_1, e_2, e_3\}$  (за виключенням групи *Sol*, де простіший базис (4.14) утворюється зі стандартного обертанням в алгебрі Лі). Тут ми використовуємо ці базиси з фіксованими значеннями структурних констант (наприклад,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$  у позначеннях [48] для *Nil*), таким чином, розглядаючи одну стандартну лівоінваріантну ріманову метрику для кожної групи. Усі ці метрики відповідають стандартним тривимірним терстоновським геометріям ([59, 62]).

Як зазначалося наприкінці розділу 3.1, у розглянутих групах Лі можна також аналогічним чином будувати поверхні, що перпендикулярні до інтегровних розподілів, тобто до деяких розшарувань, і досліджувати їх на мінімальність та стійкість, використовуючи аналог субріманової площі. З доведень тверджень 4.1, 4.2, 4.3 та 4.4 випливає, що лівоінваріантні розподіли на цих групах є або цілком неінтегровними, або інтегровними, причому майже всі цілком неінтегровні. Класифікацію мінімальних поверхонь, що перпендикулярні до лівоінваріантних розшарувань, та перевірку їхньої стійкості можна тоді провести аналогічно до дослідження вертикальних мінімальних поверхонь у теоремах даного розділу.

Результати розділу опубліковано у статтях [66], [27] і [28].

## Висновки до дисертації

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню стійкості мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії, зокрема, отриманню класифікаційних теорем для окремих класів мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових групах  $L_1$  та тверджень про їхню стійкість.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено базовим відомостям про субріманову геометрію, прикладам субріманових многовидів, що використовуються у роботі, поняттям мінімальності та стійкості гіперповерхонь, зокрема поверхонь, у рімановій та субрімановій геометрії та огляду наявної літератури, що присвячена мінімальним підмноговидам у субріманових многовидах та їхній стійкості. Особливу увагу приділено різним рімановим та субрімановим узагальненням теореми С.Н. Бернштейна про явно задані мінімальні поверхні.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню поверхонь у тривимірному многовиді  $\widetilde{E}(2)$ , тобто універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну субріманову структуру. В результаті відповідно до мети і поставлених завдань дослідження було

- обчислено формулу першої варіації субріманової площі поверхні, з якої виведено критерій мінімальності, та встановлено, що мінімальність не є еквівалентною до рівності нулю субріманової середньої кривини поверхні;
- показано, що евклідова площина є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона паралельна або ортогональна до осі  $z$ , де координата  $z$  відповідає куту обертання власного руху;
- обчислено формулу другої варіації субріманової площі та за її допомогою встановлено, що мінімальні евклідові площини є стійкими.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та їхньої стійкості. В результаті відповідно до мети і поставлених завдань дослідження було

- обчислено формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом і виведено з неї, що вертикальна поверхня мінімальна в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона мінімальна в рімановому сенсі;
- обчислено формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом і виведено з неї, що зі стійкості поверхні в субрімановому сенсі впливає стійкість у рімановому сенсі;
- запропоновано субрімановий аналог оператора Якобі для вертикальних поверхонь і доведено достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь, що аналогічна до теореми Д. Фішер-Колбрі та Р. Шоена: якщо поверхня допускає додатну функцію з недодатним оператором Якобі, то вона є стійкою.

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено опису вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах  $L_1$  та вивченню їхньої стійкості. В результаті відповідно до мети і поставлених завдань дослідження було

- описано зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для субріманових структур, що визначені лівоінваріантними двовимірними горизонтальними розподілами загального вигляду на групі  $L_1 \widetilde{E}(2)$  з евклідовою метрикою, знайдено структури, що не допускають таких поверхонь,

та виділено поверхні, що є стійкими (тут і далі – в субрімановому сенсі, а отже, і в рімановому);

- описано зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для субріманових структур, що визначені лівоінваріантними двовимірними горизонтальними розподілами загального вигляду на групах  $Li\ Nil$  та  $Sol$  з їхніми стандартними лівоінваріантними метриками та доведено, що всі такі поверхні є стійкими;
- описано зв'язні вертикальні мінімальні поверхні для нестандартної лівоінваріантної субріманової структури на групі  $Li\ \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  та доведено, що всі такі поверхні є стійкими;
- розглянуто нове сімейство нелівоінваріантних субріманових структур, що залежать від двох параметрів, на групі  $Li\ \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , знайдено значення параметрів, для яких існують вертикальні мінімальні поверхні, описано такі зв'язні поверхні та доведено, що вони є стійкими.

Усі перелічені результати дисертаційної роботи є новими та наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Результати мають теоретичний характер і розширюють наші знання про субріманові геометричні структури, мінімальні поверхні у них та стійкість таких поверхонь. Вони можуть бути застосовані у подальших дослідженнях з цієї тематики.

Зокрема, до кола питань можливих майбутніх досліджень стійкості мінімальних підмноговидів у субрімановій геометрії, що пов'язані з результатами дисертаційної роботи та продовжують їх, входять:

- знаходження прикладів вертикальних мінімальних поверхонь, що стійкі у рімановому сенсі, але не в субрімановому;
- отримання загальних формул першої та другої варіації для класів поверхонь у тривимірних субріманових многовидах, що ширші за вертикальні;

- узагальнення результатів дисертаційної роботи на інші класи варіацій крім нормальних;
- отримання класифікаційних теорем про вертикальні мінімальні поверхні в неунімодулярних тривимірних субріманових групах  $L_1$  та встановлення їхньої стійкості;
- отримання класифікаційних теорем про вертикальні мінімальні поверхні для субріманових структур на групах  $L_1$ , що визначені довільними лівоінваріантними метрикою і розподілом, та встановлення їхньої стійкості;
- дослідження властивостей вертикальних мінімальних поверхонь у компактних факторпросторах тривимірних груп  $L_1$  (терстоновських геометрій) за діями дискретних груп ізометрій та знаходження нових прикладів стійких поверхонь.
- отримання класифікаційних теорем для мінімальних поверхонь, що перпендикулярні до інтегровних розподілів, тобто до шарувань, зокрема, лівоінваріантних на тривимірних групах  $L_1$ , та встановлення їхньої стійкості;
- узагальнення результатів дисертаційної роботи на неінтегровні розподіли, що ортогональні до заданого розподілу, для яких теж існують аналоги другої фундаментальної форми та мінімальності;
- узагальнення результатів дисертаційної роботи на гіперповерхні в субріманових многовидах довільної вимірності, зокрема, на аналоги вертикальних поверхонь;
- узагальнення відомих теорем типу Бернштейна на класи субріманових структур, що були досліджені у дисертаційній роботі, та хара-

ктеризація вертикальних мінімальних поверхонь за допомогою таких теорем;

- узагальнення відомих теорем типу Бернштейна на нові класи субріманових структур.

# Список використаних джерел

- [1] Barbosa J.L., Do Carmo M.P. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.* 1984. Vol. 185, No. 3. P. 339-353.  
DOI: [10.1007/BF01215045](https://doi.org/10.1007/BF01215045)
- [2] Barbosa J.L., Do Carmo M.P., Eschenburg J. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.* 1988. Vol. 197, No. 1. P. 123-138.  
DOI: [10.1007/BF01161634](https://doi.org/10.1007/BF01161634)
- [3] Barone Adesi V., Serra Cassano F., Vittone D. The Bernstein problem for intrinsic graphs in Heisenberg groups and calibrations. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2007. Vol. 30, No. 1. P. 17-49.  
DOI: [10.1007/S00526-006-0076-3](https://doi.org/10.1007/S00526-006-0076-3)
- [4] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.* 1969. Vol. 7, No. 1. P. 243-268.  
DOI: [10.1007/BF01404309](https://doi.org/10.1007/BF01404309)
- [5] Bellaïche A., Risler J.-J. (eds.) *Sub-Riemannian Geometry. Progress in Mathematics, Vol. 144.* Birkhäuser Verlag, 1996. 406 p.
- [6] Do Carmo M.P., Peng C.K. Stable minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1979. Vol. 1, No. 6. P. 903-906.  
DOI: [10.1007/978-3-642-25588-5\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-642-25588-5_14)
- [7] Capogna L., Danielli D., Pauls S.D., Tyson J.T. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem. Progress in Mathematics, Vol. 259.* Birkhäuser Verlag, 2007. 224 p.
- [8] Cheng J.-H., Hwang J.-F., Malchiodi A., Yang P. Minimal surfaces in pseudohermitian geometry. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5).* 2005. Vol. 4, No. 1. P. 129-177.  
DOI: [10.2422/2036-2145.2005.1.05](https://doi.org/10.2422/2036-2145.2005.1.05)
- [9] Cheng J.-H., Hwang J.-F., Malchiodi A., Yang P. Existence and uniqueness for  $p$ -area minimizers in the Heisenberg group. *Math. Ann.* 2007. Vol. 337, No. 2. P. 253-293.  
DOI: [10.1007/S00208-006-0033-7](https://doi.org/10.1007/S00208-006-0033-7)
- [10] Chodosh O., Li C. Stable minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Acta Math.* 2024. Vol. 233, No. 1. P. 1-31.  
DOI: [10.4310/ACTA.2024.v233.n1.a1](https://doi.org/10.4310/ACTA.2024.v233.n1.a1)

- [11] Chodosh O., Li C., Minter P., Stryker D. Stable minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^5$ . arXiv:2401.01492 (2024). 25 p.  
DOI: [10.48550/arXiv.2401.01492](https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.01492)
- [12] Colding T.H., Minicozzi W.P. II. *A Course in Minimal Surfaces. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 121*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011. 332 p.
- [13] Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M., Pauls S.D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *J. Differential Geom.* 2009. Vol. 81, No. 2. P. 251-295.  
DOI: [10.4310/jdg/1231856262](https://doi.org/10.4310/jdg/1231856262)
- [14] Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.M., Pauls S.D. The Bernstein problem for embedded surfaces in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Indiana Univ. Math. J.* 2010. Vol. 59, No. 2. P. 563-594.  
DOI: [10.1512/iumj.2010.59.4291](https://doi.org/10.1512/iumj.2010.59.4291)
- [15] Falbel E., Gorodski C. Sub-Riemannian homogeneous spaces in dimensions 3 and 4. *Geom. Dedicata.* 1996. Vol. 62, No. 3. P. 227-252.  
DOI: [10.1007/bf00181566](https://doi.org/10.1007/bf00181566)
- [16] Fischer-Colbrie D., Schoen R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 1980. Vol. 33, No. 2. P. 199-211.  
DOI: [10.1002/cpa.3160330206](https://doi.org/10.1002/cpa.3160330206)
- [17] Galli M. First and second variation formulae for the sub-Riemannian area in three-dimensional pseudo-Hermitian manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2013. Vol. 47, No. 1-2. P. 117-157.  
DOI: [10.1007/s00526-012-0513-4](https://doi.org/10.1007/s00526-012-0513-4)
- [18] Galli M. On the classification of complete area-stationary and stable surfaces in the subriemannian *Sol* manifold. *Pacific J. Math.* 2014. Vol. 271, No. 1. P. 143-157.  
DOI: [10.2140/pjm.2014.271.143](https://doi.org/10.2140/pjm.2014.271.143)
- [19] Galli M., Ritoré M. Area-stationary and stable surfaces of class  $C^1$  in the sub-Riemannian Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Adv. Math.* 2015. Vol. 285. P. 737-765.  
DOI: [10.1016/j.aim.2015.08.008](https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.08.008)
- [20] Garofalo N., Nhieu D.-M. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.* 1996. Vol. 42, No. 3. P. 1081-1144.  
DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0312\(199610\)49:10<1081::AID-CPA3>3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199610)49:10<1081::AID-CPA3>3.0.CO;2-A)
- [21] Giovannardi G., Pozuelo J., Ritoré M. Area-minimizing horizontal graphs with low regularity in the sub-Finsler Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *New trends in geometric analysis.* 2023. Vol. 10. P. 209-226.  
DOI: [10.1007/978-3-031-39916-9\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-031-39916-9_7)

- [22] Giovannardi G., Ritoré M. The Bernstein problem for  $(X, Y)$ -Lipschitz surfaces in three-dimensional sub-Finsler Heisenberg groups. *Commun. Contemp. Math.* 2024. Vol. 26, No. 9. 2350048. 38 p.  
DOI: [10.1142/S0219199723500487](https://doi.org/10.1142/S0219199723500487)
- [23] Giovannardi G., Pinamonti A., Verzellesi S. Curvature estimates for minimal hypersurfaces in the Heisenberg group. arXiv:2409.20359 (2024). 42 p.  
DOI: [10.48550/arXiv.2409.20359](https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.20359)
- [24] Golo S.N., Ritoré M. Area-minimizing cones in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Ann. Fenn. Math.* 2021. Vol. 46, No. 2. P. 945-956.  
DOI: [10.5186/aasfm.2021.4658](https://doi.org/10.5186/aasfm.2021.4658)
- [25] Havrylenko I., Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *International Scientific Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis»*. Odesa, May 27-30, 2024. P. 50-51.  
URL: [agma2024-theses.pdf](https://agma2024-theses.pdf)
- [26] Havrylenko I. Stability of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups. *International Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis»*. Odesa, May 26-29, 2025. P. 41-43.  
URL: [agma2025-theses.pdf](https://agma2025-theses.pdf)
- [27] Havrylenko I., Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 159-182.  
DOI: [10.15673/pigc.v18i2.3009](https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3009)
- [28] Havrylenko I. The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ . *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Math., Appl. Math., Mech.* 2025. Vol. 102. P. 30-47.  
DOI: [10.26565/2221-5646-2025-102-02](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2025-102-02)
- [29] Helgason S. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 34*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001. 641 p.
- [30] Hladky R.K., Pauls S.D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model. *J. Math. Imaging Vis.* 2010. Vol. 36, No. 1. P. 1-27.  
DOI: [10.1007/s10851-009-0167-9](https://doi.org/10.1007/s10851-009-0167-9)
- [31] Hladky R.K., Pauls S.D. Variation of perimeter measure in sub-Riemannian geometry. *Int. Electron. J. Geom.* 2013. Vol. 6, No. 1. P. 8-40.  
URL: <https://dergipark.org.tr/en/pub/iejg/article/597626>
- [32] Hurtado A., Rosales C. Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere. *Math. Ann.* 2008. Vol. 340, No. 3. P. 675-708.  
DOI: [10.1007/s00208-007-0165-4](https://doi.org/10.1007/s00208-007-0165-4)

- [33] Hurtado A., Ritoré M., Rosales C. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Adv. in Math.* 2010. Vol. 224, No. 2. P. 561-600.  
DOI: [10.1016/j.aim.2009.12.002](https://doi.org/10.1016/j.aim.2009.12.002)
- [34] Hurtado A., Rosales C. Existence, characterization and stability of Pansu spheres in sub-Riemannian 3-space forms. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2015. Vol. 54, No. 3. P. 3183-3227.  
DOI: [10.1007/s00526-015-0898-y](https://doi.org/10.1007/s00526-015-0898-y)
- [35] Hurtado A., Rosales C. Strongly stable surfaces in sub-Riemannian 3-space forms. *Nonlinear Anal.* 2017. Vol. 155. P. 115-139.  
DOI: [10.1016/j.na.2017.01.003](https://doi.org/10.1016/j.na.2017.01.003)
- [36] Hurtado A., Rosales C. An instability criterion for volume-preserving area-stationary surfaces with singular curves in sub-Riemannian 3-space forms. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2020. Vol. 59. 165. 34 p.  
DOI: [10.1007/s00526-020-01834-1](https://doi.org/10.1007/s00526-020-01834-1)
- [37] Hurtado A., Rosales C. Area-minimizing properties of Pansu spheres in the sub-Riemannian 3-sphere. *Adv. Calc. Var.* 2023. Vol. 16, No. 3. P. 689-704.  
DOI: [10.1515/acv-2021-0050](https://doi.org/10.1515/acv-2021-0050)
- [38] Jean F. *Control of Nonholonomic Systems: From Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning.* Springer, 2014. 104 p.
- [39] Kokubu M. On minimal surfaces in the real special linear group  $SL(2, \mathbb{R})$ . *Tokyo J. Math.* 1997. Vol. 20, No. 2. P. 287-297.  
DOI: [10.3836/tjm/1270042104](https://doi.org/10.3836/tjm/1270042104)
- [40] Le Donne E. *Lecture Notes on Sub-Riemannian Geometry from the Lie Group Viewpoint.* Scuola Normale Superiore di Pisa, 2021. 263 p.
- [41] Lopez F.J., Ros A. Complete minimal surface with index one and stable constant mean curvature surfaces. *Comm. Math. Helv.* 1989. Vol. 64. P. 34-43.  
DOI: [10.1007/BF02564662](https://doi.org/10.1007/BF02564662)
- [42] Masaltsev L. Minimal surfaces in standard three-dimensional geometry  $Sol^3$ . *J. Math. Phys., Anal., Geom.* 2006. Vol. 2, No. 1. P. 104-110.  
URL: <https://jmagr.ilt.kharkov.ua/abstract.php?uid=jm02-0104e>
- [43] Mazet L. Stable minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^6$ . arXiv:2405.14676 (2024). 14 p.  
DOI: [10.48550/arXiv.2405.14676](https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.14676)
- [44] Montefalcone F. Hypersurfaces and variational formulas in sub-Riemannian Carnot groups. *J. Math. Pures Appl.* 2007. Vol. 87, No. 5. P. 453-494.  
DOI: [10.1016/j.matpur.2007.01.009](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2007.01.009)

- [45] Montefalcone F. Stable  $H$ -Minimal Hypersurfaces. *J. Geom. Anal.* 2015. Vol. 25, No. 2. P. 820-870.  
DOI: [10.1007/s12220-013-9447-0](https://doi.org/10.1007/s12220-013-9447-0)
- [46] Montgomery R. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 121.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002. 259 p.
- [47] Monti R., Serra Cassano F., Vittono D. A negative answer to the Bernstein problem for intrinsic graphs in the Heisenberg group. *Boll. Unione Mat. Ital (9)*. 2008. Vol. 1, No. 3. P. 709-727.  
URL: [negative\\_bernstein\\_28\\_4\\_08.pdf](#)
- [48] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Adv. in Math.* 1976. Vol. 21, No. 3. P. 293-329.  
DOI: [10.1016/S0001-8708\(76\)80002-3](https://doi.org/10.1016/S0001-8708(76)80002-3)
- [49] Mitchell J. On Carnot-Carathéodory metrics. *J. Differential Geom.* 1985. Vol. 21, No. 1. P. 35-45.  
DOI: [10.4310/jdg/1214439462](https://doi.org/10.4310/jdg/1214439462)
- [50] Nicolussi S., Serra Cassano F. The Bernstein problem for Lipschitz intrinsic graphs in the Heisenberg group. *Calc. Var. Partial Differential Equations*. 2019. Vol. 58. 141. 28 p.  
DOI: [10.1007/s00526-019-1581-5](https://doi.org/10.1007/s00526-019-1581-5)
- [51] Pansu P. Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un. *Annals of Mathematics*. 1989. Vol. 129, No. 1. P. 1-60.  
DOI: [10.2307/1971484](https://doi.org/10.2307/1971484)
- [52] Pauls S. Minimal surfaces in the Heisenberg group. *Geom. Dedicata*. 2004. Vol. 104. P. 201-231.  
DOI: [10.1023/B:GEOM.0000022861.52942.98](https://doi.org/10.1023/B:GEOM.0000022861.52942.98)
- [53] Pinamonti A., Verzellesi S. A characterization of horizontally totally geodesic hypersurfaces in Heisenberg groups. *J. Geom. Anal.* 2025. Vol. 35. 235. 35 p.  
DOI: [10.1007/s12220-025-02071-8](https://doi.org/10.1007/s12220-025-02071-8)
- [54] Ritoré M., Rosales C. Area-stationary surfaces in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Adv. Math.* 2008. Vol. 219, No. 2. P. 633-671.  
DOI: [10.1016/j.aim.2008.05.011](https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.05.011)
- [55] Ritoré M., Rosales C. Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Matemática Contemporânea*. 2008. Vol. 35. P. 185-203.  
DOI: [10.21711/231766362008/rmc3512](https://doi.org/10.21711/231766362008/rmc3512)
- [56] Ritoré M. Examples of area-minimizing surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$  with low regularity. *Calc. Var. Partial Differential Equations*. 2009. Vol. 34, No. 2. P. 179-192.  
DOI: [10.1007/s00526-008-0181-6](https://doi.org/10.1007/s00526-008-0181-6)

- [57] Ros A. One-sided complete stable minimal surfaces. *J. Differential Geom.* 2006. Vol. 74, No. 1. P. 69-92.  
DOI: [10.4310/jdg/1175266182](https://doi.org/10.4310/jdg/1175266182)
- [58] Rosales C. Complete stable CMC surfaces with empty singular set in Sasakian sub-Riemannian 3-manifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2012. Vol. 43, No. 3-4. P. 311-345.  
DOI: [10.1007/s00526-011-0412-0](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0412-0)
- [59] Scott P. The geometries of 3-manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.* 1983. Vol. 42. P. 401-487.  
DOI: [10.1112/BLMS/15.5.401](https://doi.org/10.1112/BLMS/15.5.401)
- [60] Simon L. *Lectures on geometric measure theory. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Vol. 3.* Australian National University, 1983. 272 p.
- [61] Sternberg S. *Lectures on Differential Geometry: Second Edition.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1983. 442 p.
- [62] Thurston W.P. *Three-dimensional Geometry and Topology. Volume 1. Edited by S. Levy.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997. 328 p.
- [63] Younes R. Minimal surfaces in  $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$ . *Ill. J. Math.* 2010. Vol. 54, No. 2. P. 671-712.  
DOI: [10.1215/ijm/1318598677](https://doi.org/10.1215/ijm/1318598677)
- [64] Young P. Area-minimizing ruled graphs and the Bernstein problem in the Heisenberg group. *Calc. Var. Partial Differential Equations.* 2022. Vol. 61. 142. 32 p.  
DOI: [10.1007/s00526-022-02264-x](https://doi.org/10.1007/s00526-022-02264-x)
- [65] Гавриленко І., Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» Devoted to 160 Anniversary of Dmytro Grave.* Odesa, May 29-June 1, 2023. P. 127-129.  
URL: [agma2023-theses.pdf](https://agma2023-theses.pdf)
- [66] Гавриленко І., Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка".* 2023. Т. 98. С. 50-67.  
DOI: [10.26565/2221-5646-2023-98-04](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04)

## Список публікацій здобувача

## Публікації у фахових виданнях України:

1. Гавриленко І., Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія "Математика, прикладна математика і механіка"*. 2023. Т. 98. С. 50-67.

DOI: [10.26565/2221-5646-2023-98-04](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2023-98-04)

**Ключові слова:** субрімановий многовид, лівоінваріантна метрика, мінімальна поверхня, стійкість.

*(Особистий внесок здобувача: обчислення формули першої варіації субріманової площі поверхні у групі Лі  $\widetilde{E}(2)$ , виведення критерію мінімальності поверхні, знаходження формули другої варіації субріманової площі, дослідження декількох прикладів мінімальних поверхонь та їхньої стійкості, опис вертикальних мінімальних поверхонь.*

*Особистий внесок співавтора: постановка задачі, пропозиції прикладів, уточнення формулювань результатів та доведення субріманової нестійкості стандартного гелікоїда, редагування статті, конкретизація висновків.)*

2. Havrylenko I. The Jacobi operator and the stability of vertical minimal surfaces in the sub-Riemannian Lie group  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ . *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Math., Appl. Math., Mech.* 2025. Vol. 102. P. 30-47.

DOI: [10.26565/2221-5646-2025-102-02](https://doi.org/10.26565/2221-5646-2025-102-02)

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, minimal surface, Jacobi operator, stability.

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

3. Havrylenko I., Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2025. Vol. 18, No. 2. P. 159-182. (Scopus Q3)

DOI: [10.15673/pigc.v18i2.3009](https://doi.org/10.15673/pigc.v18i2.3009)

**Keywords:** sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, minimal surface, stability.

(Особистий внесок здобувача: обчислення формул першої та другої варіацій субріманової площі вертикальної поверхні у субрімановому многовиді з двовимірним горизонтальним розподілом, опис вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах  $Li\ Nil$  та  $Sol$ , доведення їхньої стійкості.

Особистий внесок співавтора: постановка задачі, запропоновані техніки розв'язання та уточнення формулювань, редагування статті, конкретизація висновків.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Гавриленко І., Петров Є. Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $\widetilde{E}(2)$ . *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis» Devoted to 160 Anniversary of Dmytro Grave, Odesa, May 29-June 1, 2023*. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2023. P. 127-129.

URL: [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2023/contents/agma2023-theses.pdf)

5. Havrylenko I., Petrov E. Stability of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds. *International Scientific Online*

*Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 27-30, 2024. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2024. P. 50-51.*

**URL:** [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf)

6. **Havrylenko I.** Stability of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups. *International Scientific Online Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Odesa, May 26-29, 2025. Book of Abstracts. Odesa National University of Technology, 2025. P. 41-43.*

**URL:** [imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2025/agma2025-theses.pdf](http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2025/agma2025-theses.pdf)

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ

створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:50:47 24.05.2026

Назва файлу з підписом: Гавриленко Дисертація.pdf  
Розмір файлу з підписом: 1.4 МБ

Перевірені файли:

Назва файлу без підпису: Гавриленко Дисертація.pdf  
Розмір файлу без підпису: 1.4 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Гавриленко Ігор Олегович

П.І.Б.: Гавриленко Ігор Олегович

Країна: Україна

РНОКПП: 3586103230

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 15:50:42  
24.05.2026

Сертифікат виданий: КНЕДП monobank | Universal Bank

Серійний номер: 10FF6F932221FA0005350B000000001339BCBF3

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підписаний PDF-файл (PAdES)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (PAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2026.04.06 13:00