

АНОТАЦІЯ

Андреева Д.М. Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика (Галузь знань 11 Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2025.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню нелінійних систем, що є лінійними за керуванням, з одновимірним і багатовимірним виходом та їхніх однорідних апроксимацій.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений огляду відомих результатів з теорії нелінійних керованих систем, які є основою для подальших досліджень. Розділ починається з розгляду систем, лінійних за керуванням, вигляду

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m X_i(x)u_i,$$

де векторні поля $X_1(x), \dots, X_m(x)$ є аналітичними в деякому околі деякої фіксованої точки. Вводиться поняття ряду ітерованих інтегралів, який є важливим інструментом для аналізу таких систем: зокрема, траєкторія системи $x(t; u)$, що відповідає заданому керуванню $u = u(t)$, може бути розкладена в ряд ітерованих інтегралів

$$x(t; u) = x^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} c_{i_1 \dots i_k} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} u_{i_1}(\tau_1) \cdots u_{i_k}(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1,$$

коефіцієнти якого визначаються як

$$c_{i_1 \dots i_k} = X_{i_k} \dots X_{i_1} E(x^0) \in \mathbb{R}^n.$$

Розглядаються вільні градуйовані асоціативні алгебри, зокрема, абстрактна вільна асоціативна алгебра $\mathcal{F}$, та вільна алгебра Лі $\mathcal{L}$, які використовуються для дослідження властивостей базисів у цих алгебрах. Зокрема,

асоціативна алгебра $\mathcal{F}$ будується за базисом $\eta_{i_1 \dots i_k}$ елементів, які є абстрактним аналогом ітерованих інтегралів, і є градуїрованою з порядком, який визначається як $\text{ord}(\eta_{i_1 \dots i_k}) = k$.

У розділі також представлені теореми про реалізованість рядів ітерованих інтегралів, які встановлюють умови, за яких ряд може бути реалізований як система, лінійна за керуванням, з виходом. Крім того, розглядаються відомі результати щодо однорідної апроксимації систем для випадку тривіального виходу. Зокрема, нагадується означення кореневої підалгебри $\mathcal{L}$, яка визначає однорідну апроксимацію системи. Нарешті, обґрунтовується вибір теми та конкретних завдань дисертаційного дослідження, які полягають в узагальненні згаданого підходу на випадок систем з нетривіальним виходом.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню систем з одновимірним виходом, зокрема, знаходженню однорідної апроксимації мінімальної реалізації ряду.

У підрозділах 2.1-2.3 вводяться та обговорюються ряди ітерованих інтегралів, які представляють системи з виходом. Нехай M позначає множину мультиіндексів вигляду $I = (i_1, \dots, i_k)$, де $k \geq 1$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m$, а $M_0 = M \cup \{\emptyset\}$; далі $|I|$ позначає довжину I . Розглянемо ряд вигляду $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}$, а η_I – елементи вільної асоціативної алгебри $\mathcal{F}$, які утворюють базис $\mathcal{F}$ як лінійного простору, $\eta_\emptyset = 1$. Такий ряд визначає лінійне відображення $c : \mathcal{F}^e \rightarrow \mathbb{R}$, задане на базисних елементах $\mathcal{F}^e$ як $c(\eta_I) = c_I$, де $\mathcal{F}^e = \mathcal{F} + \mathbb{R}$.

У підрозділі 2.3 сформульовано критерій реалізованості ряду у формі, яка застосовується в подальшому (теорема 2.1).

Теорема. *Нехай заданий ряд вигляду $S = \sum_{I \in M_0} c_I \eta_I$, який задовольняє умову $|c(\eta_I)| \leq C_1 |I|! C^{|I|}$. Цей ряд є реалізовним тоді і тільки тоді, коли існує число $n \in \mathbb{N}$ та елементи $\ell_1, \dots, \ell_n \in \mathcal{L}$, для яких виконується наступна умова: для будь-якого елемента $\ell \in \mathcal{L}$ існують числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$,*

такі що

$$c(a(\ell - \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i)) = 0$$

для будь-якого елемента $a \in \mathcal{F}^e$.

У такому випадку мінімальне n дорівнює мінімально можливій розмірності системи, яка реалізує ряд S ; таку систему називатимемо мінімальною реалізацією ряду S .

Далі у розділі досліджуються мінімальні реалізації реалізовних рядів. Зокрема, доведено, що кореневу підалгебру $\mathcal{L}_i$, яка визначає однорідну апроксимацію мінімальної реалізації, можна знайти, не знаходячи самої мінімальної реалізації (підрозділ 2.5, теорема 2.2).

Ключовим результатом цього розділу є класифікаційна теорема та її наслідок (підрозділ 2.6, теорема 2.3 і наслідок 2.1).

Теорема. *Нехай $\mathcal{L}'$ — градуйована підалгебра $\mathcal{L}_i$ ненульової скінченної корозмірності. Тоді існує одновимірний однорідний ряд такий, що $\mathcal{L}'$ є кореневою підалгеброю $\mathcal{L}_i$ його мінімальної реалізації.*

Наслідок. *Будь-яка градуйована підалгебра $\mathcal{L}_i$ скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю $\mathcal{L}_i$ мінімальної реалізації деякого одновимірного ряду, а розмірність цієї реалізації дорівнює корозмірності підалгебри $\mathcal{L}_i$.*

Зауважимо, що доведення теореми 2.3 конструктивне, тобто показано, як побудувати відповідний ряд.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений однорідній апроксимації одновимірних рядів ітерованих інтегралів і задачі швидкодії для систем з одновимірним виходом.

У підрозділі 3.1 досліджені однорідні ряди і їх мінімальні реалізації, що включає аналіз їх корневих підалгебр $\mathcal{L}_i$ та відповідних лівих ідеалів. Зокрема, наведений спосіб побудови відповідного лівого ідеалу як максимального (у сенсі включення), ортогонального однорідному ряду.

У підрозділі 3.2 введено поняття однорідної апроксимації одновимірного

ряду.

Визначення. Розглянемо ненульовий ряд $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$. Нехай r — мінімальний порядок доданків, які входять до S , тобто

$$r = \min\{k \geq 1 : c_I \neq 0 \text{ для деяких } I \in M_k\}.$$

Тоді ряд

$$\widehat{S} = \sum_{I \in M_r} c_I \eta_I$$

називається однорідною апроксимацією ряду S .

Далі в підрозділі 3.2 досліджено зв'язок алгебраїчних властивостей вихідного ряду S і його однорідної апроксимації $\widehat{S}$, зокрема, зв'язок між їх кореневими підалгебрами $\mathcal{L}_i$: доведено, що $\mathcal{L}_S \subset \mathcal{L}_{\widehat{S}}$ (теорема 3.1).

У підрозділі 3.3 наведено класифікацію таких підалгебр $\mathcal{L}_i$. А саме, доведено таку теорему (теорема 3.2).

Теорема. Нехай $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ — дві вкладені градуйовані підалгебри $\mathcal{L}$, тобто $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}$, такі що $0 < \text{codim}(\mathcal{L}_2) \leq \text{codim}(\mathcal{L}_1) < \infty$. Тоді існує одновимірний ряд S такий, що $\mathcal{L}_1$ є його кореневою підалгеброю $\mathcal{L}$, а $\mathcal{L}_2$ є кореневою підалгеброю $\mathcal{L}$ його однорідної апроксимації $\widehat{S}$, тобто $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_{\widehat{S}} = \mathcal{L}_2$.

Доведення теореми 3.2 конструктивне, тобто показано, як можна побудувати відповідний ряд.

Підрозділи 3.4-3.6 присвячені дослідженню задачі швидкодії. У підрозділі 3.4 досліджується задача швидкодії для однорідних рядів або, що те ж саме, однорідних систем з однорідним одновимірним виходом. Запропоновано метод визначення мінімального часу досягнення заданого стану системи за допомогою аналізу відповідного функціонала на множині допустимих керувань. Доведено лему, що описує залежність оптимального часу від заданого значення виходу системи (лема 3.2).

Підрозділи 3.5-3.6 присвячені дослідженню апроксимації в сенсі швидкодії. Доведено, що коли значення виходу прямує до нуля, оптимальний

час для вихідної системи та оптимальний час для її однорідної апроксимації асимптотично еквівалентні (теорема 3.3). Крім того, доведено, що за певних умов оптимальні керування однорідної апроксимації наближають оптимальні керування вихідної системи (теорема 3.4). Це підтверджує ефективність однорідної апроксимації при розв'язанні задач керування динамічними системами.

У підрозділі 3.6 задача оптимальної швидкодії для однорідного одновимірного ряду розглядається як задача оптимізації у нескінченновимірному просторі. Таке формулювання дозволяє запропонувати інший шлях розв'язання задачі швидкодії. Крім того, у підрозділі запропонований метод побудови наближеного керування як розв'язку скінченновимірної задачі оптимізації.

Четвертий розділ присвячено розвиненню отриманих результатів на випадок реалізовних рядів довільної розмірності або, що те ж саме, систем з багатовимірним виходом.

Розглядаються формальні ряди з векторними коефіцієнтами вигляду $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}^p$. Спочатку вводиться поняття мінімальної частини ряду $S_{\min}$: це ряд, кожна компонента якого включає лише доданки, які мають мінімальний порядок: $S_{\min} = ((S_1)_{\min}, \dots, (S_p)_{\min})^\top$, де компоненти є однорідними і мають вигляд $(S_j)_{\min} = \sum_{|I|=r_j} (c_I)_j \eta_I$, а r_j позначає мінімальний порядок членів ряду, що входять до компоненти S_j . Вводяться формальні функції, визначені за допомоги тасуючого добутку,

$$f(a_1, \dots, a_p) = \sum_{q_1 + \dots + q_p \geq 1} f_{q_1 \dots q_p} a_1^{\natural q_1} \natural \dots \natural a_p^{\natural q_p}$$

з коефіцієнтами $f_{q_1 \dots q_p} \in \mathbb{R}$. Доведено, що лівий ідеал, який відповідає ряду, ортогональний мінімальній частині будь-якої формальної функції від ряду (лема 4.1):

Лема. Нехай S — реалізовний ряд вигляду $S = \sum_{I \in M} c_I \eta_I$, де $c_I \in \mathbb{R}^p$. Тоді $\mathcal{I}_S \subset (f(S))_{\min}^\perp$ для будь-якої формальної функції $f(a_1, \dots, a_p)$.

Далі визначається максимальний за включенням лівий ідеал $\mathcal{J}_S^{\max}$, ортогональний множині N_S , і підалгебра Лі $\mathcal{L}_S^{\max}$, що породжує цей ідеал; вони будуть використані в підрозділі 4.2 при дослідженні однорідної апроксимації ряду.

У підрозділі 4.1 досліджується множина мінімальних частин компонентів ряду, розглянутих в лемі, позначена як $N_S = \{(f(S))_{\min} : f \text{ є формальною функцією}\}$. А саме, запропонований алгоритм побудови тасуючого базису N_S , тобто такої множини елементів $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_q \in N_S$, жоден з яких не є тасуючим поліномом від інших, а довільний елемент N_S є тасуючим поліномом від $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_q$ (лема 4.2).

У підрозділі 4.2 вводиться поняття однорідної апроксимації ряду з коефіцієнтами довільної вимірності, яке узагальнює як випадок одновимірного виходу, так і випадок тривіального виходу.

Визначення. *Ряд*

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \dots \\ \hat{a}_q \end{pmatrix},$$

де $\hat{a}_i$ — однорідні елементи, є однорідною апроксимацією ряду S , якщо існує оборотне формальне відображення F таке, що ряд $F(S)$ має вигляд

$$S' = F(S) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 + R_1 \\ \dots \\ \hat{a}_q + R_q \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

де жоден з елементів $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_q$ не дорівнює тасуючому поліному від інших, а R_i містить елементи порядку, більшого за $\text{ord}(\hat{a}_i)$.

Це визначення приводить до поняття алгебраїчної еквівалентності рядів: ми кажемо, що два ряди є алгебраїчно еквівалентними, якщо вони

мають одну й ту саму однорідну апроксимацію.

Попередні результати приводять до наступного критерію (теорема 4.1).

Теорема. *Два ряди S^1 і S^2 алгебраїчно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $N_{S^1} = N_{S^2}$. В якості елементів $\hat{a}_i$ однорідної апроксимації можна вибрати будь-який тасуючий базис множини N_{S^i} .*

Зокрема, алгебраїчно еквівалентні ряди можуть мати різну кількість компонент, але їх структура визначається спільною однорідною апроксимацією.

З іншого боку, якщо два ряди мають один і той самий максимальний лівий ідеал, їх теж можна вважати в певному сенсі еквівалентними. У підрозділі 4.2 введене поняття слабкої алгебраїчної еквівалентності: два ряди називаються слабо алгебраїчно еквівалентними, якщо вони мають один і той самий лівий ідеал.

Нарешті, показано, що якщо два ряди алгебраїчно еквівалентні, то вони слабо алгебраїчно еквівалентні (наслідок 4.1). Однак ряди можуть бути слабо алгебраїчно еквівалентними, але при цьому не бути алгебраїчно еквівалентними, що демонструють розглянуті в підрозділі 4.2 приклади.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, системи з виходом, дійсно-аналітичні вектор-функції, ряди ітерованих інтегралів, формальні степеневі ряди, вільна асоціативна алгебра, дужки Лі, реалізованість, однорідна апроксимація, коренева підалгебра Лі, лівий ідеал, керованість, задача швидкодії, задача оптимізації, диференціальне рівняння.