

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. ректора Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна,
заступник Голови приймальної комісії

_____ Олександр ГОЛОВКО

ПРОГРАМА
фахового іспиту з математики
для вступників на навчання
для здобуття ступеня магістра за спеціальністю
113 «Прикладна математика»
освітні програми:
«Прикладна математика» (освітньо-професійна)
«Прикладна математика» (освітньо-наукова)

Харків 2024



Математичний аналіз

1. Числові послідовності.

1.1. Означення границі числової послідовності. Приклади послідовностей:

- (а) таких, що мають скінченну границю;
- (б) таких, що мають нескінченну границю;
- (в) таких, що не мають границі (ані скінченної, ані нескінченної);
- (г) нескінченно малих;
- (д) нескінченно великих.

1.2. Властивості границь послідовностей:

- (а) границя суми, добутку, частки двох послідовностей;
- (б) єдиність границі послідовності;
- (в) граничний перехід у нерівностях (для послідовностей);
- (г) теорема про три послідовності.

2. Числові функції.

2.1. Означення границі числової функції в точці. Приклади функцій:

- (а) таких, що мають скінченну границю в деякій точці;
- (б) таких, що мають нескінченну границю в деякій точці;
- (в) таких, що не мають границі в деякій точці (ані скінченної, ані нескінченної);
- (г) нескінченно малих у деякій точці;
- (д) нескінченно великих у деякій точці.

2.2. Властивості границь функцій:

- (а) границя суми, добутку, частки двох функцій;
- (б) невизначеності та приклади застосування деяких методів їх розкриття: правило Лопіталя, застосування формули Тейлора.

3. Неперервні функції.

3.1. Означення числової функції, що є неперервною в точці. Приклади функцій:

- (а) неперервних у деякій точці;
- (б) розривних у деякій точці.

3.2. Властивості неперервних функцій:

- (а) теорема про збереження знаку неперервної функції;
- (б) теорема Больцано-Коші про те, що функція, що є неперервною на відріжку та приймає на його кінцях значення різних знаків, у деякій точці відріжку дорівнює нулю;
- (в) теорема Вейерштрасса про існування мінімального й максимального значень функції, що є неперервною на відріжку.

4. Похідні.

4.1. Означення похідної числової функції. Приклади функцій:

- (а) таких, що мають похідну в деякій точці;
- (б) таких, що не мають похідної в деякій точці.

4.2. Знаходження похідних:

- (а) похідна суми, добутку, частки двох функцій;
- (б) похідна композиції двох функцій;

(в) деякі «табличні» похідні: $(x^a)'$, $(a^x)'$, $(\log_a x)'$, $(\sin x)'$, $(\cos x)'$, $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(\operatorname{arctg} x)'$.

4.3. Геометричний зміст похідної. Теорема Ферма про рівність нулю похідної в точці екстремуму функції. Застосування похідних для дослідження функцій.

4.4. Означення частинної похідної функції кількох змінних. Застосування частинних похідних для знаходження екстремумів функцій кількох змінних.

5. Інтеграли.

5.1. Означення первісної (невизначеного інтеграла) числової функції. Деякі «табличні» первісні: $\int x^a dx$, $\int \frac{1}{x} dx$, $\int a^x dx$, $\int \sin x dx$, $\int \cos x dx$, $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$.

5.2. Деякі методи інтегрування:

(а) заміна змінної та зведення до табличних інтегралів;

(б) інтегрування частинами.

5.3. Означення (визначеного) інтеграла Рімана числової функції. Геометричний зміст інтеграла.

5.4. Формула Ньютона-Лейбніца.

6. Ряди.

6.1. Означення збіжного числового ряду. Приклади числових рядів:

(а) збіжних;

(б) розбіжних.

6.2. Збіжність рядів $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Ознаки порівняння для числових рядів.

6.3. Означення степеневого ряду (від однієї змінної).

6.4. Означення ряду Тейлора числової функції. Ряди Маклорена деяких елементарних функцій: e^x , $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$.

Лінійна алгебра

1. Системи лінійних рівнянь.

1.1. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні та несумісні системи.

1.2. Знаходження розв'язку:

(а) елементарні перетворення систем, метод Гауса;

(б) зв'язок між розв'язками неоднорідної та відповідної однорідної системи, загальний вигляд розв'язку однорідної і неоднорідної систем лінійних рівнянь.

2. Лінійні простори.

2.1. Лінійно незалежні та лінійно залежні системи векторів:

(а) означення й приклади лінійно незалежних і лінійно залежних систем векторів;

(б) означення базису і вимірності лінійного простору.

2.2. Лінійна оболонка множини векторів. Знаходження вимірності лінійної оболонки заданих векторів.

3. Матриці, визначники та лінійні оператори.

3.1. Додавання та множення матриць.

3.2. Обчислення визначника квадратної матриці (довільним методом).

- 3.3. Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці (довільним методом).
- 3.4. Матриця лінійного оператора у заданому базисі.
- 3.5. Власні числа (значення) та власні вектори лінійного оператора:
- (а) означення власного числа та власного вектора лінійного оператора;
 - (б) характеристичний многочлен матриці і знаходження власних чисел матриці (лінійного оператора, який у деякому базисі заданий даною матрицею) за допомогою характеристичного многочлена.

4. Квадратичні форми.

- 4.1. Приведення дійсної квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.
- 4.2. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сільвестра.

Диференціальні рівняння

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

- 1.1. Постановка задачі Коші.
- 1.2. Розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку:
- (а) рівнянь з відокремлюваними змінними;
 - (б) лінійних неоднорідних рівнянь.

2. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

- 2.1. Постановка задачі Коші.
- 2.2. Однорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
 - (б) характеристичне рівняння та його застосування для знаходження загального розв'язку.
- 2.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
 - (б) знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння (довільним методом).

3. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

- 3.1. Постановка задачі Коші. Однорідні й неоднорідні системи.
- 3.2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
 - (б) знаходження загального розв'язку (довільним методом);
 - (в) асимптотична стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку, критерій асимптотичної стійкості.

Аналітична геометрія

1. Прямі на площині. Прямі та площини у просторі.

- 1.1. Параметричний та неявний способи завдання прямої на площині. Взаємне розташування прямих на площині.
- 1.2. Параметричний та неявний способи завдання площини в просторі.

- 1.3. Параметричний та неявний способи завдання прямої у просторі. Взаємне розташування прямих і площин у просторі.
- 1.4. Знаходження рівняння перпендикуляра, що опущений з даної точки на дану пряму на площині та в просторі.
- 1.5. Знаходження відстані від точки до прямої на площині та в просторі і відстані між двома прямими в просторі.

2. Коло на площині. Сфера у просторі.

- 2.1. Рівняння кола на площині.
- 2.2. Рівняння сфери у просторі.
- 2.3. Знаходження відстані від точки до кола на площині.
- 2.4. Знаходження дотичної до заданого кола, яка проходить через задану точку.
- 2.5. Знаходження відстані від точки до сфери у просторі.

Список рекомендованої літератури

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1-2. – К.: Либідь, 1993, 1994.
2. Заболоцький М.В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз. — К.: Знання, 2008.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра. – Львів: ЛНУ, 2008.
6. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х. : Основа, 1993.

Структура екзаменаційного білету

Екзаменаційний білет для письмової роботи містить 8 завдань, які охоплюють різні розділи програми екзамену. Зразок екзаменаційного білету наведений нижче.

1. Розв'яжіть диференціальне рівняння $\dot{x} + \frac{1}{t}x = 0$.

2. Знайдіть загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 1. \end{cases}$$

3. Дослідіть функцію $f(x) = x - e^x$ за допомогою першої і другої похідної та побудуйте її графік.

4. Знайдіть

$$\int_0^{\pi/4} x \cos 2x \, dx.$$

5. Знайдіть власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Приведіть квадратичну форму $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ до канонічного вигляду і з'ясуйте, чи є ця форма додатно визначеною.

7. Знайдіть рівняння перпендикуляра до прямої $x - 4y - 7 = 0$, який проходить через центр кола $x^2 + x + y^2 = 15$.

8. З'ясуйте, при яких значеннях параметра p через пряму $\frac{x-1}{p} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ можна провести площину, паралельну площині $4x + 3y - z + 3 = 0$.

Критерії оцінювання

Повне та правильне розв'язання задач 1-7 оцінюється у 24 бали, а задачі 8 – у 32 бали. Якщо для розв'язання задачі необхідно знайти деяку величину або використати якийсь факт, абітурієнт повинен навести не лише відповідь, але й обґрунтувати цю відповідь, а саме, навести посилання на відповідні формули та теореми. Часткова відповідь оцінюється у залежності від її змістовності.

Оцінка вище 85% від максимальної виставляється в разі правильного в цілому розв'язання задачі з незначними помилками.

Оцінка 70-85% від максимальної виставляється в разі правильного шляху розв'язання задачі при наявності більш суттєвих помилок, які впливають на кінцевий результат.

Оцінка 50-70% від максимальної виставляється за часткове розв'язання задачі або в разі наявності серйозних помилок.

Оцінка 0-49% від максимальної виставляється у разі відсутності розв'язку або наявності просунення, що є несуттєвим для розв'язання задачі.

Максимальна сума балів за виконання всіх завдань дорівнює 200 балів.

Мінімальна кількість балів для допуску до участі у конкурсному відборі дорівнює 100 балів.

Голова атестаційної комісії

Світлана ІГНАТОВИЧ

Засідання приймальної комісії від «15» квітня 2024 р., протокол № 2.

Відповідальний секретар приймальної комісії

Сергій ЄЛЬЦОВ