Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Андреєва Дар'я Миколаївна

УДК 517.977

ДИСЕРТАЦІЯ

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ ОДНОРІДНИХ АПРОКСИМАЦІЙ НЕЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИСТЕМ

Спеціальність 113 Прикладна математика
(Галузь знань 11 Математика та статистика)

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_______________ Д. М. Андреєва

Науковий керівник: Ігнатович Світлана Юріївна,
доктор фізико-математичних наук, доцент.

Харків - 2025

АНОТАЦІЯ

Андреєва Д.М. Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню нелінійних систем, що є лінійними за керуванням, з одновимірним і багатовимірним виходом та їхніх однорідних апроксимацій.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений огляду відомих результатів з теорії нелінійних керованих систем, які є основою для подальших досліджень. Розділ починається з розгляду систем, лінійних за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)u_i,$$

де векторні поля $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ є аналітичними в деякому околі деякої фіксованої точки. Вводиться поняття ряду ітерованих інтегралів, який є важливим інструментом для аналізу таких систем: зокрема, траєкторія системи $x(t; u)$, що відповідає заданому керуванню $u = u(t)$, може бути розкладена в ряд ітерованих інтегралів

$$x(t; u) = x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

коефіцієнти якого визначаються як

$$c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} \ldots X_{i_1} E(x^0) \in \mathbb{R}^n.$$

Розглядаються вільні градуйовані асоціативні алгебри, зокрема, абстрактна вільна асоціативна алгебра $\mathcal{F}$, та вільна алгебра Лі $\mathcal{L}$, які використо-

вуються для дослідження властивостей базисів у цих алгебрах. Зокрема, асоціативна алгебра $\mathcal{F}$ будується за базисом $\eta_{i_1\dots i_k}$ елементів, які є абстрактним аналогом ітерованих інтегралів, і є градуйованою з порядком, який визначається як $\mathrm{ord}(\eta_{i_1\dots i_k}) = k$.

У розділі також представлені теореми про реалізовність рядів ітерованих інтегралів, які встановлюють умови, за яких ряд може бути реалізований як система, лінійна за керуванням, з виходом. Крім того, розглядаються відомі результати щодо однорідної апроксимації систем для випадку тривіального виходу. Зокрема, нагадується означення кореневої підалгебри Лі, яка визначає однорідну апроксимацію системи. Нарешті, обґрунтовується вибір теми та конкретних завдань дисертаційного дослідження, які полягають в узагальненні згаданого підходу на випадок систем з нетривіальним виходом.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню систем з одновимірним виходом, зокрема, знаходженню однорідної апроксимації мінімальної реалізації ряду.

У підрозділах 2.1-2.3 вводяться та обговорюються ряди ітерованих інтегралів, які представляють системи з виходом. Нехай M позначає множину мультиіндексів вигляду $I = (i_1, \dots, i_k)$, де $k \geq 1$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m$, а $M_0 = M \cup \{\varnothing\}$; далі $|I|$ позначає довжину I. Розглянемо ряд вигляду $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}$, а η_I – елементи вільної асоціативної алгебри $\mathcal{F}$, які утворюють базис $\mathcal{F}$ як лінійного простору, $\eta_\varnothing = 1$. Такий ряд визначає лінійне відображення $c : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, задане на базисних елементах $\mathcal{F}^e$ як $c(\eta_I) = c_I$, де $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$.

У підрозділі 2.3 сформульовано критерій реалізовності ряду у формі, яка застосовується в подальшому (теорема 2.1).

Теорема. *Нехай заданий ряд вигляду $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$, який задовольняє умову $|c(\eta_I)| \leq C_1 |I|! C^{|I|}$. Цей ряд є реалізовним тоді і тільки тоді, коли існує число $n \in \mathbb{N}$ та елементи $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$, для яких виконується* *наступна умова: для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ існують числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такі що*

$$c(a(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)) = 0$$

для будь-якого елемента $a \in \mathcal{F}^e$.

У такому випадку мінімальне n дорівнює мінімально можливій розмірності системи, яка реалізує ряд S; таку систему називатимемо мінімальною реалізацією ряду S.

Далі у розділі досліджуються мінімальні реалізації реалізовних рядів. Зокрема, доведено, що кореневу підалгебру Лі, яка визначає однорідну апроксимацію мінімальної реалізації, можна знайти, не знаходячи самої мінімальної реалізації (підрозділ 2.5, теорема 2.2).

Ключовим результатом цього розділу є класифікаційна теорема та її наслідок (підрозділ 2.6, теорема 2.3 і наслідок 2.1).

Теорема. *Нехай $\mathcal{L}'$ — градуйована підалгебра Лі ненульової скінченної корозмірності. Тоді існує одновимірний однорідний ряд такий, що $\mathcal{L}'$ є кореневою підалгеброю Лі його мінімальної реалізації.*

Наслідок. *Будь-яка градуйована підалгебра Лі скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю Лі мінімальної реалізації деякого одновимірного ряду, а розмірність цієї реалізації дорівнює корозмірності підалгебри Лі.*

Зауважимо, що доведення теореми 2.3 конструктивне, тобто показано, як побудувати відповідний ряд.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений однорідній апроксимації одновимірних рядів ітерованих інтегралів і задачі швидкодії для систем з одновимірним виходом.

У підрозділі 3.1 досліджені однорідні ряди і їх мінімальні реалізації, що включає аналіз їх кореневих підалгебр Лі та відповідних лівих ідеалів. Зокрема, наведений спосіб побудови відповідного лівого ідеалу як максимального (у сенсі включення), ортогонального однорідному ряду.

У підрозділі 3.2 введено поняття однорідної апроксимації одновимірного ряду.

Визначення. *Розглянемо ненульовий ряд* $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$. *Нехай* r *– мінімальний порядок доданків, які входять до* S, *тобто*

$$r = \min\{k \geq 1 : c_I \neq 0 \text{ для деяких } I \in M_k\}.$$

Тоді ряд

$$\widehat{S} = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I$$

називається однорідною апроксимацією ряду S.

Далі в підрозділі 3.2 досліджено зв'язок алгебраїчних властивостей вихідного ряду S і його однорідної апроксимації $\widehat{S}$, зокрема, зв'язок між їх кореневими підалгебрами Лі: доведено, що $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\widehat{S}}$ (теорема 3.1).

У підрозділі 3.3 наведено класифікацію таких підалгебр Лі. А саме, доведено таку теорему (теорема 3.2).

Теорема. *Нехай* $\mathcal{L}_1$ *та* $\mathcal{L}_2$ *– дві вкладені градуйовані підалгебри Лі, тобто* $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}$, *такі що* $0 < \operatorname{codim}(\mathcal{L}_2) \leq \operatorname{codim}(\mathcal{L}_1) < \infty$. *Тоді існує одновимірний ряд* S *такий, що* $\mathcal{L}_1$ *є його кореневою підалгеброю Лі, а* $\mathcal{L}_2$ *є кореневою підалгеброю Лі його однорідної апроксимації* $\widehat{S}$, *тобто* $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_1$ *і* $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_2$.

Доведення теореми 3.2 конструктивне, тобто показано, як можна побудувати відповідний ряд.

Підрозділи 3.4-3.6 присвячені дослідженню задачі швидкодії. У підрозділі 3.4 досліджується задача швидкодії для однорідних рядів або, що те ж саме, однорідних систем з однорідним одновимірним виходом. Запропоновано метод визначення мінімального часу досягнення заданого стану системи за допомогою аналізу відповідного функціонала на множині допустимих керувань. Доведено лему, що описує залежність оптимального часу від заданого значення виходу системи (лема 3.2).

Підрозділи 3.5-3.6 присвячені дослідженню апроксимації в сенсі швидкодії. Доведено, що коли значення виходу прямує до нуля, оптимальний час для вихідної системи та оптимальний час для її однорідної апроксимації асимптотично еквівалентні (теорема 3.3). Крім того, доведено, що за певних умов оптимальні керування однорідної апроксимації наближають оптимальні керування вихідної системи (теорема 3.4). Це підтверджує ефективність однорідної апроксимації при розв'язанні задач керування динамічними системами.

У підрозділі 3.6 задача оптимальної швидкодії для однорідного одновимірного ряду розглядається як задача оптимізації у нескінченновимірному просторі. Таке формулювання дозволяє запропонувати інший шлях розв'язання задачі швидкодії. Крім того, у підрозділі запропонований метод побудови наближеного керування як розв'язку скінченновимірної задачі оптимізації.

Четвертий розділ присвячено розвиненню отриманих результатів на випадок реалізовних рядів довільної розмірності або, що те ж саме, систем з багатовимірним виходом.

Розглядаються формальні ряди з векторними коефіцієнтами вигляду $S = \sum_{I\in M} c_I\eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}^p$. Спочатку вводиться поняття мінімальної частини ряду $S_{\min}$: це ряд, кожна компонента якого включає лише доданки, які мають мінімальний порядок: $S_{\min} = ((S_1)_{\min}, \cdots, (S_p)_{\min})^\top$, де компоненти є однорідними і мають вигляд $(S_j)_{\min} = \sum_{|I|=r_j}(c_I)_j\eta_I$, а r_j позначає мінімальний порядок членів ряду, що входять до компоненти S_j. Вводяться формальні функції, визначені за допомоги тасуючого добутку,

$$f(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{q_1+\cdots+q_p\geq 1} f_{q_1\ldots q_p} a_1^{ш q_1} ш \cdots ш a_p^{ш q_p}$$

з коефіцієнтами $f_{q_1\ldots q_p} \in \mathbb{R}$. Доведено, що лівий ідеал, який відповідає ряду, ортогональний мінімальній частині будь-якої формальної функції від ряду (лема 4.1):

Лема. *Нехай S — реалізовний ряд вигляду $S = \sum_{I\in M} c_I\eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}^p$.*

Тоді $\mathcal{J}_S \subset (f(S))^{\perp}_{\min}$ *для будь-якої формальної функції* $f(a_1,\dots,a_p)$.

Далі визначається максимальний за включенням лівий ідеал $\mathcal{J}_S^{\max}$, ортогональний множині N_S, і підалгебра Лі $\mathcal{L}_S^{\max}$, що породжує цей ідеал; вони будуть використані в підрозділі 4.2 при дослідженні однорідної апроксимації ряду.

У підрозділі 4.1 досліджується множина мінімальних частин компонентів ряду, розглянутих в лемі, позначена як $N_S = \{(f(S))_{\min} : f$ є формальною функцією$\}$. А саме, запропонований алгоритм побудови тасуючого базису N_S, тобто такої множини елементів $\widehat{a}_1,\dots,\widehat{a}_q \in N_S$, жоден з яких не є тасуючим поліномом від інших, а довільний елемент N_S є тасуючим поліномом від $\widehat{a}_1,\dots,\widehat{a}_q$ (лема 4.2).

У підрозділі 4.2 вводиться поняття однорідної апроксимації ряду з коефіцієнтами довільної вимірності, яке узагальнює як випадок одновимірного виходу, так і випадок тривіального виходу.

Визначення. *Ряд*

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q \end{pmatrix},$$

де $\widehat{a}_i$ *— однорідні елементи, є однорідною апроксимацією ряду* S, *якщо існує оборотне формальне відображення* F *таке, що ряд* $F(S)$ *має вигляд*

$$S' = F(S) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 + R_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q + R_q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

де жоден з елементів $\widehat{a}_1,\dots,\widehat{a}_q$ *не дорівнює тасуючому поліному від інших, а* R_i *містить елементи порядку, більшого за* $\operatorname{ord}(\widehat{a}_i)$.

Це визначення приводить до поняття алгебраїчної еквівалентності рядів: ми кажемо, що два ряди є алгебраїчно еквівалентними, якщо вони мають одну й ту саму однорідну апроксимацію.

Попередні результати приводять до наступного критерію (теорема 4.1).

Теорема. *Два ряди S^1 і S^2 алгебраїчно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $N_{S^1} = N_{S^2}$. В якості елементів $\widehat{a}_i$ однорідної апроксимації можна вибрати будь-який тасуючий базис множини N_{S^i}.*

Зокрема, алгебраїчно еквівалентні ряди можуть мати різну кількість компонент, але їх структура визначається спільною однорідною апроксимацією.

З іншого боку, якщо два ряди мають один і той самий максимальний лівий ідеал, їх теж можна вважати в певному сенсі еквівалентними. У підрозділі 4.2 введене поняття слабкої алгебраїчної еквівалентності: два ряди називаються слабо алгебраїчно еквівалентними, якщо вони мають один і той самий лівий ідеал.

Нарешті, показано, що якщо два ряди алгебраїчно еквівалентні, то вони слабо алгебраїчно еквівалентні (наслідок 4.1). Однак ряди можуть бути слабо алгебраїчно еквівалентними, але при цьому не бути алгебраїчно еквівалентими, що демонструють розглянуті в підрозділі 4.2 приклади.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, системи з виходом, дійсно-аналітичні вектор-функції, ряди ітерованих інтегралів, формальні степеневі ряди, вільна асоціативна алгебра, дужки Лі, реалізовність, однорідна апроксимація, коренева підалгебра Лі, лівий ідеал, керованість, задача швидкодії, задача оптимізації, диференціальне рівняння.

ABSTRACT

Daria M. Andreieva Construction and analysis of homogeneous approximations of nonlinear control systems. – Qualification scientific work is as a manuscript.

A dissertation on the degree of Doctor of Philosophy: Speciality 113 Applied mathematics (Field of knowledge 11 Mathematics and statistics). – V.N.Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of nonlinear systems that are linear in control with one-dimensional and multi-dimensional output and their homogeneous approximations.

The first chapter of the dissertation provides a review of known results in the theory of nonlinear control systems, which serve as the foundation for further research. The chapter begins with an examination of systems that are linear in control, given by the form

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i,$$

where the vector fields $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ are analytic in a neighborhood of a fixed point. The concept of a series of iterated integrals is introduced as a crucial tool for analyzing such systems. Specifically, the trajectory of the system $x(t; u)$ corresponding to a given control $u = u(t)$ can be expanded as a series of iterated integrals:

$$x(t; u) = x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

with coefficients given by

$$c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} \ldots X_{i_1} E(x^0) \in \mathbb{R}^n.$$

Free graded associative algebras are considered, in particular, the abstract free associative algebra $\mathcal{F}$ and the free Lie algebra $\mathcal{L}$, which are used to study the properties of bases in these algebras. The associative algebra $\mathcal{F}$ is constructed based on the basis elements $\eta_{i_1\ldots i_k}$, which serve as an abstract analogue of iterated integrals, and is graded by order defined as $\mathrm{ord}(\eta_{i_1\ldots i_k}) = k$.

Additionally, the chapter presents theorems on the realizability of series of iterated integrals, establishing the conditions under which such a series can be realized as a system that is linear in control, with an output. Known results on homogeneous approximation of systems in the case of a trivial output are also reviewed. In particular, the definition of the core Lie subalgebra, which determines the homogeneous approximation of a system, is recalled. Finally, the chapter justifies the choice of the research topic and specific dissertation objectives, which focus on extending this approach to systems with a nontrivial output.

The second chapter of the dissertation focuses on the study of systems with a one-dimensional output, specifically on finding the homogeneous approximation of the minimal realization of a series.

Sections 2.1–2.3 introduce and discuss series of iterated integrals that represent output systems. Let M denote the set of multi-indices of the form $I = (i_1, \ldots, i_k)$, where $k \geq 1$ and $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m$ and let $M_0 = M \cup \{\varnothing\}$, with $|I|$ representing the length of I. Consider a series of the form $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$, where $c_I \in \mathbb{R}$, and η_I are elements of the free associative algebra $\mathcal{F}$, forming the basis of $\mathcal{F}$ as a linear space, with $\eta_\varnothing = 1$. Such a series defines a linear map $c : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, given on the basis elements of $\mathcal{F}^e$ as $c(\eta_I) = c_I$, where $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$.

Section 2.3 presents a criterion for the realizability of a series in a form applicable to further research (Theorem 2.1).

Theorem. *Let a series of the form $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$ be given satisfying the condition $|c(\eta_I)| \leq C_1 |I|! C^{|I|}$. This series is realizable if and only if there exist a number $n \in \mathbb{N}$ and elements $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$, such that for any element $\ell \in \mathcal{L}$*

there exist numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, satisfying

$$c(a(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)) = 0$$

for any element $a \in \mathcal{F}^e$.

In this case, the minimal n is the minimal possible dimension of the system that realizes the series S; and such a system is referred to as the minimal realization of the series S.

The chapter further investigates minimal realizations of realizable series. In particular, it is shown that the core Lie subalgebra, which determines the homogeneous approximation of the minimal realization, can be found without explicitly constructing the minimal realization itself (Section 2.5, Theorem 2.2).

A key result of this chapter is the classification theorem and its corollary (Section 2.6, Theorem 2.3 and Corollary 2.1).

Theorem. *Let $\mathcal{L}'$ be a graded Lie subalgebra of nonzero finite codimension. Then there exists a one-dimensional homogeneous series such that $\mathcal{L}'$ is the core Lie subalgebra of its minimal realization.*

Corollary. *Any graded Lie subalgebra of finite codimension is the core Lie subalgebra of the minimal realization of some one-dimensional series, and the dimension of this realization is equal to the codimension of the Lie subalgebra.*

It is worth noting that the proof of Theorem 2.3 is constructive, meaning it provides a method for explicitly constructing the corresponding series.

The third chapter of the dissertation is dedicated to the homogeneous approximation of one-dimensional series of iterated integrals and the time-optimal control problem for systems with a one-dimensional output.

In Section 3.1, homogeneous series and their minimal realizations are studied, including an analysis of their core Lie subalgebras and the corresponding left ideals. In particular, a method is presented for constructing the corresponding left ideal as the maximal (in terms of inclusion) subspace orthogonal to the homogeneous series.

Section 3.2 introduces the concept of the homogeneous approximation of a one-dimensional series.

Definition. *Consider a nonzero series* $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$*. Let* r *be the minimal order of the terms present in* S*, i.e.,*

$$r = \min\{k \geq 1 : c_I \neq 0 \text{ for some } I \in M_k\}.$$

Then, the series

$$\widehat{S} = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I$$

is called the homogeneous approximation of the series S*.*

Furthermore, Section 3.2 explores the algebraic relationship between the original series S and its homogeneous approximation $\widehat{S}$, particularly the relationship between their core Lie subalgebras. It is proven that $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\widehat{S}}$ (Theorem 3.1).

Section 3.3 presents the classification of such Lie subalgebras. Specifically, the following theorem is established (Theorem 3.2).

Theorem. *Let* $\mathcal{L}_1$ *and* $\mathcal{L}_2$ *be two nested graded Lie subalgebras, i.e.,* $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}$*, such that* $0 < \operatorname{codim}(\mathcal{L}_2) \leq \operatorname{codim}(\mathcal{L}_1) < \infty$*. Then, there exists a one-dimensional series* S *such that* $\mathcal{L}_1$ *is its core Lie subalgebra, and* $\mathcal{L}_2$ *is the core Lie subalgebra of its homogeneous approximation* $\widehat{S}$*, i.e.,* $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_1$ *and* $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_2$*.*

The proof of Theorem 3.2 is constructive, providing an explicit method for constructing the corresponding series.

Sections 3.4–3.6 are dedicated to the study of the time-optimal control problem. Section 3.4 investigates the time-optimal control problem for homogeneous series, or equivalently, homogeneous systems with a homogeneous one-dimensional output. A method is proposed for determining the minimal time required to reach a given system state by analyzing an appropriate functional over the set of admissible controls. A lemma is proven that describes the dependence of the optimal time on the given output value of the system (Lemma

3.2).

Sections 3.5–3.6 focus on approximation in the sense of time-optimal control. It is shown that as the output value approaches zero, the optimal time for the original system and its homogeneous approximation become asymptotically equivalent (Theorem 3.3). Moreover, it is proven that under certain conditions, the optimal controls of the homogeneous approximation closely approximate the optimal controls of the original system (Theorem 3.4). This confirms the effectiveness of homogeneous approximation in solving control problems for dynamic systems.

In Section 3.6, the time-optimal control problem for a homogeneous one-dimensional series is formulated as an optimization problem in an infinite-dimensional space. This formulation allows us to propose an alternative approach to solving the time-optimal control problem. Additionally, a method is proposed for constructing an approximate control as a solution to a finite-dimensional optimization problem.

The fourth chapter is devoted to extending the obtained results to the case of realizable series of arbitrary dimension, or equivalently, systems with a multi-dimensional output.

The chapter considers formal series with vector coefficients of the form $S = \sum_{I\in M} c_I\eta_I$, where $c_I \in \mathbb{R}^p$. First, the concept of the minimal part of a series, $S_{\min}$: is introduced: this is a series in which each component includes only terms of minimal order: $S_{\min} = ((S_1)_{\min}, \cdots, (S_p)_{\min})^\top$, where the components are homogeneous and have the form $(S_j)_{\min} = \sum_{|I|=r_j}(c_I)_j\eta_I$, and r_j denotes the minimal order of the terms appearing in the component S_j. Formal functions defined using the shuffle product are introduced:

$$f(a_1, \dots, a_p) = \sum_{q_1+\cdots+q_p\geq 1} f_{q_1\dots q_p} a_1^{ш q_1} ш \cdots ш\, a_p^{ш q_p}$$

with coefficients $f_{q_1\dots q_p} \in \mathbb{R}$. It is proven that the left ideal corresponding to a series is orthogonal to the minimal part of any formal function of the series

(Lemma 4.1).

Lemma. *Let S be a realizable series of the form $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$, where $c_I \in \mathbb{R}^p$. Then $\mathcal{J}_S \subset (f(S))^{\perp}_{\min}$ for any formal function $f(a_1, \ldots, a_p)$.*

Next, the maximal left ideal $\mathcal{J}_S^{\max}$ (in terms of inclusion) that is orthogonal to the set N_S is introduced, along with the Lie subalgebra $\mathcal{L}_S^{\max}$, that generates this ideal. These concepts are used in Section 4.2 to study the homogeneous approximation of a series.

In Section 4.1, the set of minimal parts of series components considered in the lemma, defined as $N_S = \{(f(S))_{\min} : f \text{ is a formal function}\}$, is studied. Specifically, an algorithm for constructing the shuffle basis of N_S, is proposed. This basis consists of a set of elements $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q \in N_S$, such that none of them is a shuffle polynomial of the others, while any element of N_S is a shuffle polynomial of $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q$ (Lemma 4.2).

In Section 4.2, the concept of the homogeneous approximation of a series with coefficients of arbitrary dimension is introduced, generalizing both the one-dimensional output case and the trivial output case.

Definition. *A series*

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q \end{pmatrix},$$

where $\widehat{a}_i$ are homogeneous elements, is called the homogeneous approximation of a series S, if there exists an invertible formal transformation F such that the transformed series $F(S)$ has the form

$$S' = F(S) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 + R_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q + R_q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

where none of the elements $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q$ *is a shuffle polynomial of the others, and each* R_i *contains terms of order greater than* $\mathrm{ord}(\widehat{a}_i)$*.*

This definition leads to the concept of algebraic equivalence of series: two series are said to be algebraically equivalent if they share the same homogeneous approximation.

The previous results lead to the following criterion (Theorem 4.1).

Theorem. *Two series* S^1 *and* S^2 *are algebraically equivalent if and only if* $N_{S^1} = N_{S^2}$*. The elements* $\widehat{a}_i$ *of their homogeneous approximation can be chosen as any shuffle basis of the set* N_{S^i}*.*

In particular, algebraically equivalent series may have a different number of components, but their structure is determined by a common homogeneous approximation.

On the other hand, if two series share the same maximal left ideal, they can also be considered equivalent in a certain sense. In Section 4.2, the concept of weak algebraic equivalence is introduced: two series are called weakly algebraically equivalent if they share the same left ideal.

Finally, it is shown that if two series are algebraically equivalent, then they are also weakly algebraically equivalent (Corollary 4.1). However, weakly algebraically equivalent series are not necessarily algebraically equivalent, as demonstrated by the examples given in Section 4.2.

Key words: nonlinear control system, systems with output, real-analytic vector functions, series of iterated integrals, formal power series, free associative algebra, Lie brackets, realizability, homogeneous approximation, core Lie subalgebra, left ideal, controllability, time-optimal control problem, optimization problem, differential equation.

Список публікацій здобувача

Статті у наукових фахових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Andreieva D.M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation of one-dimensional series of iterated integrals and time optimality. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2023. Vol. 31, No 2. P. 1–23.

   Keywords: nonlinear control system, series of iterated integrals, free associative algebra, core Lie subalgebra, homogeneous approximation, time-optimal control problem.

   DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142308 (Scopus).

Статті у наукових фахових виданнях України:

2. Andreieva D. M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation for minimal realizations of series of iterated integrals. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 96. P. 23–39.

   Keywords: homogeneous approximation; series of iterated integrals; minimal realization; core Lie subalgebra.

   DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2022-96-02

   (*Особистий внесок здобувача: отримання результатів щодо однорідної апроксимації мінімальної реалізації для одновимірних рядів ітерованих інтегралів.*

   Особистий внесок співавтора: постановка задачі і обговорення результатів.)

3. D.M. Andreieva, S.Yu. Ignatovich. Homogeneous approximations of nonlinear control systems with output and weak algebraic equivalence. *Visnyk*

of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2024, V. 99, P. 36-50.

Keywords: homogeneous approximation; nonlinear control system; series of iterated integrals; core Lie subalgebra; maximal left ideal

DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2024-99-03

(*Особистий внесок здобувача: отримання результатів щодо однорідної апроксимації для рядів ітерованих інтегралів довільної вимірності, дослідження зв'язку між властивостями алгебраїчної еквівалентності і слабкої алгебраїчної еквівалентності.*

Особистий внесок співавтора: постановка задачі і обговорення результатів.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximations for control systems with output. *5-th International Conference «Differential Equations and Control Theory»*. Kharkiv, September 27-29, 2021. Book of abstracts, P. 9.

5. Андреєва Д. М. Апроксимація відображення «вхід-вихід». *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 12-13 травня 2023 року. Тези доповідей, С.22-24.

6. Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximation of series of iterated integrals and time optimality. *6-th International Conference «Differential Equations and Control Theory»*. Kharkiv, October 11-13, 2023. Book of abstracts, P. 5.

7. Андреєва Д. М. Задача оптимальної швидкодії для одної однорідної керованої системи. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 10-11 травня 2024 року. Тези доповідей, С. 29-30.

Зміст

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Клас нелінійних керованих систем досліджується протягом багатьох десятиліть з різних точок зору і з використанням різноманітних підходів [20]. Так, традиційним є використання методів диференціальної геометрії [5], [23]. Але для нелінійних систем, які є лінійними за керуванням, актуально використовувати й інші підходи, зокрема, алгебраїчний підхід. Детальніше, розглянемо нелінійну керовану систему вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i,$$

де векторні поля $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ є аналітичними в деякому околі деякої фіксованої точки x^0. Траєкторію такої системи, яка починається в x^0, можна представити у вигляді ряду ітерованих інтегралів та досліджувати його за допомогою алгебраїчних інструментів [17].

Одним з об'єктів для дослідження, що викликає великий інтерес, є однорідна апроксимація. Ідея полягає в тому, щоб наблизити початкову нелінійну систему іншою нелінійною, але простішою системою; в дисертаційній роботі в якості апроксимацій ми розглядаємо однорідні системи. Зокрема, за допомогою алгебраїчного підходу можна отримати класифікацію нелінійних керованих систем з точки зору їх однорідних апроксимацій. Детальні дослідження різних аспектів задачі однорідної апроксимації можна знайти, зокрема, в роботах [3], [4], [6], [12], [14], [18], [19], [25], [31], [37]–[41].

Однорідні апроксимації будуються для наближення траєкторій систем. Проте саме для систем зазначеного класу традиційно розглядають не траєкторію, а вихід $y = h(x)$. Вихід теж можна подати у вигляді ряду ітерованих інтегралів; для таких рядів природно вивчати, наприклад, питання реалізовності [16], [21]. Отже, виникає наступна задача: узагальнити алгебраїчні методи та дослідити задачу однорідної апроксимації для нелінійних систем, лінійних за керуванням, з довільним виходом.

Мета і завдання дослідження.

- *Мета* – постановка та дослідження задачі однорідної апроксимації для нелінійних керованих систем з виходом; застосування і розвинення алгебраїчного підходу із залученням вільних алгебр для побудови і класифікації однорідних апроксимацій таких систем.

- *Об'єкт дослідження* – нелінійні керовані системи, формальні реалізовні ряди у вільній асоціативній алгебрі, однорідна апроксимація, коренева підалгебра Лі, ліві ідеали, породжені градуйованими підалгебрами Лі, задача швидкодії для нелінійних керованих систем з виходом.

- *Предмет дослідження* – властивості однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем з виходом та реалізовних рядів ітерованих інтегралів, зв'язок апроксимації в сенсі швидкодії і однорідної апроксимації.

- *Завдання дослідження:*

  1. Розглянути клас формальних рядів в абстрактній асоціативній алгебрі, що відповідає реалізовним рядам ітерованих інтегралів, і запропонувати метод побудови кореневої підалгебри Лі мінімальної реалізації без знаходження реалізуючої системи.

  2. Отримати опис усіх можливих кореневих підалгебр Лі мінімальних реалізацій реалізовних рядів ітерованих інтегралів.

  3. Ввести поняття однорідної апроксимації для ряду з одновимірними коефіцієнтами (нелінійної системи з одновимірним виходом) і дослідити зв'язок між однорідною апроксимацією ряду та

однорідною апроксимацією його мінімальної реалізації, а саме, між відповідними кореневими підалгебрами Лі.

4. Отримати опис усіх можливих пар: коренева підалгебра Лі мінімальної реалізації ряду – коренева підалгебра Лі однорідної апроксимації ряду.
5. Дослідити задачу швидкодії для однорідних одновимірних рядів.
6. Дослідити зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії для одновимірних рядів.
7. Ввести поняття однорідної апроксимації для реалізовного ряду з коефіцієнтами довільної розмірності (нелінійної системи з довільним виходом), отримати опис однорідних апроксимацій на мові лівих ідеалів, породжених градуйованими підалгебрами Лі.
8. Запропонувати різні поняття алгебраїчної еквівалентності (однорідні апроксимації співпадають або ліві ідеали співпадають) для реалізовних рядів з коефіцієнтами довільної розмірності і дослідити зв'язок між ними.

- *Методи дослідження* – методи теорії керування, метод рядів та вільних алгебр, методи математичного і функціонального аналізу, методи теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. В роботі поняття однорідної апроксимації для систем з виходом вперше запропоновано та досліджено з використанням методу рядів та вільних алгебр. Зокрема, запропоновано метод побудови однорідних апроксимації за допомогою максимальних за включенням лівих ідеалів, породжених підалгебрами Лі. Крім того, досліджений зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації у сенсі швидкодії для одновимірних рядів. Запропоновані нові поняття алгебраїчної еквівалентності і слабкої алгебраїчної еквівалентності систем з виходом довільної розмірності, досліджений зв'язок між ними.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках науково-дослідної роботи за темою «Оптимальне керування, стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи» (номер держреєстрації 0119U002530).

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи можуть бути використані для побудови допустимого та/або оптимального керування для нелінійних систем та дослідження їх властивостей.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійним науковим дослідженням автора. Всі сформульовані в ній висновки, теоретичні положення та запропоновані підходи базуються на особистих дослідженнях здобувача. Постановка завдання була здійснена науковим керівником проф. Ігнатович С. Ю. Усі результати, представлені в розділах 2-4 дисертації, отримані автором особисто, однак протягом усього дослідження вони активно обговорювалися з науковим керівником. Для забезпечення повноти викладу в розділі 1 також наводяться результати, що належать іншим дослідникам, із відповідними посиланнями на їхні роботи. Роботи [8], [9], [11] виконані у співпраці з науковим керівником проф. Ігнатович С. Ю.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наступних конференціях:

1. 5-th International Conference «Differential Equations and Control Theory». Kharkiv, September 27-29, 2021.

2. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: XVII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених, Харків, 12-13 травня 2023 року.

3. 6-th International Conference «Differential Equations and Control Theory». Kharkiv, October 11-13, 2023.

4. Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених, Харків, 10-11 травня 2024 року.

Публікації. Всі основні результати за темою дисертації опубліковано у 7 наукових працях, серед яких 3 статі [8], [9], [11] у фахових виданнях і 4 тези доповідей [1], [2], [7], [10] на наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг дисертації – 140 сторінок. Обсяг основної частини дисертації – 112 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 17 сторінок. Список використаних джерел містить 41 найменування.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР ТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Нелінійні системи, лінійні за керуванням

Ми будемо розглядати клас систем вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i, \tag{1.1}$$

де векторні поля $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ є дійсно-аналітичними в деякому околі деякої фіксованої точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Зауважимо, що такі системи нелінійні за координатою x, але лінійні за керуванням u.

Нехай $x(t;u)$ позначає траєкторію системи, яка починається в точці $x(0;u) = x^0$ і відповідає керуванню $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$. Розглянемо вектор-функцію

$$y = h(x), \quad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q, \tag{1.2}$$

яка є дійсно-аналітичною в околі x^0. Ми інтерпретуємо $y(t;u) = h(x(t;u))$ як *вихід* системи (1.1). В багатьох задачах саме властивості виходу є предметом дослідження.

Системи (1.1), (1.2) інтенсивно вивчалися протягом кількох десятиліть, оскільки є важливими для моделювання різноманітних процесів. Як приклад, вкажемо неголономні механічні системи, такі як керування одноколісним велосипедом, літаком, локомотивом з причепами тощо [29], [13], [41].

Для дослідження таких систем активно використовувалися методи диференціальної геометрії [23]. Так, властивість керованості системи (1.1) пов'язана з властивістю інтегровності розподілу, що породжується векторними полями $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ і їх дужками Лі, тож може бути досліджена на мові алгебри Лі, що породжується цими векторними полями.

З іншого боку, плідним є інший підхід до дослідження властивостей систем вигляду (1.1), з точки зору диференціальних рівнянь. Уявімо, що в систему підставлені конкретні керування $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, і розглянемо задачу Коші

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i(t), \quad x(0) = x^0.$$

Оскільки $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ є аналітичними, ми можемо «розв'язати» цю задачу, виписавши явний вигляд траєкторії системи $x(t; u)$. У загальному випадку отримуємо ряд такого вигляду:

$$x(t;u) = x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1. \tag{1.3}$$

Це є ряд *ітерованих інтегралів* з векторними коефіцієнтами. Коефіцієнти $c_{i_1 \ldots i_k}$ визначаються за формулою

$$c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} \ldots X_{i_1} E(x^0) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

де використане позначення $E(x) = x$, а векторні поля $X_i(x)$ діють як диференціальні оператори першого порядку: $X_i(x) f(x) = f'_x(x) X_i(x)$. Тобто $c_{i_1 \ldots i_k}$ – це сталі вектори, які визначаються векторними полями в околі точки x^0 і не залежіть від керування. Зауважимо, що ітеровані інтеграли не залежать від системи (1.1). Можна показати, що для довільних (вимірних) керувань, які обмежені фіксованою константою, ряд у правій частині (1.3) абсолютно збігається для достатньо малих t.

Аналогічно можна отримати зображення для виходу:

$$y(t;u) = h(x^0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1, \tag{1.5}$$

де коефіцієнти $c_{i_1 \ldots i_k}$ визначаються за формулою

$$c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} \ldots X_{i_1} h(x^0) \in \mathbb{R}^q, \tag{1.6}$$

причому ряд також абсолютно збігається для обмежених керувань і достатньо малих t. Метод рядів ітерованих інтегралів був запропонований і розвинутий М. Флісом [17] і розвинутий в роботах Г. Сусмана, М. Кавскі [24], [26], а також в роботах Г.М.Скляра, С.Ю.Ігнатович [34], [35], [36], [4], [38]. Цей підхід дозволяє застосувати алгебраїчні методи і, як наслідок, звести розв'язання багатьох задач до комбінаторних алгоритмів і алгоритмів лінійної алгебри. Огляд результатів може бути знайдений в роботі [25]. Методу рядів і вільних алгебр присвячена дисертація С.Ю.Ігнатович [3], результати якої є відправною точкою для даної дисертації.

1.2 Ряди ітерованих інтегралів

Введемо позначення для ітерованих інтегралів:

$$\eta_{i_1\ldots i_k}(t,u)=\int_0^t\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}}u_{i_1}(\tau_1)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\cdots d\tau_1 \tag{1.7}$$

і розглянемо їх детальніше. Якщо $k\geq 2$, то ітеровані інтеграли є нелінійними функціоналами від $u_i(t)$, а при $k=1$ це лінійні функціонали. Зауважимо, що при $k\geq 2$ кратні інтеграли беруться по симплексах, тому, взагалі кажучи, порядок індексів є важливим. Крім того, маємо очевидну оцінку для ітерованих інтегралів: якщо $|u_i(t)|\leq 1$, $i=1,\ldots,m$, то $|\eta_{i_1\ldots i_k}(t,u)|\leq \frac{t^k}{k!}$.

Для нас найважливіша властивість ітерованих інтегралів – це те, що вони утворюють вільну асоціативну алгебру, тому для дослідження можна застосовувати алгебраїчні методи. Пояснимо це детальніше. Будемо розглядати ітеровані інтеграли як функціонали, задані на множині всіх вимірних керувань, які задовольняють обмеження $|u_i(t)|\leq 1$, $i=1,\ldots,m$. Можна показати, що ці функціонали є лінійно незалежними [17]: якщо (скінченна) лінійна комбінація таких функціоналів дорівнює нулю на всіх допустимих керуваннях, то коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю. Отже, можна розглянути лінійний простір (над $\mathbb{R}$), базис якого – це множина

$$\{\eta_{i_1\ldots i_k}(t,u) : k \geq 1,\ 1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq m\}.$$

У цьому просторі можна ввести додаткову алгебраїчну операцію, яка задається на базисних елементах як

$$\eta_{i_1\ldots i_k}(t,u) \vee \eta_{j_1\ldots j_p}(t,u) = \eta_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_p}(t,u)$$

і розширюється на весь простір за лінійністю. Очевидно, ця операція є асоціативною. Підкреслимо, що вона не є добутком функціоналів. З так заданою операцією простір перетворюється на вільну асоціативну алгебру, яку ми позначимо $\mathcal{F}_t$.

Зауважимо, що ця алгебра складається з функціоналів, визначених на функціях, які задані на проміжку $[0,t]$, хоча очевидно, що якщо розглянути дві такі алгебри для двох різних додатних значень t, то алгебри вийдуть ізоморфними. Тому зручно ввести *абстрактну* вільну асоціативну алгебру $\mathcal{F}$, яка ізоморфна всім алгебрам $\mathcal{F}_t$. Зручно ввести її як вільну асоціативну алгебру, породжену *буквами* $\eta_1,\ldots,\eta_m$, з яких складаються *слова* вигляду $\eta_{i_1\ldots i_k} = \eta_{i_1}\cdots\eta_{i_k}$. Зауважимо, що слова є базисом алгебри $\mathcal{F}$, якщо розглядати її як лінійний простір. Тоді поряд з рядом (1.5) можна розглядати *формальний* ряд

$$S = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_k\leq m} c_{i_1\ldots i_k}\eta_{i_1\ldots i_k} \tag{1.8}$$

елементів алгебри $\mathcal{F}$ з такими самим коефіцієнтами, як в (1.5). Таким чином, система (1.1), (1.2) породжує лінійне відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^q$, яке задається на базисних елементах формулою $c(\eta_{i_1\ldots i_k}) = c_{i_1\ldots i_k}$.

З вільною асоціативною алгеброю тісно пов'язана інша вільна алгебра – *алгебра Лі*, яка породжується тими самими елементами $\eta_1,\ldots,\eta_m$ і операцією-комутатором – дужками Лі $[a,b] = ab - ba$. Позначимо цю алгебру Лі як $\mathcal{L}$.

Тепер повернемось до ітерованих інтегралів (1.7) і нагадаємо, що при малих t інтеграл кратності k має порядок t^k. Цей порядок відповідає і порядку, в якому додаються члени ряду (1.5). Для абстрактної алгебри $\mathcal{F}$ це означає, що елементу $\eta_{i_1\ldots i_k}$ можна приписати порядок k. Цей порядок визначає градуювання «за довжиною» в алгебрі $\mathcal{F}$. А саме, $\mathcal{F}$ можна подати як пряму суму підпросторів

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k,$$

де

$$\mathcal{F}^k = \mathrm{Lin}\{\eta_{i_1\ldots i_k} : 1 \le i_1, \ldots, i_k \le m\},\ \ k \ge 1.$$

Тоді очевидно, що виконується умова з означення градуювання:

$$\mathcal{F}^k \mathcal{F}^p \subset \mathcal{F}^{k+p}, \quad k, p \ge 1.$$

Для алгебри Лі $\mathcal{L}$ це градуювання визначається як

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k,\ \ \mathcal{L}^k = \mathcal{F}^k \cap \mathcal{L},\ \ k \ge 1.$$

Далі будемо казати, що елемент є однорідним, якщо він належить одному з підпросторів $\mathcal{F}^k$.

Нагадаємо відому теорему Пуанкаре-Біргофа-Вітта щодо зв'язку алгебр $\mathcal{F}$ і $\mathcal{L}$, яка буде суттєво використовуватись далі.

Теорема 1.1. ([33]) *Припустимо, що $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ є (однорідним) базисом алгебри Лі $\mathcal{L}$. Тоді множина*

$$\{\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_k}^{q_k} : k \ge 1,\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k,\ q_1, \ldots, q_k \ge 1\} \tag{1.9}$$

утворює (однорідний) базис $\mathcal{F}$, де $\ell^q = \ell \cdots \ell$ (у добутку справа стоять q множників).

Ми нагадаємо ще один спосіб побудувати базис в алгебрі $\mathcal{F}$.

Для цього спочатку введемо *скалярний добуток* $\langle a, b\rangle$ в алгебрі $\mathcal{F}$, вважаючи базис $\{\eta_{i_1\ldots i_k} : 1 \le i_1, \ldots, i_k \le m\}$ ортонормованим.

Крім того, введемо *тасуючий добуток* [32], [33] в алгебрі $\mathcal{F}$: за означенням, він вводиться рекурентно

$$\begin{gathered}\eta_i \sqcup\!\sqcup\, \eta_j = \eta_{ij} + \eta_{ji},\\ \eta_{i_1\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_j = \eta_j \sqcup\!\sqcup\, \eta_{i_1\ldots i_k} = \eta_{i_1}(\eta_{i_2\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_j) + \eta_{ji_1\ldots i_k}, \quad k \ge 2,\\ \eta_{i_1\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\ldots j_p} = \eta_{i_1}(\eta_{i_2\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\ldots j_p}) + \eta_{j_1}(\eta_{i_1\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_2\ldots j_p}), \quad k, p \ge 2.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Зауважимо, що тасуючий добуток є асоціативним і комутативним. Його можна ввести по-іншому. Нехай задані два впорядкованих набора індексів: $(i_1, \ldots, i_k)$ та $(j_1, \ldots, j_p)$. Тасуючою перестановкою називається впорядкований набір довжини $k + p$, який складається з цих двох наборів, впорядкований так, щоб «внутрішній порядок» кожного набору не порушився (це нагадує тасування колоди карт, звідси така назва). Тасуючим добутком $\eta_{i_1\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\ldots j_p}$ називається сума всіх елементів $\eta_{q_1\ldots q_{k+p}}$, яка береться по всіх тасуючих перестановках $(q_1, \ldots, q_{k+p})$ наборів $(i_1, \ldots, i_k)$ та $(j_1, \ldots, j_p)$. Наприклад,

$$\eta_{12} \sqcup\!\sqcup\, \eta_3 = \eta_{123} + \eta_{132} + \eta_{312}, \qquad \eta_{12} \sqcup\!\sqcup\, \eta_2 = 2\eta_{122} + \eta_{212},$$

$$\eta_{12} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{34} = \eta_{1234} + \eta_{1324} + \eta_{3124} + \eta_{1342} + \eta_{3142} + \eta_{3412},$$

$$\eta_{12} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{12} = 2\eta_{1212} + 4\eta_{1122}.$$

Важливість тасуючого добутку для даного дослідження полягає в його зв'язку з добутком ітерованих інтегралів як функціоналів. А саме,

$$\eta_{i_1\ldots i_k}(t, u)\eta_{j_1\ldots j_p}(t, u) = (\eta_{i_1\ldots i_k} \sqcup\!\sqcup\, \eta_{j_1\ldots j_p})(t, u),$$

де ліворуч стоїть добуток двох ітерованих інтегралів, а праворуч – спочатку знаходиться тасуючий добуток, а потім підставляються відповідні ітеровані інтеграли.

Зв'язок тасуючого добутку, скалярного добутку і алгебри Лі добре відомий. Наприклад, відомо, що елемент $\mathcal{F}$ належить $\mathcal{L}$ тоді і тільки тоді, коли він ортогональний тасуючому добутку будь-яких елементів $\mathcal{F}$ (теорема Р. Рі, [32]). Розвитком цієї ідеї є наступна теорема Мелансона-Рейтенауера [30].

Теорема 1.2. ([30]) *Нехай*

$$\{d_{i_1\dots i_k}^{q_1\dots q_k} : k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k,\ q_1, \dots, q_k \geq 1\} \tag{1.11}$$

– дуальний базис для базиса (1.9) у сенсі скалярного добутку, тобто нехай

$$\langle d_{i_1\dots i_k}^{q_1\dots q_k}, \ell_{j_1}^{p_1} \cdots \ell_{j_s}^{p_s} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{якщо } k = s,\ i_r = j_r,\ q_r = p_r \text{ для всіх } r \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді

$$d_{i_1\dots i_k}^{q_1\dots q_k} = \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_k}^{ш q_k}, \tag{1.12}$$

де $d^{ш q} = d\, ш \cdots ш\, d$ (у добутку справа стоять q множників). Тут для зручності використовується позначення $d_i = d_i^1$.

Користуючись цією теоремою, ми можемо переписати ряд S у дуальному базисі (1.11):

$$S = c(1) + \sum \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} c(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_k}^{q_k}) d_{i_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{i_k}^{ш q_k},$$

де сума береться по всіх індексах $k \geq 1$ та $1 \leq i_1 < \dots < i_k$, $q_1, \dots, q_k \geq 1$. Зауважимо, що, оскільки тасуючий добуток є комутативним, то цей ряд влаштований як степеневий ряд від комутуючих змінних.

1.3 Задача реалізовності

Повернемось до рядів вигляду (1.8) і розглянемо таке питання. Нехай заданий такий ряд з *довільними* сталими коефіцієнтами. Чи існують такі векторні поля $X_i(x)$ і вектор-функція $h(x)$, для яких виконані рівності (1.6)?

Визначення 1.1. *Ряд* (1.8) *називається реалізовним, якщо існують векторні поля* $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ *і функція* $h(x)$*, аналітичні в деякому околі деякої точки* x^0*, такі, що для довільних* $1 \le i_1, \ldots, i_k \le m$ *виконується рівність* (1.6) *і* $c_0 = h(x^0)$*.*

У такому разі (1.1) *є реалізуючою системою для* (1.8)*.*

Очевидно, що одна з умов реалізовності пов'язана з обмеженнями на норми коефіцієнтів: вони не можуть зростати дуже швидко. А інша умова визначає алгебраїчні властивості коефіцієнтів. Нагадаємо відповідний результат.

Нехай $\mathcal{B}$ позначає лінійний простір формальних рядів вигляду (1.8) з довільними сталими коефіцієнтами (векторами з простору $\mathbb{R}^q$). Розглянемо лінійне відображення $F_c : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$, яке визначається формулою

$$F_c(\ell) = c(\ell) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} c(\eta_{i_1 \ldots i_k} \ell) \eta_{i_1 \ldots i_k}. \tag{1.13}$$

Визначення 1.2. ([20]) *Нехай заданий ряд вигляду* (1.8)*. Рангом Лі цього ряду називається розмірність образу відображення* F_c *у просторі* $\mathcal{B}$*:*

$$\rho_L(c) = \dim \left\{ F_c(\ell) : \ell \in \mathcal{L} \right\}.$$

Теорема 1.3. ([16], [21], [20]) *Нехай заданий ряд* (1.8) *зі сталими коефіцієнтами. Припустимо, що існують такі константи* $C, C_1 > 0$*, що коефіцієнти ряду* S *задовольняють умову*

$$\| c(\eta_{i_1 \ldots i_k}) \| \le C_1 k! C^k. \tag{1.14}$$

Ряд S *є реалізовним тоді і тільки тоді, коли* $\rho_L(c) < \infty$*. У цьому випадку* $n = \rho_L(c)$ *є мінімальною розмірністю реалізуючої системи. Більш того, мінімальна реалізація (тобто реалізація мінімальної розмірності) є єдиною з точністю до заміни змінних.*

Можна показати [20], що мінімальна реалізація задовольняє наступну умову: якщо розглянути алгебру Лі векторних полів, породжених векторними полями $X_1(x), \ldots, X_m(x)$, то серед векторних полів з цієї алгебри знайдуться n лінійно незалежних (в околі точки x^0). (Ця умова називається «умова Рашевського-Чжоу», нижче ми сформулюємо її в термінах рядів.) З цієї умови випливає [12], [20], що реалізуюча система є керованою в околі x^0, тобто для будь-яких точок x^1 і x^2 з околу точки x^0 знайдеться керування, яке переводить реалізуючу систему з x^1 до x^2.

1.4 Однорідна апроксимація

В цьому підрозділі розглянемо частковий випадок систем (1.1), (1.2), коли вихід є тривіальним, тобто $h(x) = x$. У цьому разі будемо розглядати системи, які задовольняють умову Рашевського-Чжоу, тобто $c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n$. В такому разі відображення c, що відповідає такій системі, задовольняє наступну умову: для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}$

$$\text{якщо } c(\ell) = 0, \text{ то } c(a\ell) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}.$$

Ця умова показує, що при дослідженні систем природним чином виникає поняття лівого ідеалу. Справді, умову, наведену вище, можна інтерпретувати так: якщо якийсь елемент $\ell \in \mathcal{L}$ належить ядру відображення c, то цьому ядру належить і весь лівий ідеал, що породжений цим елементом. Далі ми покажемо, що ліві ідеали, породжені елементами з алгебри Лі, відіграють велику роль у питаннях, пов'язаних з однорідною апроксимацією.

Поняття однорідної апроксимації ретельно вивчалося для розглядуваних систем з використанням диференціально-геометричного підходу [14], [40], [18], [6], [26]. Зокрема, був запропонований алгоритм побудови однорідної апроксимації [12]. Огляд результатів може бути знайдений в роботі [22]. Як приклад використання цього підходу до аналізу локальної поведінки конкретного класу систем, вкажемо дослідження систем Гурса [31].

Пізніше для дослідження однорідної апроксимації був застосований алгебраїчний підхід [36], [37], який дозволив отримати явний опис і класифікацію всіх однорідних апроксимацій [19], [38] і сформулювати алгоритм їх побудови, який дозволяє ефективну комп'ютерну реалізацію [39], [28].

Наведемо одне з означень однорідної апроксимації. Розглянемо траєкторії $x(t;u)$ системи (1.1), що починаються в точці $x(0;u) = x^0$, і траєкторії $\widehat{x}(t;u)$ іншої системи такого ж вигляду,

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{X}_i(x) u_i, \tag{1.15}$$

де векторні поля $\widehat{X}_1(x), \ldots, \widehat{X}_m(x)$ є аналітичними в деякому околі початку координат. Ми кажемо, що система (1.15) є *однорідною*, якщо вона має покоординатний вигляд

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{m} \sum \alpha^{ik}_{q_1 \ldots q_{k-1}} x_1^{q_1} \cdots x_{k-1}^{q_{k-1}} u_i, \quad \alpha^{ik}_{q_1 \ldots q_{k-1}} \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

причому внутрішня сума в правій частині береться по всіх цілих числах $q_1, \ldots, q_{k-1} \geq 0$, таких що

$$q_1 w_1 + \cdots + q_{k-1} w_{k-1} + 1 = w_k,$$

а $1 \leq w_1 \leq \cdots \leq w_n$ – деякі цілі числа, які називаються вагами координат $x_1, \ldots, x_n$. Іншими словами, права частина – це сума поліномів від $x_1, \ldots, x_n$, помножених на u_i; якщо додати ваги всіх множників, то має вийти $w_k - 1$. Зауважимо, в правій частині k-го рівняння можуть зустрітися лише $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Тобто якщо задані керування, то траєкторію однорідної системи можна знайти лише інтегруванням; розв'язувати диференціальні рівняння не потрібно.

Допустимими керуваннями ми, як і раніше, вважаємо вимірні керування, що задовольняють обмеження $|u_i(t)| \leq 1$, $i = 1, \ldots, m$. Для $\theta > 0$ введемо позначення $u^{1/\theta}(t) = u(t/\theta)$, $t \in [0, \theta]$. Тоді якщо $u(t)$ задана на відрізку $[0, 1]$, то $u^{1/\theta}(t)$ задана на відрізку $t \in [0, \theta]$, причому функція

$u^{1/\theta}(t)$ отримується з функції $u(t)$ «стисканням» області визначення. При цьому якщо $u(t)$ пробігає множину допустимих керувань, то і $u^{1/\theta}(t)$ пробігає множину допустимих керувань.

Визначення 1.3. *Ми кажемо, що однорідна система (1.15) є однорідною апроксимацією системи (1.1), якщо існує така заміна змінних $y = Q(x)$, що задовольняє $Q(x^0) = 0$, для якої при будь-якому допустимому керуванні $u(t)$, заданому на відрізку $[0,1]$, виконується*

$$\frac{(Q(x(\theta; u^{1/\theta})))_k - \widehat{x}_k(\theta; u^{1/\theta})}{\theta^{w_k}} \to 0 \quad \textit{при} \quad \theta \to 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Іншими словами, після заміни змінних у вихідній системі k-ті компоненти траєкторій вихідної системи і апроксимації прямують до нуля швидше, ніж θ^{w_k}, коли $\theta \to 0$, при всіх допустимих керуваннях. Зауважимо, що з однорідності системи (1.15) випливає, що k-та компонента її траєкторії має порядок θ^{w_k} при $\theta \to 0$.

Поняття однорідної апроксимації зручно вводити на алгебраїчній мові. Для цього нагадаємо наступне означення.

Визначення 1.4. ([19],[38]) *Розглянемо систему (1.1) і відповідний ряд (1.8). Визначимо підпростори*

$$\mathcal{P}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : c(\ell) \in c(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\}, \; k \geq 1, \tag{1.16}$$

та

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k. \tag{1.17}$$

Тоді $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ є (градуйованою) підалгеброю Лі. Вона називається кореневою підалгеброю Лі (core Lie subalgebra [19]) системи (1.1).

Можна показати, що коренева підалгебра Лі має корозмірність n (в $\mathcal{L}$) і що вона є інваріантною щодо заміни змінних у системі [19].

Виявляється, що коренева підалгебра Лі відповідає за однорідну апроксимацію системи [19], [38]. А саме, справедлива така класифікаційна теорема.

Теорема 1.4. [19], [38] *(а) Дві системи вигляду* (1.1) *мають однакову однорідну апроксимацію тоді і тільки тоді, коли їхні кореневі підалгебри Лі співпадають.*

(б) Будь-яка градуйована підалгебра Лі корозмірності n є кореневою підалгеброю Лі для деякої локально керованої системи вигляду (1.1).

Для побудови однорідної апроксимації варто використовувати інший об'єкт, який визначається кореневою підалгеброю Лі, – породжений нею лівий ідеал

$$\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} = \mathrm{Lin}\{a\ell : \ell \in \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}, a \in \mathcal{F} + \mathbb{R}\}.$$

Можна показати, що $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$, тож лівий ідеал і коренева підалгебра Лі визначають одне одного. Оскільки коренева підалгебра градуйована за означенням, то породжений нею лівий ідеал теж градуйований.

З означення кореневої підалгебри Лі випливає, що лівий ідеал задовольняє таку умову: якщо $a \in \mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m} \cap \mathcal{F}^k$, то $c(a) \in c(\mathcal{F}^1 + \cdots + \mathcal{F}^{k-1})$. Більш того, на мові кореневої підалгебри Лі і лівого ідеалу можна сформулювати таку ознаку однорідної системи: система вигляду (1.1) деякою заміною змінних зводиться до однорідної тоді і тільки тоді, коли $c(\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}) = 0$ або, еквівалентно, $c(\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}) = 0$.

Тепер повернемось до теорем 1.1 і 1.2, які описують базиси алгебри $\mathcal{F}$. Виявляється, що в такий спосіб можна описати й базиси, які певним чином узгоджені з $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$.

Нагадаємо, що $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$ має корозмірність n в алгебрі Лі $\mathcal{L}$. Виберемо довільні n однорідних елементів $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$, для яких

$$\mathrm{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m} = \mathcal{L}.$$

Нехай $\ell_i \in \mathcal{L}^{w_i}$; для зручності будемо вважати, що $w_1 \leq \cdots \leq w_n$. Далі виберемо однорідний базис $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ підпростору $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$. Тепер, застосовуючи теореми 1.1 і 1.2, отримаємо базис $\mathcal{F}$ і відповідний дуальний базис. Виявляється, що цей дуальний базис має таку властивість.

Теорема 1.5. ([36], [38]) *Множина*

$$\{d_1^{ш q_1} ш \cdots ш d_n^{ш q_n} : q_1, \ldots, q_n \geq 0,\ q_1 + \cdots + q_n \geq 1\} \tag{1.18}$$

утворює базис підпростору $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,\ldots,X_m}$ (тобто ортогонального доповнення до лівого ідеалу).

Таким чином, базис ортогонального доповнення до лівого ідеалу визначається скінченною кількістю елементів $\mathcal{F}$, причому ці елементи можна побудувати конструктивно за скінченну кількість кроків, використовуючи стандартні алгебраїчні перетворення.

Подальша ідея полягає в наступному. Розглянемо ряд (1.8) і перерозкладемо його за щойно побудованим дуальним базисом. Далі, застосовуючи поліноміальні перетворення координат, приведемо цей ряд до «трикутного» вигляду

$$(Q(S))_i = d_i + \rho_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.19}$$

де $\rho_i \in \sum_{j=w_i+1}^{\infty} \mathcal{F}^j$. Можна показати, що однорідна апроксимація системи (1.1) – це система, ряд якої деякою заміною змінних зводиться до вигляду

$$\widehat{S}_j = d_j,\ j = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Таким чином, кожна компонента ряду $\widehat{S}$ однорідна і апроксимує відповідну компоненту ряду $Q(S)$ у сенсі градуювання в $\mathcal{F}$.

Зауважимо, що однорідна апроксимація визначена неоднозначно, з точністю до поліноміальної заміни змінних, що зберігає порядок. Наприклад, замість елементів біортогонального базису d_i в правій частині (1.20) можна брати ортогональні проєкції елементів ℓ_i на підпростір $\mathcal{J}^{\perp}_{X_1,\ldots,X_m}$ [38]. Відновити однорідну систему за її рядом можна конструктивно за скінченну кількість кроків, які зводяться до стандартних алгебраїчних операцій [38].

1.5 Апроксимація в сенсі швидкодії

Розглянемо дві нелінійні системи, а саме, початкову систему (1.1), в якій для спрощення приймемо $x^0 = 0$, та її однорідну апроксимацію (1.15), що відповідає ряду (1.20). Друга система наближає першу не лише в алгебраїчному сенсі, згаданому вище, але й у сенсі швидкодії [38]. Детальніше, розглянемо системи (1.1) і (1.15) та припустимо, що траєкторії цих систем відповідають рядам (1.19) та (1.20) відповідно. Тобто у вихідній системі (1.1) вже зроблено заміну змінних $y = Q(x)$ і приведено ряд до трикутного вигляду (1.19).

Нагадаємо, що ми розглядаємо систему, що задовольняють умову Рашевського-Чжоу $c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n$; тоді її однорідна апроксимація теж задовольняє цю умову. З цієї умови випливає, що системи є локально керованими [20]; зокрема, з початку координат можна потрапити в будь-яку точку околу координат за допомоги допустимого керування. Отже, за теоремою Філіпова [15] існують і оптимальні за швидкодією керування, можливо, неєдині.

Для довільної точки s з околу початку координат розглянемо задачі швидкодії для цих двох систем,

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)u_i,\ x(0) = 0,\ x(\theta) = s,\ \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1 \text{ м.в.},\ \theta \to \min, \quad (1.21)$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{X}_i(x)u_i,\ x(0) = 0,\ x(\theta) = s,\ \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \le 1 \text{ м.в.},\ \theta \to \min. \quad (1.22)$$

Теорема 1.6. ([38]) *Припустимо, що задача швидкодії* (1.22) *має єдиний розв'язок; позначимо оптимальний час та оптимальне керування* *відповідно як* $\widehat{\theta}_s^*$ *та* $\widehat{u}_s^*(t)$. *Для задачі* (1.21) *позначимо оптимальний час як* θ_s^*, *а множину оптимальних керувань як* U_s^*. *Тоді*

$$\frac{\theta_s^*}{\widehat{\theta}_s^*} \to 1 \quad \textit{при} \quad s \to 0, \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} |\widehat{u}_{s\,i}^*(t) - u_{s\,i}^*(t)|dt \to 0, \ i = 1, \dots, m, \quad \textit{при} \quad s \to 0 \tag{1.24}$$

для будь-яких $u_s^*(t) \in U_s^*$, *де* $\theta = \min\{\widehat{\theta}_s^*, \theta_s^*\}$.

Теорема 1.6 означає, що після деякої заміни змінних у вихідній системі оптимальний час та оптимальне керування однорідної задачі (1.22) наближає оптимальний час та оптимальне керування задачі (1.21), що пояснює, в якому сенсі однорідна апроксимація апроксимує вихідну систему. Зауважимо, що умова (1.23) може бути виражена в диференціально-геометричних термінах як відповідна умова щодо субріманової метрики [12].

Насправді вимога щодо єдиності оптимального керування для задачі (1.22) може бути послаблена [38].

1.6 Постановка задачі про однорідну апроксимацію для систем з виходом

Таким чином, задача однорідної апроксимації добре досліджена алгебраїчними методами для систем, лінійних за керуванням, вигляду (1.1) у випадку, коли вихід є тривіальним. Але алгебраїчні властивості однорідної апроксимації для загального випадку, коли вихід є нетривіальним, не були досліджені. Основне завдання дисертаційної роботи – розвинути алгебраїчний підхід до задачі однорідної апроксимації систем, лінійних за керуванням, з виходом.

Отже, розглянемо систему (1.1) з виходом (1.2); для простоти вважатимемо, що $x^0 = 0$. Спочатку, застосовуючи алгебраїчний підхід, розглянемо реалізовні ряди (1.8) і дослідимо однорідні апроксимації їх мінімальних реалізацій. Перш за все, для цього потрібно будувати кореневі підалгебри Лі мінімальних реалізацій. Виникає питання: чи можна визначити кореневу підалгебру Лі мінімальної реалізації ряду, не будуючи саму мінімальну реалізацію? Ці питання досліджуються в розділі 2.

Далі розглянемо питання про однорідну апроксимацію самого ряду (1.8). Найпростіший випадок, коли означення такої апроксимації є очевидним, – це випадок одновимірного виходу, тобто ряду з числовими коефіцієнтами. В такому разі однорідною апроксимацією ряду можна називати часткову суму елементів найменшого порядку. А ця сума, яка очевидно є реалізовним рядом, має свою мінімальну реалізацію. Виникають питання щодо побудови мінімальної реалізації однорідної апроксимації ряду і щодо зв'язку мінімальної реалізації вихідного ряду і мінімальної реалізації його однорідної апроксимації, що можна переформулювати на мові кореневих підалгебр Лі. Ці питання розглядаються в розділі 3. Крім того, в розділі 3 досліджується апроксимація в сенсі швидкодії для систем з одновимірним виходом.

І нарешті, наступний крок – узагальнення отриманих результатів на випадок виходу довільної розмірності. Питання щодо однорідної апроксимації систем з довільним виходом вивчаються в розділі 4. Зауважимо, що тут з'являються додаткові складнощі у порівнянні з випадком тривіального виходу: наприклад, зведення ряду до трикутного вигляду може потребувати нескінченної кількості кроків, тобто відповідна заміна може бути не поліноміальною. У зв'язку з цим крім поліномів відносно тасуючого добутку розглядаються формальні функції багатьох змінних відносно тасуючого добутку, тобто формальні ряди від комутуючих змінних.

Таким чином, основне завдання дисертаційного дослідження – запропонувати і дослідити поняття однорідної апроксимації для систем, лінійних за керуванням, з виходом.

Зауважимо, що загальною рисою проведених у дисертації досліджень є те, що в них велику роль відіграють ліві ідеали. У зв'язку з цим вводиться клас лівих ідеалів, що породжуються градуйованими підалгебрами Лі скінченної корозмірності аналогічно тому, як ідеал $\mathcal{J}_{X_1,\dots,X_m}$ породжується підалгеброю Лі $\mathcal{L}_{X_1,\dots,X_m}$. Ідеали, які визначають однорідні апроксимації, вводяться як максимальні за включенням ідеали з зазначеного класу, які ортогональні деяким підмножинам елементів алгебри $\mathcal{F}$. Відповідні кореневі підалгебри Лі – це підалгебри Лі, якими породжені ці ідеали.

Висновки до розділу 1

У розділі 1 наведені відомі результати щодо нелінійних керованих систем, які використовуються далі в дисертації. Зокрема, наведені означення ряду ітерованих інтегралів, вільної асоціативної алгебри і вільної алгебри Лі, сформульовані деякі теореми про властивості базисів у таких алгебрах, а також теореми про реалізовність ряду ітерованих інтергралів і результати щодо однорідної апроксимації систем, лінійних за керуванням, для випадку тривіального виходу. Крім того, обґрунтований вибір теми і конкретних завдань дисертаційного дослідження.

РОЗДІЛ 2

СИСТЕМИ З ОДНОВИМІРНИМ ВИХОДОМ, МІНІМАЛЬНІ РЕАЛІЗАЦІЇ РЯДІВ ІТЕРОВАНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ЇХ ОДНОРІДНІ АПРОКСИМАЦІЇ

2.1 Ітеровані інтеграли

Ітерований інтеграл є одним із ключових понять у даному дослідженні. Введемо позначення, якими будемо користуватися далі. Нехай M – множина мультиіндексів

$$M = \{I = (i_1, \dots, i_k) : k \geq 1, \;\; 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m\}. \tag{2.1}$$

Ітерованим інтегралом називається кратний інтеграл наступного вигляду

$$\eta_I(\theta, u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \dots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \dots d\tau_1,$$

де $I = (i_1, \dots, i_k)$ – довільний мультиіндекс із множини M вигляду (2.1). Таким чином, ітерований інтеграл при $k \geq 1$ є функціоналом (нелінійним при $k \geq 2$), який можна розглядати на різних функціональних просторах. В дисертації ми переважно розглядатимемо ітеровані інтеграли на просторі майже всюди обмежених вектор-функцій.

Звернемо увагу на те, що ітерований інтеграл береться по симплексу, а саме, по k-вимірній множині вигляду

$$\{(\tau_1, \dots, \tau_k) : 0 \leq \tau_k \leq \tau_{k-1} \leq \dots \leq \tau_1 \leq \theta\}.$$

Наведемо декілька прикладів ітерованих інтегралів. Наприклад, однократний інтеграл буде виглядати наступним чином

$$\eta_1(\theta, u) = \int_0^\theta u_1(\tau_1) d\tau_1,$$

він визначений на відрізку $\tau_1 \in [0;\theta]$. Двократний інтеграл

$$\eta_{12}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_1)u_2(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1$$

береться по трикутнику $\{(\tau_1,\tau_2) : 0 \le \tau_2 \le \tau_1 \le \theta\}$. Зауважимо, що ітеровані інтеграли $\eta_{12}(\theta,u)$ і $\eta_{21}(\theta,u)$ різні і не виражаються через однократні інтеграли $\eta_1(\theta,u)$ і $\eta_2(\theta,u)$.

Натомість,

$$\eta_{11}(\theta,u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_1)u_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\int_0^\theta u_1(\tau_1)d\tau_1\right)^2 = \frac{1}{2}(\eta_1(\theta,u))^2.$$

Часто в задачах керування визначають обмеження на керування вигляду $|u_i(t)| \le 1$. Далі ми будемо розглядати ітеровані інтеграли на множині

$$U(\theta) = \{u(t) = (u_1(t),\dots,u_m(t)) : |u_i(t)| \le 1,\ i = 1,\dots,m,\ t \in [0,\theta]\}. \tag{2.2}$$

Можна показати [17], що для будь-яких $\theta > 0$ ітеровані інтеграли є лінійно незалежними як функціонали на множині $U(\theta)$. Це означає, що якщо деяка скінченна лінійна комбінація ітерованих інтегралів дорівнює нулю на будь-якому керуванні з множини $U(\theta)$, то всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю.

Для довільного фіксованого $\theta > 0$ розглянемо множину ітерованих інтегралів $\{\eta_I(\theta,u) : I \in M\}$. Оскільки функціонали $\eta_I(\theta,u)$ є лінійно незалежними, вони утворюють базис лінійного простору над полем $\mathbb{R}$. Тоді їхня лінійна оболонка є вільною асоціативною алгеброю з операцією конкатенації

$$\eta_{I_1}(\theta,u) \vee \eta_{I_2}(\theta,u) = \eta_{I_1 I_2}(\theta,u).$$

У лівій частині формули позначення $\vee$ означає операцію конкатенації, тобто приписування. Це позначення ми вводимо, щоб відрізняти операцію конкатенації від множення ітерованих інтегралів. Наприклад,

$$\eta_{21}(\theta,u) \vee \eta_2(\theta,u) = \eta_{212}(\theta,u).$$

Зауважимо, що добуток функціоналів $\eta_{21}(\theta, u)\eta_2(\theta, u)$ не дорівнює функціоналу $\eta_{212}(\theta, u)$. Взагалі добуток функціоналів вигляду $\eta_I(\theta, u)$ відповідає іншій операції, а саме, тасуючому добутку (1.10). Ми використаємо цю властивість нижче.

Позначимо щойно введену вільну асоціативну алгебру через $\mathcal{F}_\theta$. Відмітимо, що всі такі алгебри $\mathcal{F}_\theta$ для будь-якого $\theta > 0$ ізоморфні одна одній. Тому замість алгебр $\mathcal{F}_\theta$ зручно розглядати ізоморфну всім їм абстрактну вільну алгебру $\mathcal{F}$.

А саме, розглянемо m абстрактних незалежних елементів $\eta_1, \ldots, \eta_m$, які породжують алгебру $\mathcal{F}$. Також розглянемо вільну алгебру Лі $\mathcal{L}$, породжену $\eta_1, \ldots, \eta_m$ з операцією дужок, визначеною $[a, b] = ab - ba$.

Зауважимо, що алгебра $\mathcal{F}$ не містить одиниці. Але іноді зручно доповнити цю алгебру одиницею. А саме, далі ми будемо використовувати алгебру $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$ з одиницею 1. Для того, щоб записувати елементи з алгебр $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F}^e$ в один спосіб, ми доповнимо множину M «порожнім індексом»,

$$M_0 = M \cup \{\varnothing\}$$

та вважатимемо, що $\eta_\varnothing = 1$.

2.2 Системи з одновимірним виходом

Розглянемо керовану систему, лінійну за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i, \tag{2.3}$$

де векторні поля $X_1(x), \ldots, X_m(x)$ є дійсно-аналітичними в околі $W(x^0)$ деякої точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай $x(t; u)$ позначає траєкторію системи, яка починається в точці $x(0; u) = x^0$ і відповідає керуванню $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$. При достатньо малому $\theta > 0$ для будь-якого керування $u \in U(\theta)$ такі траєкторії існують і належать околу $W(x^0)$.

Розглянемо також функцію

$$y = h(x), \quad h : W(x^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

яка визначена в околі $W(x^0)$ і є там дійсно-аналітичною. Тоді

$$y(t; u) = h(x(t; u))$$

є виходом системи (2.3). Як було згадано у попередньому розділі, вихід $y(t; u)$ припускає зображення у вигляді ряду ітерованих інтегралів зі скалярними коефіцієнтами (1.5), причому при достатньо малому θ цей ряд абсолютно збігається для довільного $t \in [0, \theta]$ і довільного $u \in U(\theta)$. Ми запишемо цей ряд таким чином:

$$y(t; u) = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I(t, u), \tag{2.5}$$

де $c_\varnothing = h(x^0)$ і $\eta_\varnothing(t, u) = 1$. Інші скалярні коефіцієнти $c_{i_1 \ldots i_k}$ визначаються за формулою [17]

$$c_{i_1 \ldots i_k} = X_{i_k} \ldots X_{i_1} h(x^0) \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Пояснімо детальніше формулу (2.6). Тут векторні поля X_i діють як диференціальні оператори першого порядку:

$$X_i \varphi(x) = \varphi'(x) X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} (X_i(x))_j,$$

де $(X_i(x))_j$ – компоненти $X_i(x)$, тобто $X_i(x) = ((X_i(x))_1, \ldots, (X_i(x))_n)^\top$. Наприклад,

$$c_1 = X_1 h(x^0) = h'(x^0) X_1(x^0),$$

$$c_{12} = X_2 X_1 h(x^0) = (h'(x) X_1(x))' X_2(x)|_{x=x^0},$$

$$c_{112} = X_2 X_1 X_1 h(x^0) = ((h'(x) X_1(x))' X_1(x))' X_2(x)|_{x=x^0}.$$

Разом із рядом ітерованих інтегралів (2.5), який відповідає системі (2.3) з виходом (2.4), зручно розглядати його формальний аналог – формальний ряд в абстрактній алгебрі:

$$S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I. \tag{2.7}$$

Цей ряд породжує лінійне відображення $c : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, яке зіставляє базисному елементу $\mathcal{F}^e$ його коефіцієнт:

$$c(\eta_I) = c_I, \quad I \in M_0.$$

Зауважимо, що лінійне відображення c задовольняє певні умови. По-перше, з аналітичності векторних полів і функції $h(x)$ випливає, що існують такі константи $C, C_1 > 0$, що для будь-якого мультиіндексу $I \in M_0$ має місце оцінка (1.14), тобто

$$|c(\eta_I)| \le C_1 |I|! C^{|I|}, \tag{2.8}$$

де $|I|$ позначає довжину мультиіндексу I. Зауважимо, що якщо ряд містить лише скінченну кількість ненульових коефіцієнтів, то ця умова виконується автоматично. По-друге, мають місце певні лінійні залежності між коефіцієнтами. Ми розглянемо їх детальніше в наступному підрозділі.

2.3 Умови реалізовності

Отже, система (2.3) з виходом (2.4) визначає формальний ряд (2.7) елементів алгебри $\mathcal{F}^e$ зі скалярними коефіцієнтами, які задовольняють певні умови. Нехай тепер ми маємо ряд вигляду (2.7) або, що те ж саме, лінійне відображення $c : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, яке задається як $c(\eta_I) = c_I$. Чи буде цей ряд відповідати якійсь системі з виходом? Якщо так, то такий ряд називається реалізовним, а відповідна система є реалізацією цього ряду; див. означення 1.1.

Нижче ми вважаємо, що відображення c є нетривіальним, тобто $c(\mathcal{F}) \neq \{0\}$; тоді ряд S має принаймні один ненульовий член, крім константи.

Ми переформулюємо критерій реалізовності – теорему 1.3 – у зручних для нас термінах. Нагадаємо, як визначається ранг Лі ряду (2.7). Розглянемо простір $\mathcal{B}$ формальних рядів вигляду (2.7) і лінійне відображення $F_c : \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ вигляду

$$F_c(\ell) = \sum_{I \in M_0} c(\eta_I \ell)\eta_I. \tag{2.9}$$

Рангом Лі ряду (2.7) називається вимірність образу лінійного відображення F_c у просторі $\mathcal{B}$.

В цьому розділі ми розглядаємо ряди з одновимірними коефіцієнтами, але наступна теорема справедлива для рядів коефіцієнтами довільної розмірності.

Теорема 2.1. *Нехай заданий ряд вигляду* (2.7)*, який задовольняє умову* (2.8)*. Цей ряд є реалізовним тоді і тільки тоді, коли існує число $n \in \mathbb{N}$ та елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$, для яких виконується наступна умова: для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ існують числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такі що*

$$c(a(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)) = 0 \tag{2.10}$$

для будь-якого елемента $a \in \mathcal{F}^e$. У такому випадку ранг Лі ряду (2.7) *дорівнює мінімально можливому значенню n.*

Доведення. Покажемо, що теореми 1.3 і 2.1 рівносильні. По-перше, зауважимо, що в теоремі 2.1 достатньо вимагати, щоб умова (2.10) була виконана для довільного базисного елемента $a = \eta_I$, де $I \in M_0$. Нехай $n = \rho_L(c)$; це означає, що існують такі елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ (причому кількість їх зменшити не можна), для яких $F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n)$ є базисом простору $F_c(\mathcal{L})$. Іншими словами, для будь-якого $\ell \in \mathcal{L}$ існують числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такі що

$$F_c(\ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_c(\ell_i) = F_c(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i).$$

За формулою (2.9) це означає, що для будь-якого $I \in M_0$

$$c(\eta_I \ell) = c(\eta_I(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)),$$

що рівносильно рівності (2.10) для $a = \eta_I$.

2.4 Мінімальна реалізація

Знайти мінімальну реалізацію для заданого реалізовного ряду S можна, наприклад, наступним чином [20]. Нехай ранг Лі дорівнює n, тоді існують n лінійно незалежних елементів $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ для яких ряди $F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n)$ є лінійно незалежними. Розглянемо коефіцієнти всіх можливих елементів вигляду $\eta_I \ell_j$, де $I \in M_0$. Оскільки ряди $F_c(\ell_j)$ є лінійно незалежними, існують n мультиіндексів $I_1, \ldots, I_n \in M_0$, для яких матриця

$$\{c(\eta_{I_i} \ell_j)\}_{i,j=1}^{n} \tag{2.11}$$

є невиродженою. Введемо відображення $\widetilde{c} : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}^n$, яке на базисних елементах визначається наступною рівністю

$$\widetilde{c}(\eta_I) = \begin{pmatrix} c(\eta_{I_1} \eta_I) \\ \ldots \\ c(\eta_{I_n} \eta_I). \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Разом із відображенням $\widetilde{c}$ розглянемо відповідний ряд

$$\widetilde{S} = \sum_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I) \eta_I \tag{2.13}$$

з n-вимірними коефіцієнтами. Далі ми покажемо, що цей ряд є реалізовним, причому його ранг Лі дорівнює n. Це означає, що існує єдина n-вимірна система вигляду (2.3), що реалізує цей ряд. А саме, траєкторія цієї системи розкладається в ряд вигляду

$$x(t; u) = \widetilde{c}_{\varnothing} + \sum_{I \in M} \widetilde{c}_{i_1 \ldots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

де $\widetilde{c}_{i_1\dots i_k} \in \mathbb{R}^n$ виражаються через значення векторних полів $X_i(x)$ та їх похідних у точці $x^0 = \widetilde{c}_\varnothing$:

$$\widetilde{c}_{i_1\dots i_k} = X_{i_k} \dots X_{i_1} E(x^0) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Зауважимо, що з означення відображення $\widetilde{c}$ випливає, що воно задовольняє умову Рашевського-Чжоу:

$$\widetilde{c}(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Сформулюємо умову реалізовності ряду з n-вимірними коефіцієнтами у вигляді n-вимірної системи.

Лема 2.1. *Нехай заданий довільний ряд вигляду (2.13) з n-вимірними коефіцієнтами, який задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.15). Тоді наступні дві умови еквівалентні:*
1) якщо для деякого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ виконується рівність $\widetilde{c}(\ell) = 0$, то $\widetilde{c}(a\ell) = 0$ для довільного $a \in \mathcal{F}$;
2) ранг Лі ряду (2.13) дорівнює n.

Доведення. Доведемо, що з умови 2 можна отримати умову 1. Припустимо, що ранг Лі ряду дорівнює n. Розглянемо лінійне відображення $F_{\widetilde{c}}(\ell) = \sum\limits_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I \ell)\eta_I$. Нехай $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$ – такі елементи, для яких $F_{\widetilde{c}}(\ell_1), \dots, F_{\widetilde{c}}(\ell_n)$ є базисом образу $F_{\widetilde{c}}$, тобто для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ існують такі числа α_i, що $F_{\widetilde{c}}(\ell) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i F_{\widetilde{c}}(\ell_i)$. Використовуючи визначення відображення $F_{\widetilde{c}}$, запишемо

$$\sum_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I \ell)\eta_I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I \ell_i)\eta_I = \sum_{I \in M_0} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\eta_I \ell_i))\eta_I.$$

Оскільки ряди в лівій і правій частині рівні, то з цього випливає, що їхні відповідні коефіцієнти також рівні. Отже, для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$

існують такі числа α_i, що для будь-якого мультиіндексу $I \in M_0$ виконується умова:

$$\widetilde{c}(\eta_I \ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\eta_I \ell_i). \tag{2.16}$$

Зокрема, для $I = \varnothing$, тобто для порожнього слова $\eta_\varnothing = 1$, рівність векторів (2.16) можна записати у наступному вигляді:

$$\widetilde{c}(\ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\ell_i). \tag{2.17}$$

Зауважимо, що вектори $\widetilde{c}(\ell_i)$ лінійно незалежні. Справді, якщо вони лінійно залежні, тоді за умовою Рашевського-Чжоу існує такий елемент $\widetilde{\ell} \in \mathcal{L}$, що $\widetilde{c}(\widetilde{\ell})$ не залежить від $\widetilde{c}(\ell_i)$, що суперечить (2.17).

Тепер розглянемо такий довільний елемент $\ell \in \mathcal{L}$, для якого $\widetilde{c}(\ell) = 0$. Тоді існують такі числа α_i, що

$$\widetilde{c}(\ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\ell_i) = 0.$$

Оскільки $\widetilde{c}(\ell_i)$ лінійно незалежні, то з цієї рівності випливає, що всі коефіцієнти α_i дорівнюють нулю. А тоді

$$\widetilde{c}(\eta_I \ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\eta_I \ell_i) = 0.$$

З цього очевидно випливає, що $\widetilde{c}(a\ell) = 0$ для будь-якого $a \in \mathcal{F}$. Умову 1 доведено.

Тепер доведемо, що з умови 1 випливає умова 2. Враховуючи умову Рашевського-Чжоу, оберемо елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ такі, що $\widetilde{c}(\ell_i)$ є базисом простору $\mathbb{R}^n$. Тоді для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ можна обрати такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, що $c(\ell)$ можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$\widetilde{c}(\ell) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\ell_i).$$

Оскільки відображення $\widetilde{c}(\ell)$ лінійне, то цю рівність можна переписати в іншому вигляді

$$\widetilde{c}(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i) = 0.$$

За умовою 2, для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ з рівності $\widetilde{c}(\ell) = 0$ випливає, що $\widetilde{c}(a\ell) = 0$ для будь-якого $a \in \mathcal{F}$. В якості a візьмемо елемент η_I, де I – довільний мультиіндекс. Отримаємо

$$\widetilde{c}(\eta_I(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)) = 0.$$

Знов скоростаємося тим, що відображення $\widetilde{c}$ лінійне, та перетворимо цей вираз:

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}(\eta_I(\ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i)) &= \widetilde{c}(\eta_I \ell - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_I \ell_i)) = \\
&= \widetilde{c}(\eta_I \ell) - \widetilde{c}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_I \ell_i) = \\
&= \widetilde{c}(\eta_I \ell) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\eta_I \ell_i) = 0
\end{aligned}$$

для всіх $I \in M_0$. Тепер запишемо вираз для $F_{\widetilde{c}}(\ell)$:

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{c}}(\ell) &= \sum_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I \ell) \eta_I = \\
&= \sum_{I \in M_0} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{c}(\eta_I \ell_i) \eta_I = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \alpha_i \sum_{I \in M_0} \widetilde{c}(\eta_I \ell_i) \eta_I = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_{\widetilde{c}}(\ell_i).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що ряди $F_{\widetilde{c}}(\ell_i)$ лінійно незалежні. Справді, якщо вони лінійно залежні, то зокрема їх коефіцієнти при $\eta_\varnothing$ лінійно залежні. Але ці коефіцієнти дорівнюють $\widetilde{c}(\ell_i)$ і є незалежними за означенням. Отже, ранг Лі ряду дорівнює n, тобто умова 1 виконана. Лему доведено. □

Тепер повернемось до ряду $\widetilde{S}$ вигляду (2.13) з коефіцієнтами (2.12) і покажемо, що його ранг Лі дорівнює n. Скористаємось лемою 2.1. Нехай для деякого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ виконується рівність $\widetilde{c}(\ell) = 0$, тобто $c(\eta_{I_1}\ell) = \cdots = c(\eta_{I_n}\ell) = 0$. Оскільки ранг Лі ряду S дорівнює n, існують такі коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для яких $c(\eta_I \ell) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c(\eta_I \ell_i)$ для довільного $I \in M_0$. Зокрема,

$$\begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}\ell_1) & \cdots & c(\eta_{I_1}\ell_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c(\eta_{I_n}\ell_1) & \cdots & c(\eta_{I_n}\ell_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Оскільки матриця цієї системи (2.11) є невиродженою, отримуємо, що $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Отже, $c(\eta_I \ell) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c(\eta_I \ell_i) = 0$ для довільного $I \in M_0$, звідки випливає, що виконана умова 2 леми 2.1. Отже, ранг Лі ряду $\widetilde{S}$ дорівнює n.

Нарешті, зауважимо, що коефіцієнти ряду $\widetilde{S}$ задовольняють оцінку $\|\widetilde{c}_I\| \le \widetilde{C}_1 |I|! \widetilde{C}^{|I|}$ для деяких $\widetilde{C}, \widetilde{C}_1 > 0$. Отже, цей ряд є реалізовним, причому найменший порядок реалізуючої системи дорівнює n.

Можна показати [20], що векторні поля X_i, які задовольняють рівності (2.14), задовольняють також рівність

$$X_i(\widetilde{c}(e^{\ell_1 x_1} \cdots e^{\ell_n x_n})) = \widetilde{c}(\eta_i e^{\ell_1 x_1} \cdots e^{\ell_n x_n}) \tag{2.18}$$

для довільних достатньо малих скалярних параметрів $x_1, \ldots, x_n$. У цій формулі

$$e^{\ell_1 x_1} \cdots e^{\ell_n x_n} = \sum_{k_1, \ldots, k_n \ge 0} \frac{x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}}{k_1! \cdots k_n!} \ell_1^{k_1} \cdots \ell_n^{k_n}.$$

Тотожність (2.18) можна використати для побудови векторних полів X_i або, принаймні, коефіцієнтів їх розвинення в ряд Тейлора в точці $x^0 = \widetilde{c}(1)$. Зокрема,

$$X_i(x^0) = \widetilde{c}_i, \quad X_i'(x^0)\widetilde{c}(\ell_j) = \widetilde{c}(\eta_i \ell_j).$$

Зауважимо, що ряд $\widetilde{S}$ залежить від вибору I_j, отже, може бути побудований по-різному. В результаті отримаємо різні мінімальні реалізуючі системи. Проте можна показати, що ці системи переводяться одна в одну заміною змінних.

Приклад 2.1. Розглянемо одновимірний ряд

$$S = \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{211}. \tag{2.19}$$

Тут $c_1 = c_{21} = c_{211} = 1$, решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Знайдемо ранг Лі цього ряду. Зауважимо, що лише для елементів $\ell \in \mathrm{Lin}\{\eta_1, [\eta_1, \eta_2], [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]\}$ ряди $F_c(\ell)$ вигляду (2.9) можуть містити хоча б один ненульовий член; для всіх інших ℓ ряди $F_c(\ell)$ нульові. Маємо:

$$F_c(\eta_1) = \sum_{I\in M_0} c(\eta_I\eta_1)\eta_I = c_1\eta_\varnothing + c_{21}\eta_2 + c_{211}\eta_{21} = 1 + \eta_2 + \eta_{21},$$

$$F_c([\eta_1, \eta_2]) = \sum_{I\in M_0} c(\eta_I\eta_{12} - \eta_I\eta_{21})\eta_I = -c_{21}\eta_\varnothing = -1,$$

$$F_c([\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]) = \sum_{I\in M_0} c(\eta_I\eta_{112} - 2\eta_I\eta_{121} + \eta_I\eta_{211})\eta_I = c_{211}\eta_\varnothing = 1.$$

Оскільки два з цих рядів лінійно незалежні, ранг Лі ряду S дорівнює 2.

Ми можемо вибрати елементи $\ell_1 = \eta_1$, $\ell_2 = [\eta_1, \eta_2]$ і мультиіндекси $I_1 = \varnothing$, $I_2 = (2)$, тоді матриця (2.11)

$$\begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}\ell_1) & c(\eta_{I_2}\ell_1) \\ c(\eta_{I_1}\ell_2) & c(\eta_{I_2}\ell_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\eta_1) & c(\eta_{21}) \\ c(\eta_{12} - \eta_{21}) & c(\eta_{212} - \eta_{221}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

буде невироджена. Тоді ми отримуємо n-вимірний ряд вигляду (2.13)

$$\widetilde{S} = \sum_{I\in M_0} \begin{pmatrix} c(\eta_I) \\ c(\eta_2\eta_I) \end{pmatrix} \eta_I = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{211} \\ \eta_1 + \eta_{11} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Можна перевірити, що система, яка реалізує цей ряд, має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 + x_2u_2, \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{1 + 2x_2}u_1, \end{aligned} \tag{2.21}$$

причому вихід дорівнює першій компоненті ряду, $y = h(x) = x_1$. Тобто векторні поля $X_1(x)$ і $X_2(x)$ визначені в околі точки $x^0 = 0$ і мають вигляд

$$X_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+2x_2} \end{pmatrix}, \quad X_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Справді, перевіримо рівності (2.14). Маємо:

$$X_1X_1E(x) = (X_1(x))'_x X_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1+2x_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X_1X_2E(x) = (X_2(x))'_x X_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+2x_2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1X_1X_2E(x) = ((X_2(x))'_x X_1(x))'_x X_1(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1+2x_2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а всі інші вектор-функції вигляду $X_{i_1} \cdots X_{i_k}E(x)$ дорівнюють нулю. Підставляючи $x = 0$, отримуємо ненульові коефіцієнти ряду:

$$\widetilde{c}_1 = X_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{c}_{11} = X_1X_1E(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{21} = X_1X_2E(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{c}_{211} = X_1X_1X_2E(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

що збігається з рядом (2.20).

Зауважимо, що отриманий ряд задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.15). Справді, розглянемо два елементи η_1 і $[\eta_1, \eta_2]$ з алгебри Лі $\mathcal{L}$; для них $\widetilde{c}(\eta_1) = (1,1)^\top$ і $\widetilde{c}([\eta_1, \eta_2]) = \widetilde{c}_{12} - \widetilde{c}_{21} = (-1, 0)^\top$. Ці вектори ліінійно незалежні, отже, умова (2.15) виконана.

Покажемо, як отримати векторні поля (2.22) за допомоги формули (2.18). Враховуючи вигляд ряду $\widetilde{S}$, маємо

$$\widetilde{c}(e^{\ell_1 x_1} e^{\ell_2 x_2}) = \widetilde{c}(1 + x_1\eta_1 + \tfrac{1}{2}x_1^2\eta_{11} + x_2(\eta_{12} - \eta_{21})) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{c}(\eta_1 e^{\ell_1 x_1} e^{\ell_2 x_2}) = \widetilde{c}(\eta_1 + x_1\eta_{11}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + x_1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{c}(\eta_2 e^{\ell_1 x_1} e^{\ell_2 x_2}) = \widetilde{c}(x_1\eta_{21} + \tfrac{1}{2}x_1^2\eta_{211}) = \begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$z_1 = x_1 - x_2, \quad z_2 = x_1 + \tfrac{1}{2}x_1^2,$$

тоді x_1 виражається через z_2 з квадратного рівняння $\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 - z_2 = 0$. Оскільки нас цікавить розв'язок в околі точки $x^0 = \widetilde{c}(1) = 0$, то отримуємо

$$x_1 = -1 + \sqrt{1 + 2z_2},$$

а тоді

$$x_2 = -1 + \sqrt{1 + 2z_2} - z_1.$$

Отже,

$$X_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1 + 2z_2} \end{pmatrix}, \quad X_2(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

що збігається з (2.22) (якщо замість z_i написати x_i).

Можна вибрати $\ell_1 = \eta_1$, $\ell_2 = [\eta_1, \eta_2]$ і мультиіндекси $I_1 = \varnothing$, $I_2 = (2, 1)$, тоді матриця (2.11)

$$\begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}\ell_1) & c(\eta_{I_2}\ell_1) \\ c(\eta_{I_1}\ell_2) & c(\eta_{I_2}\ell_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(\eta_1) & c(\eta_{211}) \\ c(\eta_{12} - \eta_{21}) & c(\eta_{2112} - \eta_{2121}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

теж буде невироджена. Тоді ми отримуємо n-вимірний ряд вигляду (2.13)

$$\widetilde{S} = \sum_{I \in M_0} \begin{pmatrix} c(\eta_I) \\ c(\eta_{21}\eta_I) \end{pmatrix} \eta_I = \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{211} \\ 1 + \eta_1 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Реалізація цієї системи в околі точки $z^0 = (0, 1)^\top$ має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 - \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}z_2^2 u_2, \\ \dot{z}_2 &= u_1, \end{aligned} \tag{2.24}$$

і, як і раніше, вихід дорівнює першій компоненті, $y = h(z) = z_1$. Справді,

$$X_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z_2^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тому

$$X_1X_2E(z) = (X_2(z))'_z X_1(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1X_1X_2E(z) = ((X_2(z))'_z X_1(z))'_z X_1(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а всі інші вектор-функції вигляду $X_{i_1} \cdots X_{i_k}(z)$ дорівнюють нулю. Підставляючи $z = z^0 = (0,1)^\top$, отримуємо ненульові коефіцієнти ряду:

$$\widetilde{c}_\varnothing = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{c}_1 = X_1(z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{21} = X_1X_2E(z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{c}_{211} = X_1X_1X_2E(z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

що збігається з рядом (2.23).

Неважко перевірити, що система (2.21) переходить у систему (2.24) після заміни змінних $z_1 = x_1$, $z_2 = \sqrt{1 + 2x_2}$.

Нарешті, зауважимо, що якщо в системі (2.24) зробити заміну $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 - 1$, то отримаємо систему в околі точки $x^0 = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 + x_2u_2 + \tfrac{1}{2}x_2^2u_2, \\ \dot{x}_2 &= u_1. \end{aligned}$$

2.5 Однорідна апроксимація мінімальної реалізації

Вільну асоціативну алгебру $\mathcal{F}$ називають *градуйованою*, якщо її можна подати у вигляді прямої суми лінійних підпросторів

$$\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^k, \quad \text{де} \quad \mathcal{F}^k\mathcal{F}^q \subset \mathcal{F}^{k+q}.$$

У нашому випадку природним є градуювання «за довжиною»:

$$\mathcal{F}^k = \mathrm{Lin}\{\eta_I : I \in M,\ |I| = k\}, \quad k \geq 1.$$

Це градуювання виправдовується наступною властивістю ітерованих інтегралів:

$$\int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1 =$$
$$= \theta^k \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1\theta) \cdots u_{i_k}(\tau_k\theta) d\tau_k \cdots d\tau_1.$$

Таким чином,

$$\eta_I(\theta, u^{1/\theta}) = \theta^{|I|}\eta_I(1, u),$$

де $u^{1/\theta}(t) = u(t/\theta)$, $t \in [0, \theta]$. Якщо $u(t)$ пробігає множину $U(\theta)$, то $u^{1/\theta}(t)$ пробігає множину $U(1)$. Отже, довжина мультиіндексу $|I|$ є порядком $\eta_I(\theta, u)$ як функції від θ, де $\theta \to 0$.

Ми будемо говорити, що елемент $a \in \mathcal{F}^k$ є *однорідним*, а k є його *порядком*; в такому разі ми записуємо $\mathrm{ord}(a) = k$.

Алгебра Лі $\mathcal{L}$ також успадковує це градуювання,

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^k,$$

де $\mathcal{L}^k$ визначається як $\mathcal{L}^k = \mathcal{F}^k \cap \mathcal{L}$.

Повернемось до ряду (2.13) з n-вимірними коефіцієнтами, який побудований за реалізовним рядом (2.7), що задовольняє умову (2.8) і має ранг Лі n. Тоді лінійне відображення $\widetilde{c}$ задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.15). Як було зауважено в попередньому підрозділі, існує єдина n-вимірна система (2.3), яка відповідає цьому ряду.

Розглянемо кореневу підалгебру Лі цієї реалізуючої системи, див. означення 1.4. Детальніше, введемо підпростори

$$\widetilde{\mathcal{P}}^1 = \{\ell \in \mathcal{L}^1 : \widetilde{c}(\ell) = 0\},$$

$$\widetilde{\mathcal{P}}^k = \{\ell \in \mathcal{L}^k : \widetilde{c}(\ell) \in \widetilde{c}(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})\},\ k \geq 2,$$

та визначимо кореневу підалгебру Лі системи (2.3) як

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{P}}^k.$$

На перший погляд, коренева підалгебра Лі має залежати від способу побудови ряду $\widetilde{S}$, тобто від вибору мультиіндексів $I_1, \ldots, I_n$. Але насправді, оскільки коренева підалгебра Лі інваріантна відносно заміни змінних, а всі мінімальні реалізації переходять одна в одну замінами змінних, коренева підалгебра для будь-якого вибору $I_1, \ldots, I_n$ вийде одна й та сама.

Покажемо, як знайти кореневу підалгебру Лі реалізуючої системи, не знаходячи ряд $\widetilde{S}$, а використовуючи лише вихідний ряд S.

Теорема 2.2. *Нехай S — реалізовний ряд вигляду (2.7), а n-вимірна система (2.3) — його мінімальна реалізація. Тоді кореневу підалгебру Лі $\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m}$ цієї мінімальної реалізації можна знайти наступним чином:*

$$\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k,$$

де

$$\mathcal{P}^1 = \left\{ \ell \in \mathcal{L}^1 : c(a\ell) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}^e \right\}$$

і

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^k = \Big\{ \ell \in \mathcal{L}^k : \text{ існує } \quad \ell' \in \mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1} \quad \text{такий, що} \\ c(a(\ell - \ell')) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}^e \Big\}, \quad k \geq 2.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Доведення. Ми покажемо, що $\widetilde{\mathcal{P}}^k = \mathcal{P}^k$ для довільного $k \geq 1$.

Спочатку візьмемо довільний елемент ℓ з підпростору $\mathcal{P}^k$ і покажемо, що цей елемент також належить підпростору $\widetilde{\mathcal{P}}^k$. Нехай $\ell \in \mathcal{P}^k$, тоді за формулою (2.25) існує елемент $\ell' \in \mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1}$, для якого рівність

$$c(a(\ell - \ell')) = 0 \tag{2.26}$$

виконується для будь-якого елемента $a \in \mathcal{F}^e$ (при $k = 1$ маємо $\ell' = 0$). В якості елемента a ми візьмемо елементи η_{I_i}, які використовуються для побудови ряду $\widetilde{S}$; для них матриця (2.11) невироджена. Оскільки рівність (2.26) виконується для будь-якого елемента a, то

$$c(\eta_{I_i}(\ell - \ell')) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Розглянемо n-вимірне відображення (2.12), тоді

$$\widetilde{c}(\ell - \ell') = \begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}(\ell - \ell')) \\ \ldots \\ c(\eta_{I_n}(\ell - \ell')) \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова (2.27) виконується для будь-якого рядка, то $\widetilde{c}(\ell - \ell') = 0$. Це означає, що елемент ℓ належить підпростору $\widetilde{\mathcal{P}}^k$. Отже, $\mathcal{P}^k \subset \widetilde{\mathcal{P}}^k$ для будь-якого $k \geq 1$.

Тепер оберемо довільний елемент ℓ з підпростору $\widetilde{\mathcal{P}}^k$ і покажемо, що цей елемент також належить підпростору $\mathcal{P}^k$. За визначенням $\widetilde{c}(\ell) \in \widetilde{c}(\mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1})$, отже, існує елемент $\ell' \in \mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{k-1}$ для якого $\widetilde{c}(\ell - \ell') = 0$. Це означає, що $c(\eta_{I_i}(\ell - \ell')) = 0$ для $i = 1, \ldots, n$.

Розглянемо елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$, для яких матриця (2.11) невироджена. Оскільки ряд $F_c(\ell - \ell')$ є лінійною комбінацією рядів $F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n)$, то існують числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такі, що для будь-якого мультиіндексу $I \in M_0$ виконується рівність

$$c(\eta_I(\ell - \ell')) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c(\eta_I \ell_j). \tag{2.28}$$

Зокрема, підставимо мультиіндекси $I = I_i$, які використовуються для побудови ряду $\widetilde{S}$. Отримуємо наступну рівність

$$\begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}(\ell - \ell')) \\ \ldots \\ c(\eta_{I_n}(\ell - \ell')) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \begin{pmatrix} c(\eta_{I_1}\ell_j) \\ \ldots \\ c(\eta_{I_n}\ell_j) \end{pmatrix} = 0.$$

Оскільки матриця (2.11) невироджена, вектори $(c(\eta_{I_1}\ell_j), \ldots, c(\eta_{I_n}\ell_j))^\top$ лінійно незалежні. Тобто, всі коефіцієнти α_j дорівнюють нулю. А тоді з (2.28) випливає, що

$$c(a(\ell - \ell')) = 0$$

для будь-якого елемента $a \in \mathcal{F}^e$, тобто, $\ell \in \mathcal{P}^k$. Отже, $\widetilde{\mathcal{P}}^k \subset \mathcal{P}^k$ для довільного $k \geq 1$. Теорему доведено. □

Приклад 2.2. (Продовження прикладу 2.1). Повернемось до ряду (2.19) і ряду (2.20), який має реалізацію (2.21). Використовуючи визначення 1.4, знайдемо її кореневу підалгебру Лі $\mathcal{L}_{X_1,X_2}$. Розглянемо підпростір

$$\widetilde{\mathcal{P}}^1 = \left\{\ell \in \mathcal{L}^1 : \widetilde{c}(\ell) = 0\right\}.$$

Ми маємо $\mathcal{L}^1 = \mathrm{Lin}\{\eta_1, \eta_2\}$. Для елементів η_1, η_2 випишемо їхні коефіцієнти

$$\widetilde{c}(\eta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{c}(\eta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Тоді, очевидно, підпростір $\widetilde{\mathcal{P}}^1$ є лінійною оболонкою тільки одного елемента η_2

$$\widetilde{\mathcal{P}}^1 = \mathrm{Lin}\left\{\eta_2\right\}.$$

Для $k = 2$ ми отримуємо

$$\widetilde{\mathcal{P}}^2 = \left\{\ell \in \mathcal{L}^2 : \widetilde{c}(\ell) \in \widetilde{c}(\mathcal{L}^1)\right\}$$

та $\mathcal{L}^2 = \mathrm{Lin}\{[\eta_1, \eta_2]\}$. Для елемента $\ell = [\eta_1, \eta_2]$ знайдемо

$$\widetilde{c}([\eta_1, \eta_2]) = \widetilde{c}(\eta_{12} - \eta_{21}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи вигляд коефіцієнтів (2.29), бачимо, що $\widetilde{c}(\ell) \notin \widetilde{c}(\mathcal{L}^1)$. Це означає, що $\widetilde{\mathcal{P}}^2 = \{0\}$.

Тоді $\dim(\widetilde{c}(\mathcal{L}^1+\mathcal{L}^2)) = 2$; це означає, що $\widetilde{\mathcal{P}}^k = \mathcal{L}^k$ для всіх $k \geq 3$. Тобто, ми знайшли кореневу підалгебру для двовимірного ряду $\widetilde{S}$:

$$\mathcal{L}_{X_1,X_2} = \mathrm{Lin}\,\{\eta_2\} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathcal{L}^k. \tag{2.30}$$

Тепер покажемо, як можна застосувати теорему 2.2, та знайдемо кореневу підалгебру Лі $\mathcal{L}_{X_1,X_2}$, використовуючи вихідний одновимірний ряд (2.19).

Випишемо ненульові коефіцієнти цього ряду:

$$c(\eta_1) = 1,\ c(\eta_{21}) = 1,\ c(\eta_{211}) = 1.$$

Розглянемо підпростори (2.25). Для $k = 1$ отримуємо

$$\mathcal{P}^1 = \left\{\ell \in \mathcal{L}^1 : c(a\ell) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}^e\right\}.$$

Спочатку в якості елемента ℓ візьмемо η_1. Зокрема, для $a = 1$ ми отримаємо $c(a\eta_1) = c(\eta_1) = 1$, отже, $\eta_1 \notin \mathcal{P}^1$.

Далі оберемо $\ell = \eta_2$, тоді $c(a\eta_2) = 0$ для будь-якого $a \in \mathcal{F}$. Це означає, що $\mathcal{P}^1 = \mathrm{Lin}\,\{\eta_2\}$.

Тепер розглянемо підпростір

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^2 = \{\ell \in \mathcal{L}^2 :\ & \text{існує } \ell' \in \mathcal{L}^1 \text{ такий, що} \\ & c(a(\ell - \ell')) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}^e\}.\end{aligned}$$

В якості елемента ℓ візьмемо дужку $[\eta_1, \eta_2] = \eta_{12} - \eta_{21}$, а елемент $\ell' \in \mathcal{L}^1$ нехай дорівнює лінійній комбінації $\alpha\eta_1 + \beta\eta_2$, де α, β — числа.

Припустимо, що $c(a(\ell - \ell')) = 0$ для довільного $a \in \mathcal{F}^e$. Спочатку беремо $a = 1$. Тоді

$$c(a(\ell - \ell')) = c(\eta_{12} - \eta_{21} - \alpha\eta_1 - \beta\eta_2) = -1 - \alpha = 0,$$

це означає, що $\alpha = -1$. Оберемо $a = \eta_2$, що дає

$$c(a(\ell - \ell')) = c(\eta_{212} - \eta_{221} - \alpha\eta_{21} - \beta\eta_{22}) = -\alpha = 0,$$

тобто $\alpha = 0$. Отже, маємо суперечність, яка означає, що $[\eta_1, \eta_2] \notin \mathcal{P}^2$. Таким чином, $\mathcal{P}^2 = \{0\}$.

Нарешті, розглянемо підпростір

$$\mathcal{P}^3 = \{\ell \in \mathcal{L}^3 : \text{ існує } \ell' \in \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^2 \text{ такий, що } c(a(\ell - \ell')) = 0 \text{ для будь-якого } a \in \mathcal{F}^e\}$$

і візьмемо до уваги, що $\mathcal{L}^3 = \mathrm{Lin}\{[\eta_1, [\eta_1, \eta_2]], [\eta_2, [\eta_1, \eta_2]]\}$.

Спочатку ми візьмемо

$$\ell = [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]] = \eta_{112} - 2\eta_{121} + \eta_{211}$$

та

$$\ell' = \alpha\eta_1 + \beta(\eta_{12} - \eta_{21})$$

(елемент η_2 можна не включати до цієї лінійної комбінації, оскільки $c(a\eta_2) = 0$ для будь-якого $a \in \mathcal{F}$). Припустимо, що $c(a(\ell - \ell')) = 0$ для довільного $a \in \mathcal{F}^e$. Для $a = 1$ маємо

$$c(a(\ell - \ell')) = c(\eta_{112} - 2\eta_{121} + \eta_{211} - \alpha\eta_1 - \beta\eta_{12} + \beta\eta_{21}) = 1 - \alpha + \beta = 0,$$

а для $a = \eta_2$ маємо

$$c(a(\ell - \ell')) = c(\eta_{2112} - 2\eta_{2121} + \eta_{2211} - \alpha\eta_{21} - \beta\eta_{212} + \beta\eta_{221}) = -\alpha = 0.$$

Це означає, що $\alpha = 0$ та $\beta = -1$, тобто ℓ' треба обирати як $\ell' = -\eta_{12} + \eta_{21}$. Неважко бачити, що $c(a\ell) = c(a\ell') = 0$ для $a = \eta_1$ і будь-яких $a \in \mathcal{F}^k$, $k \geq 2$, отже, $[\eta_1, [\eta_1, \eta_2]] \in \mathcal{P}^3$.

Щодо елемента $\ell = [\eta_2, [\eta_1, \eta_2]]$, то очевидно, що $c(a\ell) = 0$ для будь-якого $a \in \mathcal{F}^e$. Це означає, що $\mathcal{P}^3 = \mathcal{L}^3$.

Нарешті, оскільки $c(\mathcal{L}^k) = 0$ для $k \geq 4$, отримуємо $\mathcal{P}^k = \mathcal{L}^k$ при $k \geq 4$.

Таким чином, ми побудували кореневу підалгебру Лі (2.30), використовуючи тільки одновимірний ряд S.

Нагадаємо, що реалізацію ряду S в околі точки $x^0 = 0$ можна вибрати у вигляді (2.21). У якості однорідної апроксимації для цієї системи ми можемо вибрати однорідну систему з тією самою кореневою підалгеброю Лі

$$\dot{x}_1 = u_1,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 u_2.$$

2.6 Класифікаційна теорема

Нарешті, покажемо, що будь-яка градуйована підалгебра Лі скінченної ненульової корозмірності є кореневою підалгеброю Лі мінімальної реалізації деякого ряду вигляду (2.5). Ми побудуємо такий ряд, використовуючи дуальний базис (1.11); відповідне лінійне відображення визначається формулою (2.31) нижче. Наступна лема описує властивість такого відображення.

Лема 2.2. *Припустимо, що $\{\ell_i\}_{i=1}^{\infty}$ є однорідним базисом алгебри Лі $\mathcal{L}$. Нехай лінійне відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ визначено на елементах відповідного базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (1.9) таким чином: для будь-яких $k \geq 1$ і будь-яких $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k$*

$$c(\ell_{i_1} \cdots \ell_{i_k}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = n \quad \text{і} \quad (i_1, \ldots, i_n) = (1, \ldots, n), \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases} \tag{2.31}$$

Розглянемо будь-який набір $(j_1, \ldots, j_k)$ натуральних чисел, $1 \leq k \leq n$. Тоді

$$c(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}) = 0, \quad \text{якщо } 1 \leq k \leq n-1, \tag{2.32}$$

та

$$c(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_n}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (j_1, \ldots, j_n) \text{ є перестановкою } \{1, \ \ldots, n\}, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases} \tag{2.33}$$

Доведення. Позначимо через $\mathrm{inv}(j_1, \ldots, j_k)$ кількість інверсій у наборі $(j_1, \ldots, j_k)$, тобто кількість пар номерів (s', s'') таких, що

$$s' < s'' \text{ і } j_{s'} > j_{s''}.$$

Якщо $\mathrm{inv}(j_1, \ldots, j_k) = r$, то для сортування набору в порядку неспадання потрібні r транспозицій сусідніх елементів. Нижче ми використовуємо позначення

$$N_{k,r} = \{(j_1, \ldots, j_k) : \mathrm{inv}(j_1, \ldots, j_k) = r\}, \quad k \geq 1, \ r \geq 0.$$

Для будь-якого k максимально можлива кількість інверсій становить $\frac{1}{2}k(k-1)$ (ця кількість інверсій досягається, коли числа в наборі строго спадають). Отже, якщо $r > \frac{1}{2}k(k-1)$, то $N_{k,r} = \varnothing$. Тобто множину всіх наборів натуральних чисел можна представити як об'єднання множин $N_{k,r}$, де $k \geq 1$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}k(k-1)$. Для доведення леми ми розглядатимемо лише такі набори, для яких $1 \leq k \leq n$.

Проведемо доведення методом математичної індукції на множині пар (k, r) таких, що $k \geq 1$, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}k(k-1)$; вважаємо, що пари впорядковані лексикографічно. А саме, вважаємо, що порядок визначений таким чином:

$$(k', r') < (k'', r'') \text{ якщо } k' < k'' \text{ або } k' = k'' \text{ і } r' < r''.$$

База індукції. Розглянемо набори з множин $N_{k,0}$.

Якщо $k = 1$, то шукані рівності (2.32), (2.33) випливають із (2.31).

Якщо $2 \leq k \leq n$ і $(j_1, \ldots, j_k) \in N_{k,0}$, то в наборі $(j_1, \ldots, j_k)$ немає інверсій, тобто $j_1 \leq \cdots \leq j_k$. Отже, $\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}$ належить базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта. А тоді рівності (2.32), (2.33) випливають з (2.31).

Перехід індукції. Розглянемо будь-яку пару (k, r) таку, що $2 \leq k \leq n$ і $1 \leq r \leq \frac{1}{2}k(k-1)$, і припустимо, що рівності (2.32), (2.33) виконуються для будь-якого елемента $\ell_{q_1} \cdots \ell_{q_{k'}}$, де $(q_1, \ldots, q_{k'}) \in N_{k',r'}$ і $(k', r') < (k, r)$. Це означає, що $c(\ell_{q_1} \cdots \ell_{q_{k'}}) = 0$ за винятком випадку, коли $(k', r') = (n, r')$ і $\{q_1, \ldots, q_{k'}\} = \{1, \ldots, n\}$; у цьому випадку $c(\ell_{q_1} \cdots \ell_{q_{k'}}) = 1$.

Розглянемо будь-який набір $(j_1, \dots, j_k) \in N_{k,r}$. Оскільки $r \geq 1$, то в наборі є інверсія, тобто існує такий $1 \leq s \leq k-1$, що $j_s > j_{s+1}$. Оскільки

$$\ell_{j_s}\ell_{j_{s+1}} = [\ell_{j_s}, \ell_{j_{s+1}}] + \ell_{j_{s+1}}\ell_{j_s},$$

ми можемо записати

$$\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k} = a_1 + a_2, \tag{2.34}$$

де

$$a_1 = \ell_{j_1} \cdots \ell_{j_{s-1}}[\ell_{j_s}, \ell_{j_{s+1}}]\ell_{j_{s+2}} \cdots \ell_{j_k},$$

$$a_2 = \ell_{j_1} \cdots \ell_{j_{s-1}}\ell_{j_{s+1}}\ell_{j_s}\ell_{j_{s+2}} \cdots \ell_{j_k}.$$

Спочатку розглянемо a_1. Оскільки елемент $[\ell_{j_s}, \ell_{j_{s+1}}]$ належить до алгебри Лі $\mathcal{L}$, він дорівнює лінійній комбінації базисних елементів

$$[\ell_{j_s}, \ell_{j_{s+1}}] = \sum \alpha_p \ell_p,$$

де $\alpha_p \in \mathbb{R}$. Тоді

$$a_1 = \sum \alpha_p \ell_{j_1} \cdots \ell_{j_{s-1}} \ell_p \ell_{j_{s+2}} \cdots \ell_{j_k},$$

де $(j_1, \dots, j_{s-1}, p, j_{s+2}, \dots, j_k) \in N_{k-1,r'}$ для деякого $r' \leq \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$. Оскільки $(k-1, r') < (k, r)$ і $k-1 \leq n-1$, то за припущенням індукції отримуємо $c(a_1) = 0$.

Тому $c(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}) = c(a_2)$. Очевидно, $a_2 \in N_{k,r-1}$, оскільки кількість інверсій зменшилася за рахунок одної транспозиції сусідніх елементів. Крім того, зауважимо, що a_2 є добутком тих самих елементів $\ell_{j_1}, \dots, \ell_{j_k}$, але перемножених в іншому порядку. Оскільки $(k, r-1) < (k, r)$, то рівності (2.32), (2.33) виконуються для елемента $\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}$, оскільки, згідно з припущенням індукції, вони виконуються для a_2. Лему доведено. □

Тепер доведемо основну теорему цього розділу. Нагадаємо, що підалгебра Лі $\mathcal{L}'$ є градуйованою, якщо її можна подати у вигляді прямої суми

$$\mathcal{L}' = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}^k).$$

Теорема 2.3. *Нехай $\mathcal{L}'$ — градуйована підалгебра Лі корозмірності $n \geq 1$. Тоді існує одновимірний однорідний ряд рангу Лі n такий, що $\mathcal{L}'$ є кореневою підалгеброю Лі його мінімальної реалізації.*

Доведення. Оскільки $\mathcal{L}'$ є градуйованою підалгеброю Лі корозмірності n, ми можемо вибрати однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}$ так, що

$$\mathcal{L}' + \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_n\} = \mathcal{L}.$$

Без обмеження загальності ми вважаємо, що $\mathrm{ord}(\ell_i) \leq \mathrm{ord}(\ell_j)$, якщо $i < j$. Оберемо однорідний базис $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ підалгебри Лі $\mathcal{L}'$ і розглянемо відповідний базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (1.9) та його дуальний базис (1.11).

Розглянемо такий ряд

$$S = d_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, d_n, \tag{2.35}$$

де $\sqcup\!\sqcup$ означає тасуючий добуток (1.10). Зауважимо, що S містить лише скінченну кількість елементів $\mathcal{F}$, причому вони мають один і той самий порядок $\mathrm{ord}(d_1) + \cdots + \mathrm{ord}(d_n)$.

Зазначимо, що ряд S відповідає лінійному відображенню $c : \mathcal{F}^e \to \mathbb{R}$, визначеному (2.31) і такому, що $c(1) = 0$. Справді, якщо записати ряд S в дуальному базисі (1.11), отримаємо

$$S = c(1) + \sum \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} c(\ell_{i_1}^{q_1} \cdots \ell_{i_k}^{q_k}) d_{i_1}^{\sqcup\!\sqcup q_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, d_{i_k}^{\sqcup\!\sqcup q_k}.$$

Сума у правій частині береться по $k \geq 1$ і всіх $1 \leq i_1 < \cdots < i_k$ та $q_1, \ldots, q_k \geq 1$. Прирівнюючи коефіцієнти при базисних елементах (1.11), отримуємо значення відображення c на елементах базиса Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (1.9), звідки й випливають рівності (2.31).

Ми покажемо, що ряд (2.35) має ранг Лі n. Перш за все зауважимо, що його ранг Лі не перевищує n, оскільки ряд має n-вимірну реалізацію, а саме, n-вимірну систему, що відповідає ряду

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

з виходом $y = h(x) = x_1 \cdots x_n$. Таку систему можна знайти явно, наприклад, як описано в [38].

Якщо розкласти ряд $\widetilde{S}$ по дуальному базису аналогічно тому, як ми зробили це для ряду S, то очевидно отримаємо, що $\widetilde{c}(\ell_i) = e_i$ для $i = 1, \dots, n$ і $c(\ell_i) = 0$ для $i \geq n+1$. Це означає, що $\widetilde{S}$ задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.15) і при цьому $\widetilde{c}(\mathcal{L}') = 0$. Отже, коренева підалгебра Лі цієї системи дорівнює $\mathcal{L}'$.

Тепер ми покажемо, що ця реалізація мінімальна.

Для цього ми покажемо, що ранг Лі ряду (2.35) не менший ніж n. За визначенням, ранг Лі дорівнює розмірності множини рядів $F_c(\ell)$ вигляду (2.9). Зручно розкласти ряди $F_c(\ell)$ по дуальному базису (1.11). Тобто іншими словами: ранг Лі дорівнює розмірності множини рядів вигляду

$$F_c(\ell) = c(\ell) + \sum_{j_1 < \dots < j_k} \frac{1}{q_1! \dots q_k!} c(\ell_{j_1}^{q_1} \cdots \ell_{j_k}^{q_k} \ell) d_{j_1}^{ш q_1} ш \cdots ш d_{j_k}^{ш q_k},$$

де ℓ пробігає алгебру Лі $\mathcal{L}$.

Покажемо, що ряди $F_c(\ell_1), \dots, F_c(\ell_n)$ є лінійно незалежними.

При $n = 1$ немає чого доводити, оскільки у такому випадку $S = d_1$, а отже, $c(\ell_1) = 1$, тобто ряд $F_c(\ell_1)$ ненульовий.

Нехай $n \geq 2$. Введемо позначення

$$\overline{d_1} = d_2 ш \cdots ш d_n, \quad \overline{d_n} = d_1 ш \cdots ш d_{n-1},$$

$$\overline{d_r} = d_1 ш \cdots ш d_{r-1} ш d_{r+1} ш \cdots ш d_n, \quad r = 2, \dots, n-1.$$

Іншими словами, $\overline{d_r}$ є тасуючим добутком всіх елементів $d_1, \dots, d_n$, крім d_r. Аналогічно позначимо

$$\overline{\ell_1} = \ell_2 \cdots \ell_n, \quad \overline{\ell_n} = \ell_1 \cdots \ell_{n-1},$$

$$\overline{\ell_r} = \ell_1 \cdots \ell_{r-1}\ell_{r+1}\cdots\ell_n, \quad r = 2, \ldots, n-1.$$

Тоді коефіцієнт $\overline{d_r}$ в ряді $F_c(\ell_i)$ дорівнює $c(\overline{\ell_r}\ell_i)$. Враховуючи лему 2.2, маємо

$$c(\overline{\ell_r}\ell_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \ \ i = r, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Це означає, що матриця $n \times n$, утворена коефіцієнтами елементів $\overline{d_1}, \ldots, \overline{d_n}$ у рядах $F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n)$, є одиничною. Отже, ряди $F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n)$ є лінійно незалежними, а тому ранг Лі ряду (2.35) не менше ніж n.

Тобто ранг Лі ряду (2.35) не більше ніж n і не менше ніж n. Отже, він дорівнює n, що означає, що мінімальна реалізація цього ряду має розмірність n. Як було зазначено вище, цей ряд має реалізацію з кореневою підалгеброю Лі $\mathcal{L}'$ розмірності n. Оскільки мінімальна реалізація єдина з точністю до зміни змінних, вказана реалізація є мінімальною. Теорему доведено. □

Зауважимо, що якщо замість тасуючого добутку (2.35) обрати іншу функцію від d_i, то отриманий ряд може мати менший ранг Лі. Наприклад, розглянемо підалгебру Лі

$$\mathcal{L}' = \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{L}^k$$

і виберемо $\ell_1 = \eta_1$, $\ell_2 = \eta_2$, тоді $d_1 = \eta_1$, $d_2 = \eta_2$. Ранг Лі ряду

$$S = d_1 \sqcup\!\sqcup\, d_2 = \eta_{12} + \eta_{21}$$

дійсно дорівнює 2, а мінімальна реалізація може бути вибрана як

$$\dot{x}_1 = u_1,$$
$$\dot{x}_2 = u_2$$

з виходом $h(x) = x_1 x_2$. Але ранг Лі ряду

$$S = d_1 + d_2$$

дорівнює 1, і коренева підалгебра Лі його мінімальної реалізації дорівнює

$$\mathcal{L}'' = \operatorname{Lin}\{\eta_1 - \eta_2\} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{L}^k \neq \mathcal{L}'.$$

Мінімальна реалізація такого ряду може бути вибрана як

$$\dot{x}_1 = u_1 + u_2$$

з виходом $h(x) = x_1$.

З теореми 2.3 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.1. *Будь-яка градуйована підалгебра Лі скінченної (ненульової) корозмірності є кореневою підалгеброю Лі мінімальної реалізації деякого одновимірного (нетривіального) ряду, а розмірність цієї реалізації дорівнює корозмірності підалгебри Лі.*

Іншими словами, існує взаємно однозначна відповідність між множиною однорідних апроксимацій мінімальних реалізацій одновимірних рядів ітерованих інтегралів і множиною градуйованих підалгебр Лі скінченної корозмірності. Таким чином, отримуємо класифікацію однорідних апроксимацій мінімальних реалізацій одновимірних рядів ітерованих інтегралів: їх існує стільки, скільки є різних градуйованих підалгебр Лі скінченної корозмірності.

Висновки до розділу 2

У розділі 2 розглянуті ряди ітерованих інтегралів зі скалярними коефіцієнтами і відповідні формальні ряди елементів абстрактної вільної алгебри $\mathcal{F}$.

1. Критерій реалізовності ряду сформульований у зручній для подальшого формі: у термінах відображення, яке визначається рядом (теорема 2.1).

2. Вивчена однорідна апроксимація мінімальної реалізації ряду. Точніше, показано, як знайти кореневу підалгебру Лі мінімальної реалізації без знаходження самої мінімальної реалізації, користуючись лише вихідним (одновимірним) рядом (теорема 2.2).

3. Отримана класифікаційна теорема: показано, що довільна градуйована підалгебра Лі скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю Лі мінімальної реалізації деякого одновимірного ряду (теорема 2.3, наслідок 2.1).

У дослідженні, зокрема, використовуються властивості тасуючого добутку в алгебрі $\mathcal{F}$ і дуального базису до базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта.

Результати цього розділу опубліковані у статті [8] і тезах [7].

РОЗДІЛ 3

ОДНОРІДНА АПРОКСИМАЦІЯ ОДНОВИМІРНИХ РЯДІВ ІТЕРОВАНИХ ІНТЕГРАЛІВ І ЗАДАЧА ШВИДКОДІЇ ДЛЯ СИСТЕМ З ОДНОВИМІРНИМ ВИХОДОМ

3.1 Однорідний ряд та його мінімальна реалізація

Далі будемо використовувати таке позначення для множини мультиіндексів фіксованої ненульової довжини:

$$M_r = \{I \in M : I = (i_1, \ldots, i_r)\}, \quad r \geq 1.$$

Розглянемо *однорідний* одновимірний ряд вигляду

$$S = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I. \tag{3.1}$$

Іншими словами, ряд S містить лише члени порядку r, тобто $S \in \mathcal{F}^r$ (припускаємо, що принаймні один із його коефіцієнтів відмінний від нуля). Для узгодженості ми називаємо S «рядом», хоча сума в правій частині (3.1) є скінченною.

Зауважимо, що скінченний ряд завжди є реалізовним. Нехай $\mathcal{L}_S$ позначає кореневу підалгебру Лі мінімальної реалізації цього ряду, а $\mathcal{J}_S$ позначає лівий ідеал

$$\mathcal{J}_S = \mathrm{Lin}\{a\ell : a \in \mathcal{F}^e, \ell \in \mathcal{L}_S\}. \tag{3.2}$$

Введемо поняття, яке будемо використовувати у подальшому.

Визначення 3.1. *Лінійний підпростір $\mathcal{J}' \subset \mathcal{F}$ будемо називати лівим ідеалом, породженим градуйованою підалгеброю Лі, якщо існує градуйована підалгебра Лі $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ така, що*

$$\mathcal{J}' = \mathrm{Lin}\{a\ell : a \in \mathcal{F}^e, \ell \in \mathcal{L}'\}.$$

У цьому випадку ми говоримо, що лівий ідеал Лі $\mathcal{J}'$ породжений підалгеброю Лі $\mathcal{L}'$.

Очевидно, що лівий ідеал, породжений градуйованою підалгеброю Лі, є градуйованим, тобто його можна подати у вигляді

$$\mathcal{J}' = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{J}' \cap \mathcal{F}^k).$$

Наприклад, лівий ідеал $\mathcal{J}_S$ є лівим ідеалом, породженим градуйованою підалгеброю Лі; він породжений кореневою підалгеброю Лі $\mathcal{L}_S$, що випливає з його визначення (3.2).

Нагадаємо, що в алгебрі $\mathcal{F}$ введений скалярний добуток $\langle \cdot, \cdot \rangle$, у якому базис $\{\eta_I : I \in M\}$ ортонормований. Зокрема, для довільного елемента $z \in \mathcal{F}$ маємо

$$\langle S, z \rangle = c(z). \tag{3.3}$$

Розглянемо множину D всіх лівих ідеалів, породжених градуйованою підалгеброю Лі, а в цій множині – підмножину D_S ідеалів, які ортогональні до ряду S в сенсі введеного скалярного добутку, тобто

$$D_S = \{\mathcal{J} \in D : \mathcal{J} \subset S^{\perp}\}. \tag{3.4}$$

Наступна лема дає альтернативний спосіб знайти кореневу підалгебру Лі $\mathcal{L}_S$ для однорідного одновимірного ряду.

Лема 3.1. *Нехай заданий однорідний ряд $S \in \mathcal{F}^r$, де $r \geq 1$, і принаймні один з коефіцієнтів S відмінний від нуля. Нехай $\mathcal{L}_S$ – коренева підалгебра Лі мінімальної реалізації ряду S, а $\mathcal{J}_S$ – лівий ідеал, породжений $\mathcal{L}_S$. Тоді $\mathcal{J}_S$ є максимальним (у сенсі включення) лівим ідеалом із множини D_S, що визначена (3.4).*

Доведення. Очевидно, що максимальний лівий ідеал, який містить усі інші ліві ідеали з множини D_S, існує і єдиний. Позначимо цей ідеал як $\mathcal{J}_{\max}$; нехай $\mathcal{L}_{\max}$ — градуйована підалгебра Лі, яка породжує $\mathcal{J}_{\max}$.

Спочатку розглянемо мінімальну реалізацію ряду S. За теоремою 2.2, коренева підалгебра Лі $\mathcal{L}_S$ цієї реалізації має вигляд

$$\mathcal{L}_S = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^k,$$

де підпростори $\mathcal{P}^k$ мають вигляд (2.25). Але відображення c дорівнює нулю на будь-якому елементі, крім елементів порядку r. Покажемо, що рівність $c(a\ell) = 0$ виконується для будь-яких елементів $\ell \in \mathcal{L}_S$ і $a \in \mathcal{F}^e$. Доведемо це від супротивного. Якщо це не так, то $c(a\ell) \neq 0$ для деякого $\ell \in \mathcal{L}_S$ і деякого $a \in \mathcal{F}^e$. Тоді $a\ell \in \mathcal{F}^r$. Без обмеження загальності можна вважати, що елемент a є однорідним, тоді $a \in \mathcal{F}^k$ і $\ell \in \mathcal{L}^{r-k}$, де $0 \leq k \leq r-1$. За визначенням (2.25) підпросторів $\mathcal{P}^k$ існує елемент $\ell' \in \mathcal{L}^1 + \cdots + \mathcal{L}^{r-k-1}$ такий, що $c(a\ell) = c(a\ell') \neq 0$. Отже, $a\ell' \in \mathcal{F}^r$. З іншого боку, елемент $a\ell'$ належить сумі підпросторів $\mathcal{F}^{k+1} + \cdots + \mathcal{F}^{r-1}$. Отже, отримали суперечність.

Таким чином, $c(a\ell) = 0$ для будь-яких $\ell \in \mathcal{L}_S$ і $a \in \mathcal{F}^e$. Це означає, що $c(\mathcal{J}_S) = 0$ або, що те саме, $S \perp \mathcal{J}_S$ (з огляду на (3.3)). Отже, S належить $\mathcal{J}_S^{\perp}$, звідки випливає, що $\mathcal{J}_S \subset S^{\perp}$. Таким чином, лівий ідеал $\mathcal{J}_S$ належить множині D_S, а отже, $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{J}_{\max}$. Як наслідок, для градуйованих підалгебр Лі, що породжують ці ліві ідеали, отримуємо включення $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\max}$.

Тепер розглянемо градуйовану підалгебру Лі $\mathcal{L}_{\max}$. Оскільки за умовою ряд S належить $\mathcal{F}^r$, він ортогональний до будь-якого підпростору $\mathcal{F}^k$, де $k \geq r+1$. З цього випливає, що лівий ідеал, породжений підалгеброю Лі $\sum\limits_{k=r+1}^{\infty} \mathcal{L}^k$, належить множині D_S. Отже, $\sum\limits_{k=r+1}^{\infty} \mathcal{L}^k \subset \mathcal{L}_{\max}$. Таким чином, підалгебра Лі $\mathcal{L}_{\max}$ має скінченну корозмірність.

Отже, для підалгебри Лі $\mathcal{L}_{\max}$ можна провести наступну побудову [38]. Позначимо $n' = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_{\max})$. Виберемо однорідні елементи $\ell'_1, \ldots, \ell'_{n'} \in \mathcal{L}$ такі, що

$$\mathcal{L} = \operatorname{Lin}\{\ell'_1, \ldots, \ell'_{n'}\} + \mathcal{L}_{\max},$$

виберемо однорідний базис $\{\ell'_i\}_{i=n'+1}^{\infty}$ підалгебри Лі $\mathcal{L}_{\max}$ і побудуємо базис

Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, аналогічний (1.9), тобто

$$\{\ell'^{q_1}_{i_1}\cdots\ell'^{q_k}_{i_k} : k\geq 1,\ 1\leq i_1<\cdots<i_k,\ q_1,\ldots,q_k\geq 1\}. \tag{3.5}$$

Розглянемо дуальний базис $d'^{q_1\ldots q_k}_{i_1\ldots i_k}$, аналогічний базису (1.12), елементи якого мають вигляд

$$d'^{q_1\ldots q_k}_{i_1\ldots i_k}=\frac{1}{q_1!\cdots q_k!}d'^{\text{ш}q_1}_{i_1}\,\text{ш}\cdots\text{ш}\,d'^{\text{ш}q_k}_{i_k},$$

де d'_i ортогональні всім елементам базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, крім ℓ'_i, а скалярний добуток d'_i і ℓ'_i дорівнює 1.

Запишемо ряд S у цьому дуальному базисі. За побудовою, $S\in\mathcal{J}^{\perp}_{\max}$. Аналогічно до підпростору $J^{\perp}_S$, базисом якого є елементи (1.18), елементи $d'_1,\ldots,d'_{n'}$ і їх тасуючі добутки утворюють базис $\mathcal{J}^{\perp}_{\max}$,

$$\mathcal{J}^{\perp}_{\max}=\mathrm{Lin}\{d'^{\text{ш}q_1}_1\,\text{ш}\cdots\text{ш}\,d'^{\text{ш}q_{n'}}_{n'} : q_1,\ldots,q_{n'}\geq 0,\ q_1+\cdots+q_{n'}\geq 1\}.$$

Отже, S є поліномом від $d'_1,\ldots,d'_{n'}$ у сенсі тасуючого добутку,

$$S=\sum_{q_1w'_1+\cdots+q_{n'}w'_{n'}=r}\alpha_{q_1\ldots q_{n'}}d'^{\text{ш}q_1}_1\,\text{ш}\cdots\text{ш}\,d'^{\text{ш}q_{n'}}_{n'},$$

де $w'_j=\mathrm{ord}(d'_j)$, $j=1,\ldots,n'$. Покажемо, що ряд S має реалізацію розмірності n'. А саме, розглянемо n'-вимірний ряд $\widetilde{S}'$ з компонентами

$$\widetilde{S}'_k=d'_k,\quad k=1,\ldots,n'.$$

Очевидно, він відповідає лінійному відображенню $\widetilde{c}':\mathcal{F}\to\mathbb{R}^{n'}$, визначеному на базисі Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (3.5) таким чином:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{c}'(\ell'^{q_1}_{i_1}\cdots\ell'^{q_k}_{i_k})=0,\quad\text{якщо}\ \ q_1+\cdots+q_k\geq 2,\\
&\widetilde{c}'(\ell'_i)=0,\quad\text{якщо}\ \ i\geq n'+1,\\
&\widetilde{c}'(\ell'_i)=e_i,\quad\text{якщо}\ \ 1\leq i\leq n',
\end{aligned}$$

де e_i — одиничний вектор з 1 на i-му місці. Цей ряд задовольняє умови реалізовності, оскільки лише скінченна кількість коефіцієнтів ряду $\widetilde{S}$ ненульова. Крім того, очевидно, виконані умови Рашевського-Чжоу

$$\widetilde{c}'(\mathcal{L})=n'.$$

Можна показати, що існує керована система вигляду (2.3), траєкторія якої, що починається в точці $x^0 = 0$, виражається як

$$x_k(\theta; u) = d'_k(\theta, u), \quad k = 1, \ldots, n'.$$

Щоб це довести, можна скористатися лемою 2.1, а можна застосувати метод, запропонований в [38], [39] і побудувати цю систему явно. Отже, початковий ряд S відповідає виходу цієї системи, який дорівнює поліному

$$y = h(x) = \sum_{q_1 w'_1 + \cdots + q_{n'} w'_{n'} = r} \alpha_{q_1 \ldots q_{n'}} x_1^{q_1} \cdots x_{n'}^{q_{n'}}.$$

Таким чином, ряд S можна реалізувати як вихід деякої n'-вимірної системи, де $n' = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_{\max})$. Отже, $n' \geq n$, тобто $\operatorname{codim}(\mathcal{L}_{\max}) \geq \operatorname{codim}(\mathcal{L}_S)$, з чого випливає, що $\mathcal{L}_{\max} \subset \mathcal{L}_S$. З іншого боку, як показано вище, $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\max}$. Отримуємо $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{\max}$ і, як наслідок, $\mathcal{J}_S = \mathcal{J}_{\max}$. Лему доведено. □

3.2 Однорідна апроксимація ряду

Розглянемо довільний формальний ряд

$$S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I, \tag{3.6}$$

де c_I — скалярні коефіцієнти. Нижче ми припускаємо, що ряд S реалізовний, тобто його ранг Лі є скінченним. Під однорідною апроксимацією ряду S ми розуміємо суму доданків мінімального порядку. Більш детально, ми приймаємо таке визначення.

Визначення 3.2. *Розглянемо ненульовий ряд (3.6). Нехай r — мінімальний порядок доданків, які входять до S, тобто*

$$r = \min\{k \geq 1 : c_I \neq 0 \text{ для деяких } I \in M_k\}.$$

Тоді ряд

$$\widehat{S} = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I$$

називається однорідною апроксимацією ряду (3.6).

Оскільки ряд $\widehat{S}$ містить скінченну кількість доданків, то він є реалізовним. Нехай $\mathcal{L}_S$ і $\mathcal{L}_{\widehat{S}}$ позначають кореневі підалгебри Лі мінімальних реалізацій рядів S і $\widehat{S}$ відповідно. Теорема 3.1 нижче описує зв'язок між рангами Лі рядів S і $\widehat{S}$ та цими кореневими підалгебрами Лі.

Теорема 3.1. *Нехай ряд $\widehat{S}$ є однорідною апроксимацією ряду S. Тоді виконуються наступні дві умови:*
1) $\rho_L(\widehat{S}) \leq \rho_L(S)$;
2) $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\widehat{S}}$.

Доведення. Нехай r — мінімальний порядок доданків, які входять до S, тоді $\widehat{S} \in \mathcal{F}^r$. По-перше, покажемо, що лівий ідеал $\mathcal{J}_S$ (який, очевидно, породжений градуйованою підалгеброю Лі) ортогональний $\widehat{S}$.

Позначимо через $\widetilde{S}$ ряд мінімальної реалізації S, побудований, як пояснено у підрозділі 2.4; коефіцієнти цього ряду мають розмірність $n = \rho_L(S) = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_S)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що цей ряд має вигляд (1.19), тобто

$$\widetilde{S}_k = d_k + R_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

де d_k – елементи дуального базису і

$$R_k \in \sum_{i \geq w_k+1} \mathcal{F}^i, \quad w_k = \operatorname{ord}(d_k).$$

До такого вигляду можна привести цей ряд, виконуючи відповідну заміну змінних у системі. Тоді ряд S можна подати як

$$S = \sum_{q_1+\cdots+q_n \geq 1} \alpha_{q_1\ldots q_n} (d_1 + R_1)^{ш q_1} ш \cdots ш (d_n + R_n)^{ш q_n},$$

де $\alpha_{q_1\ldots q_n}$ – деякі дійсні коефіцієнти. Оскільки $\widehat{S}$ містить елементи мінімального порядку ряду S, ми, очевидно, отримуємо, що $\widehat{S}$ є тасуючим поліномом елементів $d_1, \ldots, d_n$, а саме,

$$\widehat{S} = \sum_{q_1 w_1+\cdots+q_n w_n = r} \alpha_{q_1\ldots q_n} d_1^{ш q_1} ш \cdots ш d_n^{ш q_n}.$$

Але тасуючі добутки елементів $d_1, \dots, d_n$ утворюють базис підпростору $\mathcal{J}_S^\perp$. Тому $\widehat{S} \subset \mathcal{J}_S^\perp$, звідки випливає, що $\mathcal{J}_S \subset \widehat{S}^\perp$.

Таким чином, $\mathcal{J}_S \in D_S$, де множина D_S визначена (3.4). Нехай $\mathcal{J}_{\max}$ – максимальний (у сенсі включення) лівий ідеал з множини D_S і $\mathcal{L}_{\max}$ — підалгебра Лі, яка породжує лівий ідеал $\mathcal{J}_{\max}$. Тоді, очевидно, $\mathcal{J}_S \subset \mathcal{J}_{\max}$ і, отже, $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\max}$.

З іншого боку, оскільки ряд $\widehat{S}$ однорідний, то з леми 3.1 випливає, що $\mathcal{L}_{\max}$ є кореневою підалгеброю Лі ряду $\widehat{S}$, тобто $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_{\max}$ і $\rho_L(\widehat{S}) = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_{\max})$. Отже, $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\widehat{S}}$, звідки отримуємо, що $\rho_L(\widehat{S}) \leq \rho_L(S)$. Теорему доведено. $\square$

Приклад 3.1. Розглянемо нескінченний одновимірний ряд

$$S = \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{221} + \eta_{2221} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_2^k \eta_1,$$

який описує вихід наступної одновимірної системи

$$\dot{x}_1 = u_1 + x_1 u_2, \quad y = h(x_1) = x_1.$$

Його однорідна апроксимація дорівнює $\widehat{S} = \eta_1$. Очевидно, що реалізацію $\widehat{S}$ можна вибрати у вигляді однорідної одновимірної системи

$$x_1 = u_1,$$

з виходом $y = h(x_1) = x_1$. Таким чином, тут

$$\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_{\widehat{S}} = \operatorname{Lin}\{\eta_2\} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{L}^k$$

і $\rho_L(S) = \rho_L(\widehat{S}) = 1$.

Зауважимо, що мінімальна реалізація будь-якої часткової суми ряду S

$$S' = \sum_{k=0}^{p-1} \eta_2^k \eta_1$$

при $p \geq 2$ має розмірність p. Справді, коефіцієнт $c(\eta_I)$ не дорівнює нулю лише якщо $I = (\underbrace{2,\ldots,2}_{\leq p-1},1)$, а тому серед рядів $F_{c'}(\ell)$ ненульовими є лише ряди з $\ell \in \mathrm{Lin}\{\mathrm{ad}^i_{\eta_2}\eta_1 : 0 \leq i \leq p-1\}$, де використане стандартне позначення

$$\mathrm{ad}^0_{\eta_2}\eta_1 = \eta_1, \qquad \mathrm{ad}^i_{\eta_2}\eta_1 = [\eta_2, \mathrm{ad}^{i-1}_{\eta_2}\eta_1], \quad i \geq 1.$$

Це означає, що ранг Лі ряду S' не більший за p.

Але з іншого боку, ряди

$$F_{c'}(\mathrm{ad}^i_{\eta_2}\eta_1) = \sum_{k=0}^{p-1-i} \eta_2^k, \quad i = 0,\ldots,p-1,$$

є лінійно незалежними, отже, ранг Лі ряду S' дорівнює p.

Наприклад, при $p = 3$ маємо

$$S' = \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{221},$$

тобто $c'_1 = c'_{21} = c'_{221} = 1$, а решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Тоді лінійно незалежними рядами вигляду $F_{c'}(\ell)$ є такі три ряди:

$$\begin{aligned}
F_{c'}(\eta_1) &= c'(\eta_1)\eta_\varnothing + c'(\eta_{21})\eta_2 + c'(\eta_{221})\eta_{22} = 1 + \eta_2 + \eta_{22},\\
F_{c'}([\eta_2,\eta_1]) &= c'(\eta_{21})\eta_\varnothing + c'(\eta_{221})\eta_2 = 1 + \eta_2,\\
F_{c'}([\eta_2,[\eta_2,\eta_1]]) &= c'(\eta_{221})\eta_\varnothing = 1.
\end{aligned}$$

Натомість, для вихідного нескінченного ряду S серед рядів $F_c(\ell)$ ненульовими є лише ряди з $\ell \in \mathrm{Lin}\{\mathrm{ad}^i_{\eta_2}\eta_1 : i \geq 0\}$, але в цьому випадку для будь-якого $i \geq 0$

$$F_c(\mathrm{ad}^i_{\eta_2}\eta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c(\eta_2^{k+i}\eta_1)\eta_2^k = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_2^k,$$

тобто всі ці ряди співпадають.

Мінімальну реалізацію S' можна вибрати як

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1, \\
\dot{x}_2 &= x_1 u_2, \\
&\dots \\
\dot{x}_p &= \tfrac{1}{(p-1)!} x_1^{p-1} u_2
\end{aligned}$$

з виходом $y = h(x) = x_1 + \cdots + x_p$. Таким чином, при $p \geq 2$ отримуємо $\rho_L(S') > \rho_L(S)$.

Приклад 3.1 показує, що теорема 3.1 не може бути узагальнена на довільну часткову суму одновимірних рядів.

3.3 Класифікація кореневих підалгебр Лі

Теорема 3.1 описує зв'язок між кореневими підалгебрами Лі ряду та його однорідної апроксимації. Наступна теорема показує, що будь-які дві вкладені градуйовані підалгебри Лі скінченної ненульової корозмірності є кореневими підалгебрами Лі деякого ряду та його однорідної апроксимації.

Теорема 3.2. *Нехай $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ – дві градуйовані підалгебри Лі*

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L},$$

такі що $0 < \operatorname{codim}(\mathcal{L}_2) \leq \operatorname{codim}(\mathcal{L}_1) < \infty$. Тоді існує одновимірний ряд S вигляду (2.7) такий, що $\mathcal{L}_1$ є його кореневою підалгеброю Лі, а $\mathcal{L}_2$ є кореневою підалгеброю Лі його однорідної апроксимації $\widehat{S}$, тобто $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_2$.

Доведення. Якщо $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, то в якості ряду S ми можемо взяти однорідний ряд; тоді сам ряд і його однорідна апроксимація співпадатимуть. А саме, нехай $n = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_1)$. Виберемо n однорідних елементів $\ell_1, \dots, \ell_n$ таких, що

$$\operatorname{Lin}\{\ell_1, \dots, \ell_n\} + \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}. \tag{3.7}$$

Далі виберемо однорідний базис $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ $\mathcal{L}_1$ і побудуємо базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (1.9) і дуальний базис (1.12). Розглянемо однорідний ряд

$$S = d_1 ш \cdots ш d_n.$$

Як було показано в доведенні теореми 2.3, $\mathcal{L}_1$ є кореневою підалгеброю Лі однорідного ряду S, а отже, і його однорідної апроксимації.

Тепер розглянемо випадок, коли $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$, і покажемо, як можна побудувати (неоднорідний) ряд S, для якого $\mathcal{L}_1$ є кореневою підалгеброю Лі, і при цьому $\mathcal{L}_2$ є кореневою підалгеброю Лі його однорідної апроксимації.

Позначимо корозмірності $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ як $n = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_1)$ і $q = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_2)$, тоді $0 < q < n < \infty$. В цьому випадку ми також вибираємо n однорідних елементів, які задовольняють умову (3.7). Але тепер вони мають бути такими, щоб $n - q$ з них належали кореневій підалгебрі $\mathcal{L}_2$. А саме, спочатку виберемо однорідні елементи $\ell_1, \ldots, \ell_q$ так, щоб

$$\operatorname{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_q\} + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$$

а далі виберемо однорідні елементи

$$\ell_{q+1}, \ldots, \ell_n \in \mathcal{L}_2$$

так, щоб виконувалася умова (3.7).

Далі виберемо однорідний базис $\{\ell_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ підалгебри Лі $\mathcal{L}_1$ і побудуємо базиси (1.9) і (1.12). Розглянемо ряд

$$S = d_1 ш \cdots ш d_q + d_1 ш \cdots ш d_n. \tag{3.8}$$

Цей ряд не є однорідним; його однорідна апроксимація дорівнює

$$\widehat{S} = d_1 ш \cdots ш d_q.$$

Коренева підалгебра Лі ряду $\widehat{S}$ дорівнює $\mathcal{L}_2$, тобто $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_2$, що випливає з доведення теореми 2.3. Доведемо, що коренева підалгебра Лі ряду S дорівнює $\mathcal{L}_1$.

Позначимо $p = \operatorname{ord}(\ell_1 \cdots \ell_n)$ і зауважимо, що $\operatorname{ord}(\ell_1 \cdots \ell_q) < p$. Розглянемо елементи базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (1.9), які мають порядок не менший, ніж p, тобто елементи, які належать $\sum\limits_{k=p}^{\infty} \mathcal{F}^k$. На них відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, яке відповідає ряду S, задовольняє рівності

$$c(\ell_{i_1} \cdots \ell_{i_k}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (i_1, \ldots, i_k) = (1, \ldots, n), \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Оскільки тут розглядаються лише елементи базису Пуанкаре-Біркгофа-Вітта, то мається на увазі, що $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k$. Ці рівності означають, що відображення, що відповідає ряду (3.8), задовольняє умову (2.31) для елементів $\ell_{i_1} \cdots \ell_{i_k}$, для яких $\operatorname{ord}(\ell_{i_1} \cdots \ell_{i_k}) \ge p$ і індекси $(i_1, \ldots, i_k)$ впорядковані.

Повернемось до міркувань з доведення леми 2.2. Зауважимо, що у цьому доведенні всі перетворення вихідного елемента $\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}$ відбувалися в одному й тому самому однорідному підпросторі. Справді, розглянемо рівність (2.34). Очевидно, що елементи a_1 і a_2 належать тому самому однорідному підпростору, що й елемент $\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}$. Отже, ми можемо застосувати міркування з доведення леми 2.2 для тих наборів $(j_1, \ldots, j_k)$, для яких $\operatorname{ord}(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}) \ge p$, де індекси $j_1, \ldots, j_k$ уже не є впорядкованими.

Повторюючи міркування з доведення леми 2.2, отримуємо, що для будь-якого (невпорядкованого) набору $(j_1, \ldots, j_k)$ такого, що $\operatorname{ord}(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}) \ge p$, виконуються рівності

$$c(\ell_{j_1} \cdots \ell_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (j_1, \ldots, j_k) \text{ є перестановкою } \{1, \ldots, n\}, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{3.9}$$

Тепер розглянемо довільний ряд вигляду $F_c(\ell)$, де $\ell \in \mathcal{L}$. Його розклад у дуальному базисі (1.12) має вигляд

$$F_c(\ell) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{1}{q_1! \cdots q_k!} c(\ell_{j_1}^{q_1} \cdots \ell_{j_k}^{q_k} \ell) d_{j_1}^{ш q_1} ш \cdots ш\, d_{j_k}^{ш q_k}.$$

Використовуючи це представлення, покажемо, що ряди

$$F_c(\ell_1), \ldots, F_c(\ell_n) \tag{3.10}$$

є лінійно незалежними. Для цього розглянемо $n \times n$ матрицю C з елементами C_{kj}, які дорівнюють коефіцієнтам елементів

$$d_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup d_{k-1} \sqcup\!\sqcup d_{k+1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup d_n$$

у ряді $F_c(\ell_j)$, тобто

$$C_{kj} = c(\ell_1 \cdots \ell_{k-1}\ell_{k+1} \cdots \ell_n \ell_j), \quad 1 \leq k, j \leq n.$$

Тоді з (3.9) випливає, що для $1 \leq k \leq j \leq n$

$$C_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j > k. \end{cases}$$

Тобто матриця C є нижньою трикутною з одиницями на діагоналі, а отже, є невиродженою. Це означає, що ряди (3.10) є лінійно незалежними, а отже, ранг Лі ряду S не менший, ніж n.

З іншого боку, ряд S, очевидно, має n-вимірну реалізацію, ряд якої має вигляд

$$\widetilde{S}_k = d_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.11}$$

з виходом

$$y = h(x) = x_1 \cdots x_q + x_1 \cdots x_n.$$

Ця реалізація могла б бути не мінімальною, але мінімальна реалізація має не більшу розмірність. Це означає, що ранг Лі ряду S не більший, ніж n.

Таким чином, ранг Лі ряду S дорівнює n, і тому реалізація, що відповідає ряду (3.11), насправді є мінімальною. Оскільки коренева підалгебра Лі ряду (3.11) очевидно дорівнює $\mathcal{L}_1$, ми отримуємо, що $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_1$. Теорему доведено. $\square$

3.4 Задача швидкодії для однорідних одновимірних рядів

Розглянемо однорідний ряд

$$\widehat{S} = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I \tag{3.12}$$

(який може бути однорідною апроксимацією якогось іншого ряду S). Нехай система

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{X}_i(x) u_i$$

є його мінімальною реалізацією, а $y = \widehat{h}(x)$ – відповідний вихід. У цьому підрозділі ми будемо розглядати керування з одиничної кулі підпростору $L_\infty([0,\theta];\mathbb{R}^m)$, а саме, з множини

$$B(\theta) = \{u(\cdot) \in L_\infty([0,\theta];\mathbb{R}^m) : \sum_{i=1}^{m} u_i^2(t) \leq 1 \text{ м.в.},\ t \in [0,\theta]\}. \tag{3.13}$$

Зауважимо, що (з точністю до майже всюди) $B(\theta)$ є підмножиною множини $U(\theta)$, див. (2.2). У цьому підрозділі ми розглядаємо множину допустимих керувань $B(\theta)$ замість $U(\theta)$; в такому разі оптимальні керування, принаймні у прикладах, виходять неперервними.

Розглянемо наступну задачу швидкодії для мінімальної реалізації однорідного ряду $\widehat{S}$:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{X}_i(x) u_i,\ x(0) = 0, \tag{3.14}$$

$$\widehat{h}(x(\theta)) = s, \tag{3.15}$$

$$u \in B(\theta), \quad \theta \to \min, \tag{3.16}$$

де $s \in \mathbb{R}$ — задане ненульове число. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти керування, яке переводить систему з початку координат до поверхні $\widehat{h}(x) = s$ за мінімально можливий час.

Якщо існує допустиме керування та момент часу T, що задовольняє рівність $\widehat{h}(x(T;u)) = s$, то задача (3.14)–(3.16) має розв'язок за теоремою

Філіпова [15]. У цьому випадку ми позначаємо оптимальний час через $\widehat{\theta}_s^*$ і оптимальне керування через $\widehat{u}_s^*(t)$.

Зауважимо, що керування, яке задовольняє рівність $\widehat{h}(x(T;u)) = s$, не завжди існує. Наприклад, для одновимірної системи $\dot{x}_1 = u_1$ і функції $h(x_1) = x_1^2$ при $s < 0$ такого керування, яке має задовольняти рівність $(\int_0^T u_1(t)dt)^2 = s$, очевидно, не існує.

Оскільки система (3.14) з виходом (3.15) відповідає ряду (3.12), тобто вихід дорівнює

$$y(t;u) = \sum_{I\in M_r} c_I\eta_I(t,u),$$

то задачу швидкодії (3.14)–(3.16) можна переписати у вигляді

$$\sum_{I\in M_r} c_I\eta_I(\theta,u) = s, \quad u\in B(\theta), \quad \theta\to\min. \tag{3.17}$$

Оскільки ряд однорідний, ми можемо спростити задачу. А саме, зауважимо, що для $I = (i_1,\ldots,i_k)$

$$\begin{aligned}\eta_I(\theta,u) &= \int_0^\theta\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1)\cdots u_{i_k}(\tau_k)d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1 = \\ &= \theta^k\int_0^1\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1\theta)\cdots u_{i_k}(\tau_k\theta)d\tau_k\cdots d\tau_2 d\tau_1 = \\ &= \theta^k\eta_I(1,\bar{u}),\end{aligned} \tag{3.18}$$

де $\bar{u}(t) = u(t\theta)$, $t\in[0,1]$. Коли керування $u(t)$ пробігає множину (3.13), керування $\bar{u}(t)$ пробігає множину $B(\theta)$ (вигляду (3.13) з $\theta = 1$). Таким чином, задача (3.17) зводиться до задачі

$$\theta^r\sum_{I\in M_r} c_I\eta_I(1,u) = s, \quad u\in B(1), \quad \theta\to\min.$$

Ця задача, очевидно, зводиться до задачі оптимізації нелінійного однорідного функціонала на одиничній кулі простору $L_\infty([0,1];\mathbb{R}^m)$.

А саме, якщо $s > 0$, то ми розглядаємо наступну задачу

$$\sum_{I\in M_r} c_I\eta_I(1,u)\to\max, \quad u\in B(1).$$

Якщо максимальне значення дорівнює $\mu > 0$, то $\widehat{\theta}_s^* = (\frac{s}{\mu})^{\frac{1}{r}}$ є оптимальним часом у задачі (3.14)–(3.16).

Аналогічно для $s < 0$ розглядаємо задачу

$$\sum_{I\in M_r} c_I \eta_I(1,u) \to \min, \quad u \in B(1).$$

Якщо мінімальне значення дорівнює $\mu < 0$, то $\widehat{\theta}_s^* = (\frac{s}{-\mu})^{\frac{1}{r}}$ є оптимальним часом у задачі (3.14)–(3.16).

Для будь-якої функції $\bar{u}(t)$, на якій досягається максимальне / мінімальне значення, фукнція $\widehat{u}_s^*(t) = \bar{u}(t/\widehat{\theta}_s^*)$ є оптимальним керуванням у задачі (3.14)–(3.16).

Отже, справедлива наступна лема.

Лема 3.2. *Зафіксуємо число $\bar{s} > 0$ (відповідно $\bar{s} < 0$) і розглянемо задачу швидкодії для однорідної системи*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} \widehat{X}_i(x)u_i, \ x(0) = 0,$$
$$\widehat{h}(x(\theta)) = \bar{s},$$
$$u \in B(\theta), \quad \theta \to \min,$$

яка зводиться до задачі

$$\sum_{I\in M_r} c_I \eta_I(\theta,u) = \bar{s}, \quad u \in B(\theta), \quad \theta \to \min.$$

Нехай ця задача має розв'язок: $\widehat{\theta}_{\bar{s}}^*$ — оптимальний час, а $\widehat{u}_{\bar{s}}^*(t)$ — оптимальне керування. Тоді для довільного числа $s > 0$ (відповідно, $s < 0$) задача (3.14)–(3.16) теж має розв'язок: а саме, оптимальний час дорівнює

$$\widehat{\theta}_s^* = \left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^{\frac{1}{r}} \widehat{\theta}_{\bar{s}}^*,$$

а функція

$$\widehat{u}_s^*(t) = \widehat{u}_{\bar{s}}^*\left(t(\bar{s}/s)^{\frac{1}{r}}\right), \ t \in [0, \widehat{\theta}_s^*],$$

є оптимальним керуванням.

Зокрема, якщо $\bar{s} = 1$, то оптимальний час і оптимальне керування дорівнюють

$$\widehat{\theta}_s^* = s^{\frac{1}{r}}\widehat{\theta}_1^*, \qquad \widehat{u}_s^*(t) = \widehat{u}_1^*\left(\frac{t}{s^{\frac{1}{r}}}\right),\ t \in [0, \widehat{\theta}_s^*].$$

Приклад 3.2. Розглянемо систему, яка описує так звану площину Грушина [12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 u_2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

з виходом

$$y = x_1 x_2.$$

Ця система і вихід є однорідними, а відповідний однорідний ряд має вигляд

$$\widehat{S} = \eta_1 \sqcup\!\sqcup\, \eta_{21} = \eta_{121} + 2\eta_{211}.$$

Як зазначалося вище, достатньо розглянути два конкретних числа $\bar{s}$, наприклад, $\bar{s} = 1$ та $\bar{s} = -1$, щоб отримати розв'язок задачі для довільного $s \neq 0$.

Розглянемо $\bar{s} = 1$. Відповідна задача оптимізації полягає в максимізації функціоналу

$$\eta_{121}(1, u) + 2\eta_{211}(1, u) \tag{3.20}$$

на множині $B(1) \subset L_\infty([0,1]; \mathbb{R}^2)$ керувань, що задовольняють обмеження

$$u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1]. \tag{3.21}$$

Розв'язок задачі швидкодії для цієї системи добре відомий [5]; ми коротко пояснимо, як його можна отримати, застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна.

Спочатку запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H = \psi_1 u_1 + \psi_2 x_1 u_2,$$

та спряжену систему

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 u_2,$$
$$\dot{\psi}_2 = 0.$$

Отже, функція $\psi_2(t)$ є константою; позначимо її c.

Тепер застосуємо принцип максимуму Понтрягіна. Нехай $u(t)$ – оптимальне керування, $x(t)$ – відповідна оптимальна траєкторія, а $\psi(t)$ – спряжена змінна. Тоді для (майже) довільного t

$$\psi_1(t)u_1(t) + cx_1(t)u_2(t) = \max_{u_1^2+u_2^2\le 1}(\psi_1(t)u_1 + cx_1(t)u_2).$$

Отже, для довільного фіксованого t знайдемо максимальне значення функції $H = \psi_1(t)u_1 + cx_1(t)u_2$ на множині векторів $u = (u_1, u_2)$, які задовольняють обмеження $u_1^2 + u_2^2 \le 1$. Для цього запишемо функцію Лагранжа

$$L = \psi_1(t)u_1 + cx_1(t)u_2 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1).$$

Оскільки ця задача розглядається для фіксованого t, то λ, взагалі кажучи, може залежати від t, тому поки що будемо позначати її $\lambda(t)$.

Прирівнюючи частинні похідні функції L по u_1 і u_2 до нуля, отримуємо два рівняння

$$\begin{aligned} \psi_1(t) + 2\lambda(t)u_1 &= 0, \\ cx_1(t) + 2\lambda(t)u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Домножимо перше рівняння на u_2, а друге – на u_1; віднімаючи одне від одного, отримуємо рівність $\psi_1(t)u_2 = cx_1(t)u_1$.

Іншими словами, компоненти оптимального керування для майже всіх t задовольняють рівність $\psi_1(t)u_2(t) = cx_1(t)u_1(t)$. Домножимо обидві частини цієї рівності на c і врахуємо, що $\dot{\psi}_1(t) = -cu_2(t)$ і $\dot{x}_1(t) = u_1(t)$. В результаті отримуємо рівність

$$\psi_1(t)\dot{\psi}_1(t) + c^2 x_1(t)\dot{x}_1(t) = 0,$$

яка справджується для майже всіх значень $t \in [0, \theta]$. Звідси випливає, що $\psi_1^2(t) + c^2 x_1^2(t) = const$ при всіх t, оскільки $\psi_1(t)$ і $x_1(t)$ є неперервними.

Використовуючи рівності (3.22), підставимо $\psi_1(t) = -2\lambda(t)u_1(t)$ і $cx_1(t) = -2\lambda(t)u_2(t)$; отримуємо $4\lambda^2(t)(u_1^2(t) + u_2^2(t)) = const$. Але відомо [38], що насправді оптимальне керування (майже всюди) задовольняє рівність $u_1^2(t) + u_2^2(t) \equiv 1$, отже, $|\lambda(t)| = const$ (майже всюди). Оскільки функція H набуває максимального значення на оптимальному керуванні, число $\lambda(t)$ є недодатним, отже, $\lambda(t) = \lambda = const$ на оптимальній траєкторії (майже всюди). Але якщо $\lambda = 0$, то $\psi_1(t) \equiv 0$ і $cx_1(t) \equiv 0$, що випливає з (3.22) (оскільки $\psi_1(t)$ і $x_1(t)$ є неперервними). З іншого боку, тоді за принципом максимуму Понтрягіна $c = \psi_2(t) \neq 0$, а тому $x_1(t) \equiv 0$. Це означає, що $\lambda \neq 0$ для будь-якої оптимальної траєкторії, яка закінчується на кривій $x_1 x_2 = 1$.

Таким чином, оптимальні керування мають вигляд

$$u_1(t) = -\tfrac{1}{2\lambda}\psi_1(t), \quad u_2(t) = -\tfrac{c}{2\lambda}x_1(t),$$

де λ – ненульова константа. Отже, оптимальні керування $u_1(t)$ і $u_2(t)$ диференційовні і задовольняють диференціальні рівняння

$$\dot{u}_1(t) = -\xi u_2(t), \quad \dot{u}_2(t) = \xi u_1(t), \qquad \text{де } \ \xi = -\frac{c}{2\lambda}.$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо

$$u_1(t) = \cos(\xi t + \varphi), \quad u_2(t) = \sin(\xi t + \varphi).$$

З урахуванням початкової умови $u_2(0) = \xi x_1(0) = 0$, яка випливає з (3.22), отримуємо $\varphi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Насправді можна показати, що точки на траєкторії, для яких $x_1(\tau) = 0$, є спряженими [12]. Отже, лише при $t \in (0, \frac{\pi}{|\xi|})$ вказані траєкторії можуть бути оптимальними. Таким чином, остаточно, оптимальні керування мають вигляд

$$u_1(t) = \alpha \cos(\xi t), \quad u_2(t) = \alpha \sin(\xi t),$$

де $\alpha = \pm 1$. Підставляючи такі керування у вихідну систему, отримуємо оптимальні траєкторії

$$x_1(t) = \frac{\alpha}{\xi}\sin(\xi t), \quad x_2(t) = \frac{t}{2\xi} - \frac{1}{4\xi^2}\sin(2\xi t).$$

Тепер застосуємо умову трансверсальності, яка означає, що в кінцевий момент часу $T = \widehat{\theta}_1^*$ вектор $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ пропорційний вектору нормалі до кривої $x_1x_2 = 1$ у точці $(x_1(T), x_2(T))$, тобто

$$\frac{\psi_1(T)}{\psi_2(T)} = \frac{x_2(T)}{x_1(T)}.$$

Підставляючи $\psi_1(T) = -2\lambda\alpha\cos(\xi T)$, $\psi_2(T) = c$, враховуючи, що $\xi = -\frac{c}{2\lambda}$, і підставляючи вирази для $x_1(T)$, $x_2(T)$, отримуємо рівність

$$\frac{\alpha\cos(\xi T)}{\xi} = \frac{\frac{T}{2\xi} - \frac{1}{4\xi^2}\sin(2\xi T)}{\frac{\alpha}{\xi}\sin(\xi T)},$$

перетворюючи яку, отримуємо

$$\sin(2\xi T) = \frac{2\xi T}{3}. \tag{3.23}$$

Позначимо через $\bar{z}$ розв'язок рівняння $\sin z = \frac{z}{3}$, який належить інтервалу $[0, \pi]$; він дорівнює $\bar{z} \approx 2.27886$. Тоді $2\xi T = \pm\bar{z}$ (залежно від знака ξ).

З іншого боку, оптимальний час $T = \widehat{\theta}_1^*$ дорівнює моменту досягнення траєкторією кривої $x_1x_2 = 1$, отже,

$$\tfrac{\alpha}{\xi}\sin(\xi T)\left(\tfrac{T}{2\xi} - \tfrac{1}{4\xi^2}\sin(2\xi T)\right) = 1. \tag{3.24}$$

Об'єднуючи рівняння (3.23) і (3.24), отримуємо явні вирази для оптимального часу та оптимальних керувань

$$\widehat{\theta}_1^* = \left(\tfrac{3\bar{z}^2}{4\sin(\bar{z}/2)}\right)^{1/3} \approx 1.62458, \tag{3.25}$$

$$\widehat{u}_1^*(t) = (\widehat{u}_{11}^*(t), \widehat{u}_{12}^*(t)) = (\alpha\cos(\xi t), \alpha\sin(\xi t)),$$

де

$$\alpha = \pm 1, \quad \xi = \alpha\frac{\bar{z}}{2\widehat{\theta}_1^*} \approx 0.70137\alpha.$$

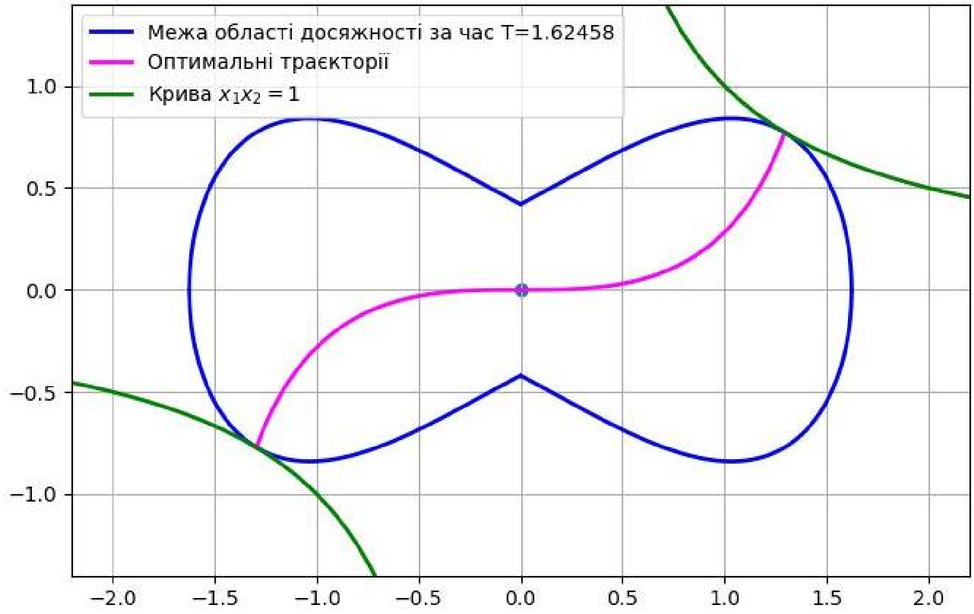

Рис. 3.1: Оптимальні траєкторії

Таким чином, існує два оптимальних керування, що відповідають значенням $\alpha = +1$ і $\alpha = -1$; вони переводять систему з початку координат до точок $(\frac{\sin(\xi T)}{\xi}, \frac{\xi}{\sin(\xi T)}) \approx (1.2952, 0.7721)$ і $(-\frac{\sin(\xi T)}{\xi}, -\frac{\xi}{\sin(\xi T)}) \approx (-1.2952, -0.7721)$ відповідно на кривій $x_1x_2 = 1$. На рисунку 3.1 зображені обидві оптимальні траєкторії і продемонстровано, що в точках, де траєкторія потрапляє на криву $x_1x_2 = 1$, ця крива дотикається межі області досяжності за час $T = \widehat{\theta}_1^*$.

Для кінцевої умови $x_1x_2 = -1$ результат аналогічний: оптимальний час той самий, тоді як оптимальні керування мають вигляд

$$\widehat{u}_1^*(t) = (\alpha\cos(\xi t), -\alpha\sin(\xi t)), \quad \alpha = \pm 1.$$

Нарешті, для будь-якої кінцевої умови $x_1x_2 = s \neq 0$ оптимальний час і оптимальні керування можна знайти, використовуючи отримані результати, як описано в лемі 3.2.

3.5 Апроксимація в сенсі швидкодії

Тепер розглянемо довільний реалізовний ряд S. Припустимо, що його мінімальна реалізація n-вимірна і має вигляд (2.3) з виходом (2.4). Розглянемо задачу швидкодії

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)u_i, \; x(0) = 0, \tag{3.26}$$

$$h(x(\theta)) = s, \tag{3.27}$$

$$u \in B(\theta), \quad \theta \to \min, \tag{3.28}$$

де $s \neq 0$ — фіксоване число. Якщо оптимальне керування існує, ми позначаємо оптимальний час через θ_s^*, а множину оптимальних керувань через U_s^*.

Також розглянемо однорідну апроксимацію $\widehat{S}$ ряду S і відповідну задачу швидкодії (3.14)–(3.16) для мінімальної реалізації (3.14) ряду $\widehat{S}$. Якщо задача (3.14)–(3.16) має розв'язок, ми позначаємо через $\widehat{\theta}_s^*$ оптимальний час, а через $\widehat{U}_s^*$ — множину оптимальних керувань.

Теорема 3.3. *Розглянемо задачі швидкодії* (3.26)–(3.28) *та* (3.14)–(3.16) *для мінімальних реалізацій ряду S та його однорідної апроксимації $\widehat{S}$ відповідно. Припустимо, що задача* (3.14)–(3.16) *має розв'язок для $s = 1$. Тоді існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $s \in (0, \varepsilon)$ задача* (3.26)–(3.28) *також має розв'язок і*

$$\frac{\theta_s^*}{\widehat{\theta}_s^*} \to 1 \text{ для } \; s \to +0. \tag{3.29}$$

Для $s < 0$ справедливий аналогічний результат: якщо задача (3.14)–(3.16) *має розв'язок для $s = -1$, то існує таке число $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $s \in (-\varepsilon, 0)$ задача* (3.26)–(3.28) *також має розв'язок і*

$$\frac{\theta_s^*}{\widehat{\theta}_s^*} \to 1 \text{ для } \; s \to -0. \tag{3.30}$$

Доведення. Ми використаємо ідею зі статті [27], яка була також розвинена в [38]. Спочатку зафіксуємо $\delta \in (0,1)$ і для будь-якого $s > 0$ розглянемо відрізок

$$Q_s = [s(1-\delta), s(1+\delta)].$$

Очевидно, $0 \notin Q_s$. Введемо позначення

$$R_k(\theta, u) = \sum_{I \in M_k} c_I \eta_I(\theta, u), \ \ k \geq r+1,$$

$$R(\theta, u) = \sum_{k=r+1}^{\infty} R_k(\theta, u),$$

тоді

$$S(\theta, u) = \widehat{S}(\theta, u) + R(\theta, u). \tag{3.31}$$

Оскільки векторні поля $X_i(x)$ і вихід $h(x)$ є аналітичними, то існують такі константи $C_1, C_2, C > 0$, що ряд $S(\theta, u)$ збігається для будь-якого $\theta \in (0, 1/C)$ і будь-якого керування $u \in B(\theta)$, причому справедливі оцінки

$$\begin{aligned} |R_k(\theta, u)| &\leq C_1 (C\theta)^k, \quad k \geq r+1, \\ |R(\theta, u)| &\leq C_2 (C\theta)^{r+1}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Введемо функцію

$$G_s(x) = s - R(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x),$$

визначену на таких $x \in \mathbb{R}$, для яких ряд $S(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)$ збігається. Покажемо, що функція G_s визначена на множині Q_s і відображає Q_s на себе.

Якщо $x \in Q_s$, то за визначенням цієї множини виконується нерівність

$$0 < s(1-\delta) \leq x \leq s(1+\delta) < 2s.$$

З леми 3.2 випливає, що $\widehat{\theta}^*_x < (2s)^{1/r} \widehat{\theta}^*_1$. Тому ряд $S(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)$ напевне збігається для всіх $x \in Q_s$, якщо $(2s)^{1/r} \widehat{\theta}^*_1 < \frac{1}{C}$, тобто якщо

$$0 < s < \frac{1}{2(C\widehat{\theta}^*_1)^r} = \varepsilon_1. \tag{3.33}$$

Крім того, з (3.32) випливає оцінка

$$|R(\widehat{\theta}_x^*, \widehat{u}_x^*)| \le C_2(C\widehat{\theta}_x^*)^{r+1} < (2s)^{\frac{r+1}{r}} C_2(C\widehat{\theta}_1^*)^{r+1} = s(C_2 s^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{r+1}{r}} (C\widehat{\theta}_1^*)^{r+1}).$$

Таким чином, $|R(\widehat{\theta}_x^*, \widehat{u}_x^*)| \le s\delta$, якщо виконується нерівність

$$C_2 s^{\frac{1}{r}} 2^{\frac{r+1}{r}} (C\widehat{\theta}_1^*)^{r+1} < \delta.$$

Ця нерівність виконується, якщо

$$0 < s < \frac{\delta^r}{2^{r+1} C_2^r (C\widehat{\theta}_1^*)^{(r+1)r}} = \varepsilon_2. \tag{3.34}$$

Виберемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$; тоді для будь-якого $s \in (0, \varepsilon)$ обидві нерівності (3.33) і (3.34) виконуються. Це означає, що для будь-якого $x \in Q_s$

$$|G_s(x) - s| = |R(\widehat{\theta}_x^*, \widehat{u}_x^*)| \le s\delta.$$

Іншими словами, $G_s(x) \in [s - s\delta, s + s\delta] = [s(1-\delta), s(1+\delta)]$, тобто функція G_s відображає множину Q_s на себе.

Тепер доведемо, що функція $G_s(x)$ неперервна на множині Q_s. Розглянемо довільне $x \in Q_s$ і довільну послідовність $x_q \in Q_s$, яка збігається до x. Застосуємо лему 3.2 для $\bar{s} = x$ і $s = x_q$. Маємо

$$\frac{\widehat{\theta}_{x_q}^*}{\widehat{\theta}_x^*} = \frac{1}{\xi}, \quad \widehat{u}_{x_q}^*(t) = \widehat{u}_x^*(t\xi), \quad \text{де} \;\; \xi = \left(\frac{x}{x_q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

А тоді для будь-якого $I = (i_1, \ldots, i_k) \in M_k$ маємо

$$\begin{aligned}
\eta_I(\widehat{\theta}_{x_q}^*, \widehat{u}_{x_q}^*) &= \int_0^{\widehat{\theta}_{x_q}^*} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} (\widehat{u}_{x_q}^*)_{i_1}(\tau_1) \cdots (\widehat{u}_{x_q}^*)_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 = \\
&= \int_0^{\widehat{\theta}_x^*/\xi} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} (\widehat{u}_x^*)_{i_1}(\tau_1\xi) \cdots (\widehat{u}_x^*)_{i_k}(\tau_k\xi) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 = \\
&= \left(\frac{1}{\xi}\right)^k \int_0^{\widehat{\theta}_x^*} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} (\widehat{u}_x^*)_{i_1}(\tau_1) \cdots (\widehat{u}_x^*)_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \left(\frac{x_q}{x}\right)^{\frac{k}{r}} \eta_I(\widehat{\theta}_x^*, \widehat{u}_x^*),
\end{aligned}$$

тобто

$$\eta_I(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - \eta_I(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x) = \left(\left(\frac{x_q}{x}\right)^{\frac{k}{r}} - 1\right) \eta_I(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)$$

для будь-якого $I \in M_k$. Отже,

$$R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x) = \left(\left(\frac{x_q}{x}\right)^{\frac{k}{r}} - 1\right) R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x). \tag{3.35}$$

Крім того, оскільки послідовність x_q і число x належать множині Q_s, то

$$0 < x_q < s(1+\delta), \quad 0 < x < s(1+\delta),$$

а з (3.33) випливає, що

$$C\widehat{\theta}^*_1 < \frac{1}{(2s)^{\frac{1}{r}}}.$$

За лемою 3.2,

$$\widehat{\theta}^*_x = x^{\frac{1}{r}}\widehat{\theta}^*_1, \quad \widehat{\theta}^*_{x_q} = x_q^{\frac{1}{r}}\widehat{\theta}^*_1,$$

Отже, з (3.32) отримуємо

$$|R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| \leq C_1(C\widehat{\theta}^*_x)^k = C_1 x^{\frac{k}{r}}(C\widehat{\theta}^*_1)^k \leq \frac{C_1 s^{\frac{k}{r}}(1+\delta)^{\frac{k}{r}}}{(2s)^{\frac{k}{r}}} = C_1\left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{\frac{k}{r}}$$

для $k \geq r+1$ і аналогічно

$$|R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q})| \leq C_1\left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{\frac{k}{r}}.$$

Нагадаємо, що $\delta \in (0,1)$, отже, $\mu = \left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{\frac{1}{r}} < 1$. Тоді для будь-якого $N > r$ маємо

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q})| = \frac{C_1\mu^{N+1}}{1-\mu}, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| = \frac{C_1\mu^{N+1}}{1-\mu}.$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon' > 0$ можна вибрати $N > r$ так, що для будь-якого q

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q})| < \frac{\varepsilon'}{4}, \qquad \sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| < \frac{\varepsilon'}{4}.$$

Нагадаємо, що $x_q \to x$. Враховуючи (3.35), виберемо q_0 так, щоб для будь-якого $q > q_0$ виконувалась нерівність

$$|R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| < \frac{\varepsilon'}{2(N-r)} \text{ для всіх } \ r+1 \leq k \leq N,$$

тоді

$$\sum_{k=r+1}^{N} |R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Остаточно, отримуємо, що для будь-якого $\varepsilon' > 0$ існує q_0 такий, що для всіх $q > q_0$ виконується оцінка

$$\begin{aligned}
|G_s(x) - G_s(x_q)| = \left| R(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - R(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x) \right| \leq \\
\leq \sum_{k=r+1}^{N} |R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q}) - R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| + \\
+ \sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_{x_q}, \widehat{u}^*_{x_q})| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |R_k(\widehat{\theta}^*_x, \widehat{u}^*_x)| \leq \\
\leq \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Це означає, що оператор G_s є неперервним у (довільній) точці $x \in Q_s$.

Таким чином, неперервна функція відображає відрізок Q_s на себе, отже, вона має нерухому точку на відрізку Q_s. Позначимо її через s^1. Тоді

$$G_s(s^1) = s^1,$$

тобто

$$s = s^1 + R(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}).$$

Але з іншого боку, за визначенням $s^1 = \widehat{S}(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1})$. Таким чином, враховуючи (3.31), отримуємо

$$s = s^1 + R(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}) = \widehat{S}(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}) + R(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}) = S(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1}).$$

Це означає, що керування $\widehat{u}^*_{s^1}(t)$ переводить систему (3.26) з початку координат на поверхню $h(x) = s$ за час $\widehat{\theta}^*_{s^1}$. Отже, задача швидкодії (3.26)–(3.28) має розв'язок, причому

$$\theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1}. \tag{3.36}$$

Тепер розглянемо точку

$$s^0 = s - R(\theta^*_s, u^*_s).$$

Права частина рівності визначена, оскільки ряд $R(\theta^*_s, u^*_s)$ збігається, що випливає з оцінки $\theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1} \le \frac{1}{C}$. Крім того, враховуючи (3.32), аналогічно отриманому вище маємо

$$|R(\theta^*_s, u^*_s)| \le C_2(C\theta^*_s)^{r+1} \le C_2(C\widehat{\theta}^*_{s^1})^{r+1} < s\delta.$$

Отже, $|s^0 - s| \le s\delta$, тобто $s^0 \in [s - s\delta, s + s\delta] = Q_s$.

Оскільки

$$s = S(\theta^*_s, u^*_s) = \widehat{S}(\theta^*_s, u^*_s) + R(\theta^*_s, u^*_s),$$

ми отримуємо

$$s^0 = s - R(\theta^*_s, u^*_s) = \widehat{S}(\theta^*_s, u^*_s),$$

з чого випливає, що

$$\widehat{\theta}^*_{s^0} \le \theta^*_s.$$

Таким чином, ми отримуємо двосторонню оцінку

$$\widehat{\theta}^*_{s^0} \le \theta^*_s \le \widehat{\theta}^*_{s^1},$$

яка виконується для будь-якого $s \in (0, \varepsilon)$. (Нагадаємо, що s^0 і s^1 залежать від s.) Тоді

$$\frac{\widehat{\theta}^*_{s^0}}{\widehat{\theta}^*_s} \le \frac{\theta^*_s}{\widehat{\theta}^*_s} \le \frac{\widehat{\theta}^*_{s^1}}{\widehat{\theta}^*_s}. \tag{3.37}$$

Нагадаємо, що

$$\frac{\widehat{\theta}^*_{s^0}}{\widehat{\theta}^*_s} = \left(\frac{s^0}{s}\right)^{\frac{1}{r}}, \quad \frac{\widehat{\theta}^*_{s^1}}{\widehat{\theta}^*_s} = \left(\frac{s^1}{s}\right)^{\frac{1}{r}},$$

отже, (3.37) набуває вигляду

$$\left(\frac{s^0}{s}\right)^{\frac{1}{r}} \le \frac{\theta^*_s}{\widehat{\theta}^*_s} \le \left(\frac{s^1}{s}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.38}$$

Покажемо, що ліва і права частини цієї подвійної нерівності прямують до одиниці. Повторюючи міркування, що наведені вище, отримуємо

$$\frac{|s^1 - s|}{s} = \frac{|R(\widehat{\theta}^*_{s^1}, \widehat{u}^*_{s^1})|}{s} \leq \frac{(2s)^{\frac{r+1}{r}} C_2 (C\widehat{\theta}^*_1)^{r+1}}{s} = 2^{\frac{r+1}{r}} C_2 (C\widehat{\theta}^*_1)^{r+1} s^{\frac{1}{r}}.$$

Аналогічно, враховуючи (3.36), отримуємо

$$\frac{|s^0 - s|}{s} = \frac{|R(\theta^*_s, u^*_s)|}{s} \leq \frac{(2s)^{\frac{r+1}{r}} C_2 (C\widehat{\theta}^*_1)^{r+1}}{s} = 2^{\frac{r+1}{r}} C_2 (C\widehat{\theta}^*_1)^{r+1} s^{\frac{1}{r}},$$

отже,

$$\frac{|s^1 - s|}{s} \to 0 \quad \text{та} \quad \frac{|s^0 - s|}{s} \to 0 \quad \text{при } s \to +0.$$

Це означає, що

$$\frac{s^1}{s} \to 1 \quad \text{та} \quad \frac{s^0}{s} \to 1 \quad \text{при } s \to +0.$$

Таким чином, з (3.38) випливає (3.29). Теорему доведено. □

Теорема 3.3 означає, що оптимальний час для ряду θ^*_s та для його однорідної апроксимації $\widehat{\theta}^*_s$ еквівалентні як функції s в околі початку координат. Цей результат частково узагальнює апроксимаційну теорему для керованих систем [38], див. (1.23). У випадку систем властивість апроксимації також виконується для оптимальних керувань, див. (1.24). Для одновимірних рядів пряме узагальнення неможливе, оскільки в типових ситуаціях оптимальне керування для однорідної апроксимації не є єдиним, що демонструє приклад 3.2.

Проте ми можемо довести наступну властивість.

Лема 3.3. *Для будь-якої послідовності $s_q \to +0$ розглянемо послідовність оптимальних керувань $u^*_{s_q}(t) \in U^*_{s_q}$. Тоді існує підпослідовність s_{q_k} і вектор-функція $v(t) \in B(1)$ такі, що*

$$\int_0^1 \left| u^*_{s_{q_k} i}(t\theta^*_{s_{q_k}}) - v_i(t) \right| dt \to 0 \quad \textit{при} \quad k \to \infty, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3.39}$$

і, крім того, $v(t/\widehat{\theta}^*_1) \in \widehat{U}^*_1$.

Доведення. Розглянемо вектор-функції $v_q(t) = u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q})$ як елементи гільбертового простору $L_2([0,1];\mathbb{R}^m)$, норма в якому задається як

$$\|v_q\| = \sqrt{\int_0^1 \sum_{i=1}^m |(v_q)_i(t)|^2 dt}.$$

Зауважимо, що оскільки $u^*_{s_q}(t)$ – оптимальні керування в задачі (3.26)–(3.28), то $u^*_{s_q}(t) \in B(1)$, тобто для майже всіх $t \in [0,1]$

$$\sum_{i=1}^m (v_q)_i^2(t) \le 1.$$

З цього випливає, що $v_q(t)$ належить (замкненій) одиничній кулі гільбертового простору $L_2([0,1];\mathbb{R}^m)$, тобто $\|v_q\| \le 1$.

Оскільки одинична куля в гільбертовому просторі є слабо секвенціально компактною, то послідовніть $v_q(t)$ має слабо збіжну підпослідовність $\{v_{q_k}(t)\}_{k=1}^\infty$. Нехай $v(t)$ – слабка границя $v_{q_k}(t)$; можна показати, що $v(t) \in B(1)$. З іншого боку, можна показати, що будь-який функціонал $\eta_I(1,u)$ є слабо неперервним [38], отже,

$$\eta_I(1, v_{q_k}) \to \eta_I(1, v) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Оскільки $\widehat{S}$ містить скінченну кількість доданків, то як наслідок

$$\widehat{S}(1, v_{q_k}) \to \widehat{S}(1, v) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.40}$$

За визначенням (3.31), маємо

$$s_q = \widehat{S}(\theta^*_{s_q}, u^*_{s_q}) + R(\theta^*_{s_q}, u^*_{s_q}). \tag{3.41}$$

Але $\widehat{S}$ однорідний і включає лише члени порядку r, отже, за властивістю (3.18) і за оцінкою (3.32) маємо

$$\begin{aligned} &\frac{\widehat{S}(\theta^*_{s_q}, u^*_{s_q})}{(\theta^*_{s_q})^r} = \widehat{S}(1, v_q), \\ &\frac{|R(\theta^*_{s_q}, u^*_{s_q})|}{(\theta^*_{s_q})^r} \le C_2 C^{r+1} \theta^*_{s_q} \to 0 \text{ при } s_q \to 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Крім того,

$$\frac{s_q}{(\theta^*_{s_q})^r} = \frac{s_q}{(\widehat{\theta}^*_{s_q})^r} \cdot \left(\frac{\widehat{\theta}^*_{s_q}}{\theta^*_{s_q}}\right)^r \to \frac{1}{(\widehat{\theta}^*_1)^r} \text{ при } s_q \to 0 \tag{3.43}$$

за лемою 3.2 і теоремою 3.3.

Отже, розглянемо рівність (3.41) лише для індексів q, що належать підпослідовності q_k, і поділимо обидві частини рівності на $(\theta^*_{s_{q_k}})^r$:

$$\frac{s_{q_k}}{(\theta^*_{s_{q_k}})^r} = \frac{\widehat{S}(\theta^*_{s_{q_k}}, u^*_{s_{q_k}}) + R(\theta^*_{s_{q_k}}, u^*_{s_{q_k}})}{(\theta^*_{s_{q_k}})^r} =$$

$$= \widehat{S}(1, v_{q_k}) + \frac{R(\theta^*_{s_{q_k}}, u^*_{s_{q_k}})}{(\theta^*_{s_{q_k}})^r}.$$

Переходячи до границі при $k \to \infty$ і використовуючи (3.40), (3.42), (3.43), отримуємо

$$\frac{1}{(\widehat{\theta}^*_1)^r} = \widehat{S}(1, v). \tag{3.44}$$

З властивості (3.18) випливає, що $(\widehat{\theta}^*_1)^r \widehat{S}(1, v) = \widehat{S}(\widehat{\theta}^*_1, \widetilde{v})$, де $\widetilde{v}(t) = v(t/\widehat{\theta}^*_1)$, $t \in [0, \widehat{\theta}^*_1]$. Отже, рівність (3.44) можна записати як

$$1 = \widehat{S}(\widehat{\theta}^*_1, \widetilde{v}),$$

де $\widetilde{v}(t) = v(t/\widehat{\theta}^*_1)$, $t \in [0, \widehat{\theta}^*_1]$. Ця рівність означає, що керування $\widetilde{v}(t)$ розв'язує задачу швидкодії (3.14)–(3.16) для $s = 1$ (за час $\widehat{\theta}^*_1$), тобто $\widetilde{v}(t) = v(t/\widehat{\theta}^*_1) \in \widehat{U}^*_1$. Зауважимо, що тоді $v(t) \in \widehat{U}^*_{\bar{s}}$ для $\bar{s} = 1/(\widehat{\theta}^*_1)^r$.

Оскільки $u^*_{s_{q_k}}(t\theta^*_{s_{q_k}})$ і $v(t)$ є оптимальними за часом керуваннями, вони задовольняють рівності $\sum\limits_{i=1}^{m} (u^*_{s_{q_k}})^2_i(t) = 1$ і $\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^2(t) = 1$ майже всюди [38]. Тому вони належать межі одиничної кулі в гільбертовому просторі $L_2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$. Отже, зі слабкої збіжності $u^*_{s_{q_k}}(t\theta^*_{s_{q_k}})$ до $v(t)$ випливає сильна збіжність, яка, у свою чергу, означає, що виконується властивість (3.39). Лему доведено. □

Доведення леми 3.3 показує, що будь-яка слабка часткова границя послідовності $u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q})$ є оптимальним керуванням $v(t)$ задачі (3.14)–(3.16).

Якщо оптимальне керування єдине, то послідовність $u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q})$ збігається до цього керування. Але, як було зазначено вище, зазвичай оптимальне керування не є єдиним. Проте ми можемо уточнити результат леми 3.3 для одного важливого випадку.

Теорема 3.4. *Розглянемо задачі швидкодії* (3.26)–(3.28) *та* (3.14)–(3.16) *для мінімальної реалізації ряду S та для його однорідної апроксимації $\widehat{S}$ відповідно. Припустимо, що задача* (3.14)–(3.16) *має розв'язок для $s = 1$ і, крім того, множина оптимальних керувань $\widehat{U}^*_1$ скінченна. Тоді для будь-якої послідовності $s_q \to +0$ і будь-якої послідовності оптимальних керувань $u^*_{s_q}(t) \in U^*_{s_q}$ існує послідовність $\widehat{u}^*_{s_q}(t) \in \widehat{U}^*_{s_q}$ така, що*

$$\int_0^1 \left|(u^*_{s_q})_i(t\theta^*_{s_q}) - (\widehat{u}^*_{s_q})_i(t\widehat{\theta}^*_{s_q})\right| dt \to 0 \quad \textit{при} \quad s_q \to +0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.45}$$

Для $s_q \to -0$ справедливий аналогічний результат.

Доведення. Ми розглянемо випадок $s_q \to +0$; випадок $s_q \to -0$ розглядається аналогічно.

За нашим припущенням, множина $\widehat{U}^*_1$ містить скінченну кількість (різних) елементів; позначимо їх $w_j(t/\widehat{\theta}^*_1)$, $t \in [0, \widehat{\theta}^*_1]$, $j = 1, \dots, N$. Тоді множина $\widehat{U}^*_{\bar{s}} \subset B(1)$ для $\bar{s} = 1/(\widehat{\theta}^*_1)^r$ складається з елементів $w_1(t), \dots w_N(t)$, $t \in [0, 1]$.

Будемо розглядати всі керування як елементи гільбертового простору $L_2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ з нормою

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt}.$$

Очевидно, що існує таке $\varepsilon > 0$, для якого $\|w_j - w_k\| > \varepsilon$ для всіх $j \neq k$.

З іншого боку, як було показано в доведенні леми 3.3, будь-яка слабка часткова границя послідовності $u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q})$ є сильною частковою границею і належить множині $\widehat{U}^*_{\bar{s}}$, тобто збігається з одною з вектор-функцій

$w_1(t), \dots w_N(t)$. Отже, існує таке q_0, що кожний член послідовності $u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q})$ при $q > q_0$ потрапить в $\frac{\varepsilon}{2}$-окіл рівно одної точки з набору $w_1(t), \dots w_N(t)$. Іншими словами, існує таке q_0, що для будь-якого $q > q_0$ існує єдине число $j = j(q) \in \{1, \dots, N\}$ таке, що

$$\|u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q}) - w_{j(q)}(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що $w_{j(q)}(t/\widehat{\theta}^*_{s_q}) \in \widehat{U}^*_{s_q}$, отже, ми можемо використовувати позначення $w_{j(q)}(t/\widehat{\theta}^*_{s_q}) = \widehat{u}^*_{s_q}(t)$, тобто $w_{j(q)}(t) = \widehat{u}^*_{s_q}(t\widehat{\theta}^*_{s_q})$. Таким чином, для будь-якого s_q (де $q \geq q_0$) ми вибрали єдине керування $\widehat{u}^*_{s_q}(t) \in \widehat{U}^*_{s_q}$.

Тоді, очевидно, для будь-якого $\varepsilon' \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$ існує таке $q_0' \geq q_0$, що для будь-якого $q > q_0'$

$$\|u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q}) - \widehat{u}^*_{s_q}(t\widehat{\theta}^*_{s_q})\| < \varepsilon'.$$

Це означає, що

$$\|u^*_{s_q}(t\theta^*_{s_q}) - \widehat{u}^*_{s_q}(t\widehat{\theta}^*_{s_q})\| \to 0 \text{ при } \ q \to \infty,$$

звідки за визначенням норми

$$\int_0^1 \left|(u^*_{s_q})_i(t\theta^*_{s_q}) - (\widehat{u}^*_{s_q})_i(t\widehat{\theta}^*_{s_q})\right|^2 dt \to 0 \ \text{ при } \ q \to \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Остаточно, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, отримуємо (3.45). Теорему доведено. □

Приклад 3.3. Знову розглянемо систему (3.19), але визначимо вихід як $y = h(x) = x_1 + x_2$. Відповідний ряд $S = \eta_1 + \eta_{21}$ не є однорідним. Його однорідна апроксимація дорівнює $\widehat{S} = \eta_1$. Мінімальна реалізація однорідної апроксимації одновимірна і може бути вибрана у вигляді

$$\dot{x}_1 = u_1, \qquad y = \widehat{h}(x) = x_1.$$

Якщо $s > 0$, то оптимальне керування, очевидно, дорівнює $\widehat{u}^*_s(t) \equiv (1, 0)$, $t \in [0, \widehat{\theta}^*_s]$, де $\widehat{\theta}^*_s = s$.

Для системи (3.19), міркуючи подібно до прикладу 3.2 і застосовуючи умови трансверсальності, отримуємо два рівняння

$$\frac{\alpha}{\xi}\cos(\xi T) = 1,$$
$$\frac{\alpha}{\xi}\sin(\xi T) + \frac{2\xi T - \sin(2\xi T)}{4\xi^2} = s,$$

де $\alpha = \pm 1$. Виразимо з першого рівняння $\xi = \alpha\cos(\xi T)$ і підставимо у знаменники дробів другого рівняння:

$$\frac{\alpha\sin(\xi T)}{\alpha\cos(\xi T)} + \frac{2\xi T - \sin(2\xi T)}{4\alpha^2\cos^2(\xi T)} = s.$$

Після спрощення отримуємо

$$\frac{\sin\xi T}{2\cos\xi T} + \frac{\xi T}{2\cos^2\xi T} = s.$$

Отже, ξT дорівнює кореню рівняння $F(z) = s$, де

$$F(z) = \frac{\sin z}{2\cos z} + \frac{z}{2\cos^2 z}.$$

Функція $F(z)$ строго зростає для $z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ і задовольняє рівність $F(0) = 0$. Крім того, $F(z) \to +\infty$ при $z \to \frac{\pi}{2}$ і $F(z) \to -\infty$ при $z \to -\frac{\pi}{2}$. Отже, рівняння $F(z) = s$ для довільного s має єдиний розв'язок $\bar{z}(s) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, причому $\bar{z}(0) = 0$. Якщо $s > 0$, то $\xi T = \bar{z}(s) > 0$ для $s > 0$, звідки $\xi > 0$, а отже, $\alpha = +1$. Якщо $s < 0$, то аналогічно $\alpha = -1$. Оптимальний час дорівнює

$$\theta_s^* = T = \frac{\bar{z}(s)}{\alpha\xi} = \frac{\bar{z}(s)}{\alpha\cos(\bar{z}(s))} = \frac{|\bar{z}(s)|}{\cos(\bar{z}(s))}.$$

За теоремою про неявну функцію, $\bar{z}(s)$ диференційовна і $\bar{z}'(s) = \frac{1}{F'(\bar{z}(s))}$. Оскільки $F'(0) = 1$, отримуємо, що $\bar{z}'(0) = 1$. Отже, застосовуючи правило Лопіталя, для $s > 0$ маємо

$$\lim_{s\to+0}\frac{\theta_s^*}{\widehat{\theta}_s^*} = \lim_{s\to+0}\frac{\theta_s^*}{s} = \lim_{s\to+0}\frac{\bar{z}(s)}{\cos(\bar{z}(s))s} = \lim_{s\to+0}\frac{\bar{z}(s)}{s} = \lim_{s\to+0}\bar{z}'(s) = 1.$$

Таким чином,

$$\lim_{s\to+0}\frac{\theta_s^*}{\widehat{\theta}_s^*} = 1,$$

що ілюструє теорему 3.3. Компоненти оптимального керування для $s > 0$, як було показано у прикладі 3.2, мають вигляд $u_s^*(t) = (\cos(\xi t), \sin(\xi t))$, $t \in [0, \theta_s^*]$. Оскільки $\xi\theta_s^* = \bar{z}(s)$, отримуємо

$$u_s^*(t\theta_s^*) = (\cos(\bar{z}(s)t), \sin(\bar{z}(s)t)), \quad t \in [0,1].$$

Тому

$$\int_0^1 \left|(u_s^*)_1(t\theta_s^*) - (\widehat{u}_s^*)_1(t\widehat{\theta}_s^*)\right| dt = \int_0^1 |\cos(\bar{z}(s)t) - 1|\, dt \le 1 - \cos(\bar{z}(s)) \to 0,$$
$$\int_0^1 \left|(u_s^*)_2(t\theta_s^*) - (\widehat{u}_s^*)_2(t\widehat{\theta}_s^*)\right| dt = \int_0^1 |\sin(\bar{z}(s)t)|\, dt \le \sin(\bar{z}(s)) \to 0$$

при $s \to +0$, оскільки $\bar{z}(s) \to +0$, що ілюструє теорему 3.4.

3.6 Одновимірна однорідна задача швидкодії як оптимізаційна задача

У попередньому підрозділі була розв'язана задача швидкодії для системи (3.19) за допомоги принципу максимуму Понтрягіна. Водночас було показано, що ця задача еквівалентна задачі оптимізації (3.20), (3.21) у просторі $L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2)$. У цьому підрозділі ми пропонуємо інший спосіб розв'язання цієї задачі.

Для зручності введемо позначення

$$\eta_i(\alpha,\beta,u) = \int_\alpha^\beta u_i(t)dt,\ i = 1,2,$$

$$\eta_{ij}(\alpha,\beta,u) = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^{\tau_1} u_i(\tau_1)u_j(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1,\ i,j = 1,2.$$

Розглянемо наступну задачу оптимізації в просторі $L_2([0,1];\mathbb{R}^2)$:

$$\max f(u) \quad \text{за умов} \quad \|u\|^2 \le 1, \tag{3.46}$$

де функціонал f має вигляд

$$f(u) = \eta_1(0,1,u)\cdot\eta_{21}(0,1,u), \tag{3.47}$$

а $\|u\|$ – норма в просторі $L_2([0,1];\mathbb{R}^2)$, тобто

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt}.$$

Ми покажемо, що оптимальні керування в цій задачі належать одиничній кулі простору $L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2)$ (див. також [38]), а отже, є розв'язками вихідної задачі (3.20), (3.21).

По-перше, зауважимо, що оптимальне керування в задачі (3.46), (3.47) задовольняє умову $\|u\|^2 = 1$. Справді, якщо $u(t)$ – оптимальне керування і $\|u\| = a < 1$, то розглянемо керування $\widetilde{u}(t) = \frac{1}{a}u(t)$, яке належить одиничній кулі. Завдяки однорідності $f(\widetilde{u}(t)) = \frac{1}{a^3}f(u) > f(u)$, що суперечить оптимальності $u(t)$. Таким чином, задача (3.46), (3.47) рівносильна задачі

$$\max f(u) \quad \text{за умов} \quad \|u\|^2 = 1 \tag{3.48}$$

з функціоналом (3.47).

Отже, отримали задачу математичного програмування в гільбертовому просторі з одним обмеженням-рівністю. Зауважимо, що функціонал $f(u)$ і функціонал $g(u) = \|u\|^2$, який задає обмеження, диференційовні по Фреше. Очевидно,

$$g'_\Phi(u) = \begin{pmatrix} 2u_1(t) \\ 2u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо похідну Фреше функціоналу $f(u)$. Позначимо $f_1(u) = \eta_1(0,1,u)$, $f_2(u) = \eta_{21}(0,1,u)$. Тоді

$$f_1(u+h) - f_1(u) = \int_0^1 h_1(t)dt = \langle f'_{1\Phi}(u), h\rangle,$$

$$f_2(u+h) - f_2(u) =$$

$$= \int_0^1 (u_2(\tau_1) + h_2(\tau_1)) \int_0^{\tau_1} (u_1(\tau_2) + h_1(\tau_2))d\tau_2 d\tau_1 - \int_0^1 u_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 =$$

$$= \int_0^1 u_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} h_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \int_0^1 h_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + o(h) =$$

$$= \int_0^1 h_1(\tau_2) \int_{\tau_2}^1 u_2(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^1 h_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} u_1(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + o(h) =$$

$$= \int_0^1 h_1(\tau_2)\eta_2(\tau_2, 1, u) d\tau_2 + \int_0^1 h_2(\tau_1)\eta_1(0, \tau_1, u) = \langle f'_{2\Phi}(u), h\rangle + o(h),$$

тобто похідні Фреше f_1 і f_2 дорівнюють

$$f'_{1\Phi}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f'_{2\Phi}(u) = \begin{pmatrix} \eta_2(t, 1, u) \\ \eta_1(0, t, u) \end{pmatrix}.$$

А оскільки $f(u) = f_1(u) \cdot f_2(u)$, то

$$f'_\Phi(u) = f_2(u) f'_{1\Phi}(u) + f_1(u) f'_{2\Phi}(u) = \begin{pmatrix} \eta_{21}(0, 1, u) + \eta_1(0, 1, u)\eta_2(t, 1, u) \\ \eta_1(0, 1, u)\eta_1(0, t, u) \end{pmatrix}.$$

Скористаємось методом множників Лагранжа: розглянемо функцію Лагранжа $L(\lambda, u) = f(u) - \lambda g(u)$ і отримаємо необхідну умову оптимальності:

$$\begin{aligned} &\eta_{21}(0, 1, u) + \eta_1(0, 1, u)\eta_2(t, 1, u) = 2\lambda u_1(t) \\ &\eta_1(0, 1, u)\eta_1(0, t, u) = 2\lambda u_2(t). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Неважко бачити, що у нетривіальному випадку $\lambda \neq 0$, тому з рівностей (3.49) випливає, що функції $u_1(t)$ і $u_2(t)$ є неперервно диференційовними. Диференціюючи рівняння (3.49), отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -k u_2(t), \\ \dot{u}_2(t) &= k u_1(t), \end{aligned} \tag{3.50}$$

де

$$k = \frac{\eta_1(0, 1, u)}{2\lambda}.$$

З системи (3.50), враховуючи умову $\|u\| = 1$, отримуємо явний вигляд оптимального керування

$$u_1(t) = \cos(kt + b), \quad u_2(t) = \sin(kt + b). \tag{3.51}$$

Але оскільки $u_2(0) = 0$ (це випливає з другого рівняння системи (3.49)), то $b = 0$ або $b = \pi$, тобто

$$u_1(t) = \pm\cos(kt), \quad u_2(t) = \pm\sin(kt)$$

(обидва знаки або верхні, або нижні). Очевидно, це керування належить одиничній кулі простору $L_\infty([0,1];\mathbb{R}^2)$, отже, розв'язує задачу (3.20), (3.21).

Залишилося знайти значення k. Для цього підставимо отримані керування в першу рівність (3.49) при $t=1$ і врахуємо, що $2\lambda = \frac{\eta_1(0,1)}{k}$. Оскільки

$$\eta_{21}(0,1,u) = \int_0^1 \sin(k\tau_1)\int_0^{\tau_1}\cos(k\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 = \frac{1}{k}\int_0^1 \sin^2(k\tau_1)d\tau_1 = \frac{2k-\sin 2k}{4k^2},$$

$$\eta_1(0,1,u) = \pm\int_0^1 \cos(kt)dt = \frac{\pm\sin k}{k}, \quad \eta_2(1,1,u)=0, \quad u_1(1) = \pm\cos(k),$$

отримуємо

$$\frac{2k-\sin 2k}{4k^2} = \frac{\sin k\cos k}{k} = \frac{\sin 2k}{2k^2},$$

тобто

$$\frac{2}{3}k = \sin 2k.$$

Ми прийшли до рівняння (3.23), отже, $k\approx 1.13943$.

Підставляючи ці керування, знаходимо максимальне значення функціоналу (3.47): воно дорівнює $s\approx 0.23323$. Повертаючись до вихідної задачі швидкодії для системи (3.19) з умовою $x_1(\theta)x_2(\theta)=\bar{s}=1$, отримуємо, що оптимальний час дорівнює

$$\widehat{\theta}_1^* = \frac{1}{s^{1/3}} \approx 1.62458,$$

що збігається з результатом (3.25), отриманим вище.

Для пошуку наближеного керування можна міркувати в такий спосіб. Зафіксуємо ортонормований базис $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^\infty$ у просторі $L_2([0,1])$ і будемо розглядати скінченновимірну задачу оптимізації, відшукуючи керування як скінченні суми $u_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j\varphi_j(t)$, $u_2(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} b_j\varphi_j(t)$. Зручно взяти набір функцій

$$1, \sin(2\pi t), \cos(2\pi t), \ldots, \sin(2\pi m t), \cos(2\pi m t),$$

де $N=2m+1$, тоді за рахунок ортогональності неважко знайти вираз для функціонала f. Покажемо це на прикладі випадку $N=3$, коли

$$u_1(t) = a_0 + a_1\sin(2\pi t) + a_2\cos(2\pi t), \quad u_2(t) = b_0 + b_1\sin(2\pi t) + b_2\cos(2\pi t).$$

Тоді маємо задачу оптимізації в 6-вимірному просторі: знайти максимум функції

$$f(a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2)=\frac{a_0(2\pi a_0b_0-2a_0b_1+2a_1b_0-a_1b_2+a_2b_1)}{4\pi}$$

за умов

$$a_0^2+b_0^2+\frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2}{2}=1.$$

Чисельно розв'язуючи цю задачу, отримуємо, що максимальне значення функціоналу дорівнює $s\approx 0.219195$ і досягається на керуванні

$$u_1(t)=0.80118+0.21338\sin(2\pi t)-0.06269\cos(2\pi t),$$

$$u_2(t)=0.52948-0.32300\sin(2\pi t)-0.04138\cos(2\pi t)$$

(коефіцієнти округлені до 5 цифр після коми). Повертаючись до вихідної задачі, отримуємо, що час потрапляння на криву $x_1x_2=1$ з таким керуванням («розтягнутим» на відрізок $[0,\theta_1]$) дорівнює $\theta_1=\frac{1}{s^{1/3}}\approx 1.65853$.

Якщо взяти $N=5$, тобто шукати керування у вигляді

$$u_1(t)=a_0+a_1\sin(2\pi t)+a_2\cos(2\pi t)+a_3\sin(4\pi t)+a_4\cos(4\pi t),$$

$$u_2(t)=b_0+b_1\sin(2\pi t)+b_2\cos(2\pi t)+b_3\sin(4\pi t)+b_4\cos(4\pi t),$$

то, міркуючи аналогічно, отримаємо керування, для якого час потрапляння на криву $x_1x_2=1$ дорівнює $\theta_1\approx 1.64456$. При збільшенні N отримуємо скінченні суми, які наближаються до рядів Фур'є функцій $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ відповідно.

Зауважимо ще, що при $N=1$ керування будуть константами, а час потрапляння дорівнюватиме $\theta_1\approx 1.73205$.

На рисунку 3.2 зображена оптимальна траєкторія і три її наближення, що описані вище.

Насамкінець розглянемо задачу швидкодії для тривимірної системи

$$\begin{aligned}\dot x_1&=u_1,\\ \dot x_2&=u_2,\\ \dot x_3&=x_1u_2-x_2u_1\end{aligned}\tag{3.52}$$

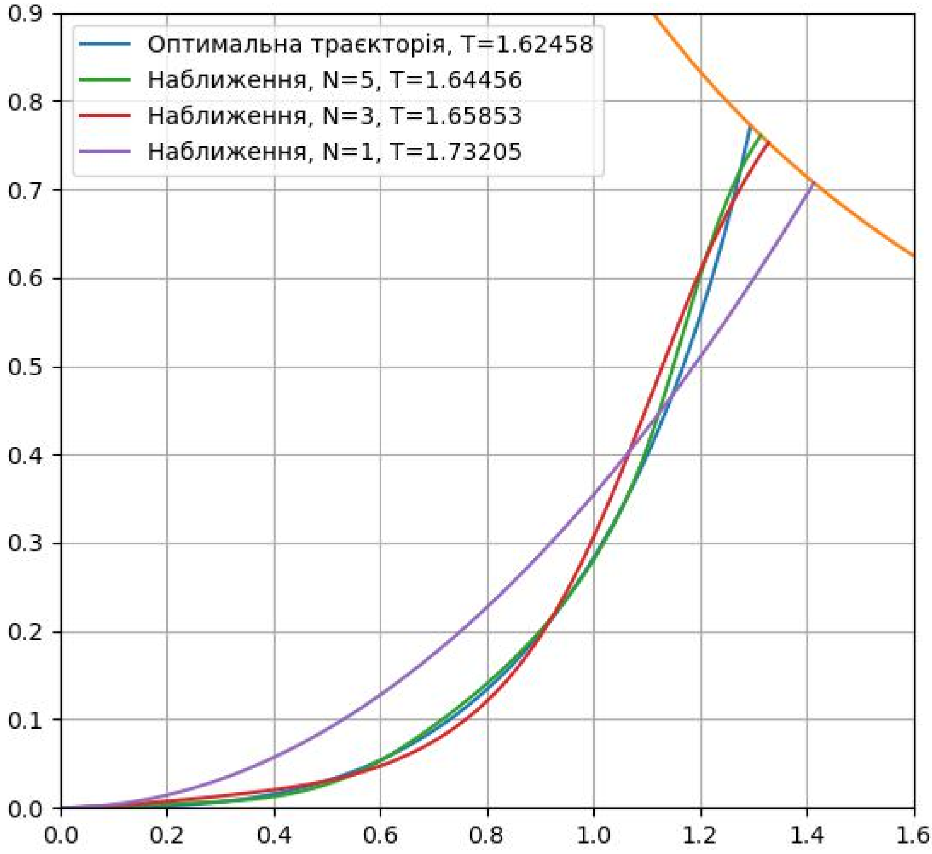

Рис. 3.2: Оптимальна траєкторія і її наближення

з виходом $y = x_1x_2x_3$, яка зводиться до задачі максимізації функціонала

$$f(u) = \eta_1(0,1,u)\eta_2(0,1,u)(\eta_{21}(0,1,u) - \eta_{12}(0,1,u))$$

на одиничній сфері простору $L_2([0,1];\mathbb{R}^2)$. Міркуючи аналогічно розглянутому вище прикладу, застосуємо метод множників Лагранжа і отримаємо необхідну умову оптимальності:

$$\begin{aligned} d\eta_2(0,1,u) + c(\eta_2(t,1,u) - \eta_2(0,t,u)) &= 2\lambda u_1(t), \\ d\eta_1(0,1,u) + c(\eta_1(0,t,u) - \eta_1(t,1,u)) &= 2\lambda u_2(t), \end{aligned} \tag{3.53}$$

де використані позначення

$$c = \eta_1(0,1,u)\eta_2(0,1,u), \qquad d = \eta_{21}(0,1,u) - \eta_{12}(0,1,u).$$

Як і в попередньому прикладі, $\lambda \neq 0$, отже, керування неперервно диференційовні. Диференціюючи по t, отримуємо систему (3.50), де

$$k = \frac{c}{\lambda}.$$

Отже, оптимальні керування мають вигляд (3.51). Для того, щоб знайти k і b, розглянемо рівняння (3.53) при $t = 0$, тобто

$$d\eta_2(0,1,u) + c\eta_2(0,1,u) = \frac{2c}{k}u_1(0),$$
$$d\eta_1(0,1,u) - c\eta_1(0,1,u) = \frac{2c}{k}u_2(0).$$

Домножимо перше рівняння на $\eta_1(0,1,u)$, друге на $\eta_2(0,1,u)$, спочатку додамо ці рівняння, а потім віднімемо від першого друге, причому врахуємо, що $\eta_1(0,1,u)\eta_2(0,1,u) = c$. Отримуємо:

$$2dc = \frac{2c}{k}(u_1(0)\eta_1(0,1,u) + u_2(0)\eta_2(0,1,u)),$$

$$2c^2 = \frac{2c}{k}(u_1(0)\eta_1(0,1,u) - u_2(0)\eta_2(0,1,u)).$$

Друге рівняння перепишемо як

$$kc = u_1(0)\eta_1(0,1,u) - u_2(0)\eta_2(0,1,u).$$

Підставляючи в ці рівняння керування (3.51) і враховуючи, що

$$\eta_1(0,1,u) = \frac{\sin(k+b) - \sin(b)}{k}, \quad \eta_2(0,1,u) = \frac{-\cos(k+b) + \cos(b)}{k},$$

$$d = \eta_{21}(0,1,u) - \eta_{12}(0,1,u) = \frac{1}{k} - \frac{\sin k}{k^2},$$

з другого рівняння отримуємо:

$$\big(\sin(k+b) - \sin(b)\big)\big(-\cos(k+b) + \cos(b)\big) =$$

$$= \cos(b)\big(\sin(k+b) - \sin(b)\big) - \sin(b)\big(-\cos(k+b) + \cos(b)\big),$$

звідки

$$\sin(2(b+k)) = \sin(2b),$$

а з першого отримуємо, що
$$d = \frac{\sin k}{k^2},$$
тобто
$$k = 2\sin k.$$
Ненульові корені цього рівняння – це $k = \pm k_0$, де $k_0 \approx 1.8955$.

Оскільки $\sin(2(b+k)) = \sin(2b)$, то $b = \frac{\pi}{4} - \frac{k}{2} + \frac{\pi m}{2}$, де m – ціле число, причому достатньо вважати, що $|b| < \pi$. Тоді функціонал f набуває максимального значення $f_{\max} \approx 0.0968$ для наступних пар (k, b):
$$(k_0, \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{k_0}{2}),\ (k_0, \tfrac{5\pi}{4} - \tfrac{k_0}{2}),\ (-k_0, -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k_0}{2}),\ (-k_0, -\tfrac{5\pi}{4} + \tfrac{k_0}{2})$$
(інші чотири можливих пари дають мінімальне значення f, яке дорівнює $f_{\min} = -f_{\max}$). Отже, оптимальні керування дорівнюють
$$u_1(t) = \pm\cos(k_0 t + \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{k_0}{2}), \quad u_2(t) = \pm\sin(k_0 t + \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{k_0}{2})$$
(всі чотири комбінації знаків можливі).

Висновки до розділу 3

В розділі 3 детально досліджені одновимірні реалізовні ряди, тобто ряди зі скалярними коефіцієнтами.

1. Перш за все, досліджена реалізація однорідних рядів S, тобто лінійних комбінацій елементів алгебри $\mathcal{F}$ одного й того самого порядку. Мінімальна реалізація такого ряду є, очевидно, однорідною, і повністю визначається своєю кореневою підалгеброю Лі. Показано, що ця підалгебра породжує лівий ідеал, ортогональний до S (лема 3.1). Це означає, що можна побудувати однорідну апроксимацію мінімальної реалізації в такий спосіб: спочатку побудувати ортогональний лівий ідеал, а потім – відповідну підалгебру Лі (як перетин знайденого ідеала з алгеброю Лі).

2. Запропоноване визначення однорідної апроксимації довільного реалізовного одновимірного ряду (визначення 3.2): однорідною апроксимацією пропонується вважати члени ряду найменшого порядку. Подальші результати демонструють, що таке визначення є доречним.

3. Досліджений зв'язок однорідної апроксимації ряду і однорідної апроксимації його мінімальної реалізації, точніше, зв'язок між відповідними кореневими підалгебрами Лі: показано, що ранг Лі однорідної апроксимації не менший, ніж ранг Лі самого ряду, а коренева підалгебра Лі однорідної апроксимації включає кореневу підалгебру Лі самого ряду (теорема 3.1).

4. Доведена класифікаційна теорема: показано, що будь-яка пара вкладених градуйованих підалгебр Лі скінченної корозмірності є відповідно кореневими підалгебрами Лі однорідної апроксимації ряду і його мінімальної реалізації (теорема 3.2).

5. Для одновимірних рядів досліджений зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії. Для цього розглянута задача швидкодії з початку координат до точок поверхні, що задається виходом. Вивчені властивості оптимальних керувань для однорідного ряду (лема 3.2), а також показано, що за певних умов оптимальний час і оптимальне керування однорідної апроксимації наближають оптимальний час і оптимальне керування для вихідної задачі (теореми 3.3, 3.4).

6. У випадку одновимірних однорідних рядів задачу швидкодії можна звести до задачі оптимізації в гільбертовому просторі, для розв'язання якої можна застосувати методи функціонального аналізу. Таке дослідження проведене у підрозділі 3.6. У якості прикладу розглянута система, що описує площину Грушина, для якої знайдений явний вигляд оптимального за швидкодією керування потрапля-

ння на певну поверхню. Також запропонований наближений метод знаходження оптимального керування, який полягає у наближенні оптимального керування частковими сумами рядів Фур'є.

Результати цього розділу опубліковані у статті [9] та тезах [1], [2], [10].

РОЗДІЛ 4

ОДНОРІДНА АПРОКСИМАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З БАГАТОВИМІРНИМ ВИХОДОМ

4.1 Мінімальна частина реалізовного ряду

У цьому розділі ми розглядаємо системи з багатовимірним виходом і, відповідно, формальні ряди з векторними коефіцієнтами

$$S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I, \tag{4.1}$$

де $c_I \in \mathbb{R}^p$. Цей ряд породжує лінійне відображення $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^p$, яке зіставляє базисному елементу $\mathcal{F}$ його коефіцієнт:

$$c(\eta_I) = c_I, \quad I \in M.$$

Розглянемо ряд S вигляду (4.1). Припустимо, що він реалізовний, тоді його ранг Лі скінченний, $\rho_L(S) = n$. Без обмеження загальності будемо вважати, що кожна компонента S_i ряду S відмінна від нуля.

Визначення 4.1. *Позначимо через r_j мінімальний порядок членів ряду, що входять до компоненти S_j ряду (4.1),*

$$r_j = \min\{k : (c_I)_j \neq 0 \text{ для деяких } I \in M_k\}, \ j = 1, \ldots, p.$$

Визначимо мінімальну частину ряду S як ряд

$$S_{\min} = \begin{pmatrix} (S_1)_{\min} \\ \cdots \\ (S_p)_{\min} \end{pmatrix},$$

де компоненти цього ряду є однорідними і мають вигляд

$$(S_j)_{\min} = \sum_{|I| = r_j} (c_I)_j \eta_I, \ j = 1, \ldots, p.$$

Зауваження 4.1. У розділі 3 розглядалися одновимірні ряди, тобто випадок $p = 1$, і мінімальну частину такого ряду ми назвали однорідною апроксимацією, див. визначення 3.2. Проте для $p > 1$ аналогічне визначення однорідної апроксимації не є природним, про що свідчить такий приклад.

Приклад 4.1. Розглянемо двовимірний ряд

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 + \eta_{21} + \eta_{211} \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку мінімальна частина ряду S має вигляд $S_{\min} = (\eta_1, \eta_1)^\top$. Але перетворення $F(x) = (x_1, x_2 - x_1)^\top$, очевидно, зводить ряд S до вигляду

$$F(S) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{21} + \eta_{211} \end{pmatrix},$$

і є більший сенс в тому, щоб назвати $(F(S))_{\min} = (\eta_1, \eta_{21})^\top$ однорідною апроксимацією ряду S. Справді, мінімальна реалізація ряду S може бути вибрана у вигляді такої системи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_1 + x_1 u_2 + \tfrac{1}{2} x_1^2 u_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

з виходом $y = h(x) = x$, а мінімальна реалізація ряду $(F(S))_{\min}$ є однорідною апроксимацією [38] системи (4.2), яку можна вибрати як

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 u_2 \end{aligned}$$

з виходом $y = h(x) = x$.

Нижче під *формальним r-вимірним відображенням* ми розуміємо будь-який формальний ряд вигляду

$$f(a_1, \ldots, a_p) = \sum_{q_1 + \cdots + q_p \geq 1} f_{q_1 \ldots q_p} a_1^{ш q_1} \text{ ш } \cdots \text{ ш } a_p^{ш q_p}$$

з коефіцієнтами $f_{q_1\ldots q_p} \in \mathbb{R}^r$. Зокрема, якщо $r = 1$, ми називаємо f *формальною функцією.*

Якщо f — формальна функція, то $f(S)$ — це ряд елементів $\mathcal{F}$ з одновимірними коефіцієнтами. Тоді $(f(S))_{\min}$ є сумою елементів мінімального порядку з цього ряду.

Як і в попередньому розділі, для реалізовного ряду (4.1) ми позначаємо через $\mathcal{L}_S$ кореневу підалгебру Лі системи, яка є мінімальною реалізацією ряду S, а через $\mathcal{J}_S$ – градуйований лівий ідеал, породжений $\mathcal{L}_S$.

Лема 4.1. *Нехай S — реалізовний ряд вигляду* (4.1)*. Тоді для будь-якої формальної функції $f(a_1, \ldots, a_p)$*

$$\mathcal{J}_S \subset (f(S))^{\perp}_{\min}.$$

Доведення. Нехай $\operatorname{codim}(\mathcal{L}_S) = \rho_L(c) = n$. Розглянемо мінімальну реалізацію ряду S та (n-вимірний) ряд $\widetilde{S}$, що відповідає цій мінімальній реалізації. Тоді без обмеження загальності ми можемо вибрати ряд $\widetilde{S}$ у вигляді

$$\widetilde{S}_k = d_k + R_k,\ \ k = 1, \ldots, n,$$

де d_k — елементи дуального базису, побудованого так, як описано в попередньому розділі. Залишок R_k містить члени порядку, більшого ніж $\operatorname{ord}(d_k)$, і $S = h(\widetilde{S})$, де h — формальне p-вимірне відображення. Зрозуміло, що

$$(f(S))_{\min} = (f(h(\widetilde{S})))_{\min}$$

дорівнює тасуючому поліному від $d_1, \ldots, d_n$. Оскільки, аналогічно теоремі 1.5 , тасуючі добутки $d_1, \ldots, d_n$ утворюють базис підпростору $\mathcal{J}_S^{\perp}$, отримуємо, що $(f(S))_{\min} \in \mathcal{J}_S^{\perp}$. Лему доведено. $\square$

Тепер, розвиваючи ідею розділу 3, введемо максимальний лівий ідеал, який є ортогональним до будь-якого елемента $(f(S))_{\min}$.

Розглянемо множину D всіх лівих ідеалів, породжених градуйованою підалгеброю Лі, див. визначення 3.1. Зокрема, $\mathcal{J}_S \in D$; цей ідеал породжений алгеброю Лі $\mathcal{L}_S$.

Для заданого ряду S вигляду (4.1) введемо наступну підмножину множини D:

$$D_S = \{\mathcal{J} \in D : \mathcal{J} \subset (f(S))^{\perp}_{\min} \text{ для будь-якої формальної функції } f\}.$$

З леми 4.1 випливає, що $\mathcal{J}_S \in D_S$, отже, $D_S \neq \varnothing$.

Очевидно, що в множині D_S існує єдиний максимальний (у сенсі включення) лівий ідеал. Ми позначимо його через $\mathcal{J}_S^{\max}$, а підалгебру Лі, яка породжує $\mathcal{J}_S^{\max}$, позначимо через $\mathcal{L}_S^{\max}$. Нехай $r = \operatorname{codim}(\mathcal{L}_S^{\max})$. Оскільки $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_S^{\max}$, ми маємо $r \leq n$.

Тепер застосуємо конструкцію дуального базису, описану в попередньому розділі, до підалгебри Лі $\mathcal{L}_S^{\max}$. А саме, виберемо однорідні елементи $\widehat{\ell}_1, \ldots, \widehat{\ell}_r \in \mathcal{L}$ такі, що $\operatorname{ord}(\widehat{\ell}_i) \leq \operatorname{ord}(\widehat{\ell}_j)$ при $i < j$ та виконується рівність

$$\mathcal{L}_S^{\max} + \operatorname{Lin}\{\widehat{\ell}_1, \ldots, \widehat{\ell}_r\} = \mathcal{L}.$$

Далі, оберемо однорідний базис $\{\widehat{\ell}_i\}_{i=r+1}^{\infty}$ підпростору $\mathcal{L}_S^{\max}$. Нарешті, застосуємо теорему Пуанкаре-Біркгофа-Вітта (теорема 1.1) і теорему Мелансона-Рейтенауера (теорема 1.2) та побудуємо дуальний базис

$$\widehat{d}_{i_1\ldots i_k}^{\,q_1\ldots q_k} = \frac{1}{q_1!\cdots q_k!}\widehat{d}_{i_1}^{\,ш q_1} \,ш \cdots ш\, \widehat{d}_{i_k}^{\,ш q_k},$$

де використовується позначення $\widehat{d}_i = \widehat{d}_i^{\,1}$. Аналогічно теоремі 1.5 можна показати, що множина

$$\{\widehat{d}_1^{\,ш q_1} \,ш \cdots ш\, \widehat{d}_r^{\,ш q_r} : q_1 + \cdots + q_r \geq 1\}$$

утворює базис $(\mathcal{J}_S^{\max})^{\perp}$. Оскільки $(f(S))_{\min} \subset (\mathcal{J}_S^{\max})^{\perp}$, то $(f(S))_{\min}$ — тасуючий поліном від $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r$ для будь-якої формальної функції f.

Визначення 4.2. *Для даного набору $A \subset \mathcal{F}$ ми визначаємо тасуючу оболонку A як*

$$A^{sh} = \operatorname{Lin}\{a_1^{ш i_1} \,ш \cdots ш\, a_k^{ш i_k} : k \geq 1, a_1, \ldots, a_k \in A,\ i_1, \ldots, i_k \geq 1\}.$$

Розглянемо підпростір

$$N_S = \{(f(S))_{\min} : f \text{ є формальною функцією}\}. \tag{4.3}$$

Тобто $\mathcal{J}_S^{\max}$ – це максимальний (у сенсі включення) лівий ідеал з множини D, ортогональний N_S.

Як показано вище, будь-який елемент N_S є тасуючим поліномом від $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r$, тобто

$$N_S \subset \{\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r\}^{sh}.$$

Таким чином, будь-який елемент N_S є тасуючим поліномом від r елементів $\widehat{d}_1, \ldots, \widehat{d}_r$, причому $r \le n = \rho_L(c)$. Однак самі елементи $\widehat{d}_i$ можуть не належати до множини N_S. Далі покажемо, як можна знайти «тасуючий базис» множини N_S, тобто елементи N_S, які є в певному сенсі незалежними і такими, що множина N_S дорівнює лінійній оболонці тасуючих добутків цих елементів.

Визначення 4.3. *Ми говоримо, що кілька елементів є поліноміально незалежними, якщо жоден з них не дорівнює тасуючому поліному від інших.*

Наприклад, елементи $\{\eta_1 ш\, \eta_2, \eta_2 ш\, \eta_3, \eta_1 ш\, \eta_3\}$ є поліноміально незалежними, а елементи $\{\eta_1, \eta_2, \eta_1 ш\, \eta_2\}$ не є поліноміально незалежними.

Лема 4.2. *Існують такі однорідні поліноміально незалежні елементи $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q \in N_S$, для яких*

$$N_S = \{\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q\}^{sh}, \tag{4.4}$$

причому $q \le p$.

Доведення. Опишемо алгоритм пошуку таких елементів $\widehat{a}_i$. Він узагальнює алгоритм [12], [37] для знаходження однорідної апроксимації ряду, який має ранг Лі n і задовольняє умову Рашевського-Чжоу (2.15).

Крок 1. Припустимо, що компоненти S відмінні від нуля. Знайдемо мінімальний порядок усіх компонент,

$$\alpha_1 = \min\{\mathrm{ord}((S_i)_{\min}) : i = 1, \ldots, p\}.$$

Знайдемо лінійне невироджене відображення F таке, що елементи $((F(S))_i)_{\min} \in \mathcal{F}^{\alpha_1}$ для $i = 1, \ldots, n_1$ є лінійно незалежними і $(F(S))_i$ містять лише елементи порядку, більшого ніж α_1, де $i = n_1 + 1, \ldots, p$. Позначимо $S^1 = F(S)$.

Крок $k \geq 2$. Якщо $n_{k-1} = p$, то на цьому можна зупинитися. Якщо ні, то припустимо, що після $(k-1)$-го кроку ми отримали ряд S^{k-1}, для якого елементи $(S_1^{k-1})_{\min}, \ldots, (S_{n_{k-1}}^{k-1})_{\min}$ порядку не більше ніж α_{k-1} є поліноміально незалежними і S_i^{k-1} дорівнює нулю або містить лише елементи порядку, більшого ніж α_{k-1}, де $i = n_{k-1} + 1, \ldots, p$. Ми вважаємо, що за попередньою побудовою $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{k-1}$ і $n_1 < \cdots < n_{k-1}$. На поточному кроці ми знаходимо відображення, яке не змінює компоненти $S_1^{k-1}, \ldots, S_{n_{k-1}}^{k-1}$.

Розглянемо компоненти S_i^{k-1}, $i = n_{k-1} + 1, \ldots, p$. Якщо всі вони нульові, зупиняємося. В іншому випадку знайдемо мінімальний порядок усіх ненульових компонент,

$$\alpha_k = \min\{\mathrm{ord}((S_i^{k-1})_{\min}) : i = n_{k-1} + 1, \ldots, p,\ S_i^{k-1} \neq 0\} > \alpha_{k-1}.$$

Без обмеження загальності припустимо, що

$$(S_i^{k-1})_{\min} \in \mathcal{F}^{\alpha_k}, \quad i = n_{k-1} + 1, \ldots, n'_k,$$

а S_i^{k-1} при $i > n'_k$ містять лише елементи порядку, більшого за α_k, або $S_i^{k-1} = 0$. (Цього можна досягти, помінявши компоненти ряду місцями.)

Тепер розглянемо компоненти S_i^{k-1} послідовно для $i = n_{k-1} + 1, \ldots, n'_k$.

Випадок 1. Елемент $(S_i^{k-1})_{\min}$ є тасуючим поліномом від елементів $(S_1^{k-1})_{\min}, \ldots, (S_{i-1}^{k-1})_{\min}$, тобто існує поліном $F_i(x) = x_i + P_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ такий, що

$$(S_i^{k-1})_{\min} + P_i((S_1^{k-1})_{\min}, \ldots, (S_{i-1}^{k-1})_{\min}) = 0.$$

З цього випливає, що $F_i(S^{k-1})$ дорівнює нулю або містить лише елементи порядку, більшого за α_k. Тоді зробимо таку (поліноміальну) заміну: i-ту компоненту S_i^{k-1} замінимо на $F_i(S^{k-1})$, а інші компоненти залишимо без змін, і перейдемо до наступного i.

Випадок 2. Елемент $(S_i^{k-1})_{\min}$ не входить до тасуючої оболонки елементів $(S_1^{k-1})_{\min}, \ldots, (S_{i-1}^{k-1})_{\min}$. Тоді просто перейдемо до наступного i.

Якщо для всіх i має місце лише випадок 1, то ми отримуємо відображення F таке, що $(F(S^{k-1}))_i$ для всіх $i = n_{k-1}+1, \ldots, n'_k$ дорівнює нулю або містить лише елементи порядку, більшого за α_k. Тоді знов повторимо k-й крок, але тепер з рядом $F(S^{k-1})$.

Якщо хоча б для одного i має місце випадок 2, то після k-го кроку ми отримуємо ряд $S^k = F(S^{k-1})$ такий, що $S_i^k = S_i^{k-1}$ для $i = 1, \ldots, n_{k-1}$ і $(S_1^k)_{\min}, \ldots, (S_{n_k}^k)_{\min}$ мають порядок не більший за α_k і є поліноміально незалежними, $n_k \geq n_{k-1}+1$, а S_i^k дорівнює нулю або містить лише елементи порядку, більшого за α_k при $i = n_k+1, \ldots, p$. У цьому випадку переходимо до $(k+1)$-го кроку.

Підкреслимо, що не виключений випадок, коли крок алгоритму може повторюватися нескінченну кількість разів. Після цього одна або кілька компонент ряду стають нульовими.

В результаті отримуємо ряд

$$S' = F(S) = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 + R_1 \\ \cdots \\ \widehat{a}_q + R_q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

де елементи $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_q$ поліноміально незалежні, тобто жоден з них не дорівнює тасуючому поліному від інших, а R_i містить елементи порядку, більшого за $\operatorname{ord}(\widehat{a}_i)$. Очевидно, $q \leq p$.

Зауважимо, що відображення F, побудоване за цим алгоритмом, є оборотним. Отже, для будь-якої формальної функції f ми отримуємо, що $(f(S))_{\min} = (f(F^{-1}(S')))_{\min}$ є тасуючим поліномом від $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q$. Це означає, що

$$N_S \subset \{\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q\}.$$

З іншого боку, елементи $\widehat{a}_i$ і будь-який тасуючий поліном від них можна отримати як $(f(S))_{\min}$ за допомогою деякої формальної функції f. Справді, для будь-якого тасуючого монома маємо

$$\widehat{a}_1^{\text{ш} j_1} \text{ ш } \cdots \text{ ш } \widehat{a}_q^{\text{ш} j_q} = (P(S'))_{\min} = (P(F(S)))_{\min},$$

де $P(x_1, \dots, x_q) = x_1^{\text{ш} j_1} \text{ ш } \cdots \text{ ш } x_q^{\text{ш} j_q}$, тобто $f(x) = P(F(x))$. Отже,

$$\{\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q\} \subset N_S.$$

Лему доведено. □

Як випливає з доведення леми, елементи $\widehat{a}_i$ визначені однозначно з точністю до додавання тасуючих поліномів від елементів меншого порядку. Крім того, всі елементи $\widehat{a}_i$ належать N_S і поліноміально незалежні за побудовою. Беручи до уваги рівність (4.4), ми кажемо, що набір $\{\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_q\}$, заданий алгоритмом, є *тасуючим базисом* підпростору N_S.

Зауваження 4.2. Число q може бути меншим, рівним або більшим за r. Наприклад, для одновимірного ряду $S = \eta_{21}$ маємо $S_{\min} = S$, тобто $q = p = 1$. У цьому випадку $r = n = 2$, а дуальний базис можна вибрати як $d_1 = \widehat{d}_1 = \eta_1$, $d_2 = \widehat{d}_2 = \eta_{21}$. Справді, мінімальну реалізацію такого ряду можна вибрати у вигляді

$$\dot{x}_1 = u_1,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 u_2$$

з виходом $h(x) = x_2$. Однак для ряду

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{12} + \eta_{21} \\ \eta_{122} + \eta_{212} + \eta_{221} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \text{ ш } \eta_2 \\ \frac{1}{2}\eta_1 \text{ ш } \eta_2 \text{ ш } \eta_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

з $q = p = 3$ ми, очевидно, отримуємо $r = n = 2$: мінімальну реалізацію можна вибрати у вигляді

$$\dot{x}_1 = u_1,$$
$$\dot{x}_2 = u_2$$

з виходом $h(x) = (x_1, x_1x_2, \frac{1}{2}x_1x_2^2)^\top$.

Приклад 4.2. Для наступного ряду описаний вище алгоритм вимагає повторення 2-го кроку нескінченну кількість разів:

$$S = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 + \frac{1}{2!}\eta_1^{ш 2} + \cdots + \frac{1}{k!}\eta_1^{ш k} + \cdots \end{pmatrix}$$

Першими відображеннями будуть $F_1(x) = (x_1, x_2 - x_1)^\top$, $F_2(x) = (x_1, x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^\top$, $F_3(x) = (x_1, x_2 - \frac{1}{6}x_1^3)^\top$ і так далі. Після кожного повторення один доданок з другої компоненти зникає, і порядок мінімального доданка другої компоненти збільшується. В результаті відображення $F(x) = (x_1, x_2 - e^{x_1})^\top$ зводить S до вигляду $F(S) = (\eta_1, 0)^\top$.

Зауваження 4.3. Елементи, які є поліноміально незалежними, можуть задовольняти поліноміальні рівності відносно тасуючого добутку. Наприклад, компоненти ряду (4.6) є поліноміально незалежними, оскільки жодна з них не є тасуючим поліномом від інших. Проте вони задовольняють наступну поліноміальну рівність:

$$2S_1 \,ш\, S_3 = S_2 \,ш\, S_2.$$

4.2 Однорідна апроксимація багатовимірного ряду і алгебраїчна еквівалентність рядів

Беручи до уваги лему 4.2, ми пропонуємо наступне визначення однорідної апроксимації ряду вигляду (4.1).

Визначення 4.4. *Ми говоримо, що ряд*

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \dots \\ \widehat{a}_q \end{pmatrix},$$

де $\widehat{a}_i$ *— однорідні поліноміально незалежні елементи, є однорідною апроксимацією ряду* (4.1), *якщо існує оборотне формальне відображення* F *таке, що ряд* $F(S)$ *має вигляд* (4.5).

Зауважимо, що якщо ряд (4.1) з n-вимірними коефіцієнтами (тобто при $p = n$) має ранг Лі n і задовольняє умову Рашевського-Чжоу

$$c(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^n,$$

то визначення 4.4 збігається зі звичайним визначенням однорідної апроксимації [38], [12]. У такому випадку маємо $q = p = n$, а елементи $\widehat{a}_i$ можна вибрати як $\widehat{a}_i = d_i$, $i = 1, \dots, n$.

З іншого боку, якщо ряд (4.1) одновимірний (тобто $p = 1$), то визначення 4.4 збігається з визначенням 3.2, запропонованим у попередньому розділі. У такому випадку елемент $\widehat{a}_1$ можна вибрати як $\widehat{a}_1 = \widehat{S}$.

Визначення 4.5. *Ми говоримо, що два ряди алгебраїчно еквівалентні, якщо вони мають однакову однорідну апроксимацію.*

З леми 4.2 випливає наступний результат.

Теорема 4.1. *Два ряди* S^1 *і* S^2 *алгебраїчно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли* $N_{S^1} = N_{S^2}$, *де множини* N_{S^i} *визначені для рядів* S^i *формулою* (4.3), *тобто*

$$N_{S^i} = \{(f(S^i))_{\min} : f \text{ — формальна функція}\}, \quad i = 1, 2.$$

В якості елементів $\widehat{a}_i$ *однорідної апроксимації можна вибрати будь-який тасуючий базис множини* N_{S^i}.

Теорема 4.1 означає, що для того, щоб побудувати однорідну апроксимацію, необов'язково знаходити перетворення, описане в лемі 4.2. Для того, щоб знайти результат, тобто самі елементи $\widehat{a}_i$, достатньо побудувати множину N_S і взяти будь-який її тасуючий базис. Так, у прикладі 4.2, очевидно, множина N_S складається з усіх тасуючих поліномів від η_1, отже, її тасуючий базис дорівнює $\widehat{a}_1 = \eta_1$.

Підкреслимо, що два алгебраїчно еквівалентні ряди можуть мати неоднакову розмірність. Наприклад, розглянемо такі ряди:

$$S^1 = \eta_1, \qquad S^2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{11} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\eta_{11} = \frac{1}{2}\eta_1 \sqcup\!\sqcup\, \eta_1$, то ряд S^2 заміною $F(x) = (x_1, x_2 - \frac{1}{2}x_1^2)^\top$ приводиться до вигляду

$$F(S) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ряди S^1 і S^2 є алгебраїчно еквівалентними; їхня однорідна апроксимація – це $\widehat{S} = S^1 = \eta_1$.

Визначення 4.5 узагальнює визначення A-еквівалентності для рядів з $p = \rho_L(c) = n$, що задовольняють умову Рашевського-Чжоу [19]. Однак це визначення не є таким природним для загального ряду (4.1). Наприклад, ряд (4.6) і ряд

$$S' = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

дуже схожі, оскільки мінімальну реалізацію для кожного з них можна вибрати як

$$\dot{x}_1 = u_1,$$
$$\dot{x}_2 = u_2.$$

Зокрема, ці два ряди мають один і той самий максимальний лівий ідеал, див. лему 3.1. Але ці ряди не є алгебраїчно еквівалентними. Справді,

$N_S \neq N_{S'}$: наприклад, елемент η_2 належить підпростору $N_{S'}$, але не належить підпростору N_S. Причина полягає в тому, що в загальному випадку множина N_S не повністю визначається максимальним лівим ідеалом. Щоб сформулювати цю властивість, введемо таке визначення.

Визначення 4.6. *Ми кажемо, що два ряди S^1 і S^2 слабо алгебраїчно еквівалентні, якщо їхні максимальні ліві ідеали збігаються, тобто $\mathcal{J}_{S^1}^{\max} = \mathcal{J}_{S^2}^{\max}$.*

Очевидно, що якщо $N_{S^1} = N_{S^2}$, то $\mathcal{J}_{S^1}^{\max} = \mathcal{J}_{S^2}^{\max}$. Отже, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 4.1. *Якщо два ряди S^1 і S^2 алгебраїчно еквівалентні, то вони слабо алгебраїчно еквівалентні.*

Приклад 4.3. Розглянемо два одновимірні ряди

$$S^1 = \eta_1 \quad \text{і} \quad S^2 = \eta_{11}.$$

Нагадаємо, що $\eta_{11} = \frac{1}{2}\eta_1 \sqcup\!\sqcup\, \eta_1$, отже, обидва ряди мають однаковий максимальний лівий ідеал; їх одновимірна реалізація має вигляд

$$\dot{x}_1 = u_1$$

з виходами $h(x) = x_1$ і $h(x) = \frac{1}{2}x_1^2$ відповідно. Отже, S^1 і S^2 слабо алгебраїчно еквівалентні. Проте ми бачимо, що множини N_{S^1} і N_{S^2} не збігаються, оскільки $\eta_1 \in N_{S^1}$, але $\eta_1 \notin N_{S^2}$. Таким чином, S^1 і S^2 не є алгебраїчно еквівалентними.

Приклад 4.4. Розглянемо ряд

$$S = \begin{pmatrix} \eta_2 + \eta_{21} \\ \eta_{22} + \eta_{221} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Застосовуючи алгоритм, описаний у доведенні леми 4.2, ми використовуємо відображення $F(x) = (x_1, -x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)^\top$. Оскільки

$$\begin{aligned}
&-\eta_{22} - \eta_{221} + \tfrac{1}{2}(\eta_2 + \eta_{21}) ш (\eta_2 + \eta_{21}) = \\
&= -\eta_{22} - \eta_{221} + \tfrac{1}{2}\eta_2 ш \eta_2 + \eta_2 ш \eta_{21} + R = \\
&= \eta_{221} + \eta_{212} + R,
\end{aligned}$$

де $\mathrm{ord}(R) = 4$, отримуємо

$$F(S) = \begin{pmatrix} \eta_2 + \eta_{21} \\ \eta_{221} + \eta_{212} + R \end{pmatrix}.$$

Отже, як однорідну апроксимацію ряду S можна взяти $(F(S))_{\min}$, тобто ряд

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \eta_{221} + \eta_{212} \end{pmatrix}.$$

Тому $N_S = \{\widehat{a}_1, \widehat{a}_2\}^{sh} = \{\eta_2, \eta_{221} + \eta_{212}\}^{sh}$.

Побудуємо підалгебру Лі $\mathcal{L}_S^{\max}$ так, щоб породжений нею лівий ідеал $\mathcal{J}_S^{\max}$ був ортогональний N_S.

По-перше, зауважимо, що $\mathcal{L}_S^{\max}$ не може містити елементи η_2 і $[\eta_2, [\eta_2, \eta_1]]$ з алгебри Лі $\mathcal{L}$. Справді, η_2 не ортогональний елементу $\widehat{a}_1 = \eta_2$, а $[\eta_2, [\eta_2, \eta_1]] = \eta_{221} - 2\eta_{212} + \eta_{122}$ не ортогональний елементу $\widehat{a}_2 = \eta_{221} + \eta_{212}$.

По-друге, бачимо, що $\mathcal{L}_S^{\max}$ не може містити η_1. Справді, якби η_1 належав $\mathcal{L}_S^{\max}$, то елемент $\eta_{22}\eta_1$ належав би лівому ідеалу $\mathcal{J}_S^{\max}$. Але $\eta_{22}\eta_1 = \eta_{221}$ не є ортогональним елементу $\widehat{a}_2 = \eta_{221} + \eta_{212}$.

Покажемо, що

$$\mathcal{L}_S^{\max} = \mathrm{Lin}\{[\eta_1, \eta_2], [\eta_1, [\eta_1, \eta_2]]\} + \sum_{k=4}^{\infty} \mathcal{L}^k.$$

Виберемо $\ell_1 = \eta_1$, $\ell_2 = \eta_2$, $\ell_3 = [[\eta_2, \eta_1], \eta_2]$, які доповнюють $\mathcal{L}_S^{\max}$ до $\mathcal{L}$, тоді елементи дуального базиса можна вибрати як $d_1 = \eta_1$, $d_2 = \eta_2$, $d_3 =$

$\eta_{221} + \eta_{212}$. Оскільки $d_3 = \eta_2(\eta_1 ш \eta_2)$, то, користуючись методом з [38], побудуємо відповідну систему з такою кореневою підалгеброю Лі:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 u_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Зауважимо, що в цьому випадку вихід дорівнює $h(x) = (x_2, x_3)^\top$.

Очевидно, $N_S \subset \{d_1, d_2, d_3\}^{sh} = (\mathcal{J}_S^{\max})^\perp$, а тому $\mathcal{J}_S^{\max}$ – максимальний лівий ідеал, ортогональний N_S. Зокрема, (4.8) – мінімальна реалізація $\widehat{S}$.

Тепер розглянемо ряд

$$S' = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_{221} + \eta_{212} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що він слабо алгебраїчно еквівалентний, але не алгебраїчно еквівалентний S.

Справді, міркування, аналогічні наведеним вище, показують, що $\mathcal{L}_S^{\max} = \mathcal{J}_{S'}^{\max}$, а отже, $\mathcal{J}_S^{\max} = \mathcal{J}_{S'}^{\max}$. Це означає, що S і S' слабо алгебраїчно еквіваленті. Мінімальна реалізація S' може бути вибрана як (4.8) з виходом $h(x) = (x_1, x_3)^\top$.

Розглянемо $N_{S'} = \{\eta_1, \eta_{221} + \eta_{212}\}^{sh}$. Очевидно, $\eta_2 \notin N_{S'}$, але $\eta_2 \in N_S$. Отже, $N_{S'} \neq N_S$, тобто ряди S і S' не є алгебраїчно еквівалентними.

Нарешті, зауважимо, що мінімальна реалізація вихідного неоднорідного ряду (4.7) може бути вибрана як

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2 + x_1 u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_2 \end{aligned}$$

з виходом $h(x) = (x_2, x_3)^\top$. Для того, щоб знайти однорідну апроксимацію цієї системи, виконаємо заміну $x_3' = -x_3 + \frac{1}{2}x_2^2$. Тоді отримуємо

$$\dot{x}_3' = x_1 x_2 u_2.$$

Тепер очевидно, що однорідною апроксимацією є система (4.8). Таким чином, в даному прикладі однорідна апроксимація мінімальної реалізації і однорідна апроксимація самого ряду збігаються.

Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглядаються реалізовні ряди довільної розмірності.

1. Спочатку розглядається мінімальна частина ряду – узагальнення однорідної апроксимації одновимірного ряду. Показано, що лівий ідеал ряду S ортогональний мінімальній частині будь-якої формальної функції від S (лема 4.1). Це приводить до визначення максимального лівого ідеалу $\mathcal{J}_S^{\max}$, ортогонального множині N_S всіх мінімальних частин довільних формальних функцій від S, і відповідної підалгебри Лі $\mathcal{L}_S^{\max}$, що породжує цей ідеал.

2. Досліджені множини N_S: зокрема, показано, що існує скінченний набір елементів, множина тасуючих поліномів якого дорівнює N_S і жоден з яких не є тасуючим поліномом інших. Показано, що (оборотне) перетворення приводить ряд S до трикутного вигляду, в якому згадані елементи утворюють «головну частину» (лема 4.2). Тож ряд з цих елементів природно назвати однорідною апроксимацією вихідного ряду (визначення 4.4).

3. Таким чином, два ряди мають одну й ту саму однорідну апроксимацію (тобто алгебраїчно еквівалентні, визначення 4.5) тоді і тільки тоді, коли їх множини N_S співпадають (теорема 4.1). Це означає, що можна побудувати однорідну апроксимацію ряду без зведення ряду до трикутного вигляду.

4. Інше природне поняття алгебраїчної еквівалентності – співпадіння максимальних ідеалів (слабка алгебраїчна еквівалентність, визначе-

ння 4.6). Якщо множини N_S у двох рядів однакові, то і максимальні ідеали однакові. Отже, якщо два ряди алгебраїчно еквівалентні, то вони і слабо алгебраїчно еквівалентні (наслідок 4.1). Наведені приклади показують, що зворотне твердження неправильне: ряди можуть бути слабо алгебраїчно еквівалентними, але не бути алгебраїчно еквівалентними.

Результати цього розділу опубліковані у статті [11].

ВИСНОВКИ

У дисертації проведено дослідження однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем з виходом і відповідних реалізовних рядів ітерованих інтегралів, зокрема, їхніх алгебраїчних властивостей, а також застосувань до задачі оптимального керування. Отримані результати розширюють існуючі знання щодо нелінійних керованих систем і включають нові методи побудови та аналізу однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем з виходом.

Перший розділ дисертаційної роботи містить огляд та систематизацію низки відомих результатів щодо нелінійних керованих систем, вільних асоціативних алгебр та вільних алгебр Лі, що є основою для подальших досліджень.

Основна частина дисертації присвячена дослідженню рядів ітерованих інтегралів зі скалярними та векторними коефіцієнтами та відповідних формальних рядів у вільній асоціативній алгебрі, які відповідають нелінійним керованим системам, лінійним за керуванням, з виходом. Для таких рядів вводиться і досліджується поняття однорідної апроксимації.

Другий і третій розділи дисертації присвячено вивченню одновимірних реалізовних рядів та їхніх однорідних апроксимацій. У цих розділах отримані такі основні результати:

- Вивчена однорідна апроксимація мінімальної реалізації ряду. Запропонована класифікація однорідних апроксимацій мінімальних реалізацій одновимірних рядів у термінах градуйованих підалгебр Лі.

- Досліджений лівий ідеал, що породжується кореневою підалгеброю Лі однорідного одновимірного ряду: показано, що він ортогональний до такого ряду, що дає спосіб побудови однорідної апроксимації мінімальної реалізації однорідних одновимірних рядів.

- Запропоноване визначення однорідної апроксимації довільного реалізовного одновимірного ряду і досліджений зв'язок між кореневими підалгебрами Лі однорідної апроксимації ряду і його мінімальної реалізації.

- Запропонована класифікація пар «однорідна апроксимація мінімальної реалізації ряду – однорідна апроксимація самого ряду» в термінах вкладених градуйованих підалгебр Лі.

- Досліджений зв'язок однорідної апроксимації і апроксимації в сенсі швидкодії, який дозволяє отримувати наближені до оптимальних керування для задач з одновимірним виходом, використовуючи оптимальні керування для однорідної апроксимації.

- Задача швидкодії для однорідної системи з однорідним виходом досліджена як задача оптимізації.

Розділ 4 присвячений дослідженню реалізовних рядів довільної розмірності. Отримані такі основні результати:

- Показано, що лівий ідеал, що відповідає ряду, ортогональний мінімальній частині будь-якої формальної функції від цього ряду. Досліджені множини мінімальних частин формальних функцій, зокрема, щодо існування тасуючого базису.

- Наведений метод зведення ряду до трикутного вигляду, запропоноване визначення однорідної апроксимації ряду, досліджена роль лівого ідеалу для побудови однорідної апроксимації.

- Запропоновані два визначення алгебраїчної еквівалентності рядів – алгебраїчна еквівалентність і слабка алгебраїчна еквівалентність, досліджений зв'язок між ними.

Усі результати наведено з повними і строгими доведеннями, для ілюстрації отриманих результатів наведені приклади.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Методи, розвинуті в роботі, можуть бути застосовані в подальших дослідженнях нелінійних керованих систем, зокрема у питаннях апроксимації, оптимального керування та аналітичного опису складних нелінійних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Андреєва Д. М. Апроксимація відображення «вхід-вихід». *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 12-13 травня 2023 року. Тези доповідей, С.22-24.

[2] Андреєва Д. М. Задача оптимальної швидкодії для одної однорідної керованої системи. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 10-11 травня 2024 року. Тези доповідей, С. 29-30.

[3] Ігнатович С. Ю. Метод рядів та вільних алгебр в аналізі нелінійних керованих систем: дис. ... доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01. Харків, 2017. 356 с.

[4] Скляр Г. М., Ігнатович С. Ю., Бархаєв П. Ю. Про асимптотичну класифікацію нелінійних керованих систем в околі точки спокою. *Доповіді НАН України, сер.« Матем., прир. та техн. науки»*. 2004, №12. С. 28-34.

[5] Agrachev A., Barilari D., Boscain U. A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge University Press, 2020. 746 p.

[6] Agrachev A. A., Gamkrelidze R. V., Sarychev A. V. Local invariants of smooth control systems. *Acta Appl. Math.* 1989. Vol. 14. P. 191–237.

[7] Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximations for control systems with output. *5-th International Conference «Differential Equati-*

ons and Control Theory». Kharkiv, September 27-29, 2021. Book of abstracts, P. 9.

[8] Andreieva D. M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation for minimal realizations of series of iterated integrals. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 96. P. 23–39.

[9] Andreieva D.M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation of one-dimensional series of iterated integrals and time optimality. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2023. Vol. 31, No 2. P. 1–23.

[10] Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximation of series of iterated integrals and time optimality. *6-th International Conference «Differential Equations and Control Theory»*. Kharkiv, October 11-13, 2023. Book of abstracts, P. 5.

[11] Andreieva D.M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximations of nonlinear control systems with output and weak algebraic equivalence. *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2024. Vol. 99. P. 36–50.

[12] Bellaïche A. The tangent space in sub-Riemannian geometry. *Progress in Mathematics*, Bellaïche, A. and Risler, J. J., eds. Birkhäuser Basel, 1996. Vol. 144. P. 1–78.

[13] Bellaïche A., Jean F., Risler J.-J. Geometry of nonholonomic systems. *Robot Motion Planning and Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Laumond, J.-P. (ed.). Springer, 1998. Vol. 229. P. 55–91.

[14] Crouch P. E. Solvable approximations to control systems. *SIAM J. Control and Optimization*. 1984. Vol. 22. P. 40–54.

[15] Filippov A. F. On certain questions in the theory of optimal control. *J. SIAM Control Ser. A*. 1962. Vol. 1. P. 76–84.

[16] Fliess M. Realization of nonlinear systems and abstract transitive Lie algebras. *Bull. of the AMS*. 1980. Vol. 2. P. 444–446.

[17] Fliess M. Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bull. Soc. Math. France*. 1981. Vol. 109. P. 3–40.

[18] Hermes H. Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Rev.* 1991. Vol. 33. P. 238–264.

[19] Ignatovich S. Yu. Realizable growth vectors of affine control systems. *J. Dynamical and Control Systems*. 2009. Vol. 15. P. 557–585.

[20] Isidori A. Nonlinear control systems. 3-rd ed. Springer-Verlag, London, 1995. 549 p.

[21] Jakubczyk B. Existence and uniqueness of realizations of nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization*. 1980. Vol. 18. P. 455–471.

[22] Jean F. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. Springer Cham., 2014. 104 p.

[23] Jurdjevic V. Geometric control theory. Cambridge University Press, 1996. 508 p.

[24] Kawski M. Nonlinear control and combinatorics of words. *Geometry of Feedback and Optimal Control*, Dekker, 1997. P. 305–346.

[25] Kawski M. Combinatorial algebra in controllability and optimal control. *Algebra and Applications 2: Combinatorial Algebra and Hopf Algebras*, A. Makhlouf, ed., Chapter 5, 2021. P. 221–286.

[26] Kawski M., Sussmann H. J. Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory. *Operators, Systems and Linear Algebra.* European Consortium for Mathematics in Industry, U. Helmke, D. Prätzel-Wolters, E. Zerz, eds. Teubner, 1997. P. 111–128.

[27] Korobov V. I., Sklyar G. M. The Markov moment problem on the smallest possible interval. *Sov. Math. Dokl.* 1990. Vol. 40. P. 334–337.

[28] Korzeń M., Sklyar G., Ignatovich S., Woźniak J. Computational aspects of homogeneous approximations of nonlinear systems. *Computational Science – ICCS 2024.* ICCS 2024. Lecture Notes in Computer Science, 2024. Vol. 14833. P. 368–382

[29] LaValle S. M. Planning algorithms. Cambridge Univ. Press, 2006. 1007 p.

[30] Melançon G., Reutenauer C. Lyndon words, free algebras and shuffles. *Canadian J. Math.* 1989. Vol. 41. P. 577–591.

[31] Mormul P., Pelletier F. Symmetries of special 2-flags. *Journal of Singularities.* 2020. Vol. 21. P. 187–204.

[32] Ree R. Lie elements and an algebra assotiated with shuffles. *Annals of Math.* 1958. Vol. 68 (2). P. 210-220.

[33] Reutenauer C. Free Lie algebras. Clarendon Press, Oxford. 1993. 286 p.

[34] Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Moment approach to nonlinear time optimality. *SIAM J. Control and Optimization.* 2000. Vol. 38. P. 1707–1728.

[35] Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments. *Systems and Control Letters.* 2002. Vol. 47, No. 3. P 227–235.

[36] Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Approximation of time-optimal control

problems via nonlinear power moment min-problems. *SIAM J. Control and Optimization*. 2003. Vol. 42. P. 1325–1346.

[37] Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu., Barkhayev P.Yu. Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control. *Advances in Mathematics Research*, Nova Science Publishers, Inc.: New York. 2005. Vol. 6. P. 37–96.

[38] Sklyar G. M., Ignatovich S. Yu. Free algebras and noncommutative power series in the analysis of nonlinear control systems: an application to approximation problems. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 2014. Vol. 504. P. 1–88.

[39] Sklyar G., Barkhayev P., Ignatovich S., Rusakov V. Implementation of the algorithm for constructing homogeneous approximations of nonlinear control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 2022. Vol. 34. P. 883–907.

[40] Stefani G. Polynomial approximations to control systems and local controllability. *1985 24th IEEE Conference on Decision and Control*. 1985. P. 33–38.

[41] Zuyev A., Grushkovskaya V. Stabilization of a nonholonomic car model with jff-hooked trailers. *2024 32nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2024, P. 364–369.

ДОДАТОК А

Список публікацій здобувача

Статті у наукових фахових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

1. Andreieva D.M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation of one-dimensional series of iterated integrals and time optimality. *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2023. Vol. 31, No 2. P. 1–23.

   Keywords: nonlinear control system, series of iterated integrals, free associative algebra, core Lie subalgebra, homogeneous approximation, time-optimal control problem.

   DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142308 (Scopus).

Статті у наукових фахових виданнях України:

2. Andreieva D. M., Ignatovich S.Yu. Homogeneous approximation for minimal realizations of series of iterated integrals. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 96. P. 23–39.

   Keywords: homogeneous approximation; series of iterated integrals; minimal realization; core Lie subalgebra.

   DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2022-96-02

   (*Особистий внесок здобувача: отримання результатів щодо однорідної апроксимації мінімальної реалізації для одновимірних рядів ітерованих інтегралів.*

   Особистий внесок співавтора: постановка задачі і обговорення результатів.)

3. D.M. Andreieva, S.Yu. Ignatovich. Homogeneous approximations of nonlinear control systems with output and weak algebraic equivalence. *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, V. 99, P. 36-50.

   Keywords: homogeneous approximation; nonlinear control system; series of iterated integrals; core Lie subalgebra; maximal left ideal

   DOI: https://doi.org/10.26565/2221-5646-2024-99-03

   (*Особистий внесок здобувача: отримання результатів щодо однорідної апроксимації для рядів ітерованих інтегралів довільної вимірності, дослідження зв'язку між властивостями алгебраїчної еквівалентності і слабкої алгебраїчної еквівалентності.*

   Особистий внесок співавтора: постановка задачі і обговорення результатів.)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximations for control systems with output. *5-th International Conference «Differential Equations and Control Theory»*. Kharkiv, September 27-29, 2021. Book of abstracts, P. 9.

5. Андреєва Д. М. Апроксимація відображення «вхід-вихід». *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 12-13 травня 2023 року. Тези доповідей, С.22-24.

6. Andreieva D., Ignatovich S. Homogeneous approximation of series of iterated integrals and time optimality. *6-th International Conference «Differential Equations and Control Theory»*. Kharkiv, October 11-13, 2023.

Book of abstracts, P. 5.

7. Андреєва Д. М. Задача оптимальної швидкодії для одної однорідної керованої системи. *Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях* : XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів та молодих вчених. Харків, 10-11 травня 2024 року. Тези доповідей, С. 29-30.

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 09:15:08 11.04.2025

Назва файлу з підписом: Андреєва_Д_М_Дисертація.pdf
Розмір файлу з підписом: 808.4 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Андреєва_Д_М_Дисертація.pdf
Розмір файлу без підпису: 774.4 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: АНДРЕЄВА ДАР'Я МИКОЛАЇВНА
П.І.Б.: АНДРЕЄВА ДАР'Я МИКОЛАЇВНА
Країна: Україна
РНОКПП: 3556203123
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 09:15:05 11.04.2025
Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"
Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000003E977701EAC37405
Алгоритм підпису: ДСТУ 4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підписаний PDF-файл (PAdES)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (PAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.02.05 13:00