Анотація

Гавриленко І.О. Мінімальні поверхні у субрімановій геометрії. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). – Харківський національний університет мене В.Н. Каразина Міністерства освіти і науки України, Харків, 2026.

Дисертацію присвячено дослідженню стійкості мінімальних поверхонь у субрімановій геометрії, зокрема, отриманню класифікаційних теорем для окремих класів мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових групах Лі та тверджень про їхню стійкість.

Метою дисертаційної роботи є дослідження стійкості мінімальних поверхонь у субріманових просторах.

Об'єктом дослідження є підмноговиди у субрімановій геометрії.

Предметом дослідження є мінімальність та стійкість поверхонь у субрімановій геометрії.

Для дослідження використано **методи** диференціальної геометрії, зокрема, ріманової та субріманової геометрії, геометрії підмноговидів, диференціальних рівнянь, варіаційного числення, теорії груп та алгебр Лі.

Перший розділ дисертаційної роботи містить базові відомості про субріманову геометрію, приклади субріманових многовидів, що використовуються у роботі, поняття мінімальності та стійкості гіперповерхонь, зокрема поверхонь, у ріманової та субрімановій геометрії, усі необхідні означення та огляд наявної літератури, що присвячена мінімальним підмноговидам у субріманових многовидах та їхній стійкості.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню поверхонь у тривимірному многовиді $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$, тобто універсальному накритті групи власних рухів евклідової площини, що має лівоінваріантну

субріманову структуру. Ця група описується як простір $\mathbb{R}^3$ з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = \cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \sin z\frac{\partial}{\partial x} - \cos z\frac{\partial}{\partial y}.$$

Лівоінваріантна метрика при цьому є евклідовою. У підрозділі 2.1 виводиться нова формула першої варіації субріманової площі поверхні у $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. Тут і далі N позначає одиничне нормальне поле зануреної орієнтовної поверхні Σ у многовиді M, субріманова структура якого визначена двовимірним цілком неінтегровним розподілом $\mathcal{H}$ і обмеженням на нього ріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$, що визначена на M. Зокрема, для $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ розподіл $\mathcal{H}$ ортогональний до X_3. *Субріманową площею* області $D \subset \Sigma$ зветься

$$A(D) = \int\limits_D |N^h|\, d\Sigma,$$

де N^h – ортогональна проєкція поля N на $\mathcal{H}$. *Нормальною варіацією* поверхні Σ, що задана гладкою функцією u з компактним носієм, зветься відображення $\varphi\colon \Sigma \times I \to M$, що визначене умовою $\varphi_s(p) = \exp_p(s\,u(p)\,N(p))$, де I – деякий окіл нуля в $\mathbb{R}$, $\exp_p$ – ріманове експоненційне відображення. Через $A(s) = A(\Sigma_s)$ тоді позначаємо субріманову площу поверхні варіації $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$.

Теорема 2.1 *Нехай Σ – поверхня у $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією u з компактним носієм, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N^h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle\nu^h, X_1\rangle\langle\nu^h, X_2\rangle\right) u\, d\Sigma.$$

Тут Σ_0 – множина *сингулярних точок* Σ, у яких $N^h = 0$, Z – *характеристичне векторне поле*, яке у точці $p \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ утворюється

з $\nu^h(p) = N^h(p)/|N^h(p)|$ обертанням на прямий кут у площині $\mathcal{H}_p$, B – оператор Вейнгартена Σ відносно N.

Поверхня Σ називається *мінімальною*, якщо $A'(0) = 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Мінімальна поверхня Σ зветься *стійкою*, якщо $A''(0) \geqslant 0$ для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у $\Sigma \setminus \Sigma_0$. З попередньої формули виведено наступний критерій мінімальності поверхонь.

Наслідок 2.1 *Поверхня Σ у $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ мінімальна тоді й тільки тоді, коли на $\Sigma \setminus \Sigma_0$*

$$\langle B(Z), Z\rangle = \langle N, X_3\rangle\langle \nu^h, X_1\rangle\langle \nu^h, X_2\rangle.$$

Звідси також було отримано критерій мінімальності для явно заданих поверхонь і показано, що з мінімальності загальної поверхні у римановому сенсі не випливає мінімальність у субріхмановому сенсі або навпаки.

У підрозділі 2.2 виводиться наступна нова формула другої варіації субрімманової площі.

Теорема 2.2 *Нехай Σ – мінімальна поверхня у $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. Тоді друга нормальна варіація її субрімманової площі, що задана функцією u з компактним носієм, має вигляд:*

$$\begin{aligned} A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \Big(& \left(|N^h|^{-1}\left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2\rangle^2 u\right)\right)^2 - \\ & -2|N^h|\langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3\rangle\langle B(Z), S\rangle Z(u)u + \\ & +4\langle N, X_3\rangle |N^h| \langle \nu^h, X_1\rangle\langle \nu^h, X_2\rangle\langle B(S), S\rangle u^2 + \\ & +2\left(1 - 2|N^h|^2\right)\langle \nu^h, X_1\rangle\langle \nu^h, X_2\rangle S(u)u + \\ & + |N^h|\left(2 - 3|N^h|^2\right)\langle \nu^h, X_1\rangle^2\langle \nu^h, X_2\rangle^2 u^2\Big)\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Тут S – поле, що доповнює Z до ортонормованого репера на $\Sigma \setminus \Sigma_0$. За допомогою цієї формули ми встановили, що мінімальні евклідові площини є стійкими.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних субріманових многовидах та їхньої стійкості. У підрозділі 3.1 використане наступне означення вертикальної поверхні:

Означення 3.1 Поверхня Σ у тривимірному субрімановому многовиді M з двовимірним горизонтальним розподілом $\mathcal{H}$ зветься *вертикальною*, якщо її дотична площина $T_p\Sigma$ перпендикулярна до горизонтальної площини субріманової структури $\mathcal{H}_p$ (тобто їхні вектори нормалі ортогональні) у кожній точці p поверхні.

Далі в цьому підрозділі ми знайшли загальну формулу першої варіації субріманової площі вертикальної поверхні в тривимірному субрімановому многовиді.

Теорема 3.1 *Нехай Σ – вертикальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді M з двовимірним горизонтальним розподілом $\mathcal{H}$. Тоді перша нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією u з компактним носієм, має наступний вигляд:*

$$A'(0) = -2 \int\limits_{\Sigma} Hu \, d\Sigma,$$

де H – ріманова середня кривина Σ.

Наслідок 3.1 *Вертикальна поверхня є мінімальною в субрімановому сенсі тоді й тільки тоді, коли вона є мінімальною в ріхмановому сенсі, тобто коли $H = 0$.*

У підрозділі 3.2 ми обчислили формулу другої варіації субріманової площі вертикальної мінімальної поверхні.

Теорема 3.2 *Нехай Σ – вертикальна мінімальна поверхня у тривимірному субрімановому многовиді M з двовимірним горизонтальним розподілом $\mathcal{H}$. Тоді друга нормальна варіація її субріманової площі, що задана функцією u з компактним носієм,*

має вигляд:

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma} -\left(X(u) - \langle \nabla_N X, N\rangle u\right)^2 + |\nabla_\Sigma u|^2 - \\ - \left(\mathrm{Ric}\,(N,N) + |B|^2\right) u^2 \, d\Sigma,$$

де ∇ *і* Ric *– ріманова зв'язність та тензор Річчі* M *відповідно,* X *– одиничне нормальне поле* $\mathcal{H}$*, що є дотичним до* Σ *в силу вертикальності,* ∇_Σ *і* $|B|$ *– рімановий градієнт і норма другої фундаментальної форми* Σ *відповідно.*

Наслідок 3.2 *Якщо вертикальна мінімальна поверхня є стійкою в субріманновому сенсі, вона також є стійкою в рімановому сенсі.*

У підрозділі 3.3 було введено нове поняття оператора Якобі для вертикальних поверхонь. Для цього ми спочатку показали, що отриману формулу другої варіації можна записати у вигляді

$$A''(0) = \int\limits_{\Sigma} Z(u)^2 - f\, u^2 \, d\Sigma$$

для деякої функції f.

Твердження 3.1 *Нехай* Σ *– мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною в тривимірному субріманновому многовиді, друга варіація субріманової площі якої має вигляд як вище для ортонормованого репера* $\{X, Z\}$ *на* Σ *(зокрема вертикальна). Тоді її можна переписати у вигляді*

$$A''(0) = -\int\limits_{\Sigma} uL(u) \, d\Sigma$$

де L *– оператор Якобі на просторі гладких функцій на* Σ*:*

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X\rangle \, Z(u) + f\, u.$$

Оператор Якобі L, що виникає у цьому твердженні, є аналогом рімановго

оператора Якобі. Зокрема, він теж є лінійним оператором на $C^\infty(\Sigma)$. Далі ми довели наступну достатню умову стійкості вертикальних мінімальних поверхонь:

Теорема 3.3 *Нехай Σ – мінімальна поверхня в тривимірному субріманновому многовиді з порожньою сингулярною множиною, другою варіацією субріманової площі, що має вигляд як вище, та оператором Якобі L. Якщо існує гладка додатна функція u на Σ така, що $L(u) \leqslant 0$, то Σ є стійкою.*

Четвертий розділ дисертаційної роботи присвячено опису вертикальних мінімальних поверхонь у тривимірних групах Лі $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$, Nil, Sol та $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ та дослідженню їхньої стійкості. У підрозділі 4.1 було доведено наступне:

Теорема 4.1 *Нехай субріманова структура на $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ визначена двовимірним лівоінваріантним розподілом $\mathcal{H} = X^\perp$, де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

і $\lambda^2 + \nu^2 > 0$. Вона допускає вертикальні мінімальні поверхні тоді й тільки тоді, коли $\mu = 0$.

При $\mu = 0$ зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня у $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у евклідовій площині $z = z_0$ або паралельно перенесеному стандартному гелікоїді

$$(x - x_0)\cos(z + \alpha) + (y - y_0)\sin(z + \alpha) = 0,$$

де $\sin\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$, $\cos\alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$ (відповідно, є однією з цих поверхонь). При цьому площини є стійкими, а гелікоїди – нестійкими.

У підрозділі 4.2 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні у групі Nil, що описується як простір $\mathbb{R}^3$ з ортонормованим базисом

лівоінваріантних полів

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

і доведено наступну класифікаційну теорему:

Теорема 4.2 *Нехай субріманова структура на Nil визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом $\mathcal{H} = X^{\perp}$, де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3).$$

Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня в цьому субріmановому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у вертикальній евклідовій площині над довільною прямою в площині (x, y) при $\lambda = \mu = 0$, і над прямою з напрямним вектором (λ, μ) в іншому випадку (відповідно, є такою площиною).

Усі ці поверхні є стійкими в субріmановому сенсі, а отже й у ріmановому сенсі.

У підрозділі 4.3 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні в групі Sol, що описана як простір $\mathbb{R}^3$ з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = e^{z}\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

і доведено класифікаційну теорему:

Теорема 4.3 *Нехай субріманова структура на Sol визначається лівоінваріантним двовимірним горизонтальним розподілом $\mathcal{H} = X^{\perp}$, де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

і $\lambda\mu \neq 0$.

Якщо $\nu \neq 0$, то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна

поверхня в цьому субріманновому многовиді є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у циліндрі, що параметризований або як

$$r(s,t) = \left(x_0 - \frac{\lambda}{\nu} e^{-s}, t, s \right),$$

або як

$$r(s,t) = \left(t, y_0 + \frac{\mu}{\nu} e^{s}, s \right)$$

(відповідно, є таким циліндром).

Якщо $\nu = 0$, то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у горизонтальній евклідовій площині $z = z_0$ або $\lambda = \pm\mu$, а поверхня є областю в «гіперболічному гелікоїді» з параметризацією

$$r(s,t) = \left(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} s, y_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{t} s, t \right)$$

(відповідно, є однією з цих поверхонь).

Усі ці поверхні є стійкими в субріманновому сенсі, а отже й у ріманновому сенсі.

У підрозділі 4.4 розглядаються вертикальні мінімальні поверхні у групі $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$, що є, зокрема, універсальним накриттям розшарування одиничних векторів гіперболічної площини та може бути представлена як множина $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ з ортонормованим базисом лівоінваріантних полів

$$X_1 = y\cos z\frac{\partial}{\partial x} + y\sin z\frac{\partial}{\partial y} - \cos z\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_2 = -y\sin z\frac{\partial}{\partial x} + y\cos z\frac{\partial}{\partial y} + \sin z\frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Доведено наступну класифікаційну теорему:

Теорема 4.4 *Зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна*

поверхня в $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ *з лівоінваріантною субріманновою структурою, що визначається горизонтальним розподілом* $\mathcal{H} = X_1^{\perp}$*, є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю або у півплощині* $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$*,* $k \in \mathbb{Z}$*, або у гелікоїдальній поверхні з однією з наступних параметризацій:*

$$
\begin{aligned}
&r(s,t) = (x_0 - t\sin s, t\cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&r(s,t) = (x_0 \pm t - t\sin s, t\cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&r(s,t) = (x_0 + y_0\,\mathrm{sh}\,t - y_0\,\mathrm{ch}\,t\sin s, y_0\,\mathrm{ch}\,t\cos s, s), && t \in \mathbb{R},\\
&r(s,t) = (x_0 \pm y_0\,\mathrm{ch}\,t - y_0\,\mathrm{sh}\,t\sin s, y_0\,\mathrm{sh}\,t\cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&s \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(відповідно, є однією з перелічених поверхонь). Усі ці поверхні є стійкими в субріманновому сенсі, а отже, і в ріманновому сенсі.

Далі у цьому підрозділі ми ввели нове сімейство нелівоінваріантних субріманових структур з використанням іншого ортонормованого базису

$$Y_1 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z},\ Y_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y},\ Y_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

для якого теж довели класифікаційну теорему:

Теорема 4.5 *Нехай субріманова структура на* $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ *визначається двовимірним горизонтальним розподілом* $\mathcal{H} = X^{\perp}$*, де*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$$

і $\lambda \neq -1$*. Ця субріманова структура допускає вертикальні мінімальні поверхні лише при* $\lambda = 0$ *та* $\lambda = 1$*.*

Якщо $\mu \neq 0$*, то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю у евклідовій півплощині* $x = x_0$ *при* $\lambda = 0$ *або у евклідові півплощині* $z = z_0$ *при* $\lambda = 1$ *(відповідно, є такою площиною).*

Якщо $\mu = 0$ *та* $\lambda = 1$, *то зв'язна (відповідно, повна зв'язна) вертикальна поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли вона є областю або у евклідовій півплощині* $z = z_0$, *або у циліндрі з параметризацією*

$$r(s,t) = \left(s, y_0 \cos t, z_0 + \sqrt{2}\, t\right),\ s \in \mathbb{R},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

де $k \in \mathbb{Z}$ *(відповідно, є одною з таких поверхонь).*

Якщо $\mu = \lambda = 0$, *то повна (відповідно, повна зв'язна) поверхня є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це область у циліндрі (відповідно, циліндр) над геодезичною у гіперболічній площині* $\mathbb{H}^2$.

Усі ці поверхні є стійкими в субріхановому сенсі, а отже, і в ріхановому сенсі.

Усі перелічені тут результати роботи є новими. Зокрема, результати розділу 3 дозволили нам у розділі 4 розглянути широкі класи інваріантних та неінваріантних субріманових структур на тривимірних групах Лі, що раніше не досліджувалися.

Ключові слова: субріхановий многовид, лівоінваріантна метрика, ріманова зв'язність, метрична топологія, задача керування, нелінійна керована система, оптимізація, група Карно, алгебра Лі, мінімальна поверхня, вертикальна поверхня, потік, стійкість, середня кривина, оператор Якобі.

Abstract

Ihor O. Havrylenko. Minimal surfaces in sub-Riemannian geometry. – Qualifying scientific work in the form of a manuscript.

A thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Specialty 111 Mathematics (11 Mathematics and Statistics). – V.N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2026.

The thesis is devoted to the study of stability of minimal surfaces in sub-Riemannian geometry, in particular, to classification theorems for certain classes of minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian Lie groups and to their stability.

The purpose of the thesis is to study the stability of minimal surfaces in sub-Riemannian spaces.

The research object is submanifolds in sub-Riemannian geometry.

The subject of research is the minimality and the stability of surfaces in sub-Riemannian geometry.

The research uses **the methods** of differential geometry, in particular, Riemannian and sub-Riemannian geometry, geometry of submanifolds, differential equations, calculus of variations, and Lie theory.

The first chapter of the thesis contains the basics of sub-Riemannian geometry, examples of sub-Riemannian manifolds used in the research, the notions of minimality and stability of hypersurfaces, in particular, surfaces, in Riemannian and sub-Riemannian geometry, all the necessary definitions, and a review of the existing literature devoted to minimal submanifolds in sub-Riemannian manifolds and their stability.

The second chapter of the thesis is devoted to the study of surfaces in the three-dimensional manifold $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$, i.e., the universal covering of the group of orientation-preserving Euclidean plane isometries, which has a left-invariant sub-Riemannian structure. This group is described as the space $\mathbb{R}^3$ with an

orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = \cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \sin z\frac{\partial}{\partial x} - \cos z\frac{\partial}{\partial y}.$$

The left-invariant metric here is Euclidean. In Section 2.1 we derive a new formula for the first sub-Riemannian area variation of a surface in $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. From here on, N denotes the unit normal field of an immersed orientable surface Σ in a manifold M, whose sub-Riemannian structure is defined by a two-dimensional totally non-integrable distribution $\mathcal{H}$ and the restriction to $\mathcal{H}$ of a Riemannian metric $\langle\cdot,\cdot\rangle$ on M. In particular, for $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$, the distribution $\mathcal{H}$ is orthogonal to X_3. The *sub-Riemannian area* of a domain $D \subset \Sigma$ is defined as

$$A(D) = \int_D |N^h|\, d\Sigma,$$

where N^h is the orthogonal projection of the field N onto $\mathcal{H}$. The *normal variation* of a surface Σ given by a smooth function u with compact support is defined as the map $\varphi\colon \Sigma \times I \to M$, which is determined by the condition $\varphi_s(p) = \exp_p(s\,u(p)\,N(p))$, where I is some neighborhood of zero in $\mathbb{R}$ and $\exp_p$ is the Riemannian exponential map. By $A(s) = A(\Sigma_s)$ we denote the sub-Riemannian area of the variation surface $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$.

Theorem 2.1 *Let Σ be a surface in $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. Then its first normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function u with compact support has the following form:*

$$A'(0) = \int_{\Sigma\setminus\Sigma_0} |N^h|^{-1}\left(-\langle B(Z), Z\rangle + \langle N, X_3\rangle\langle \nu^h, X_1\rangle\langle \nu^h, X_2\rangle\right) u\, d\Sigma.$$

Here, Σ_0 is the set of *singular points* of Σ, i.e., those where $N^h = 0$, Z is the *characteristic vector field* that at each point $p \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ is obtained from $\nu^h(p) = N^h(p)/|N^h(p)|$ by a right angle rotation in the plane $\mathcal{H}_p$, B is the

Weingarten operator of Σ with respect to N.

A surface Σ is called *minimal*, if $A'(0) = 0$ for any normal variation with compact support in $\Sigma \setminus \Sigma_0$. A minimal surface Σ is called *stable*, if $A''(0) \geqslant 0$ for any normal variation with compact support in $\Sigma \setminus \Sigma_0$. The following criterion for the minimality of surfaces is derived from the previous formula.

Corollary 2.1 *A surface Σ in $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ is minimal if and only if*

$$\langle B(Z), Z\rangle = \langle N, X_3\rangle \langle \nu^h, X_1\rangle \langle \nu^h, X_2\rangle.$$

on $\Sigma \setminus \Sigma_0$.

From this, a minimality criterion for graphs was also obtained, and it was shown that the minimality in the Riemannian sense does not imply the minimality in the sub-Riemannian sense, or vice versa.

In Section 2.2, we derive the following new formula for the second sub-Riemannian area variation.

Theorem 2.2 *Let Σ be a minimal surface in $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$. Then its second normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function u with compact support has the following form:*

$$\begin{aligned} A''(0) = \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_0} \Big(& |N^h|^{-1} \left(Z(u) - \langle N, X_3\rangle |N^h| \langle \nu^h, X_2\rangle^2 u\right)^2 - \\ & -2|N^h| \langle B(Z), S\rangle^2 u^2 - 2\langle N, X_3\rangle \langle B(Z), S\rangle Z(u)u + \\ & +4\langle N, X_3\rangle |N^h| \langle \nu^h, X_1\rangle \langle \nu^h, X_2\rangle \langle B(S), S\rangle u^2 + \\ & +2\left(1 - 2|N^h|^2\right) \langle \nu^h, X_1\rangle \langle \nu^h, X_2\rangle S(u)u + \\ & + |N^h| \left(2 - 3|N^h|^2\right) \langle \nu^h, X_1\rangle^2 \langle \nu^h, X_2\rangle^2 u^2 \Big)\ d\Sigma. \end{aligned}$$

Here S is the field that together with Z forms an orthonormal frame on $\Sigma \setminus \Sigma_0$. Using this formula, we proved that minimal Euclidean planes are stable.

The third chapter of the thesis is devoted to the study of vertical minimal surfaces in three-dimensional sub-Riemannian manifolds and their stability. In

Section 3.1 we use the following definition of a vertical surface:

Definition 3.1 A surface Σ in a three-dimensional sub-Riemannian manifold M with a two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H}$ is called *vertical*, if its tangent plane $T_p\Sigma$ is perpendicular to the horizontal plane $\mathcal{H}_p$ of the sub-Riemannian structure (i.e., their normal vectors are orthogonal) at every point p of the surface.

In this section, we obtained a general first sub-Riemannian area variation formula of a vertical surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold.

Theorem 3.1 *Let Σ be a vertical surface in a 3-dimensional sub-Riemannian manifold M with a two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H}$. Then its first normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function u with compact support has the following form:*

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} Hu \, d\Sigma,$$

where H is the Riemann mean curvature of Σ.

Corollary 3.1 *A vertical surface is minimal in the sub-Riemannian sense if and only if it is minimal in the Riemannian sense, i.e., $H = 0$.*

In Section 3.2, we calculated the second sub-Riemannian area variation formula of a vertical minimal surface.

Theorem 3.2 *Let Σ be a vertical minimal surface in a three-dimensional sub-Riemannian manifold M with a two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H}$. Then its second normal sub-Riemannian area variation defined by a smooth function u with compact support has the following form:*

$$\begin{aligned} A''(0) = \int_{\Sigma} & - \left(X(u) - \langle \nabla_N X, N \rangle u\right)^2 + |\nabla_{\Sigma} u|^2 - \\ & - \left(\mathrm{Ric}\,(N,N) + |B|^2\right) u^2 \, d\Sigma, \end{aligned}$$

where ∇ and Ric *are the Riemannian curvature and Ricci tensor of M,*

respectively, X is the unit normal field of $\mathcal{H}$, which is tangent to Σ due to its verticality, ∇_Σ and $|B|$ are the Riemannian gradient and the norm of the second fundamental form of Σ, respectively.

Corollary 3.2 *If a vertical minimal surface is stable in the sub-Riemannian sense, it is also stable in the Riemannian sense.*

In Section 3.3, we introduced a new notion of the Jacobi operator for vertical surfaces. To do this, we first showed that the the second variation formula can be rewritten as

$$A''(0) = \int_\Sigma Z(u)^2 - f\,u^2\,d\Sigma$$

for some function f.

Proposition 3.1 *Let Σ be a minimal surface with empty singular set in a three-dimensional sub-Riemannian manifold whose second sub-Riemannian area variation has the form as above for an orthonormal frame $\{X, Z\}$ on Σ (in particular, vertical). Then it can be rewritten as*

$$A''(0) = -\int_\Sigma uL(u)\,d\Sigma$$

where L is the Jacobi operator on the space of smooth functions on Σ:

$$L(u) = Z(Z(u)) + \langle \nabla_X Z, X\rangle\, Z(u) + f\,u.$$

The *Jacobi operator* L, that appears in this statement, is similar to the Riemannian Jacobi operator. In particular, it is also a linear operator on $C^\infty(\Sigma)$. Next, we proved the following sufficient condition for the stability of vertical minimal surfaces:

Theorem 3.3 *Let Σ be a minimal surface in a 3-dimensional sub-Riemannian manifold with empty singular set, the second sub-Riemannian area variation as above, and the Jacobi operator L. If there exists a smooth positive*

function u on Σ such that $L(u) \leqslant 0$, then Σ is stable.

The fourth section of the thesis is devoted to the description of vertical minimal surfaces in three-dimensional Lie groups $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$, Nil, Sol, and $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ and to the study of their stability. In subsection 4.1, the following was proven:

Theorem 4.1 *Let a sub-Riemannian structure on $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ be defined by a two-dimensional left-invariant distribution $\mathcal{H} = X^{\perp}$, where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

and $\lambda^2 + \nu^2 > 0$. It allows vertical minimal surfaces if and only if $\mu = 0$.

When $\mu = 0$, a connected (resp., complete connected) vertical surface in $\widetilde{\mathrm{E}(2)}$ is minimal if and only if it is a subset either of a Euclidean plane $z = z_0$ or of a helicoid

$$(x - x_0)\cos(z + \alpha) + (y - y_0)\sin(z + \alpha) = 0,$$

where $\sin\alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$, $\cos\alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\nu^2}}$ (resp., is one of these surfaces). In this case, planes are stable and helicoids are unstable.

In Section 4.2, we consider vertical minimal surfaces in the group Nil, that is described as the space $\mathbb{R}^3$ with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

and the following classification theorem is proved:

Theorem 4.2 *Let a sub-Riemannian structure on Nil be defined by a left-invariant two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H} = X^{\perp}$, where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + X_3).$$

A connected (resp., complete connected) vertical surface in this sub-

Riemannian manifold is minimal if and only if it is a subset of a vertical Euclidean plane over an arbitrary straight line in the (x, y)-plane for $\lambda = \mu = 0$ or over a straight line with the direction (λ, μ) otherwise (resp., is such a plane).

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

In Section 4.3, we consider vertical minimal surfaces in the group *Sol*, which is described as the space $\mathbb{R}^3$ with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = e^{z}\frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

and prove the classification theorem:

Theorem 4.3 *Let a sub-Riemannian structure on Sol be defined by a left-invariant two-dimensional horizontal distribution $\mathcal{H} = X^{\perp}$, where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}(\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3)$$

and $\lambda\mu \neq 0$.

If $\nu \neq 0$, then a connected (resp., complete connected) vertical surface in this sub-Riemannian manifold is minimal if and only if it is a subset of a cylinder parameterized either as

$$r(s,t) = \left(x_0 - \frac{\lambda}{\nu}\,e^{-s}, t, s\right),$$

or as

$$r(s,t) = \left(t, y_0 + \frac{\mu}{\nu}\,e^{s}, s\right)$$

(resp., is such a cylinder).

If $\nu = 0$, then the connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if either it is a subset of a horizontal Euclidean plane $z = z_0$, or $\lambda = \pm\mu$ and the surface is a subset of a «hyperbolic helicoid»

parameterized as

$$r(s,t) = \left(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-t} s, y_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{t} s, t \right)$$

(resp., is such a surface).

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

In Section 4.4, we consider vertical minimal surfaces in the group $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$, that is, in particular, the universal covering of the unit tangent bundle of the hyperbolic plane and can be described as the set $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ with an orthonormal basis of left-invariant fields

$$X_1 = y\cos z \frac{\partial}{\partial x} + y \sin z \frac{\partial}{\partial y} - \cos z \frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_2 = -y \sin z \frac{\partial}{\partial x} + y \cos z \frac{\partial}{\partial y} + \sin z \frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

The following classification theorem has been proven:

Theorem 4.4 *A connected (resp., complete connected) vertical surface in* $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ *with the left-invariant sub-Riemannian structure defined by the horizontal distribution* $\mathcal{H} = X_1^{\perp}$ *is minimal if and only if it is a subset either of a half-plane* $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, *or of a helicoidal surface with one of the following parameterizations:*

$$\begin{aligned}
&r(s,t) = (x_0 - t\sin s, t\cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&r(s,t) = (x_0 \pm t - t\sin s, t\cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&r(s,t) = (x_0 + y_0 \sinh t - y_0 \cosh t \sin s, y_0 \cosh t \cos s, s), && t \in \mathbb{R},\\
&r(s,t) = (x_0 \pm y_0 \cosh t - y_0 \sinh t \sin s, y_0 \sinh t \cos s, s), && t \in (0,+\infty),\\
&s \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right),\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(resp., is one of such surfaces). All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

Also in this subsection, we introduced a new family of non-left-invariant sub-Riemannian structures using another orthonormal basis

$$Y_1 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z},\ Y_2 = y\,\frac{\partial}{\partial y},\ Y_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

for which we also proved a classification theorem:

Theorem 4.5 *Let a sub-Riemannian structure on* $\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$ *be defined by a two-dimensional horizontal distribution* $\mathcal{H} = X^{\perp}$*, where*

$$X = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+1}}(\lambda Y_1 + \mu Y_2 + Y_3)$$

and $\lambda \neq -1$*. This sub-Riemannian structure allows vertical minimal surfaces only for* $\lambda = 0$ *and* $\lambda = 1$*.*

If $\mu \neq 0$*, then a connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset of a Euclidean half-plane* $x = x_0$ *for* $\lambda = 0$ *or of a Euclidean half-plane* $z = z_0$ *for* $\lambda = 1$ *(resp., is such a plane).*

If $\mu = 0$ *and* $\lambda = 1$*, then a connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset either of the Euclidean half-plane* $z = z_0$*, or of a cylinder parameterized as*

$$r(s,t) = \left(s, y_0\cos t, z_0 + \sqrt{2}\,t\right),\ s \in \mathbb{R},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

where $k \in \mathbb{Z}$ *(resp., is one of such surfaces).*

If $\mu = \lambda = 0$*, then the connected (resp., complete connected) vertical surface is minimal if and only if it is a subset of a cylinder (resp., is a cylinder) over a geodesic in the hyperbolic plane.*

All these surfaces are stable in the sub-Riemannian sense and thus in the Riemannian sense.

All of the results listed above are new. In particular, the results of Chapter 3 allowed us to consider in Chapter 4 extensive classes of invariant and non-

invariant sub-Riemannian structures on three-dimensional Lie groups that had not been studied before.

Keywords: sub-Riemannian manifold, left-invariant metric, Riemannian connection, metric topology, control problem, nonlinear control system, optimization, Carnot group, Lie algebra, minimal surface, vertical surface, flow, stability, mean curvature, Jacobi operator.