

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

РЕЦЕНЗІЯ

офіційного рецензента, завідувача кафедри, професора кафедри прикладної математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння і математична фізика) Коробова Валерія Івановича на дисертаційну роботу Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

1. Актуальність теми дослідження

Дисертаційна робота присвячена вивченню різницевих і диференціальних рівнянь над кільцями. Основні результати дисертації – умови існування і єдиності розв'язку таких рівнянь над деякими кільцями і опис способів пошуку таких розв'язків.

Основна ідея, що використовується в роботі: розглянути ряд, який буде розв'язком рівняння за умови збіжності, і ввести топологію, за якої цей ряд є збіжним. Причому в тих випадках, які найбільше вивчаються в дисертації і які викликають найбільший інтерес, ряд ніколи не є збіжним відносно звичайної метрики. Тому використовується неархімедова метрика, на кшталт p -адичної для кільця цілих чисел. Це породжує нові застосування відомих методів для розв'язування диференціальних рівнянь, тим самим розширює область їх застосовності.

Саме тому я вважаю результати, отримані в дисертації, важливими і цікавими.

2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

В дисертації вивчаються лінійні диференціальні і неявні лінійні різницеві рівняння над кільцями. Стиль написання роботи науковий. Зауважень до структури, мови та стилю дисертації немає.

У *вступі* обґрунтований вибір теми, сформульовані мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, вказані наукова новизна та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача.

У *першому розділі* сформульовано задачу і наведені відомі результати, які потім використовуються для доведень.

У *другому розділі* розглянуто лінійне диференціальне рівняння над комутативним кільцем. Вводяться деякі ряди, суми яких за умови збіжності будуть коефіцієнтами розв'язку такого рівняння. Взагалі кажучи, такі ряди не є збіжними, і в розділі доводиться, що єдиний випадок, коли вони будуть збіжними, – це випадок поліноміальної неоднорідності. Для загального випадку вводиться спеціальна неархімедова топологія, в якій розглянуті ряди стають збіжними. Доведено, що тоді суми таких рядів будуть коефіцієнтами розв'язку рівняння. Ці результати уточнені для випадку цілих чисел, для якого розглянуто p -адичну топологію і збіжність за нею. Також в цьому розділі описана конструкція фундаментального розв'язку оператора, яка дозволяє знайти розв'язок у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку, що залежить тільки від лівої частини, з неоднорідністю.

У *третьому розділі* розглянуто різницеве рівняння над комутативним кільцем. Структура розділу дещо повторює попередній розділ: перша частина присвячена алгебраїчній конструкції формального розв'язку, який, за деяких умов, відповідає розв'язку рівняння, потім розглядається фінітний випадок, для якого ряди збігаються в алгебраїчному сенсі. В цій частині доведені результати, подібні до результатів попереднього розділу. Випадок нефінітної неоднорідно-

сті розглянуто для ширшого класу кілець, ніж в попередньому розділі, а також приділено більше уваги випадку кільця поліномів. Для рівняння першого порядку над кільцем поліномів доведені деякі результати, що дозволяють знаходити поліноміальні розв'язки конкретних рівнянь.

Четвертий розділ присвячено вивченню деякого операторного рівняння першого порядку, яке узагальнює розглянуті раніше диференціальні і різнице-ві рівняння у випадку кільця цілих чисел. Для цього операторного рівняння сформульовано критерій існування і єдиності розв'язку.

У **п'ятому розділі** вивчаються нескінченні лінійні системи, що відповідають диференціальним і різнице-вим рівнянням з попередніх розділів. Для цих систем отримується розв'язок за допомогою нескінченного аналога правила Крамера і показано, що це і є єдиний розв'язок таких рівнянь, що належить кільцю.

Висновки розкривають поставлені задачі та описують основні результати дисертаційної роботи.

Дисертація є завершеною науковою працею. Дисертаційна робота відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

3. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Дисертаційну роботу виконано в рамках проекту Національного фонду досліджень України “Підтримка досліджень провідних та молодих вчених” “Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок геометрії, алгебри і топології” (реєстраційний номер 2020.02/0096).

4. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Наукові положення і висновки повністю обґрунтовані. Доведення результа-

тів повні і прозорі. Використані методи теорії диференціальних рівнянь, комутативної алгебри, загальної топології, p -адичного аналізу та лінійної алгебри.

5. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

Авторка отримала такі нові наукові результати:

- достатні умови для існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального та різницевого лінійного рівнянь над кільцями;
- ці умови уточнені для кільця цілих чисел, кільця поліномів, для випадку квазіполіноміальної неоднорідності для різницевого рівняння, для різницевого рівняння першого порядку над кільцем поліномів а також для різницевого і диференціального рівнянь над кільцем цілих чисел;
- введено спеціальне поняття згортки і описано конструкцію фундаментального розв'язку диференціального оператора для розглянутого диференціального рівняння, що є аналогом подібної конструкції в звичайній теорії диференціальних рівнянь.
- отримані умови існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m -того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим квазінормуванням;
- знайдені умови існування та єдиності розв'язку лінійного операторного рівняння першого порядку в кільці цілих чисел. Ці умови уточнені для часткових випадків, тобто різницевого і диференціального рівнянь.
- всі розв'язані рівняння представляються у вигляді нескінченних лінійних систем і розв'язуються за допомогою правила Крамера.

6. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні положення дисертації опубліковані у 16 наукових працях, з яких 4 статті у наукових фахових виданнях України, 10 тез, які засвідчують апробацію

матеріалів дисертації на конференціях, та 2 статті, опубліковані в працях конференцій, які додатково відображають наукові результати дисертації. Публікації повно відображають результати дослідження.

7. Дотримання академічної доброчесності

На підставі детального розгляду тексту дисертації, посилань, статей здобувача та Протоколу контролю оригінальності (перевірку можливої наявності текстових запозичень виконано в інтернет-системі Strikeplagiarism.com) порушення академічної доброчесності не виявлено. Елементи фальсифікації чи фабрикації тексту в роботі відсутні.

8. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані результати встановлюють зв'язки між теорією різницевих і диференціальних рівнянь, теорією кілець і теорією чисел.

9. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До дисертаційної роботи є кілька зауважень.

1. У підрозділі 3.3.1.1 не вказаний загальний опис різницевих рівнянь першого порядку в кільці поліномів, для яких працює описаний алгоритм знаходження розв'язку.
2. Дослідження операторного рівняння в четвертому розділі, здається, може бути продовжене. Оскільки інші розділи дисертації сконцентровані на дослідженні рівнянь вищого порядку, було б доцільно вказати перспективи узагальнення дослідження операторних рівнянь на випадок рівнянь вищого порядку. Перші підрозділи розділів 2 і 3 описують схожі формальні конструкції, які не залежать від збіжності, тому варто було б розглянути можливість того, що ці конструкції є частковими випадками деякого операторного рівняння.

3. В розділі 2.4 дисертації описаний аналог фундаментального розв'язку диференціального оператора, в розділі 4.5 описаний такий аналог для оператора $A - I$ над кільцем цілих чисел, для якого диференціальне і різницеве рівняння першого порядку є частковими випадками. Зважаючи на це, було б цікаво дізнатись, чи можна побудувати подібну конструкцію для різницевого рівняння вищого порядку.

Зазначені зауваження не мають принципового значення і не впливають на загальною позитивну оцінку роботи.

10. Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 – Математика та статистика, завершеною працею, що виконана на високому науковому рівні.

Здобувачка Гончарук Анна Борисівна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань з галузі знань 11 – Математика та статистика.

Офіційний рецензент,
завідувач кафедри
прикладної математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
доктор фізико-математичних наук,
професор

Валерій КОРОБОВ

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 13:00:59 18.12.2023

Назва файлу з підписом: рецензія.pdf (1).asice
Розмір файлу з підписом: 74.8 КБ

Назва файлу без підпису: рецензія.pdf (1).asice
Розмір файлу без підпису: 74.8 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: КОРОБОВ ВАЛЕРІЙ ІВАНОВИЧ

П.І.Б.: КОРОБОВ ВАЛЕРІЙ ІВАНОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 1524302212

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 17:44:03
14.12.2023

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F040000001D81370154F6A404

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Голові разової
спеціалізованої вченої ради
Харківського національного
університету
імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Рецензія

офіційного рецензента, професора кафедри вищої математики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз) Дюкарева Юрія Михайловича на дисертаційну роботу Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

1. Актуальність теми дослідження

В дисертаційній роботі вивчаються різницеві і диференціальні рівняння над кільцями, деякі операторні рівняння та нескінченні лінійні системи. Основними результатами дисертації є достатні умови існування і єдиності розв'язку різницевих, диференціальних і операторних рівнянь над деякими кільцями. Також розглянуті питання побудови таких розв'язків, доведені деякі аналоги конструкцій з класичної теорії диференціальних та різницевих рівнянь. Зокрема, розглянуто відповідні рівняння над кільцем цілих чисел і кільцем поліномів, неоднорідні рівняння з конкретними неоднорідностями, тощо. Дослідження проведено з використанням алгебраїчних методів та методів математичного аналізу.

Слід зауважити, що аналогічні рівняння над полями досліджені в роботах багатьох авторів і для них побудована досить повна теорія. Разом з тим, дослідження різницевих, диференціальних та операторних рівнянь над кільцями є природною та елегантною задачею. В цьому напрямі досліджень залишаються відкритими багато цікавих питань, розв'язок деяких з них міститься в дисертаційній роботі.

З огляду на все вищесказане, я вважаю тему дослідження цікавою і актуальною, а результати дисертації важливими.

2. Загальна характеристика дисертаційної роботи

У **вступі** наявні всі необхідні елементи для дисертаційного дослідження: обґрунтування вибору теми, мета і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, наукова новизна та практичне значення отриманих результатів, особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** поставлена задача і описані відомі результати, які використовуються в дисертації. Також розглянуто конструкції, аналоги котрих буде отримано в дисертації.

Другий розділ присвячено лінійним диференціальним рівнянням. Розглядається деякий формальний ряд, сума якого буде розв'язком диференціального рівняння, якщо ряд

збігатиметься. Цей ряд завжди збігатиметься, якщо неоднорідність буде поліноміальною, і в цьому випадку розв'язок можна знайти у явному вигляді. Основна ідея роботи з рядом, що виникає для рівняння з не поліноміальною неоднорідністю, є введення неархімедової топології, в якій цей ряд може стати збіжним. Для випадку, коли диференціальне рівняння розглядається над кільцем цілих чисел, це p -адична топологія. Над цією топологією ряди, що розглядаються для диференціального рівняння, збігаються над кільцем цілих p -адичних чисел, що містить у собі кільце цілих чисел. Знайдені достатні умови єдиності та існування розв'язку над кільцем цілих p -адичних чисел, і за цих умов або знайдений розв'язок є цілочисельним, або над кільцем цілих чисел немає розв'язку. Отже, така конструкція дає змогу вивчати цілочисельні розв'язки рівняння. Така сама конструкція описана для будь-яких кілець, що є кільцями нормування для неархімедового нормування.

Також в цьому розділі описана конструкція фундаментального розв'язку операторного рівняння, яка дозволяє знайти розв'язок у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю. Ця конструкція є аналогом фундаментального розв'язку операторов в класичній теорії диференціальних рівнянь.

У **третьому розділі** вивчається лінійні різниці рівняння над кільцями. Як і попередньому розділі, основна ідея полягає у тому, щоб розглянути ряд, сума якого буде розв'язком рівняння, якщо він збігатиметься, і ввести неархімедову топологію, у якій він збігається. В цьому розділі розглядаються кільця, в яких можна ввести неархімедове квазінормування, тобто ширший клас кілець, ніж в попередньому розділі.

Сформульовані результати для неоднорідності, що є квазіполіномом. Також розглянуто випадок рівняння першого порядку над кільцем поліномів.

У **четвертому розділі** досліджуються операторні рівняння першого порядку, які узагальнюють диференціальні і різниці рівняння над кільцем цілих чисел. Для цього операторного рівняння сформульовано критерій існування і єдиності розв'язку. Основна ідея та ж сама: ввести топологію (тут це a -адична топологія) і розглянути ряд, який збігається за цією топологією і є єдиним розв'язком операторного рівняння. Показано, що існування розв'язків рівнянь першого порядку залежить від збіжності деякого ряду до цілого числа за p -адичною метрикою, що пов'язує основну проблему дисертації з задачею раціональності p -адичних рядів.

У **п'ятому розділі** вивчаються нескінченні лінійні системи, що відповідають диференціальним і різницеvim рівнянням з попередніх розділів. Оскільки рівняння має єдиний розв'язок, то є сенс шукати відповідний розв'язок лінійної системи алгебраїчними методами. Для цих систем знайдено розв'язок за допомогою аналога правила Крамера, і показано, що це і є єдиний розв'язок таких рівнянь, що належить кільцю, незважаючи на те, що сама система має нескінченно багато розв'язків над полем часток розглянутого кільця.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Дисертація є завершеною науковою працею, що відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації}

Всі використані відомі результати сформульовані у першому розділі і мають належні посилання. Доведення теорем які спираються на них, викладені чітко і повно, що і переконує у обґрунтованості результатів дисертаційної роботи. Теореми, сформульовані в анотації, повністю відповідають змісту дисертації і описують основні результати.

4. Основні наукові результати, одержані авторкою та їх новизна

Дисертантка отримала такі нові наукові результати:

- Наведено умови існування і єдиності поліноміального розв'язку. Знайдено в явному вигляді розв'язок лінійних диференціального і різницевого рівняння m -того порядку з поліноміальною і фінітною неоднорідністю;
- Введено поняття формального розв'язку лінійного диференціального і лінійного різницевого рівняння m -того порядку. Встановлено зв'язок формального розв'язку цих рівнянь з їх фактичним розв'язком;
- Доведено, що формальний розв'язок буде коректно визначеним формальним степеневим рядом тоді і тільки тоді, коли неоднорідність поліноміальна для диференціального рівняння і фінітна для різницевого;
- Отримані умови існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m -того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням;
- Отримані умови існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m -того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим квазінормуванням;
- Для випадку кільця нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням введено спеціальну згортку формального ряду Лорана з від'ємними степенями з формальним степеневим рядом. Доведено, що для будь-якої неоднорідності, яка є формальним степеневим рядом, розв'язок лінійного диференціального рівняння можна представити у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю.
- Знайдені умови існування та єдиності розв'язку лінійного операторного рівняння першого порядку в кільці цілих чисел. Ці умови уточнені для часткових випадків різницевого і диференціального рівнянь.
- У випадку існування розв'язку для лінійних диференціальних і різницевого рівнянь, показано, що ці рівняння відповідають деяким нескінченним лінійним системам, і доведено, що їх розв'язки можна знайти за допомогою деякого аналога метода Крамера.

5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні положення дисертації опубліковані у 16 наукових працях, з яких 4 статті у наукових фахових виданнях України, 10 праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації на конференціях, та 2 статті, опубліковані в працях конференцій. Публікації повно відображають результати дослідження.

6. Дотримання академічної доброчесності

Всі використані відомі результати викладені у першому розділі дисертації. Вони мають належні посилання. Також в дисертації є посилання на наукові публікації авторки, в яких опубліковані основні результати дисертації. У роботі не виявлено академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації.

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані для дослідження диференціальних і різницевих рівнянь, поставлена задача відкриває можливості для подальшого розвитку теорії різницевих і диференціальних рівнянь над кільцями.

8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До дисертаційної роботи є деякі зауваження та запитання:

1. В деяких місцях позначення обрані не найкращим чином: для подібних коефіцієнтів з різних розділів використовуються різні літери, індекси змінюються всередині перетворень, що заважає слідкувати за міркуваннями, тощо.

2. Хоча показано, що диференціальне і різницеве рівняння подібні, і для їх розв'язання можна використовувати подібні методи, вони вивчаються над різними класами кілець. На мій погляд, було б доречно явно пояснити різницю між цими випадками, яка спонукає вивчати їх над різними класами кілець. Так само, цікаво дізнатися, чи може бути побудована конструкція фундаментального розв'язку оператора для різницевого рівняння, як вона побудована для диференціального і для операторного першого порядку. Чи можна узагальнити результати для операторного рівняння на випадок рівняння вищого порядку?

3. В дисертаційній роботі стверджується, що розв'язність рівнянь першого порядку залежить від того, чи буде цілим числом сума деякого ряду в деякій p -адичній топології. Виникає питання: для яких рядів це відомо, тобто для яких рядів ми можемо гарантувати розв'язність і знайти цілочисельний розв'язок?

4. В другому розділі вивчається різницеве рівняння першого порядку у кільці поліномів. Доведені деякі теореми, користуючись якими можна знайти чи довести не існування поліноміального розв'язку, і наведені приклади розв'язання рівнянь, але не сказано, чи можна таким чином розв'язати будь-яке рівняння, чи є якісь обмеження, і які саме?

5. В дисертації є деяка кількість граматичних і синтаксичних помилок, а також одруків, що не є суттєвим.

Зазначені зауваження і питання не принципові і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертаційної роботи.

Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика

з галузі знань 11 — Математика та статистика, є завершеною науковою працею, що виконана на відповідному теоретичному та методологічному рівні, і в якій отримані нові науково обґрунтовані результати.

Здобувачка Гончарук Анна Борисівна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Офіційний рецензент,
професор кафедри
вищої математики
Харківського національного
університету імені В. Н. Каразіна
доктор фізико-математичних наук,
доцент

Юрій ДЮКАРЕВ

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ

створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 13:00:38 18.12.2023

Назва файлу з підписом: рецензія.pdf.asice

Розмір файлу з підписом: 149.9 КБ

Назва файлу без підпису: рецензія.pdf.asice

Розмір файлу без підпису: 149.9 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ДЮКАРЕВ ЮРІЙ МИХАЙЛОВИЧ

П.І.Б.: ДЮКАРЕВ ЮРІЙ МИХАЙЛОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 1846100712

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 16:51:48 13.12.2023

Сертифікат виданий: АЦСК АТ КБ «ПРИВАТБАНК»

Серійний номер: 248197DDFAB977E5040000006DFF1F01B3AC6B04

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Голові разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Відгук

офіційного опонента, завідувача кафедри, професора кафедри математики та інформатики Донбаського державного педагогічного університету, доктора фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння) Чуйка Сергія Михайловича на дисертаційну роботу Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь», подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

1. Актуальність теми дослідження

У дисертації досліджено диференціальні та різницеві рівняння в алгебраїчному контексті. Питання, які досліджується для різницевих рівнянь – наявність послідовності, яка є розв'язком рівняння і при цьому належить до деякого кільця. Для неявних різницевих рівнянь це природне питання. Лінійні диференціальні рівняння в кільці формальних степеневих рядів очевидним чином приводяться до різницевих рівнянь. Також природним є питання щодо побудови для таких рівнянь конструкцій, притаманних звичайній теорії диференціальних рівнянь.

Зважаючи на вищезазначене, можна стверджувати, що дисертація Гончарук Анни Борисівни є актуальною, а отримані результати суттєвими.

2. Оцінка змісту дисертації, її завершеності в цілому і оформлення

В дисертації досліджено розв'язність лінійних диференціальних і неявних лінійних різницевих рівнянь над кільцями. Стиль написання роботи є академічним. Істотних зауважень до структури, мови та стилю дисертації немає.

У **вступі** обґрунтовано вибір теми, визначено мету і основні задачі, об'єкт і предмет дослідження, визначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, відзначено особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** сформульовано задачу, стисло описано історію

вивчення питання і наведено основні відомі результати, які потім будуть використані для доведення основних результатів дисертації, з належними посиланнями. Також наведено опис конструкції формального розв'язку оператора, до якого в дисертації побудовано аналог.

У **другому розділі** досліджено лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами та неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями. Розглянуто ряди, суми яких, за умови збіжності, визначають коефіцієнтами розв'язки такого рівняння. Досліджено випадок, коли ці ряди є збіжними в будь-якому комутативному кільці, тобто випадок поліноміальної неоднорідності, і доведено, що, коли неоднорідність не є поліномом, ці ряди не будуть збіжними в дискретній топології. Випадок неполіноміальної неоднорідності розглянутий тільки для кілець нормування з неархімедовою топологією. Доведено, що в таких кільцях вищезазначені ряди збігаються і їх суми будуть коефіцієнтами формального степеневого розв'язку розглянутого диференціального рівняння.

У **третьому розділі** досліджено різницеve рівняння над комутативними кільцями. Так саме, як і в попередньому розділі, досліджено ряди, які є елементами розв'язку за умови збіжності. Досліджено випадок фінітної неоднорідності, для якої ці ряди збіжні в будь-якому кільці, і доведено, що для нефінітної неоднорідності вони не будуть збіжними в дискретній топології. Для кілець, в яких можна ввести неархімедове квазінормування, досліджено випадок неполіноміальної неоднорідності та доведено, що в таких кільцях суми описаних рядів будуть елементами розв'язку.

У **четвертому розділі** досліджено диференціальне і різницеve рівняння першого порядку у кільці цілих чисел. Показано, що вони є частковими випадками деякого операторного рівняння першого порядку. Для цього операторного рівняння отримано критерій існування розв'язку. Для диференціального і різницевого рівняння цей результат уточнений.

У **п'ятому розділі** всі рівняння, що вивчаються в дисертації, представлені у вигляді нескінченних лінійних систем, які розв'язуються за допомогою правила Крамера. Для цього визначник нескінченної матриці визначено як границя кутових мінорів. Показано, що отриманий таким чином розв'язок збігається з розв'язками, отриманими у попередніх розділах дисертації.

Висновки логічні та послідовні. Вони підсумовують отримані результати та наукову новизну роботи.

Список використаних джерел свідчить про те, що при виконанні роботи було проаналізовано актуальні закордонні та вітчизняні наукові праці з тематики дослідження.

Дисертація є завершеною науковою працею, а її оформлення відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету

Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації».

3. Ступінь обґрунтованості наукових положень і висновків, сформульованих у дисертації

Обґрунтованість наукових положень, висновків і рекомендацій забезпечено коректними і повними математичними доведеннями нових наукових результатів та наявністю належних посилань на відомі результати, що використовуються у доведеннях.

4. Основні наукові результати, одержані автором та їх новизна

Дисертантка отримала наступні нові наукові результати:

- знайдені достатні умови для існування і єдності розв'язку лінійного диференціального та різницевого лінійного рівнянь над кільцями -- для кільця нормування неархімедової топології для диференціального рівняння і для кілець, в яких можна ввести квазінормування для неявного різницевого рівняння;
- для різницевого рівняння ці умови уточнені для випадку факторіального кільця, кільця цілих p -адичних чисел і кільця формальних степеневих рядів;
- знайдений аналог фундаментального розв'язку диференціального оператора, пов'язаного з лівою частиною рівняння. Доведено, що для будь-якої неоднорідності, що є формальним степеневим рядом, розв'язок лінійного диференціального рівняння можна представити у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю.
- сформульовані результати, які використовні для знаходження розв'язку деяких типів різницевого рівнянь першого порядку над кільцем поліномів;
- всі результати уточнені для кільця цілих чисел, і доведені критерії існування і єдності розв'язку для рівнянь першого порядку над кільцем цілих чисел;
- показано, що всі ці рівняння мона досліджувати як нескінченні лінійні системи і розв'язні за допомогою правила Крамера.

5. Повнота викладу результатів дисертації в опублікованих працях

Основні теоретичні положення і висновки дисертації викладені у 16 наукових працях, з яких 4 статті у наукових фахових виданнях України, 10 праць, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації на закордонних, міжнародних та всеукраїнських конференціях та 2 праці, які додатково

відображають наукові результати дисертації. Одна стаття А. Гончарук відображена у наукометричній базі Scopus. Публікації чітко та повно відображають результати та висновки дослідження, які є достатньою мірою логічними та обґрунтованими.

6. Дотримання академічної доброчесності

У розділах дисертації повно і вичерпно відображено зміст власних досліджень здобувача, наведено посилання на власні наукові праці. Перелік цих праць включено до списку використаних джерел. Усі публікації, пов'язані з темою роботи, розкривають її зміст. У роботі не виявлено ознак академічного плагіату та інших порушень академічної доброчесності.

7. Наукове, теоретичне та практичне значення результатів дисертації

Результати дисертації носять теоретичний характер та можуть бути використані для подальших досліджень властивостей лінійних диференціальних і лінійних різницевих рівнянь у теорії диференціальних рівнянь, теорії динамічних систем, теорії чисел тощо.

8. Дискусійні положення та зауваження до змісту дисертації

До змісту роботи є декілька зауважень та запитань:

1. Недостатня кількість конкретних описаних прикладів кілець – розглянуті кільця цілих чисел та поліномів, які є факторіальними, у той час, коли теореми узагальнюються для значно ширших класів кілець. Постає питання – чи не є область застосовності, наприклад, теореми 3.12 у порівнянні з іншими теоремами, порожньою? Чи існують змістовні приклади застосовності теореми 3.22?

2. У деяких місцях робота з індексами не дуже коректна: змінюється позначення для індексу впродовж обчислень, що ускладнює розуміння доведень.

3. Хоча теореми 5.1 и 5.2 подібні, і можуть бути сформульовані в єдиному дусі, позначення в розділах 5.1 и 5.2 введені так, що теореми виглядають по-різному.

4. Текст дисертації містить деякі граматичні та стилістичні помилки, які, втім, не впливають на сприйняття змісту роботи.

Проте зазначені зауваження не впливають на високу оцінку якості результатів дисертаційного дослідження і обґрунтованості наведених здобувачем висновків.

Загальні висновки щодо дисертаційної роботи

Дисертаційна робота Гончарук Анни Борисівни «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевого рівнянь», подана до захисту на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань з галузі знань 11 — Математика та статистика, є актуальною, завершеною науковою працею, що виконана на належному науково-теоретичному рівні.

Здобувачка Гончарук Анна Борисівна заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Офіційний опонент, завідувач кафедри
математики та інформатики
Донбаського державного
педагогічного університету,
доктор фізико-математичних наук, професор

Сергій ЧУЙКО

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 12:57:52 18.12.2023

Назва файлу з підписом: Vidguk-16.12.2023.docx.asice
Розмір файлу з підписом: 25.0 КБ

Назва файлу без підпису: Vidguk-16.12.2023.docx.asice
Розмір файлу без підпису: 25.0 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ЧУЙКО СЕРГІЙ МИХАЙЛОВИЧ

П.І.Б.: ЧУЙКО СЕРГІЙ МИХАЙЛОВИЧ

Країна: Україна

РНОКПП: 2181616934

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 12:21:56
16.12.2023

Сертифікат виданий: КНЕДП АЦСК АТ КБ "ПРИВАТБАНК"

Серійний номер: 5E984D526F82F38F04000000EB5C250186A17804

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований

Голові
разової спеціалізованої вченої ради
Харківського національного університету
імені В. Н. Каразіна
професору Сергію ФАВОРОВУ
майдан Свободи 4, м. Харків, 61022

Відгук

офіційного опонента, старшого наукового співробітника
відділу теорії функцій Фізико-технічного інституту низьких температур
ім. Б. І. Веркіна Національної академії наук України,
кандидата фізико-математичних наук (спеціальність 01.01.01 – математичний
аналіз) Миронюк Маргарити Вячеславівни
на дисертаційну роботу Гончарук Анни Борисівни
«Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії
неявних лінійних різницевих рівнянь»,
подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю
111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Актуальність обраної теми. У дисертаційній роботі Анни Гончарук «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь» розглядаються лінійні диференціальні рівняння з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями та неявні лінійні різницеві рівняння над комутативними кільцями.

Основна задача полягає в знаходженні умов існування та єдиності розв'язків зазначених рівнянь, а також знаходження самих розв'язків. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи лінійної алгебри, загальної топології, неархімедового, зокрема p -адичного, аналізу.

Варто зауважити, що лінійні диференціальні рівняння та лінійні різницеві рівняння добре вивчені над полями нульової характеристики. Дуже природнім є проведення аналогічних досліджень цих рівнянь над кільцями. При цьому доводиться як створювати нові методи досліджень, так і по новому застосовувати вже відомі раніше методи, враховуючи специфіку кілець. Тому я вважаю дисертацію Анни Гончарук актуальною.

Розв'язання поставлених задач потребує глибоких знань в теорії диференціальних та різницевих рівнянь, а також неархімедового аналізу, алгебри та топології. Поєднання цих знань в одній роботі є ознакою високої кваліфікації автора.

Зміст, основні результати і наукова новизна дисертації. Коротко опишемо отримані в дисертації результати.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовується вибір теми, мета і завдання досліджень, а також формулюються коротко отримані результати.

У першому розділі наведена історія вивчення питань, що розглядаються, є основні означення та сформульовані раніше отримані результати, які використовуються в подальшому.

У другому розділі розглядається лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами над кільцями. Для цього рівняння у випадку поліноміальної неоднорідності отримані умови існування і єдиності розв'язку. У випадку неоднорідності у вигляді формального степеневого ряду введено поняття формального розв'язку та встановлено його зв'язок з фактичним розв'язком та умови існування і єдиності.

Третій розділ присвячений вивченню неявного лінійного різницевого рівняння над кільцем. Знайдені умови існування і єдиності розв'язку в залежності від типу неоднорідності. Більш точні результати отримані для конкретних типів кілець.

В четвертому розділі детально розглянуто операторне рівняння, яке узагальнює як диференціальне, так і операторне рівняння першого порядку. Для цього рівняння знайдені умови існування та єдиності розв'язку в кільці цілих чисел.

П'ятий розділ присвячений застосуванню методу Крамера для пошуку розв'язків лінійних різницевих та лінійних диференціальних рівнянь, якщо такі розв'язки існують згідно з теоремами про існування та єдиність розв'язків.

Отримані автором результати є новими та науково обґрунтованими.

Обґрунтованість результатів дисертації та їх достовірність. Обґрунтованість та достовірність результатів дисертації забезпечується чітким формулюванням проблем, що розглядаються, використанням достовірних методів дослідження та зрозумілою логікою доведень.

Основні результати дисертації опубліковані у фахових виданнях України та пройшли апробацію на 10 міжнародних конференціях та спеціалізованих воркшопах України, Німеччини, Австрії, Франції, Боснії та Герцеговини.

Отримані в дисертації результати є повною мірою обґрунтованими та достовірними.

Повнота викладу наукових положень в наукових публікаціях. Основні результати дисертації опубліковані у 16 наукових працях, з яких 4 статті у наукових фахових виданнях України, 10 тез конференцій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації, та 2 статті, опубліковані в працях конференцій. Публікації відображають результати дослідження.

Дотримання академічної доброчесності. Дисертація є самостійним дослідженням Гончарук А.Б. Майже всі раніше відомі результати, що використовуються для доведень, сформульовані у першому розділі дисертації. Всі раніше відомі результати наводяться з посиланнями на відповідні джерела. У дисертаційній роботі не виявлено ознак академічного плагіату та інших порушень, які могли б поставити під сумнів самостійний характер виконаного авторкою дослідження. Особистий внесок здобувача розкритий у вступній частині дисертації.

Зауваження до дисертаційної роботи. Є певна кількість зауважень редакційного характеру.

Анотація. На мою думку в анотації теореми краще нумерувати.

С. 4₉: "Таким чином знайдені.."замінити на "Таким чином, знайдені.."

С. 4₂: "в кільці K і послідовність їх сум.."замінити на "в кільці K , і послідовність їх сум.."

С. 5¹³: "що задовольняє рівняння, або.."замінити на "що задовольняє рівняння (4), або.."

С. 5¹⁶: "степеневий ряд $w_0(z)$ з ϵ .."замінити на "степеневий ряд $w_0(z)$ ϵ .."

С. 5₁: "Рівняння (4.1).."замінити на "Рівняння $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$.."

С. 6₇₋₁₀: "Позначатимемо \mathcal{A}_n матрицю, що отримана з матриці \mathcal{A} заміною $n+1$ -ого стовпця на вектор \mathbf{f} . За $\Delta_{n,r}$ позначимо головний міnor $r+1$ -го порядку цієї матриці, а за Δ_r — головний кутовий міnor $r+1$ -го порядку цієї матриці \mathcal{A} ."замінити на "Позначатимемо через \mathcal{A}_n матрицю, що отримана з матриці \mathcal{A} заміною $(n+1)$ -го стовпця на вектор \mathbf{f} . Через $\Delta_{n,r}$ позначимо головний міnor $(r+1)$ -го порядку матриці \mathcal{A}_n , а через Δ_r — головний кутовий міnor $(r+1)$ -го порядку матриці \mathcal{A} ."

С. 11¹¹: "The equation (4.1).."замінити на "The equation $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$.."

С. 24₁₀: "Горбачук Потім подібне.."замінити на "Потім подібне .."

С. 26³: "Таким чином рівняння можна.."замінити на "Таким чином, рівняння (1.1) можна .."

С. 26^{4,6}: в правих частинах рівнянь f_n замінити на $f(x)$

С. 26₁₂₋₁₃: "права частина є аналітичною.."замінити на "права частина рівняння (1.1) є аналітичною .."

С. 26₈: "з рівності 1.4 тобто.."замінити на "з рівності (1.4), тобто .."

С. 26₇: "У випадку, коли коли.."замінити на "У випадку, коли .."

С. 32₄: "його ідеал, Задамо.."замінити на "його ідеал. Задамо .."

С. 33₁₀: "Тоді для будуть.."замінити на "Тоді будуть .."

- С. 34₇: "Нехай оператор оператор.."замінити на "Нехай оператор .."
- С. 35²: "рівняння (4.1)..замінити на "рівняння (1.10) .."
- С. 35¹²: "Для довільного цілого числа.."замінити на "Для довільного цілого невід'ємного числа .."
- С. 37₈: "будь-якої.."замінити на "будь-якої .."
- С. 38⁸: "проіснування.."замінити на "про існування .."
- С. 38₈: "існує в \mathcal{D}' .."замінити на "існує в \mathcal{D}' ."
- С. 38₆: "класичний узагальнених функцій, то вочевидь для .."замінити на "класичних узагальнених функцій, то, вочевидь, для .."
- С. 42⁷: " a_0, a_1, \dots, a_m і $f(x) \in K[[x]]$.."замінити на " $a_0, a_1, \dots, a_m \in K$ і $f(x) \in K[[x]]$."
- С. 42₉: Рівняння (2.3) написано вже після формулювання теореми і посилання на нього.
- С. 47²: " $a \in R$.."замінити на " $a \in K$.."
- С. 51⁸ та С. 43₃₋₄: " $s_k = \sum_{j=0}^k i_j$.."замінити на " $s_k = \sum_{j=1}^k i_j$.."
- С. 54¹³: "розв'язок 2.3 рівняння.."замінити на "розв'язок (2.3) рівняння .."
- С. 54¹⁵: "одною з центральний побудов.."замінити на "однією з центральних побудов .."
- С. 69₄: " a_0 обернений .."замінити на " a_0 оборотний .."
- С. 104¹⁰: "Оскільки множина множина.."замінити на "Оскільки множина .."

Вказані недоліки носять технічний характер, легко виправляються і не впливають ні на результати дисертації, ні на загальне позитивне враження від неї. Зауважень щодо достовірності та повноти викладення результатів, що суттєво впливали б на оцінку дисертації, немає.

Загальна оцінка роботи та висновок. Дисертація є цілісною завершеною науковою працею, що повністю відповідає спеціальності 111 – Математика. Отримані результати повністю відповідають заявленій меті досліджень.

За актуальністю, змістом, науковою новизною, обґрунтованістю і достовірністю результатів, відсутністю ознак порушення здобувачем академічної добро-

чесності вважаю, що дисертаційна робота «Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь» відповідає вимогам «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (постанова Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р.) та наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження Вимог до оформлення дисертації», а її авторка Анна Гончарук заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика з галузі знань 11 — Математика та статистика.

Офіційний опонент,
старший науковий співробітник
відділу теорії функцій
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім.Б.І.Веркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Маргарита Миронюк

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 20:40:52 17.12.2023

Назва файлу з підписом: Миронюк_відгук.pdf.p7s
Розмір файлу з підписом: 144.7 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Миронюк_відгук.pdf
Розмір файлу без підпису: 126.6 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: Миронюк Маргарита Вячеславівна
П.І.Б.: Миронюк Маргарита Вячеславівна
Країна: Україна
РНОКПП: 2939520866

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 20:40:48 17.12.2023

Сертифікат виданий: "Дія". Кваліфікований надавач електронних довірчих послуг
Серійний номер: 382367105294AF970400000063AB0F00F57E6B01
Тип носія особистого ключа: ЗНКІ криптомодуль ІІТ Гряда-301
Алгоритм підпису: ДСТУ-4145
Тип підпису: Кваліфікований
Тип контейнера: Підпис та дані в CMS-файлі (CAAdES)
Формат підпису: З повними даними ЦСК для перевірки (CAAdES-X Long)
Сертифікат: Кваліфікований