

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В.Н.Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ,
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022

Рецензія

офіційного рецензента, доцента кафедри прикладної математики, кандидата фізико-математичних наук Півня Олексія Леонідовича на дисертаційну роботу Андреевої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика, галузь знань 11 – Математика та статистика

Актуальність теми дисертації.

У дисертаційній роботі розглядаються нелінійні динамічні системи, які задаються звичайними диференціальними рівняннями, з функціональними параметрами (керуваннями), причому доступними є одна чи кілька функцій від координат (вихід). Права частина диференціальних рівнянь і вихід є дійсно-аналітичними функціями від координат, а керування входять лінійно. Для таких систем можливо подати вихід у вигляді ряду, членами якого є так звані ітеровані інтеграли від керувань зі скалярними або векторними сталими коефіцієнтами. Ряд буде збігатися, якщо керування обмежені майже всюди фіксованою константою і розглядаються на досить малому інтервалі. Дослідження таких систем досить інтенсивно проводилися останні кілька десятиліть. Зауважу, що ітеровані інтеграли є нелінійними функціоналами від керувань. Їх структура дозволяє використовувати алгебраїчні методи дослідження, якщо інтерпретувати лінійну оболонку ітерованих інтегралів як вільну асоціативну некомутативну алгебру. Цей підхід приводить до отримання змістовних результатів щодо властивостей систем. Одне з важливих питань є питання щодо наближення ряду його скінченним відрізком. У контексті розглядуваної задачі цей скінченний відрізок має відповідати системі з певного класу. Один з традиційних класів – клас однорідних систем; відповідна апроксимація називається однорідною. Однорідні апроксимації досліджувалися різними методами, в тому числі з застосуванням вільних алгебр. Зокрема, глибокі результати були отримані науковцями кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна різних років – проф. Скляр Г.М., проф. Ігнатович С.Ю., доц. Бархаєвим П.Ю. Дана дисертація продовжує цей підхід, в ній отримані нові результати щодо однорідної апроксимації у випадку, який

не був розглянутий раніше, але є загальним: коли вихід не є тривіальним, тобто відрізняється від траєкторії.

Характеристика змісту дисертації в цілому.

Дисертаційна робота містить анотацію, вступ, чотири розділи з висновками до кожного розділу, загальні висновки до дисертації, список використаних джерел, додаток зі списком наукових публікацій здобувача за темою дисертації.

Перший розділ присвячений огляду результатів, які є основою даного дослідження.

Другий розділ присвячений дослідженню нелінійних керованих систем, породжених аналітичними векторними полями, з одновимірним аналітичним виходом і відповідних рядів ітерованих інтегралів. Досліджені однорідні апроксимації мінімальних реалізацій рядів.

У третьому розділі продовжене дослідження систем з одновимірним виходом. Вводиться поняття однорідної апроксимації ряду і досліджується його зв'язок з однорідною апроксимацією мінімальної реалізації ряду. Для систем з одновимірним виходом вивчається задача швидкодії. Отримані умови, за яких розв'язок задачі швидкодії для однорідної апроксимації ряду наближає розв'язок задачі швидкодії для самої системи.

У четвертому розділі досліджується випадок багатовимірного виходу. Вводиться і досліджується поняття однорідної апроксимації відповідного ряду. Вводяться два поняття алгебраїчної еквівалентності систем з виходом, досліджується зв'язок між ними.

Основні результати дисертації повною мірою опубліковані у трьох статтях у фахових наукових виданнях, одне з яких індексується у наукометричній базі Scopus.

Таким чином, дисертація присвячена дослідженню нелінійних керованих систем і відповідних рядів ітерованих інтегралів. Варто зауважити, що у дисертації використовується досить складна техніка, пов'язана з застосуванням вільних асоціативних алгебр і алгебр Лі і їх базисів. Разом з рядами ітерованих інтегралів розглядаються формальні ряди в абстрактній асоціативній некомутативній алгебрі, яка ізоморфна алгебрі ітерованих інтегралів, і всі конструкції розглядаються в цій абстрактній алгебрі. Крім асоціативної алгебраїчної операції, важливу роль відіграє (комутативна) операція тасуючого добутку і її зв'язок з алгеброю Лі. Ряди елементів абстрактної алгебри є формальними, але оскільки над рядами виконуються здебільшого поліноміальні операції, то повернення до звичайних збіжних рядів ітерованих інтегралів не є проблемою. Виключенням є розділ 4, де розглядається алгоритм побудови однорідної апроксимації, який може потребувати нескінченної кількості кроків (с.119-120). Крім цього, в розділі 3 розглядається задача швидкодії і використовується аналітична техніка (теорема Брауера, похідна Фреше тощо).

Найважливіші нові результати, одержані в дисертації, і їх обґрунтування

Основний новий науковий результат дисертації – розвиток підходу рядів і вільних алгебр на випадок нелінійних систем, лінійних за керуванням, з довільним виходом.

Детальніше, у дисертації одержані такі нові результати.

1. Запропонований метод побудови кореневої підалгебри L_1 , яка «відповідає» за однорідну апроксимацію мінімальної реалізації одновимірних рядів ітерованих інтегралів, отримана класифікація всіх таких кореневих підалгебр L_1 .

2. Запропоноване визначення однорідної апроксимації одновимірного ряду ітерованих інтегралів і досліджений взаємозв'язок між кореневою підалгеброю L_1 ряду і кореневою підалгеброю L_1 мінімальної реалізації ряду, отримана класифікація всіх таких пар кореневих підалгебр L_1 .

3. Показано, що якщо виконані деякі додаткові умови, то оптимальний час і оптимальне за швидкодією керування для однорідної апроксимації наближають оптимальний час і оптимальне за швидкодією керування для самої системи.

4. Показано, що для одновимірного однорідного ряду розв'язання задачі швидкодії можна звести до розв'язання задачі оптимізації у нескінченновимірному просторі.

5. Для рядів ітерованих інтегралів з багатовимірними коефіцієнтами, які відповідають випадку виходу довільної розмірності, запропоноване визначення однорідної апроксимації і алгоритм побудови такої апроксимації. Введені два поняття алгебраїчної еквівалентності і описаний взаємозв'язок між ними.

Усі результати, одержані в дисертації, наведені з повними і строгими математичними доведеннями, що підтверджує їх коректність. Одержані результати ілюструються прикладами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження виконане у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри прикладної математики і в рамках НДР «Оптимальне керування, стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи» (№ 0119U002530), що виконувалося на кафедрі прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

Дотримання академічної доброчесності.

Дисертацію було перевірено з застосуванням антиплагіатної системи Strikerplagiarism. Аналіз звіту подібності, а також тексту дисертації і наукових публікацій здобувача свідчить, що робота виконана з дотриманням принципів академічної доброчесності.

Дискусійні положення та зауваження.

По дисертаційній роботі наявні наступні зауваження та запитання:

- На с.36 не зовсім зрозуміло, яким чином формула (1.16) визначає підпро-

стір $\mathcal{P}^k$ при $k = 1$. Краще було б визначити цей підпростір так, як це зроблено в теоремі 2.2.

- С. 49. Лінійна незалежність рядів $F_c(\ell_j)$ гарантує лише лінійну незалежність послідовностей їх коефіцієнтів як елементів простору послідовностей. Тому бажано надати більш детальні обґрунтування, чому існують такі мультиіндекси $I_1, \dots, I_n \in M_0$, що матриця (2.11) є невивірженою.
- С. 53. Як в формулі (2.18) діє відображення $\tilde{c}(\ell)$ на елементи $e^{\ell_1 x_1} \dots e^{\ell_n x_n}$, що є рядами в алгебрі $\mathcal{F}$? Це відображення раніше було визначено лише на лінійних комбінаціях елементів $\mathcal{F}$.
- С. 54. В усіх прикладах потрібно було зробити припущення відносно m .
- С. 64. При формулюванні леми 2.2 необхідно було зазначити, що n —фіксоване натуральне число.
- С. 72. Доцільно було б додати більш детальне обґрунтування, чому скінченна сума завжди є реалізовною.
- С. 76. Як саме можна скористатися лемою 2.1 для обґрунтування існування керованої системи вигляду (2.3)?
- На с. 76 при доведенні леми 3.1 з'являється нерівність $n' \geq n$, проте до цього моменту не є визначеним n . Малось на увазі, що $n = \text{codim}(\mathcal{L}_S)$?
- На с. 78 замість D_S скрізь повинно бути $D_{\hat{S}}$.
- С. 78. Замість $x_1 = u_1$ повинно бути $\dot{x}_1 = u_1$.
- С. 80–81. У випадку $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ твердження теореми 3.2 є прямим наслідком теореми 2.3. То ж навіщо повторювати міркування, які було зроблено при доведенні теореми 2.3?
- С. 68 та 82. При визначенні ряду $F_c(\ell)$ втрачено додавання за k .
- При доведенні теореми 3.3 (с. 93–98) не варто використовувати позначення x для аргумента функції $G_s(x)$, оскільки x — це векторний аргумент полів $X_i(x)$ в системі (3.26). Також при доведенні теореми 3.3 був використаний принцип нерухомої точки, бажано було б в цьому місті надати посилання на теорему Брауера.
- С. 106. В лівій частині рівності на другому рядку пропущено $d\tau_1$.
- С. 116. При доведенні леми 4.1 використовувався n -вимірний ряд $\tilde{S}$, який визначався як мінімальна реалізація вихідного ряду S , хоча в підрозділі 2.4 було визначено ряд $\tilde{S}$ іншим шляхом. Виникає питання, чи це різні ряди, чи вони співпадають.

- В зауваженні 4.2 (с. 121) потрібно уточнити вигляд дуального базису.
- С. 124 (останні два рядки). Навіщо використовувати лему 3.1, сформульовану для одновимірних рядів, для перевірки рівності максимальних лівих ідеалів багатовимірних рядів ?

Ці зауваження і питання жодною мірою не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Загальний висновок.

Вважаю, що дисертація «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем» містить нові наукові результати і відповідає вимогам Постанови Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» і Наказу Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40 «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації». Здобувачка Андреева Дар'я Миколаївна виконала завдання дослідження на високому науковому рівні і заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – Прикладна математика, галузь знань 11 – Математика та статистика.

Офіційний рецензент

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики
Харківського національного університету
імені В.Н. Каразіна

Олексій ПІВЕНЬ

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:33:45 09.06.2025

Назва файлу з підписом: Рецензія.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 47.1 КБ

Назва файлу без підпису: Рецензія.pdf.zip
Розмір файлу без підпису: 48.1 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ПІВЕНЬ ОЛЕКСІЙ ЛЕОНІДОВИЧ

П.І.Б.: ПІВЕНЬ ОЛЕКСІЙ ЛЕОНІДОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2719018178

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 16:30:28 03.06.2025

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000004A3DAC01AFEFEB05

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Підписані файли: Рецензія.pdf

Версія від: 2025.01.15 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

РЕЦЕНЗІЯ

офіційного рецензента, доцента кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, кандидата фізико-математичних наук Бебії Максима Отарійовича на дисертаційну роботу Андреевої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – «Математика та статистика» за спеціальністю 113 – «Прикладна математика»

1. Обґрунтування вибору теми дослідження.

Роботу присвячено дослідженню задачі однорідної апроксимації нелінійних керованих систем. Детальніше, розглядаються властивості нелінійних систем, у праву частину яких керування входять лінійно. Такий клас систем є важливим для застосувань. Варто зазначити, що цей клас є частковим випадком систем з афінною за керуванням правою частиною, для якого детально вивчено задачі керованості, спостережуваності, стабілізованості, лінеаризованості, а також задачі побудови керування у вигляді зворотного зв'язку, оптимального керування тощо. На практиці типовою є ситуація, коли для спостереження доступна не вся траєкторія системи, а лише одна чи кілька функцій від координат системи (вихід).

Один з можливих підходів до дослідження систем, афінних або лінійних за керуванням, полягає в тому, щоб «розв'язати» систему, тобто подати вихід у вигляді ряду, членами якого є кратні інтеграли від керувань з векторними або скалярними коефіцієнтами. У випадку систем, лінійних за керуванням, отримуємо так звані ітеровані інтеграли. Ітеровані інтеграли як функціонали від керувань утворюють асоціативну алгебру, що дозволяє застосувати добре розвинені алгебраїчні методи.

Такий підхід, зокрема, дозволив детально дослідити задачу однорідної апроксимації для афінних і лінійних за керуванням систем. Так, цікаві

результати були отримані Г.М. Скляром, С.Ю. Ігнатович, П.Ю. Бархаєвим. Відзначу, що застосування алгебраїчних методів зводить задачу побудови однорідних апроксимацій переважно до типових задач лінійної алгебри і комбінаторики (знаходження ортопроекції, побудова базису, знаходження всіх тасуючих перестановок тощо), тож для побудови можна використати стандартні пакети прикладних програм.

Але в роботах з цього напрямку розглядався лише частковий випадок «тривіального» виходу, тобто виходу, який співпадає з траєкторією. Отже, природно розглянути узагальнення такого алгебраїчного підходу на загальний випадок довільного виходу. Саме цьому і присвячено дану дисертацію.

2. Структура та зміст дисертаційної роботи.

Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і одного додатку.

Вступ містить необхідну інформацію щодо обґрунтування вибору теми дослідження, щодо мети, завдань, методів, наукової новизни, практичного значення дослідження, зв'язку роботи з науковими програмами, особистого внеску здобувача, апробації і публікацій, а також щодо структури і обсягу дисертації.

Перший розділ містить огляд попередніх результатів і міркування, що приводять до вибору теми дослідження.

У *другому* розділі розглядаються нелінійні керовані системи з одновимірним виходом, що є лінійними за керуванням. Основний метод, що застосовується в дисертації, полягає в тому, щоб замість таких систем розглядати ряди ітерованих інтегралів зі сталими коефіцієнтами. Тому цей розділ починається з детальних пояснень властивостей ітерованих інтегралів, алгебри ітерованих інтегралів і відповідної абстрактної асоціативної алгебри. Далі умови реалізованості рядів з одновимірними коефіцієнтами викладаються з використанням введених понять. Нарешті, досліджується однорідна апроксимація мінімальної реалізації такого ряду (тобто керованої системи мінімальної розмірності, для якої існує вихід, що розкладається у даний ряд). А саме, надається опис алгебраїчного об'єкту, що відповідає за однорідну апроксимацію, – кореневої підалгебри L_1 на мові вихідного ряду.

Третій розділ є центральним в роботі. По-перше, тут вводиться основне поняття дисертації для одновимірних реалізованих рядів, а саме, поняття однорідної апроксимації ряду, і досліджується зв'язок однорідної апроксимації ряду і однорідної апроксимації його мінімальної реалізації. Це дослідження проводиться з використанням відповідних підалгебр L_1 . По-

друге, в цьому розділі отримано результати, які пояснюють значення поняття однорідної апроксимації в сенсі задачі оптимального керування. А саме, доведено, що за певних умов розв'язок задачі швидкодії для однорідної апроксимації ряду наближає розв'язок задачі швидкодії для самого ряду. При цьому, під задачею швидкодії для ряду мається на увазі задача швидкодії для відповідної керованої системи з умовою-рівністю на правому кінці, яка відповідає виходу. Як приклад, наведено задачу швидкодії для двовимірної системи $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 u_2$ із виходом $y = x_1 x_2$, з початковою точкою в початку координат і обмеженням на керування $u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq 1$. Ця система є однорідною, і розв'язок можна знайти явно, якщо скористатися принципом максимуму Понтрягіна. У роботі наведено інше цікаве міркування щодо розв'язання таких задач для однорідних систем, а саме, зведення їх до задачі оптимізації у просторі $L_2([0,1]; \mathbb{R}^2)$.

У четвертому розділі наводиться узагальнення результатів про однорідну апроксимацію на випадок виходу довільної розмірності. Зокрема, пропонується визначення однорідної апроксимації ряду ітерованих інтегралів довільної розмірності, яке узагальнює як одновимірний випадок, так і відоме поняття однорідної апроксимації для випадку «тривіального» виходу, і досліджуються його властивості.

Висновки містять короткий перелік основних результатів, отриманих в дисертації.

Загалом, зміст дисертаційної роботи і отримані у ній результати відповідають спеціальності «Прикладна математика» і темі дисертації «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем».

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Зміст дисертаційної роботи відповідає науковому напрямку кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна (математична теорія керування). Дослідження виконано також в рамках науково-дослідної теми «Оптимальне керування, стійкість і стабілізація динамічних систем складної природи», № держреєстрації 0119U002530, яка виконувалася на кафедрі прикладної математики.

4. Ступінь обґрунтованості наукових положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації.

Усі результати дисертації супроводжуються строгими математичними доведеннями, детальними поясненнями і прикладами. Отримані нові результати належним чином опубліковані у трьох статтях в авторитетних

наукових рецензованих виданнях, а саме, одна стаття – в журналі «Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications», який індексується у Scopus, дві статті – у фаховому науковому журналі «Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія Математика, прикладна математика і механіка». Результати пройшли апробацію на чотирьох міжнародних наукових конференціях, а також доповідалися на засіданні наукового семінару кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна.

5. Основні наукові результати, одержані автором, та їх новизна.

До основних наукових результатів, одержаних автором, відносяться:

- 1) дослідження однорідної апроксимації мінімальної реалізації рядів ітерованих інтегралів з одновимірними коефіцієнтами з використанням техніки вільних алгебр, в тому числі класифікація кореневих підалгебр L_i мінімальних реалізацій,
- 2) спосіб побудови однорідної апроксимації мінімальної реалізації для однорідних рядів, оснований на властивостях відповідного лівого ідеалу,
- 3) визначення однорідної апроксимації одновимірного реалізованого ряду, опис зв'язку між кореневими підалгебрами L_i ряду і його мінімальної реалізації, класифікація таких пар підалгебр L_i ,
- 4) зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією в сенсі швидкодії для одновимірних рядів ітерованих інтегралів, зведення задачі швидкодії для однорідних рядів до задачі оптимізації,
- 5) визначення однорідної апроксимації реалізованого ряду довільної розмірності, спосіб побудови однорідної апроксимації, оснований на властивостях відповідного лівого ідеалу,
- 6) визначення алгебраїчної еквівалентності і слабкої алгебраїчної еквівалентності рядів, опис зв'язку між ними.

6. Практичне значення одержаних результатів.

Одержані результати можуть бути застосовані до аналізу і побудови керувань для конкретних систем, які моделюють різноманітні керовані процеси, зокрема, механічні (керування рухом маніпуляторів, транспортних засобів, дронів тощо).

7. Дотримання принципів академічної доброчесності.

Отримані в роботі результати є новими і отримані здобувачкою самостійно. Дисертацію було перевірено з застосуванням антиплагіатної

програми Strikeplagiarism. Аналіз звіту подібності дає підстави зробити висновок щодо відсутності у тексті роботи ознак порушення академічної доброчесності. Використані в роботі результати супроводжуються належними посиланнями на відповідні джерела.

8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації.

1) Номери формул (2.2), (2.25) та (2.33) не помістилися у відповідні рядки й змістилися вниз, чого можна було б уникнути, розділивши формули на кілька рядків або зменшивши шрифт.

2) В роботі розглядаються два типи обмеження на керування: обмеження на модуль кожного керування (2.2) і обмеження на суму квадратів керувань (3.13). Щодо другого типу, в роботі наявне пояснення: таке обмеження є зручнішим для задачі оптимальної швидкодії. Було б добре ще пояснити, чи можна було з самого початку в якості обмеження на керування вибрати (3.13).

3) Було б цікаво розвинути ідею підрозділу 3.6 щодо зведення однорідної задачі швидкодії до задачі оптимізації. А саме, дослідити системи рівнянь для керувань, які виходять після застосування методу Лагранжа, у загальному випадку, і порівняти з умовами, які можна отримати з застосуванням принципу максимуму Понтрягіна.

4) Наприкінці підрозділу 3.6 (стор. 107-108) запропоновано метод наближеного знаходження оптимального за швидкістю керування для одної однорідної системи: якщо розкласти керування у ряд Фур'є і обмежитися кількома першими доданками, то задача зводиться до скінченновимірної задачі оптимізації. При цьому обмеження на керування можуть порушуватися. По-перше, про це варто було сказати в тексті. По-друге, було б цікаво запропонувати такий наближений метод, для якого наближені керування задовольняли б задане обмеження.

5) Нарешті, зазначу, що однорідні апроксимації систем, афінних за керуванням, в околі точки спокою можуть бути досліджені за допомогою аналогічного алгебраїчного підходу. Як побажання на майбутнє: цікаво дослідити однорідні апроксимації для таких систем з виходом.

Ці зауваження не є принциповими і не знижують високу оцінку дисертаційної роботи.

9. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи.

У дисертаційній роботі Андрєєвої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем» отримано нові цікаві наукові результати щодо властивостей нелінійних керованих

систем. За тематикою і змістом дослідження відповідає спеціальності 113 – «Прикладна математика» галузі знань 11 – «Математика та статистика». Дисертація є завершеною науковою працею, виконана здобувачкою самостійно і на високому науковому рівні та задовольняє вимоги наказу МОН України №40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертацій» і вимоги «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України №44 від 12.01.2022 р., а її автор – здобувачка Андреева Дар'я Миколаївна заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика».

Офіційний рецензент,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна

Максим БЕБІЯ

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:35:37 09.06.2025

Назва файлу з підписом: Рецензія_Бєбія.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 689.2 КБ

Назва файлу без підпису: Рецензія_Бєбія.pdf
Розмір файлу без підпису: 672.0 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: БЕБІЯ МАКСИМ ОТАРІЙОВИЧ

П.І.Б.: БЕБІЯ МАКСИМ ОТАРІЙОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 3180107251

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 03:23:12
09.06.2025

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F0400000034CAC20198A03406

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CAAdES enveloped)

Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAAdES-X Long)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.01.15 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ,
майдан Свободи, 4, м. Харків, 61022

ВІДГУК

офіційного опонента, старшого наукового співробітника Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України, кандидата фізико-математичних наук Халіної Катерини Сергіївни на дисертаційну роботу Андреевої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика

Актуальність теми дослідження. У нелінійній теорії керування досліджуються задачі керованості, побудови допустимого і оптимального керування тощо для нелінійних керованих систем. Такі задачі зазвичай дуже складні, і один із загальновживаних підходів – лінеаризувати систему, тобто замінити вихідну нелінійну систему близькою до неї лінійною системою і використати її для побудови керувань. Але не для всіх класів систем це доцільно, оскільки така лінійна система може бути некерованою, хоча вихідна нелінійна система була керованою. У такому випадку варто замінювати вихідну систему нелінійною, але простішою системою. Один із можливих варіантів – в якості такого класу простіших систем розглянути однорідні системи. Такою є постановка задачі однорідної апроксимації, якій присвячено дану дисертацію.

Задача однорідної апроксимації активно досліджується протягом кількох десятиліть із використанням різноманітних методів. Один із можливих підходів пов'язаний з використанням техніки вільних алгебр; він розвивався в роботах М. Флісса, М. Кавські, Г. Суссмана, Г. М. Складяра, С. Ю. Ігнатович та інших. У даній дисертації такий підхід розвивається для випадку, в якому він ще не був застосований, – для систем, лінійних за керуванням, з урахуванням виходу. Тому тема дослідження є цікавою і актуальною.

Оцінка змісту дисертації в цілому, її завершеності. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовано вибір теми дослідження, визначені мета, об'єкт, предмет, завдання дослідження, наукова новизна одержаних результатів, особистий внесок здобувача.

У розділі 1 наведено відомі раніше результати, які використовуються в подальшому. Зокрема, пояснено, як для нелінійних керованих систем з досліджуваного класу виникають ряди ітерованих інтегралів, які алгебраїчні структури вони породжують, сформульовано теореми про базис Пуанкаре-Біркгофа-Вітта і дуальний базис та теорему про умови реалізованості ряду. Крім того, коротко описано попередні результати Г.М. Скляра і С.Ю. Ігнатівич щодо однорідної апроксимації, які використовуються в подальших розділах, зокрема, які стосуються поняття кореневої підалгебри L_1 і відповідного лівого ідеалу.

Основні результати дисертації, одержані здобувачкою, містяться в розділах 2-4. А саме, послідовно розглядається задача однорідної апроксимації для нелінійних систем, лінійних за керуванням, з виходом.

У розділі 2 розглянуто одновимірні ряди, які представляють вихід системи, досліджено мінімальні реалізації таких рядів з точки зору їх однорідних апроксимацій. Зокрема, одержано опис кореневої підалгебри L_1 мінімальної реалізації і доведено, що будь-яка градуйована підалгебра L_1 скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю L_1 мінімальної реалізації якогось ряду.

У розділі 3 більш детально розглянуто одновимірні реалізовані ряди ітерованих інтегралів. У цьому розділі запропоновано визначення однорідної апроксимації ряду ітерованих інтегралів і досліджено зв'язок однорідної апроксимації ряду і однорідної апроксимації мінімальної реалізації ряду. Так, доведено, що коренева підалгебра L_1 мінімальної реалізації є підмножиною кореневої підалгебри L_1 однорідної апроксимації ряду. Більш того, показано, що будь-які дві вкладені градуйовані підалгебри L_1 скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю L_1 якогось ряду і кореневою підалгеброю L_1 мінімальної реалізації цього ряду, відповідно. Зауважу, що в доведеннях суттєво використовуються властивості вільних асоціативних алгебр і їх базисів.

Крім того, в розділі 3 досліджено зв'язок однорідної апроксимації і апро-

ксимації в сенсі швидкодії для нелінійних систем, лінійних за керуванням, з одновимірним виходом. Зокрема, доведено, що за деяких умов оптимальні час і керування однорідної апроксимації наближають оптимальні час і керування для вихідної системи. Більш того, оскільки вихід є одновимірним, то задача швидкодії може бути зведена до задачі оптимізації; таку задачу теж досліджено в розділі 3.

Розділ 4 присвячений узагальненню одержаних результатів на випадок систем з багатовимірним виходом. Тут запропоновано визначення однорідної апроксимації ряду ітерованих інтегралів довільної розмірності. Зауважу, що, хоча воно узагальнює одновимірний випадок, але це узагальнення не є очевидним. Варто також відзначити, що центральну роль у конструкціях цього розділу відіграє лівий ідеал, ортогональний мінімальній частині формальних функцій від ряду.

Висновки до дисертації окреслюють наукову новизну одержаних результатів.

Оформлення дисертації відповідає вимогам, що висуваються до дисертаційних робіт.

Найбільш важливі нові наукові результати, одержані в дисертації.

Дисертантка одержала такі нові наукові результати:

- уперше запропоновано визначення кореневої підалгебри L_i для мінімальної реалізації одновимірного реалізованого ряду ітерованих інтегралів і описано всі можливі такі кореневі підалгебри L_i ;

- уперше запропоновано визначення однорідної апроксимації одновимірного реалізованого ряду ітерованих інтегралів, запропоновано спосіб її побудови, досліджено зв'язок між корневими підалгебрами L_i ряду і його мінімальної реалізації, описано всі можливі такі кореневі підалгебри L_i ; досліджено зв'язок між однорідною апроксимацією і апроксимацією в сенсі швидкодії для нелінійних керованих систем, лінійних за керуванням, з одновимірним виходом;

- уперше запропоновано визначення однорідної апроксимації реалізованого ряду ітерованих інтегралів довільної розмірності, запропоновано спосіб її побудови; досліджено різні підходи до визначення алгебраїчної еквівалентності рядів ітерованих інтегралів.

Загалом, у дисертації дістав подальшого суттєвого розвитку підхід до дослідження однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем, який оснований на застосуванні методу рядів і вільних алгебр.

Обґрунтованість результатів дисертації. Усі нові результати, наведені в дисертації, супроводжуються детальними і коректними математичними доведеннями та ілюструються прикладами. Основні результати дисертації опубліковано в трьох статтях у фахових наукових періодичних виданнях України, одне з яких входить до міжнародної наукометричної бази Scopus, і представлено в чотирьох тезах міжнародних наукових конференцій.

Дотримання академічної доброчесності. Аналіз дисертаційної роботи і публікацій автора дозволяє стверджувати, що в роботі відсутні елементи академічного плагіату, фальсифікації чи фабрикації.

Дискусійні положення та зауваження. Укажу кілька зауважень до роботи.

1. У дисертації розглянуто ряди ітерованих інтегралів, які представляють вихід системи. Зокрема, для однорідних систем ряди зведено до скінченних сум. Якщо розглянути задачу керованості, тобто задачу побудови керування, для якого вихід у кінцевий момент часу дорівнює заданому значенню, то одержуємо рівняння або систему рівнянь, до яких шукані керування входять під інтегралами. Отже, доречною здається ідея використати структуру ітерованих інтегралів для того, щоб знаходити керування з певних класів, наприклад, кусково-сталі, що розв'язують задачу керованості. Було б добре розглянути таку конструкцію, принаймні для певних класів систем.

2. Задача швидкодії, досліджена в розділі 3, стосується систем з одновимірним виходом. Але аналогічна задача для випадку виходу довільної розмірності не розглядається. Можливо, в загальному випадку дослідження є складнішим, або потрібно накласти додаткові умови на систему та/або на клас оптимальних керувань. На мій погляд, здобувачці в майбутньому варто продовжити дослідження в цьому напрямку і одержати умови апроксимації в сенсі швидкодії для загального випадку.

3. Дисертація містить низку лексичних помилок. Наприклад, у багатьох місцях потрібно використовувати слово «одержати» замість «отримати», «одержаний» замість «отриманий», «за допомогою» замість «за допомоги» тощо. Також у багатьох місцях доречно замінити «всі» на «усі», «вперше» на «упер-

ше» і так далі. На стор. 36, Визначення 1.3, «при будь-якому допустимому керуванні» потрібно замінити на «за будь-якого допустимого керування». Крім того, є пунктуаційні помилки. Наприклад, на стор. 32 (формула між (1.11) і (1.12)) у правій частині рівності після 1 і 0 потрібні коми. Зустрічаються неузгодженості: наприклад, на стор. 39, рядок 13 – «ми розглядаємо систему, що задовольняють». Також присутня друкарська помилка: на стор. 36, рядок 9 – замість « k -ті компоненти» має бути «різниця k -тих компонент».

Загальне враження від дисертаційної роботи позитивне, а вказані зауваження не впливають на її позитивну оцінку і є скоріш побажаннями на майбутнє.

Загальні висновки. Дисертаційна робота Андреевої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем» є завершеним науковим дослідженням, яке за актуальністю, змістом, науковою новизною і повнотою викладення її результатів у наукових публікаціях повністю відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44) та Вимогам до оформлення дисертацій (наказ Міністерства освіти і науки України від 12.01.2017 р. № 40).

Виходячи з вищезазначеного, вважаю, що здобувачка Андреева Дар'я Миколаївна заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Офіційний опонент

кандидат фізико-математичних наук,

старший науковий співробітник

Фізико-технічного інституту низьких

температур ім. Б.І. Веркіна

Національної академії наук України

Катерина ХАЛІНА

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:35:04 09.06.2025

Назва файлу з підписом: Відгук.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 70.8 КБ

Назва файлу без підпису: Відгук.pdf
Розмір файлу без підпису: 67.4 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Халіна Катерина Сергіївна

П.І.Б.: Халіна Катерина Сергіївна

Країна: Україна

РНОКПП: 3001106881

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для даних від Надавача): 14:12:49 04.06.2025

Сертифікат виданий: КНЕДП ДПС

Серійний номер: 3FAA9288358EC003040000008CA93B006810E400

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в одному файлі (CADES enveloped)

Формат підпису: Базовий (CADES-BES)

Сертифікат: Кваліфікований

Версія від: 2025.01.15 13:00

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Відгук

офіційного опонента, завідувача відділу прикладної механіки ІПММ НАН України, доктора фіз.-мат. наук, професора Зуєва Олександра Леонідовича на дисертаційну роботу Андрєєвої Дар'ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 113 Прикладна математика

Дисертаційну роботу Дар'ї Миколаївни Андрєєвої присвячено **актуальній** проблемі математичної теорії керування – побудові однорідних апроксимацій для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, що є лінійними за керуванням. Дисертація складається з вступної частини, чотирьох змістовних розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У першому розділі проведено глибокий огляд літератури та обґрунтовано вибір теми дослідження. Авторка дисертації детально розглянула поняття рядів ітерованих інтегралів і формальні алгебраїчні структури, що лежать в їх основі, а також описала задачі реалізованості рядів і побудови однорідної апроксимації. Після літературного огляду чітко сформульовано задачу побудови однорідних апроксимацій для систем з одновимірним і багатовимірним виходами. **Актуальність** обраного напрямку досліджень зумовлена тим, що розглянутий клас нелінійних систем із лінійною щодо керування структурою описує кінематичні моделі механічних систем із неголономними в'язями, теорію яких було розвинуто у роботах Г. Герца, С.О. Чаплигіна, Ю.І. Неймарка, М.О. Фуфаєва, А.М. Bloch, R. Murray та ін. Ці моделі описують рух колісних систем, мобільних роботів, підводних апаратів тощо. Нетривіальні геометричні властивості задач керування неголономними системами привертали увагу провідних фахівців світового рівня у галузі математичної теорії керування та субріманової геометрії, серед яких варто

відзначити А. Agrachev, U. Boscain, R.W. Brockett, M. Fliess, J.-P. Gauthier, B. Jakubczyk, F. Jean, M. Kowski, R. Montgomery, H.J. Sussmann. Текст дисертації свідчить про професійне оволодіння здобувачкою **методологією наукової діяльності**, а отримані результати становлять суттєвий внесок у розвиток алгебраїчних методів аналізу керованих систем у Харківській науковій школи з математичної теорії керування В.І. Коробова, Г.М. Скляра, С.Ю. Ігнатович.

Розділ 2 присвячено системам з одновимірним виходом, мінімальним реалізаціям рядів ітерованих інтегралів та властивостям однорідних апроксимацій. До основних результатів цього розділу належить доведення критерію реалізованості ряду ітерованих інтегралів (теорема 2.1). Також введено поняття мінімальної реалізації ряду і кореневої підалгебри L_1 та доведено теорему 2.2 про кореневу підалгебру L_1 реалізуючої системи у термінах лише вихідного ряду. Авторкою доведено класифікаційну теорему 2.3 про те, що будь-яка градуїована підалгебра L_1 скінченної корозмірності є кореневою підалгеброю L_1 для певного одновимірного ряду.

У розділі 3 однорідні апроксимації одновимірних рядів ітерованих інтегралів застосовано до задачі оптимальної швидкодії. У ході цього дослідження запропоновано класифікацію корневих підалгебр L_1 і доведено теорему 3.2 про зв'язок між корневими підалгебрами L_1 ряду та його апроксимації. Результати цього підходу щодо задачі найшвидшого досягнення термінальної множини, яка визначається поверхнею рівня одновимірної функції виходу, сформульовано у лемі 3.2. Цю лему вдало проілюстровано задачею оптимального керування для модельної двовимірної системи (площини Грушина) у підрозділі 3.4. Варто окремо відзначити теорему 3.3 про асимптотичну еквівалентність оптимальних часів для мінімальної реалізації та однорідної апроксимації, а також теорему 3.4 про інтегральну близькість відповідних мінімізуючих послідовностей. Результати підрозділу 3.6 є розвитком прямих методів варіаційного числення для розв'язання задачі оптимальної швидкодії у сенсі максимізації функціонала типу (3.47) на одиничній кулі у просторі L^2 .

Клас керованих систем із багатовимірним виходом досліджено у розділі 4. Побудова однорідних апроксимацій для таких систем є значно складнішим завданням і вимагає формального визначення мінімальної частини ряду з векторними коефіцієнтами. Наведено мотивувальний приклад 4.1, який ілюструє різні властивості мінімальної частини ряду та однорідної апроксимації у випадку векторного виходу. У підрозділі 4.1 досліджено множину мінімальних частин компонент ряду та запропоновано підхід до

побудови її тасуючого базису. На основі цього підходу в підрозділі 4.2 запропоновано означення однорідної апроксимації ряду з векторними коефіцієнтами, а також введено поняття алгебраїчної еквівалентності та слабкої алгебраїчної еквівалентності рядів. Критерій алгебраїчної еквівалентності сформульовано у теоремі 4.1. Також встановлено, що з алгебраїчної еквівалентності рядів завжди випливає їх слабка алгебраїчна еквівалентність (наслідок 4.1), але не навпаки.

Отримані результати є **новими** і становлять завершену теоретичну концепцію побудови та класифікації однорідних апроксимацій для широкого класу нелінійних керованих систем з виходом. Дисертація містить низку конструктивних теорем і алгоритмів, зокрема щодо класифікації кореневих підалгебр L_i , побудови однорідних апроксимацій багатовимірних рядів, аналізу задач оптимального керування у сенсі швидкодії. Аналіз тексту дисертації та супровідних публікацій засвідчує **наукову обґрунтованість і достовірність** отриманих результатів, що підтверджується строгими математичними доведеннями всіх основних тверджень. Особливу увагу приділено застосуванню рядів Чена–Флісса як фундаментального інструменту в аналізі нелінійних динамічних систем у теорії керування. Висновки, викладені в дисертації, акцентують **наукову новизну** в підході до побудови однорідних апроксимацій та реалізації керованих систем на основі формальних рядів, що значно розширює методологію сучасної математичної теорії керування.

Високий **науковий рівень** роботи підтверджують **публікації** дисертантки, серед яких є одна стаття у журналі, що індексується в наукометричній базі Scopus, дві статті в наукових фахових виданнях України та чотири роботи в матеріалах міжнародних конференцій. Анотація в повному обсязі відображає основні положення дисертаційної роботи. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем особисто. Порухень академічної доброчесності під час аналізу дисертації не виявлено.

Офіційний опонент має такі **зауваження**:

1. Запропоновану в дисертації методику побудови однорідних наближень керованих систем варто було б проілюструвати на прикладі неголономної механічної системи. Відомо, що метод побудови однорідних апроксимацій, описаний у роботі A. Bellaïche, F. Jean, J.-J. Risler [13], виявився придатним для кінематичних моделей колісних екіпажів. Зокрема, цим методом було побудовано зважені однорідні апроксимації моделі керованого візка з двома причепами для довільних

параметрів довжини у статті M. Vendittelli, J. Laumond, G. Oriolo, “Nilpotent approximation of nonholonomic systems with singularities: A case study”, IFAC Proceedings Volumes, vol. 31, no. 17, pp. 751–756, 1998. На думку опонента, узагальнення таких кінематичних моделей є природною сферою застосування методів, розроблених у дисертаційній роботі Д. М. Андреевої, а результати у цьому напрямку мали б значну цінність для перспективних використань у галузях механіки та робототехніки.

2. На с. 88 замість формулювання «для (майже) довільного t » доречніше вживати «для майже всіх t ».
3. На с. 137 у бібліографічному посиланні [41] виявлено друкарську помилку: “jff-hooked”.

Вказані зауваження не впливають на високу позитивну оцінку дисертаційної роботи загалом.

Висновок. Дисертаційна робота Андреевої Дар’ї Миколаївни «Побудова та аналіз однорідних апроксимацій нелінійних керованих систем» є цілісною, самостійною, завершеною науковою працею, яка повністю відповідає вимогам до дисертацій, затвердженим наказом МОН України від 12.01.2017 № 40 (зі змінами та доповненнями, чинними на поточну дату).

Дисертація може бути представлена до захисту, а її авторка, Андреева Дар’я Миколаївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – «Прикладна математика» у галузі знань 11 – «Математика та статистика».

Зав. відділу прикладної механіки

Інституту прикладної математики і механіки НАН України,

доктор фіз.-мат. наук, професор,

член-кореспондент НАН України

Олександр ЗУЄВ

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 15:32:41 09.06.2025

Назва файлу з підписом: Vidguk_Andreieva.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 285.8 КБ

Назва файлу без підпису: Vidguk_Andreieva.pdf.zip
Розмір файлу без підпису: 285.8 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ЗУЄВ ОЛЕКСАНДР ЛЕОНІДОВИЧ

П.І.Б.: ЗУЄВ ОЛЕКСАНДР ЛЕОНІДОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2753400579

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 11:54:34 08.06.2025

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000D5C9380198472C06

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ 4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Підписані файли: Vidguk_Andreieva.pdf

Версія від: 2025.01.15 13:00