

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

В.о. ректора Харківського національного  
університету імені В. Н. Каразіна,  
заступник Голови приймальної комісії

\_\_\_\_\_ Олександр ГОЛОВКО

**ПРОГРАМА**  
фахового іспиту з математики  
для вступників на навчання  
для здобуття ступеня магістра за спеціальністю  
111 «Математика»  
освітні програми:  
«Математика» (освітньо-професійна),  
«Математика» (освітньо-наукова)  
«Фундаментальна математика (Pure Mathematics)» (освітньо-наукова)

**Харків 2024**

ДОКУМЕНТ СЕД АСКОД

Сертифікат 7AFDA0070000000000000000000000000000001

Підписувач ГОЛОВКО ОЛЕКСАНДР МИКОЛАЙОВИЧ

Дійсний з 01.09.2022 13:31:33 по 31.08.2024 23:59:59

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна



1101-10 від 16.05.2024



# Математичний аналіз

## 1. Числові послідовності.

1.1. Означення границі числової послідовності. Приклади послідовностей:

- (а) таких, що мають скінченну границю;
- (б) таких, що мають нескінченну границю;
- (в) таких, що не мають границі (ані скінченної, ані нескінченної);
- (г) нескінченно малих;
- (д) нескінченно великих.

1.2. Властивості границь послідовностей:

- (а) границя суми, добутку, частки двох послідовностей;
- (б) єдиність границі послідовності;
- (в) граничний перехід у нерівностях (для послідовностей);
- (г) теорема про три послідовності.

## 2. Числові функції.

2.1. Означення границі числової функції в точці. Приклади функцій:

- (а) таких, що мають скінченну границю в деякій точці;
- (б) таких, що мають нескінченну границю в деякій точці;
- (в) таких, що не мають границі в деякій точці (ані скінченної, ані нескінченної);
- (г) нескінченно малих у деякій точці;
- (д) нескінченно великих у деякій точці.

2.2. Властивості границь функцій:

- (а) границя суми, добутку, частки двох функцій;
- (б) невизначеності та приклади застосування деяких методів їх розкриття: правило Лопіталя, застосування формули Тейлора.

## 3. Неперервні функції.

3.1. Означення числової функції, що є неперервною в точці. Приклади функцій:

- (а) неперервних у деякій точці;
- (б) розривних у деякій точці.

3.2. Властивості неперервних функцій:

- (а) теорема про збереження знаку неперервної функції;
- (б) теорема Больцано-Коші про те, що функція, що є неперервною на відріжку та приймає на його кінцях значення різних знаків, у деякій точці відріжку дорівнює нулю;
- (в) теорема Вейерштрасса про існування мінімального й максимального значень функції, що є неперервною на відріжку.

## 4. Похідні.

4.1. Означення похідної числової функції. Приклади функцій:

- (а) таких, що мають похідну в деякій точці;
- (б) таких, що не мають похідної в деякій точці.

4.2. Знаходження похідних:

- (а) похідна суми, добутку, частки двох функцій;
- (б) похідна композиції двох функцій;

(в) деякі «табличні» похідні:  $(x^a)'$ ,  $(a^x)'$ ,  $(\log_a x)'$ ,  $(\sin x)'$ ,  $(\cos x)'$ ,  $(\arcsin x)'$ ,  $(\arccos x)'$ ,  $(\operatorname{arctg} x)'$ .

4.3. Геометричний зміст похідної. Теорема Ферма про рівність нулю похідної в точці екстремуму функції. Застосування похідних для дослідження функцій.

4.4. Означення частинної похідної функції кількох змінних. Застосування частинних похідних для знаходження екстремумів функцій кількох змінних.

## 5. Інтеграли.

5.1. Означення первісної (невизначеного інтеграла) числової функції. Деякі «табличні» первісні:  $\int x^a dx$ ,  $\int \frac{1}{x} dx$ ,  $\int a^x dx$ ,  $\int \sin x dx$ ,  $\int \cos x dx$ ,  $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ .

5.2. Деякі методи інтегрування:

(а) заміна змінної та зведення до табличних інтегралів;

(б) інтегрування частинами.

5.3. Означення (визначеного) інтеграла Рімана числової функції. Геометричний зміст інтеграла.

5.4. Формула Ньютона-Лейбніца.

## 6. Ряди.

6.1. Означення збіжного числового ряду. Приклади числових рядів:

(а) збіжних;

(б) розбіжних.

6.2. Збіжність рядів  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ . Ознаки порівняння для числових рядів.

6.3. Означення степеневого ряду (від однієї змінної).

6.4. Означення ряду Тейлора числової функції. Ряди Маклорена деяких елементарних функцій:  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $(1+x)^a$ .

## **Лінійна алгебра**

### 1. Системи лінійних рівнянь.

1.1. Розв'язок системи лінійних рівнянь. Сумісні та несумісні системи.

1.2. Знаходження розв'язку:

(а) елементарні перетворення систем, метод Гауса;

(б) зв'язок між розв'язками неоднорідної та відповідної однорідної системи, загальний вигляд розв'язку однорідної і неоднорідної систем лінійних рівнянь.

### 2. Лінійні простори.

2.1. Лінійно незалежні та лінійно залежні системи векторів:

(а) означення й приклади лінійно незалежних і лінійно залежних систем векторів;

(б) означення базису і вимірності лінійного простору.

2.2. Лінійна оболонка множини векторів. Знаходження вимірності лінійної оболонки заданих векторів.

### 3. Матриці, визначники та лінійні оператори.

3.1. Додавання та множення матриць.

3.2. Обчислення визначника квадратної матриці (довільним методом).

- 3.3. Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці (довільним методом).
- 3.4. Матриця лінійного оператора у заданому базисі.
- 3.5. Власні числа (значення) та власні вектори лінійного оператора:
- (а) означення власного числа та власного вектора лінійного оператора;
  - (б) характеристичний многочлен матриці і знаходження власних чисел матриці (лінійного оператора, який у деякому базисі заданий даною матрицею) за допомогою характеристичного многочлена.

#### 4. Квадратичні форми.

- 4.1. Приведення дійсної квадратичної форми до канонічного вигляду методом Лагранжа.
- 4.2. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сільвестра.

### **Диференціальні рівняння**

#### 1. Диференціальні рівняння першого порядку.

- 1.1. Постановка задачі Коші.
- 1.2. Розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку:
- (а) рівнянь з відокремлюваними змінними;
  - (б) лінійних неоднорідних рівнянь.

#### 2. Лінійні диференціальні рівняння $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

- 2.1. Постановка задачі Коші.
- 2.2. Однорідні лінійні диференціальні рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
  - (б) характеристичне рівняння та його застосування для знаходження загального розв'язку.
- 2.3. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
  - (б) знаходження часткового розв'язку неоднорідного рівняння (довільним методом).

#### 3. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

- 3.1. Постановка задачі Коші. Однорідні й неоднорідні системи.
- 3.2. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:
- (а) теорема про загальний розв'язок;
  - (б) знаходження загального розв'язку (довільним методом);
  - (в) асимптотична стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку, критерій асимптотичної стійкості.

### **Аналітична геометрія**

#### 1. Прямі на площині. Прямі та площини у просторі.

- 1.1. Параметричний та неявний способи завдання прямої на площині. Взаємне розташування прямих на площині.
- 1.2. Параметричний та неявний способи завдання площини в просторі.

- 1.3. Параметричний та неявний способи завдання прямої у просторі. Взаємне розташування прямих і площин у просторі.
- 1.4. Знаходження рівняння перпендикуляра, що опущений з даної точки на дану пряму на площині та в просторі.
- 1.5. Знаходження відстані від точки до прямої на площині та в просторі і відстані між двома прямими в просторі.

## 2. Коло на площині. Сфера у просторі.

- 2.1. Рівняння кола на площині.
- 2.2. Рівняння сфери у просторі.
- 2.3. Знаходження відстані від точки до кола на площині.
- 2.4. Знаходження дотичної до заданого кола, яка проходить через задану точку.
- 2.5. Знаходження відстані від точки до сфери у просторі.

## **Список рекомендованої літератури**

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Частина 1-2. – К.: Либідь, 1993, 1994.
2. Заболоцький М.В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз. — К.: Знання, 2008.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994.
5. Андрійчук В. І., Забавський Б. В. Лінійна алгебра. – Львів: ЛНУ, 2008.
6. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х. : Основа, 1993.

## **Структура екзаменаційного білету**

Екзаменаційний білет для письмової роботи містить 8 завдань, які охоплюють різні розділи програми екзамену. Зразок екзаменаційного білету наведений нижче.

1. Розв'яжіть диференціальне рівняння  $\dot{x} + \frac{1}{t}x = 0$ .

2. Знайдіть загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 1. \end{cases}$$

3. Дослідіть функцію  $f(x) = x - e^x$  за допомогою першої і другої похідної та побудуйте її графік.

4. Знайдіть

$$\int_0^{\pi/4} x \cos 2x \, dx.$$

5. Знайдіть власні значення і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Приведіть квадратичну форму  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$  до канонічного вигляду і з'ясуйте, чи є ця форма додатно визначеною.

7. Знайдіть рівняння перпендикуляра до прямої  $x - 4y - 7 = 0$ , який проходить через центр кола  $x^2 + x + y^2 = 15$ .

8. З'ясуйте, при яких значеннях параметра  $p$  через пряму  $\frac{x-1}{p} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$  можна провести площину, паралельну площині  $4x + 3y - z + 3 = 0$ .

### Критерії оцінювання

Повне та правильне розв'язання задач 1-7 оцінюється у 24 бали, а задачі 8 – у 32 бали. Якщо для розв'язання задачі необхідно знайти деяку величину або використати якийсь факт, абітурієнт повинен навести не лише відповідь, але й обґрунтувати цю відповідь, а саме, навести посилання на відповідні формули та теореми. Часткова відповідь оцінюється у залежності від її змістовності.

Оцінка вище 85% від максимальної виставляється в разі правильного в цілому розв'язання задачі з незначними помилками.

Оцінка 70-85% від максимальної виставляється в разі правильного шляху розв'язання задачі при наявності більш суттєвих помилок, які впливають на кінцевий результат.

Оцінка 50-70% від максимальної виставляється за часткове розв'язання задачі або в разі наявності серйозних помилок.

Оцінка 0-49% від максимальної виставляється у разі відсутності розв'язку або наявності просунення, що є несуттєвим для розв'язання задачі.

Максимальна сума балів за виконання всіх завдань дорівнює 200 балів.

Мінімальна кількість балів для допуску до участі у конкурсному відборі дорівнює 100 балів.

Голова атестаційної комісії

Світлана ІГНАТОВИЧ

Засідання приймальної комісії від «15» квітня 2024 р., протокол № 2.

Відповідальний секретар приймальної комісії

Сергій ЄЛЬЦОВ