

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна  
Міністерство освіти та науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Мироненко Ірина Вікторівна**

УДК 536.48:536.24:539.219.1(043.5)

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**«КІНЕТИКА ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ ФОНОНІВ ТА**  
**МАГНОНІВ В ГЕТЕРОГЕННИХ НАНОСТРУКТУРАХ»**

Спеціальність 104 – Фізика та астрономія

(Галузь знань 10 – Природничі науки)

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ Ірина МИРОНЕНКО

Науковий керівник: Шкловський Валерій Олександрович, доктор  
фізико-математичних наук, професор.

Харків – 2023

## АНОТАЦІЯ

*Мироненко І.В.* Кінетика процесів перенесення фононів і магнонів в гетерогенних наноструктурах – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 – Фізика та астрономія (Галузь знань 10 – Природничі науки). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти та науки України, Харків, 2023.

Перенесення тепла через багатошарові гетероструктури - це процес передачі тепла через матеріали, які складаються зі шарів різних матеріалів або гетероструктур. Цей процес дуже важливий у багатьох сферах, включаючи електроніку, фізику конденсованого стану, енергетику та інші галузі. Він має важливий вплив на ефективність різних пристроїв і технологій. В електронних пристроях, таких як транзистори і інтегральні схеми, тепло може передаватися електронами через границі між шарами гетероструктури. Важливо контролювати цей процес, оскільки перегрів може призвести до втрати продуктивності і зниження довговічності пристроїв.

*Дисертація присвячена* кінетичному аналізу поперечного перенесення тепла в різних гетерогенних наноструктурах. Науковий аспект проблеми теплопровідності багатошарових систем полягає в тому, що закон Фур'є  $Q = -k\nabla T$ , який пов'язує потік тепла з градієнтом температури, не може бути безпосередньо застосований для аналізу теплоперенесення в шаруватих наноструктурах, де довжина вільного пробігу фононів більша або порівнянна з товщинами шарів і де суттєвий вплив на теплоперенесення надають умови на межі суміжних матеріалів. Таким чином, для опису потоків тепла в наноструктурах потрібен мікроскопічний підхід, який, зокрема, дозволяє врахувати вплив міжшарових меж на теплопровідність багатошарової гетероструктури. Аналіз поперечної теплопровідності шаруватої гетероструктури заснований на кінетичному рівнянні Больцмана для фононної функції розподілу, а також на припущеннях, що електрони на плівці

термалізовані внаслідок електрон-електронних зіткнень і мають температуру. Оскільки переніс тепла через границю "метал-діелектрик" здійснюється фононами, в аналізі важливу роль відіграють граничні умови для функції розподілу фононів. Ці умови повинні враховувати як відбиття фононів від границь шару, так і обмін фононами між металом і діелектриком. Температура середовища вважається досить низькою, щоб, по-перше, електрони можна було розглядати як термалізовані, по-друге, не зважати на зіткнення фононів з дефектами решітки і з іншими фононами і, по-третє, не зважати на процеси перекидання при електрон-фононних зіткненнях. Крім того, виникла галузь магнонної спітроніки, що займається структурами, пристроями та схемами, які використовують спінові струми, що переносяться магнонами, кванто-спінових хвиль. Подібно до звичайних електричних струмів, струми на основі магнонів можуть використовуватися для перенесення, транспортування і обробки інформації як альтернатива спітронним пристроям, керованим зарядовим струмом. Нещодавно для реалізації ефективних логічних пристроїв було запропоновано чисті магнонні спінові струми в ізоляційних феромагнетиках, що відрізняються відсутністю Джоулевого нагрівання та зменшеним затуханням спінової хвилі. У той же час спінові хвилі можуть переносити тепло так само, як збудження решітки (фонони) переносять тепло через збурення положень атомів.

Дисертаційна робота містить п'ять розділів.

У *першому розділі* в рамках теорії акустичної неузгодженості між твердими тілами обговорюється роль електронів провідності в формуванні ефективної акустичної прозорості інтерфейсу між вузькими металевими плівками і діелектричними підкладками з високою теплопровідністю. Розглянуто випромінювання фононів з металевих плівок, що нагріваються струмом за низьких температур. Теоретичний розгляд цих задач проведено з використанням кінетичних рівнянь для фононної та електронної функцій розподілу. У більшості випадків обговорено зв'язок між теоретичними результатами та існуючою експериментальною ситуацією.

Розглянуто результати роботи [118], де теоретично досліджено нелінійну релаксацію між магнонами та фононами в ізоляційному феромагнетикі. Магнони і фонони описувалися рівноважними розподілами Бозе-Ейнштейна з різними температурами. Нелінійний тепловий потік від магنونів до фононів розраховано мікроскопічно в термінах черенковського випромінювання фононів магнонами. Отримані результати в роботі [118] у галузі спінкалоритроніки, виконані на кафедрі фізики низьких температур Харківського національного університету. Розглянуто нові напрямки у магнітоелектроніці — спінтроніка, спінкалоритроніка та магنونіка, які виникли із метою зменшення дисипації у звичайній напівпровідниковій мікроелектроніці. Розроблені теоретичні обґрунтування в роботі [118] є актуальним для експериментів зі спіновою накачкою при низьких температурах і термоелектричних приладів, у яких температура магنونів істотно вища за фононну.

У *другому розділі* дисертації описується об'єкт та методи дослідження переносу тепла в гетерогенних наноструктурах. Наноматеріали — це не просто ще один крок у мініатюризації матеріалів або частинок. Нанорозмірний теплообмін був і є популярною темою впродовж останніх двох десятиліть. Завдяки нещодавньому прогресу в синтезі наноматеріалів і виготовленні наноструктур, нанорозмірний теплообмін залишиться актуальним і в майбутньому, відіграючи важливу роль в інформаційних технологіях, технологіях перетворення енергії та біомедичній інженерії. Краще розуміння механізмів теплоперенесення у великому діапазоні має вирішальне значення для розробки таких матеріалів і пристроїв для досягнення кращих властивостей і продуктивності. Фононне рівняння переносу тепла Больцмана (ВТЕ) – це метод, здатний моделювати перенесення фононів від балістичного до дифузійного режимів, і велика кількість досліджень була зроблена для розробки чисельних розрахунків для цього рівняння. Однак, через обмежену обчислювальну ефективність існуючих методів, фононне рівняння переносу Больцмана стикається з

труднощами при застосуванні до складних задач, що залежать від моди, великими просторовими розмірами і великою температурною нерівновагою.

У *третьому розділі* представлено результати роботи. В першу чергу представлено кінетичний підхід, в рамках якого розглянуто поперечне перенесення тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками за низьких температур, коли електрони в металевому шарі термалізовані. Даний підхід аналізований на кінетичному рівнянні Больцмана для фононної функції розподілу з граничними умовами, що враховують відбиття та заломлення акустичних хвиль при їх проходженні через міжшарові інтерфейси. Обчислено ефективну поперечну теплопровідність даної шаруватої системи при довільному значенні товщини металевого шару. Знайдено товщини, при яких у теплопровідності проявляється розмірний ефект та його залежність від температури, що потрібно враховувати при створенні електронних пристроїв, елементи яких мають субмікронні розміри.

Поперечну ефективну теплопровідність розраховано в двотемпературному (2ТМ) наближенні, тобто в термінах електронної та фононної температур. Порівняння отриманих результатів показують, що відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплоперенесення в багатошаровій системі тільки у разі товстих металевих шарів, коли товщина шару значно більша за фонон-електронну довжину вільного пробігу. Для більш тонких металевих шарів двотемпературне наближення дає невірний вираз для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури, бо при малих товщинах не можна коректно ввести ні фононну температуру, ні фононну теплопровідність.

У *четвертому розділі* розглянуто кінетичний підхід переносу тепла фононами та магнонами через шар феромагнітного ізолятора, розташованого між двома масивними ізоляторами при низьких температурах, коли магнони в шарі феромагнітного ізолятора термалізовані внаслідок магнон-магнонних зіткнень і мають температуру магнонів. Розраховано ефективну поперечну теплопровідність даної шаруватої системи з довільною товщиною шару

ферромагнітного ізолятора, де тепловий потік переносять як магнони, так і фонони, та знайдено товщину, при якій розмірний ефект проявляється в теплопровідності. Зауважено, що при зростанні значень  $l_{pm}$  і  $d_{cr}$  зі зниженням температури термостата, роль розмірного ефекту в поперечній теплопровідності шаруватих структур зростає зі зниженням температури. Порівняння результатів отриманих у роботі показують, що відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплообміну в багатошаровій системі лише у випадку товстих шарів ферромагнітного ізолятора, у яких товщина шару значно більша за вільний пробіг фонон-магنونів. Для більш тонких шарів ферромагнітного ізолятора двотемпературне наближення дає лише якісно правильний результат для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури.

*П'ятий розділ.* На основі мікроскопічної моделі розглянуто перенесення тепла в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками при низьких температурах, коли електрони в металі термалізовані, а фонони – ні. Отримано аналітичний вираз для ефективної теплопровідності структур з довільною кількістю шарів, а також для надграток. Проаналізовано розмірний ефект теплопровідності і показано, що фононна механіка теплопровідності суттєво відрізняється для випадків товстих і тонких металевих шарів (у порівнянні з вільною довжиною фононів у металах). Отримані в роботі результати дають пояснення особливостей перенесення тепла в наноструктурах і є важливими для розробки наноструктурованих матеріалів для застосувань в області термоелектрики, спінової калоритроніки, плазмоніки та інших галузях.

***Головні наукові результати отримані у роботі, є наступними.***

1. Аналітично отримано рівняння для поперечного перенесення потоку тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками.

2. Обчислено ефективну поперечну теплопровідність шаруватої системи діелектрик-метал-діелектрик при довільному значенні товщини металевго шару.

3. Знайдено товщини, металевго шару, при яких в теплопровідності проявляється розмірний ефект.

4. На основі мікроскопічної теорії знайдену ефективну поперечну теплопровідності для гетероструктури діелектрик-метал-діелектрик, порівняно з ефективною поперечною теплопровідністю, отриманою у рамках напівфеноменологічної двотемпературної моделі, тобто в термінах електронної та фононної температур і з'ясовано, що умови, при яких двотемпературний підхід, що часто використовується, не може бути застосований.

5. Мікроскопічну теорію переносу енергії в багатошарових наноструктурах поширено на структури, що містять шар феромагнітного ізолятора.

6. Розраховано у двотемпературному наближенні ефективну теплопровідність перпендикулярну до шарів, тобто через магنونну та фононну температури.

7. Знайдено товщину, феромагнітного ізолятора, при якій розмірний ефект проявляється в теплопровідності.

8. Розглянуто перенесення тепла в системі металевих шарів, розділених діелектричним прошарком при низьких температурах.

9. Розраховано поперечну теплопровідності в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками.

10. Обчислено ефективну поперечну теплопровідність з довільною кількістю шарів, та проаналізовано розмірний ефект теплопровідності для випадків тонких і товстих шарі металу.

**Ключові слова:** гетероструктури, стаціонарне нагрівання, фононний теплообмін, низькі температури, спінтроніка, спінкалоритроніка, магنونіка,

магнон, фонон, спин-ізолятор, нанотрубка, термодинамічний потенціал, напівметали, напівпровідність, магнітне середовище, оператор спіну.



## ABSTRACT

**Mironenko I.V.** Kinetics of phonon and magnon transfer processes in heterogeneous nanostructures - Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

Thesis submitted for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Natural Sciences, Speciality 104 – Physics and Astronomy. – V. N. Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2023.

Heat transfer through multilayer heterostructures is the process of transferring heat through materials that consist of layers of different materials or heterostructures. This process is very important in many areas, including electronics, condensed matter physics, energy, and other industries. It has an important impact on the efficiency of various devices and technologies. In electronic devices, such as transistors and integrated circuits, heat can be transferred by electrons across the boundaries between layers of a heterostructure. It is important to control this process, as overheating can lead to a loss of performance and reduced durability of devices.

*This dissertation is devoted* to the kinetic analysis of transverse heat transfer in various heterogeneous nanostructures. The scientific aspect of the problem of thermal conductivity of multilayer systems is that Fourier's law  $Q = -k\nabla T$ , which relates the heat flow to the temperature gradient, cannot be directly applied to the analysis of heat transfer in layered nanostructures, where the phonon free path length is greater than or comparable to the layer thicknesses and where conditions at the boundary of adjacent materials have a significant effect on heat transfer. Thus, to describe heat flows in nanostructures, a microscopic approach is required, which, in particular, allows us to take into account the influence of interlayer boundaries on the thermal conductivity of a multilayer heterostructure. The analysis of the transverse thermal conductivity of the layered heterostructure is based on the Boltzmann kinetic equation for the phonon distribution function, as well as on the assumptions that the electrons on the film are thermalized due to electron-electron collisions and have a temperature. Since the heat transfer across the metal-dielectric interface is carried out by phonons, the boundary conditions for the phonon

distribution function play an important role in the analysis. These conditions must take into account both phonon reflection from the layer boundaries and phonon exchange between the metal and the dielectric. The temperature of the medium is assumed to be low enough so that, first, the electrons can be considered as thermalized, second, the collisions of phonons with lattice defects and with other phonons are not taken into account, and third, the tumbling processes in electron-phonon collisions are not taken into account. In addition, the field of magnon spintronics has emerged, dealing with structures, devices, and circuits that utilize the spin currents carried by magnons, quantum spin waves. Similar to conventional electric currents, magnon-based currents can be used for information transfer, transportation, and processing as an alternative to charge-current-driven spintronic devices. Recently, pure magnon spin currents in insulating ferromagnets have been proposed to realize efficient logic devices, characterized by the absence of joule heating and reduced spin wave attenuation. At the same time, spin waves can transfer heat in the same way that lattice excitations (phonons) transfer heat through perturbations of atomic positions.

This thesis consists of five chapters.

*In the first chapter*, the role of conduction electrons in the formation of effective acoustic transparency of the interface between narrow metal films and dielectric substrates with high thermal conductivity is discussed within the framework of the theory of acoustic incoherence between solids. The emission of phonons from metal films heated by current at low temperatures is considered. Theoretical consideration of these problems is carried out using kinetic equations for the phonon and electron distribution functions. In most cases, the connection between theoretical results and the existing experimental situation is discussed.

We consider the results of [118], which theoretically investigated the nonlinear relaxation between magnons and phonons in an insulating ferromagnet. Magnons and phonons were described by equilibrium Bose-Einstein distributions with different temperatures. The nonlinear heat flux from magnons to phonons was calculated microscopically in terms of Cherenkov radiation of phonons by magnons.

The results obtained in [118] in the field of spin-calorimetry were performed at the Department of Low Temperature Physics of Kharkiv National University. New directions in magnetoelectronics, such as spintronics, spin-caloritronics, and magnonics, which have emerged to reduce dissipation in conventional semiconductor microelectronics, are considered. The theoretical justifications developed in [118] are relevant for experiments with spin pumping at low temperatures and thermoelectric devices in which the magnon temperature is significantly higher than the phonon temperature.

*The second chapter of the thesis describes* the object and methods of studying heat transfer in heterogeneous nanostructures. Nanomaterials are not just another step in the miniaturization of materials or particles. Nanoscale heat transfer has been a popular topic for the past two decades. Thanks to recent advances in the synthesis of nanomaterials and the fabrication of nanostructures, nanoscale heat transfer will remain relevant in the future, playing an important role in information technology, energy conversion technologies, and biomedical engineering. A better understanding of the mechanisms of heat transfer over a large range is crucial for the development of such materials and devices to achieve better properties and performance. The Boltzmann phonon heat transfer equation (BTE) is a method capable of modeling phonon transport from ballistic to diffusive regimes, and a large amount of research has been done to develop numerical solutions for this equation. However, due to the limited computational efficiency of existing methods, the Boltzmann phonon transport equation faces difficulties when applied to complex problems with mode dependent, large spatial dimensions and large temperature disequilibria.

*The third section presents the results of the work.* First of all, we present a kinetic approach that considers the transverse heat transfer through a metal layer located between two massive dielectrics at low temperatures when the electrons in the metal layer are thermalized. This approach is analyzed on the basis of the Boltzmann kinetic equation for the phonon distribution function with boundary conditions that take into account the reflection and refraction of acoustic waves as

they pass through the interlayer interfaces. The effective transverse thermal conductivity of this layered system is calculated at an arbitrary value of the metal layer thickness. The thicknesses at which the size effect and its dependence on temperature appear in the thermal conductivity are found, which should be taken into account when creating electronic devices with submicron-sized elements.

The transverse effective thermal conductivity was calculated in the two-temperature (2TM) approximation, i.e., in terms of electronic and phonon temperatures. Comparison of the results shows that the relatively simple two-temperature approximation correctly describes the kinetics of heat transfer in a multilayer system only in the case of thick metal layers, when the layer thickness is much larger than the phonon-electron free path length. For thinner metal layers, the two-temperature approximation gives an incorrect expression for the effective transverse thermal conductivity of the layered structure, because at small thicknesses neither the phonon temperature nor the phonon thermal conductivity can be correctly introduced.

*In the fourth section,* we consider the kinetic approach to heat transfer by phonons and magnons through a layer of ferromagnetic insulator located between two massive insulators at low temperatures, when magnons in the ferromagnetic insulator layer are thermalized due to magnon-magnon collisions and have the temperature of magnons. The effective transverse thermal conductivity of this layered system with an arbitrary thickness of the ferromagnetic insulator layer, where the heat flux is carried by both magnons and phonons, is calculated, and the thickness at which the size effect manifests itself in thermal conductivity is found. It is noted that with increasing values of  $l_{pm}$  and  $d_{cr}$  with a decrease in the temperature of the thermostat, the role of the size effect in the transverse thermal conductivity of layered structures increases with decreasing temperature. Comparison of the results obtained in this work shows that the relatively simple two-temperature approximation correctly describes the kinetics of heat transfer in a multilayer system only in the case of thick layers of a ferromagnetic insulator, in which the layer

thickness is much larger than the free path of phonon magnets. For thinner layers of ferromagnetic insulator, the two-temperature approximation gives only a qualitatively correct result for the effective transverse thermal conductivity of the layered structure.

*Chapter 5.* The heat transfer in a system of metal layers separated by dielectric interlayers at low temperatures, when the electrons in the metal are thermalized and the phonons are not, is considered on the basis of a microscopic model. The analytical expression for the effective thermal conductivity of structures with an arbitrary number of layers, as well as for superlattices, is obtained. The dimensional effect of thermal conductivity is analyzed and it is shown that the phonon mechanics of thermal conductivity differs significantly for the cases of thick and thin metal layers (compared to the free phonon length in metals). The results obtained in this work provide an explanation of the peculiarities of heat transfer in nanostructures and are important for the development of nanostructured materials for applications in thermoelectrics, spin caloritronics, plasmonics, and other fields.

***The main scientific results obtained in the work are as follows.***

1. The equation for the transverse heat transfer through a metal layer located between two massive dielectrics is analytically derived.
2. The effective transverse thermal conductivity of a layered dielectric-metal-dielectric system at an arbitrary value of the metal layer thickness is calculated.
3. The thicknesses of the metal layer at which the dimensional effect is manifested in thermal conductivity are found.
4. The effective transverse thermal conductivity for the dielectric-metal-dielectric heterostructure was found on the basis of microscopic theory and compared with the effective transverse thermal conductivity obtained within the framework of the semiphenomenological two-temperature model, i.e., in terms of electronic and phonon temperatures, and it was found that the conditions under which the often used two-temperature approach cannot be applied.
5. The microscopic theory of energy transfer in multilayer nanostructures is extended to structures containing a layer of ferromagnetic insulator.

6. The effective thermal conductivity perpendicular to the layers, i.e. through the magnon and phonon temperatures, is calculated in the two-temperature approximation.

7. The thickness of a ferromagnetic insulator at which the size effect is manifested in thermal conductivity is found.

8. Heat transfer in a system of metal layers separated by a dielectric layer at low temperatures is considered.

9. The transverse thermal conductivity in a system of metal layers separated by dielectric layers is calculated.

10. The effective transverse thermal conductivity with an arbitrary number of layers is calculated, and the dimensional effect of thermal conductivity is analyzed for the cases of thin and thick metal layers.

**Key words:** heterostructures, stationary heating, phonon heat transfer, low temperatures, spintronics, spin-caloritronics, magnonics, magnon, phonon, spin insulator, nanotube, thermodynamic potential, semimetals, semiconductivity, magnetic environment, spin operator.

**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**  
**Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до**  
**міжнародних наукометричних баз Scopus:**

1. A. I. Bezuglyj, V. A. Shkovskij, R. V. Vovk, and **I. V. Mironenko**, Microscopic analysis of heat transfer in  $I_1/N/I_2$  heterogeneous nanostructures at low temperatures. Low Temperature Physics 45, 537 (2019), (Scopus, Q3).

DOI.org/10.1063/1.5097364

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці та обговоренні задачі, а також її розв'язання, технічне оформлення тексту роботи)*

2. V.A. Shklovskij, A.I. Bezuglyj, **I.V. Mironenko**, Heat transport in  $I_1/FI/I_2$  heterogeneous nanostructures at low temperatures / Phys. Rev. B 103, 024440 – 2021. (Scopus, Q1).

DOI.org/10.1103/PhysRevB.103.024440

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці, обговоренні та розв'язання поставленої задачі, проведенні теоретичних розрахунків, технічне оформлення тексту роботи)*

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. І.В.Мироненко, В.О.Шкловський, О.І.Безуглий, Р.В.Вовк, Мікроскопічний аналіз перенесення тепла в  $I_1/N/I_2$  гетерогенних наноструктурах при низьких температурах, *Фізичні явища в твердих тілах : матеріали XIV міжнародної наукової конференції* (3-5 груд. 2019 р. Харків). Харків : ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2019. С. 23.

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці та обговоренні задачі, а також її розв'язання, підготовлення матеріалів для конференції)*



## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....</b>	<b>19</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>20</b>
<b>РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ТЕОРІЙ ТА ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В ГЕТЕРОГЕННИХ СТРУКТУРАХ.....</b>	<b>28</b>
1.1. Стаціонарне нагрівання електронів за низьких температур .....	28
1.1.1 Механізм перенесення тепла через межі метал-діелектрик...29	29
1.1.2 Опис розрахунку швидкості тепловідведення через інтерфейс метал-діелектрик.....	32
1.1.3 Обговорення експериментальної ситуації.....	35
1.2 Магنون-фононні взаємодії у спін-ізоляторах.....	39
1.2.1 Нелінійна релаксація між магнонами та фононами в ізоляційних феромагнетиках.....	41
1.2.2 Основні результати.....	43
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1.....</b>	<b>46</b>
<b>РОЗДІЛ 2. ОБ'ЄКТИ І МЕТОДИКА ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ..</b>	<b>48</b>
2.1 Класифікація наноматеріалів.....	48
2.2 Тепловий транспорт у наноструктурах.....	49
2.3 Теорії для опису теплопередачі в наноматеріалах.....	52
2.4 Рівняння теплопровідності Больцмана (ВТЕ) у тонкій плівці.....	53
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2.....</b>	<b>56</b>
<b>РОЗДІЛ 3 МІКРОСКОПІЧНИЙ АНАЛІЗ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В <math>I_1/N/I_2</math> ГЕТЕРОГЕННИХ НАНОСТРУКТУР ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ.....</b>	<b>57</b>
3.1 Кінетичний метод поперечного перенесення тепла через $I_1/N/$ $I_2$ гетероструктуру.....	57

	18
3.2 Поперечна теплопровідність $I_1/N/I_2$ гетероструктури в двотемпературному наближенні.....	66
3.3 Обговорення отриманих результатів.....	70
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3.....</b>	<b>72</b>
<b>РОЗДІЛ 4 ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В ГЕТЕРОГЕННИХ НАНОСТРУКТУРАХ <math>I_1-FI-I_2</math> ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ.....</b>	<b>74</b>
4.1 Особливості перенесення тепла у шаруватій структурі, що містить шар феромагнітного ізолятора.....	74
4.2 Кінетичний метод теплопередачі через інтерфейси $I_1/FI/I_2$ .....	76
4.3 Теплопровідність $I_1/FI/I_2$ гетероструктура в двухтемпературному наближенні.....	84
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4.....</b>	<b>87</b>
<b>РОЗДІЛ 5 ЕФЕКТИВНА ПОПЕРЕЧНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ МУЛЬТИ-ШАРІВ МЕТАЛ-ДІЕЛЕКТРИК ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ.....</b>	<b>89</b>
5.1. Мікроскопічний підхід до аналізу поперечного теплообміну в системі з двома металевими шарами.....	89
5.2 Ефективна поперечна теплопровідність.....	95
5.2.1. Тонкі шари металу.....	96
5.2.2. Товсті шари металу.....	99
5.3 Обговорення результатів.....	101
<b>ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5.....</b>	<b>103</b>
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>104</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>107</b>
<b>ДОДАТОК А .....</b>	<b>125</b>
<b>ДОДАТОК Б. Функція розподілу фононів .....</b>	<b>126</b>

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ**

АЧТ – абсолютно чорне тіло

ЕФВ – електронно-фононна взаємодія

2ТМ – двотемпературна модель

ВТЕ – Рівняння переносу тепла Больцмана

FM – феромагнетик

FMI – феромагнітні ізолятори

GMR – гігантський магнітоопір

KLТ – нелінійна релаксація електронів на фононах Каганова, Ліфшица і

Танатарова

LD – Динаміка ґратки

LSSE – повздовжній спіновий ефект Зеєбека

MC – Метод Монте-Карло

MD – Молекулярна динаміка

NEGF – Нерівноважна функція Гріна

NM – немагнітний метал

SSE – спіновий ефект Зеєбека

YIG – залізний ітрієвий гранат

## ВСТУП

### Обґрунтування вибору теми дослідження

Останні роки характеризуються зростанням уваги до особливостей фізичних процесів у системах, які мають субмікронні розміри, що насамперед пов'язано з потребою зменшувати розміри електронних приладів та пристроїв. Теплопередача на нанорозмірах може істотно відрізнитися від теплообміну на макро- та мікромасштабах. Коли характерні масштаби довжини пристрою або структури стають порівнянними з середнім вільним пробігом і довжиною хвилі теплоносіїв (електронів, фотонів, фононів і молекул) або час, що має той самий порядок, що й час релаксації теплоносія, класичні закони більше не діють, і важливими стають розмірні ефекти.

З проблемою тепловідводу стикаються в нанoeлектроніці, де металеві або напівпровідникові шари використовують як елементи польових транзисторів [1,2]. Генеруючі спінові струми, які впливають на теплопереніс у шаруватих наноструктурах, що містять шар феромагнітного діелектрика, відіграють важливу роль в області спин-калоритроніки, що активно розвивається в останні роки [3,4]. Загальновідомими прикладами є неспроможність закону Фур'є  $Q = -k\nabla T$ , який зв'язує потік тепла з градієнтом температури, передбачити теплопровідність композитних наноструктур, де довжина вільного пробігу фононів більше або дорівнює порядку товщин шарів і відбиття фононів від границь контактуючих матеріалів, що істотно впливає на теплопереніс. Хоча останнім часом у цій галузі було багато зроблено, все ще існує нагальна потреба у глибшому вивченні теплових явищ у наноструктурах. Зазвичай існує два типи проблем. Одним з них є управління теплом, що виділяється в нанорозмірних пристроях, для підтримки функціональності та надійності цих пристроїв. Прикладами є проблеми з нагріванням інтегральних схем [5] і напівпровідникових лазерів [6]. Інший полягає у використанні наноструктур для управління потоком тепла та перетворення енергії. Приклади включають наноструктури для

термоелектричного та термоелектронного перетворення енергії [7, 8], для зберігання даних і для нанодіагностики. Як наслідок, для опису потоків тепла в наноструктурах потрібен мікроскопічний підхід.

### **Стан розробки тематики та пропозиції щодо подальших досліджень.**

Раніше теоретичний опис поперечної теплопровідності шаруватих структур проводився в основному в термінах фононної інтенсивності, тобто потоку енергії фононів у заданому напрямку. Такий опис звичайно супроводжувався неконтрольованим припущенням, що всі фононні моди мають один той самий час релаксації. Слід, однак, зауважити, що саме для тонких шарів наближення часу релаксації ( $\tau$ -наближення) із залежною від температури рівноважною функцією розподілу не є обґрунтованим, тому що фононну температуру шару не можна коректно ввести, якщо товщина шару менше або порядку довжини вільного пробігу фононів.

Таким чином, для аналізу процесів переносу тепла в наноструктурах потрібен послідовний кінетичний підхід, що не спирається на концепцію фононної температури й на  $\tau$ -наближення. У рамках такого підходу може бути розглянутий тепловідвід від металевих плівок, що лежать на діелектричних підкладках і поперечний переніс тепла через металеві (напівпровідникові) шари, розташовані між діелектриками. Аналіз поперечної теплопровідності шаруватой гетероструктури може бути заснований на кінетичному рівнянні Больцмана для фононної функції розподілу в припущенні, що електрони в плівці термалізовані внаслідок електрон-електронних зіткнень. Оскільки переніс тепла через границю "метал-діелектрик" здійснюється фононами, в аналізі важливу роль відіграють граничні умови для функції розподілу фононів. Ці умови повинні враховувати як відбиття фононів від границь шару, так і обмін фононами між металом і діелектриком. Температура середовища вважається досить низькою, щоб, по-перше, електрони можна було розглядати як термалізовані, по-друге, знехтувати зіткненнями фононів з дефектами решітки і з іншими фононами і, по-третє, знехтувати процесами перекидання при електрон-фононних зіткненнях. В стаціонарному режимі такий підхід до

опису процесів переносу тепла був розвинений в статтях [9] при аналізі енергетичної релаксації в  $I_1/N/I_2$  структурах. У цих статтях, не враховано градієнт електронної температури і не знайдено ефективний коефіцієнт поперечної теплопровідності. Такий коефіцієнт можна обчислити у рамках послідовного кінетичного підходу, що не спирається на уявлення про фононну температуру і на  $\tau$ -наближення. Для цього треба розглянути поперечний переніс тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками, що мають температури  $T_H$  і  $T_B$ , причому  $T_H > T_B$ . Разом з тим, оскільки пристрої наноелектроніки працюють насамперед у нестационарних режимах, необхідно поширити кінетичну теорію на випадок нестационарних зовнішніх умов.

Протягом останніх років велику увагу привернула спінова калоритроніка, яка вивчає взаємодію між спіновими та тепловими струмами в магнітних матеріалах [3,4,10]. Нещодавні відкриття, пов'язані з термічною спіноюю інжекцією за допомогою спінового ефекту Зеєбека [3,7,10,11,12], який може створювати густини спінового струму, які на два порядки більші, ніж ті, що створюються за допомогою електронних або резонансних підходів збудження. Наприклад, у контексті додатків перетворення енергії термічний спіновий транспорт забезпечує концептуально нові механізми для твердотільного перетворення теплової енергії на електричну, яка може бути використана для рекуперації відпрацьованого тепла та контролю температури [4]. Крім того, виникла галузь магنونної спінтроніки [13], що займається структурами, пристроями та схемами, які використовують спінові струми, що переносяться магнонами, кванти спінових хвиль. Подібно до звичайних електричних струмів, струми на основі магنونів можуть використовуватися для перенесення, транспортування і обробки інформації як альтернатива спінтронним пристроям, керованим зарядовим струмом [14, 15]. Нещодавно для реалізації ефективних логічних пристроїв було запропоновано чисті магنونні спінові струми в ізоляційних феромагнетиках, що відрізняються

відсутністю джоулевого нагрівання та зменшеним затуханням спінової хвилі [16]. У той же час спінові хвилі можуть переносити тепло так само, як збудження ґратки (фонони) переносять тепло через збурення положень атомів [17,18]. Перенесення тепла магнонами та їх релаксація на фононах стає особливо важливим у таких ізоляційних магнітних матеріалах, як, наприклад,  $Y_3Fe_5O_{12}$  (YIG) [19], на відміну від металевих феромагнетиків, у теплопровідності яких переважають електрони провідності.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна та є складовою частиною наступних держбюджетних наукових проєкту Міністерства освіти і науки України № держреєстрації 0118U002037 (Теоретичні та експериментальні дослідження роботи квантових лічильників окремих рентгенівських фотонів на базі високотемпературних надпровідників.) Також робота виконана за підтримки програми Європейського Союзу Horizon 2020 у рамках гранту № 644348 (дослідницька та інноваційна програма Марії Склодовської-Кюрі).

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертації є дослідження мікроскопічної теорії процесів поперечного переносу фононів і магнонів у шаруватих гетерогенних наноструктурах і застосування отриманих в дисертації результатів для аналізу експериментальних досліджень кінетики багатошарових систем.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні задачі.

1. Розглянути на основі мікроскопічної теорії поперечне перенесення потоку тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками за низьких температур, коли електрони в металевому шарі термалізовані.

2. Обчислити ефективну поперечну теплопровідність у шаруватій гетероструктурі діелектрик-метал-діелектрик при довільному значенні товщини металевого шару.

3. Знайти товщини, при яких у теплопровідності шаруватих наноструктур проявляється розмірний ефект.

4. Розрахувати поперечну ефективну теплопровідність в рамках феноменологічної двотемпературної (2TM) моделі, тобто в термінах електронної та фононної температур та порівняти її з отриманими на основі мікроскопічної моделі.

5. Мікроскопічну теорію переносу енергії в багатошарових наноструктурах поширити на структури, що містять шар феромагнітного ізолятора при низьких температурах, коли магнони в шарі феромагнітного ізолятора термалізовані внаслідок магнон-магنونних зіткнень і мають температуру магنونів.

6. Розрахувати ефективну поперечну теплопровідність шаруватої системи ізолятор-феромагнітний ізолято-ізолятор з довільною товщиною шару феромагнітного ізолятора.

7. Знайти товщину, при якій розмірний ефект проявляється в теплопровідності, порівняти отримані у роботі результати ефективної поперечної теплопровідності двотемпературного наближення з мікроскопічної моделю.

8. Розглянути перенесення тепла в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками при низьких температурах та умові термалізації електронної підсистеми в металевих шарах.

9. Отримати аналітичний вираз для ефективної теплопровідності структур з довільною кількістю шарів, а також для надграток.

10. Проаналізували розмірний ефект теплопровідності для випадків тонких і товстих шарів металу в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками.

**Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є наноматеріали та гетерогенні наноструктури.**

**Предметом дослідження є фізичні процеси перенесення тепла через гетерогенні наноструктури.**



**Методи дослідження.** У дисертації для теоретичного розрахунку ефективної теплопровідності у наноструктурах використовується кінетичне рівняння Больцмана, а також числові методи комп'ютерної математики та методи фізичного моделювання.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

1. Вперше отримано рівняння для фонового поперечного теплового потоку в шаруватих структурах з урахуванням відбиття та заломлення акустичних хвиль на міжшарових межах.

2. Вперше на мікроскопічному рівні розраховано ефективну поперечну теплопровідність для гетероструктур «діелектрик-метал-діелектрик», важливу для плазмоніки, яка слідує тенденції мініатюризації оптичних пристроїв і знаходить застосування в датчиках, мікроскопії, оптичному зв'язку та біофотоніці.

3. Вперше проаналізувано розмірний ефект теплопровідності шаруватих наноструктур для випадків тонких і товстих шарів металу.

4. Вперше на мікроскопічному рівні розраховано ефективну поперечну теплопровідність для гетероструктури «ізолятор-ферромагнітний ізолятор-ізолятор». Отримані результати теплопередачі відіграють важливу роль в галузі спінової калоритроніки.

5. Вперше проаналізувано розмірний ефект теплопровідності шаруватих наноструктур для випадків тонких і товстих шарів ферромагнітного ізолятора.

6. Вперше обчислено ефективну поперечну теплопровідність для гетероструктури «метал-діелектрик-метал» з довільною кількістю шарів.

### **Практичне значення отриманих результатів.**

1. Отримані результати можуть ефективно використовуватись для розв'язання важливої проблеми тепловідводу у наноелектроніці, де металеві або напівпровідникові шари використовуються як елементи тонкоплівкових польових транзисторів.

2. Отримані результати при розгляді гетероструктури діелектрик-метал-діелектрик дуже корисні в плазмоніці, де тепло в плазмонному контурі може

перевищувати або не перевищувати тепло, що виділяється складними електронними схемами. В плазмоніці зазвичай використовуються поверхневі плазмон-поляритони, які являють собою когерентні електронні коливання, що рухаються разом з електромагнітною хвилею вздовж межі розділу між діелектриком і металом.

3. Результати отримані при розгляді гетероструктури ізолятор-ферромагнітний ізолятор-ізолятор є актуальними для аналізу гібридних наноструктур та розробки спінових калоритронних пристроїв на основі магніонів.

4. Результати моделювання поперечного переносу тепла у гетероструктурі «метал-ізолятор-метал» можуть бути корисними у фізиці та техніці низьких температур, зокрема, для проектування та аналізу режимів роботи низькотемпературних електронних пристроїв із шаруватою структурою.

**Особистий внесок здобувача** у наукових працях, виданих у співавторстві [117,137], полягає в аналізі теоретичних та експериментальних результатів опублікованих раніше, проведенні теоретичних розрахунків, участі в обговоренні сенсу отриманих результатів, а також у підготовці публікацій за темою дисертації.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації були представлені на міжнародній конференції:

- XIV міжнародної наукової конференції (3-5 груд. 2019 р. Харків) - *Фізичні явища в твердих тілах.*

Публікації. Результати дисертації опубліковані у 2 наукових працях, у закордонному періодичному науковому виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази Scopus та 1 теза доповідей на міжнародних наукових конференціях.

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і одного додатку. Загальний обсяг роботи складає 128 сторінок (5.2 авторських

аркушів), з них текст основної частини становить 101 сторінок (4.2 авторських аркушів). Вона містить 4 рисунки. Список використаних джерел містить 137 найменувань.

Авторка дисертаційної роботи висловлює подяку всім співавторам робіт, на основі яких підготовлено дисертаційну роботу. Вдячна своєму вчителю, науковому керівнику доктору фізико – математичних наук професору Шкловському Валерію Олександровичу за надання знань з теоретичної фізики за допомогу у постановці задачі. Безуглому Олексію Івановичу за допомогу під час обговорення результатів дисертації. Декану фізичного факультету д. ф.-м. н., проф. Вовку Руслану Володимировичу за неоцінений досвід роботи на фізичному факультеті, колективу фізичного факультету Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за підтримку. А також родині, чоловіку Сергію за терпіння і підтримку, за вислуховування на всіх етапах написання дисертаційної роботи та навчання в аспірантурі й під час захисту дисертації. Окрема подяка висловлюється воїнам Збройних Сил України, які боронять нашу країну від окупаційних військ РФ чим дають змогу й надалі займатися наукою.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ІСНУЮЧИХ ТЕОРІЙ ТА ЕКСПЕРИМЕНТІВ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В ГЕТЕРОГЕННИХ СТРУКТУРАХ.

#### 1.1. Стаціонарне нагрівання електронів за низьких температур

Властивості шаруватих структур і керування тепловими потоками в таких структурах є сферою активних досліджень в останні десятиліття. Мініатюризація компонентів сучасних електронних пристроїв і збільшення їхньої робочої частоти призвели до збільшення щільності і інтенсивності джерел тепла і, як наслідок, до проблеми ефективного відведення тепла [1,5,20].

Так, наприклад, проблема тепловідведення надзвичайно важлива в наноелектроніці, де металеві або напівпровідникові шари використовуються як елементи тонкоплівкових польових транзисторів [1,5]. Шаруваті структури метал-напівпровідник є основою для плазмонних пристроїв, і нагрівання може позитивно впливати на роботу таких пристроїв [21,22]. У багатошарових системах, що містять шари феромагнетика, теплопередача відіграє важливу роль у спіновому ефекті Зеєбека і в усій галузі спінової калоритроніки [3,4,10]. Спінтроніка (або спінова електроніка) - це галузь електроніки, яка використовує спін (квантовий момент спіну) електронів, а не тільки їх заряд, для передачі, обробки та зберігання інформації. Спінтроніка розширює звичайну електроніку, де інформацію зазвичай кодують через заряди електронів, використовуючи спін як додатковий параметр. У цій галузі великий інтерес представляє поздовжній спіновий ефект Зеєбека (SSE), і поздовжній спіновий ефект Зеєбека (LSSE), які полягають в генерації спінового струму паралельно градієнту температури тепла, оскільки він може створювати густину спінового струму на два порядки більшу, ніж при електронному або резонансному збудженні [7,8].

Експериментальні результати LSSE дозволяють досліджувати кінетику взаємодіючих електронів, фононів і магнонів у багатошарових структурах.

Оскільки феромагнітні ізоляторні пластини (або плівки), нанесені на високотеплопровідні діелектричні підкладки, зазвичай вивчаються в експериментах LSSE, для правильного теоретичного опису також необхідно розглянути дві пов'язані проблеми. Проблема зниження теплопровідності шаруватих структур є цікавою, оскільки вона важлива для застосувань, де потрібна мінімізація теплового потоку між шарами (термоелектричні пристрої [23,24], теплоізоляційні покриття [25]). Розв'язання задач управління тепловим потоком неможливе без детального розуміння процесів, що визначають ефективну теплопровідність у гетерогенних наноструктурах.

### 1.1.1. Механізм перенесення тепла через межі метал- діелектрик

Дослідження теплового опору межі метал-діелектрик (М-Д) має довгу історію і виникло в зв'язку з багатьма фізичними явищами та практичними застосуваннями. Одним з ключових факторів, які впливають на тепловий опір М-Д, є різниця в теплопровідності між металом і діелектриком. Для експериментального вивчення такого опору (як і для отримання самих теплових імпульсів) широко використовується метод нагрівання електричним струмом тонких металевих плівок, нанесених на масивні монокристалічні підкладки з діелектрика. У таких експериментах, зазвичай, вимірюється величина і спектральна інтенсивність теплового потоку  $Q$ , що випромінюється плівкою  $Q$ , залежно від температури електронів  $T_e$  і підкладки  $T$  (температуру підкладки внаслідок реалізації балістичного режиму поширення випромінюваних плівкою фононів можна вважати рівною температурі гелієвої ванни). Температуру електронів  $T_e$  безпосередньо не вимірюють, а обчислюють за зміною електроопору плівки, користуючись відомою температурною залежністю останнього в рівноважному випадку [26].

Залежність  $Q = Q(T_e, T)$ , що отримується в таких експериментах, зазвичай інтерпретується в термінах запропонованої Літлом теорії температурного стрибка на межі двох твердих тіл [27]. Якщо  $T_e \ll \theta_D$  ( $\theta_D$ —

дебаївська температура металу), то результат Літгла можна записати у вигляді  $Q = A(T_e^4 - T^4)$ , де величина  $A$  визначається лише акустичними характеристиками металу та діелектрика, як заведено в теорії акустичної неузгодженості. Якщо  $\theta$  – кут падіння фонону на межу розділу середовищ, то величина  $A$  пропорційна усередненій по кутах прозорості межі  $\alpha(\theta)$ , що має сенс ймовірності проходження даного фонону через межу розділу М–Д. За такого підходу електронний внесок у тепловий опір межі М–Д відсутній.

Теорія акустичної неузгодженості є однією з аналітичних моделей, яка використовується для опису перенесення тепла на межі між твердими матеріалами, такими як метал і діелектрик [28]. Основна ідея цієї теорії полягає в порівнянні акустичних імпедансів матеріалів на межі, а також врахуванні впливу акустичного неузгодження на перенесення тепла. Проте ця теорія має свої обмеження, і одним з них є той факт, що вона не враховує електронні характеристики металу. Зворотній граничний випадок, коли мова йде про тонкі металеві пластини (плівки) між двома діелектриками (М–Д), може включати в себе дослідження теплопровідності в таких системах та особливості перенесення тепла через них. У таких структурах роль електронів дійсно може бути визначальною у формуванні температурного стрибка на межі М–Д. Робота Андрєєва [28] відображає важливий аспект теплопередачі на межі між металом і гелієм He II (рідкий гелій при дуже низьких температурах). В цій роботі було розглянуто вплив електронів на величину стрибка опору Капиці на межі метал-He II, особливо в умовах сильного акустичного неузгодження граничних середовищ. Механізм впливу електронів, який стає найбільш ефективним у випадку високої прозорості ( $\alpha \sim 1$ ), може бути менш помітним у випадку низької прозорості, коли ймовірність стрибка Капиці дуже низька, і основна частина теплової енергії залишається в металевому шарі. У цьому випадку електрони можуть впливати на перенесення тепла, оскільки мають більше можливостей взаємодіяти з

фононами і іншими частинками в металі та впливати на їхню енергетичну розподіленість.

Розглядаючи механізм перенесення тепла через межу розділу М-Д (в конфігурації типу «сендвіч» рис. 1.1. зі зменшенням товщини металевому шару (М), можна враховувати кілька важливих фізичних моментів, які можуть пояснити зростання електронного вкладу в перенесення тепла.

У досить чистих металах основними носіями тепла є електрони, а не фонони. Проте, перенесення тепла через таку межу відбувається в основному за допомогою фононів, якщо межа є акустично прозорою.

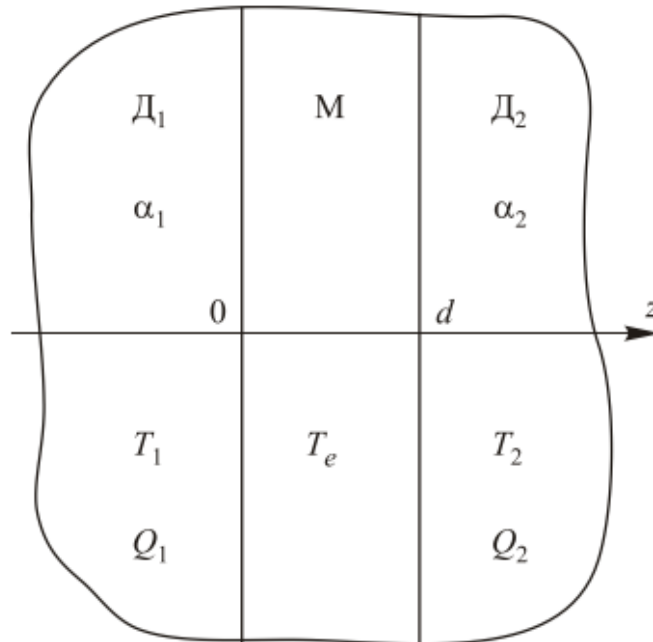


Рис. 1.1. Схематичний вигляд конфігурації Д1–М–Д2 (діелектрик-метал-діелектрик) типу "сендвіч",  $d$  – товщина металевієї плівки. Решта позначень – у тексті

Зазначений перехідний шар, в якому теплова енергія, перенесена електронами, перетворюється на потік фононів, є ключовим аспектом процесу перенесення тепла через межу між металом і діелектриком при низьких температурах. Описана товщина цього перехідного шару визначається величиною вільного пробігу  $l_{pe}(T_e)$  теплового фонону по відношенню до розсіювання на електронах і залежить від температури ( $T_e$ ), де  $l_{pe}(T_e) \sim$

$\hbar v_F/T_e \sim 10^{-3} - 10^{-4}$  см при гелієвих температурах. Якщо товщина металевої пластини ( $d$ ) значно більша за довжину вільного пробігу теплового фонону в металі ( $d \gg l_{pe}$ ), то ефекти, пов'язані з детальною структурою перехідного шару, можуть бути ігноровані при розрахунках теплоопору на межі М–Д. Цей підхід визначається умовою того, що фонони, переносячи тепло в перехідному шарі, ефективно розсіюються та передають тепло в діелектрик.

Якщо ж  $d \ll l_{pe}$ , а  $\alpha \sim 1$ , більшість фононів, випромінюваних електронами металу, встигають піти з плівки без перепоглинання в ній навіть після кількох послідовних відбивань від її межі.

Якщо товщина металевої пластини  $d$  значно менша за довжину вільного пробігу теплового фонону в металі  $l_{pe}$ , і величина  $\alpha$  (коефіцієнт прозорості) близький до одиниці  $\alpha \sim 1$ , то це означає, що більшість фононів, які випромінюються електронами металу, майже без перешкод проходять через металеву пластину і не поглинаються в ній, навіть після кількох послідовних відбивань від її меж. Таким чином, спектральний розподіл фононів, що випромінюються плівкою, більшою мірою містить інформацію про електрон-фононну взаємодію (ЕФВ) у металі, ніж про величину  $\alpha$  прозорості на межі М–Д.

Ці якісні міркування можна сформулювати на кінетичному рівні для кількісного опису розмірного ефекту тепловіддачі від тонких шарів металу в умовах балістичного поширення фононів, які випромінюються плівкою.

### **1.1.2. Опис розрахунку швидкості тепловідведення через інтерфейс метал-діелектрик**

Розглянемо металеву пластину (плівку) рис. 1.1. товщиною  $d$ , що знаходиться з обох сторін у контакті з масивними діелектриками Д1 та Д2, температури яких  $T_1$  та  $T_2$  відомі. Нехай через зразок тече постійний електричний струм  $j$ , тоді в одиниці об'єму виділяється потужність  $P = j^2/\sigma$ ,



де  $\sigma$  — провідність металу. Потрібно знайти величини теплових потоків  $Q_1$  і  $Q_2$ , якщо прозорості меж розділу для фононів  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  відомі.

Послідовний теоретичний розрахунок тепловіддачі пластини при практично довільному співвідношенні між її товщиною  $d$ , величиною  $l_{pe}(T_e)$  і параметрами прозорості виявляється можливим завдяки наявності в цій ситуації кількох фізичних обставин, що спрощують задачу.

Одне з них пов'язане з можливістю знехтувати неоднорідністю електронної функції розподілу по товщині плівки через незначну величину  $\lambda_p/\lambda_e \ll 1$ , де  $\lambda_p$  і  $\lambda_e$  – коефіцієнти теплопровідності фононів і електронів. Якщо характерні енергії електронів такі, що  $\lambda_e$  формується на довжині зіткнень електронів із домішками чи межами кристалітів плівки  $l_i$ , а  $\lambda_p$  визначається розсіюванням фононів на електронах, то попередня нерівність еквівалентна умові  $l_{pe}/l_d \gg 1$  і зазвичай в експерименті при  $T_e \ll \theta_D$  виконується з великим запасом. Тут  $l_d \sim (l_e l_i)^{1/2}$  – дифузійна довжина,  $l_e \sim l_{pe}(T)(\theta_D/T)^2$  – середня довжина вільного пробігу електрона з енергією  $\varepsilon \sim k_B T$  по відношенню до розсіювання на фононах ( $k_B$  – стала Больцмана).

Другою важливою спрощувальною обставиною є можливість ввести електронну температуру у разі, якщо  $T_e \ll \theta_D^2/\varepsilon_F$ , коли формування температурного фермієвського розподілу не може здійснюватися з допомогою прямих міжелектронних ударів. Таке введення  $T_e$  може бути обґрунтоване як у випадку  $d \ll l_{pe}$  [29,30], так і в випадку  $d \gg l_{pe}$  за рахунок ефективних міжелектронних зіткнень через фонони. Тому твердження про можливість введення  $T_e$  і у разі  $d \sim l_{pe}$  можна вважати досить надійною інтерполяцією згаданих вище граничних випадків, де воно доводиться суворо.

Обидві ці обставини дозволяють звести поставлену задачу до розв'язання кінетичного рівняння для фононної функції розподілу, після чого величина  $T_e$  як функція  $Q$  і  $T$  визначається з рівняння теплового балансу. Нарешті, ще одне важливе спрощення, яке особливо суттєво в актуальному для

нас випадку доброї прозорості ( $\alpha \sim 1$ ), пов'язане з можливістю сформулювати прості граничні умови для фононної функції розподілу. Як показано нижче, можливість балістичного поширення фононів, що випромінюються плівкою, не тільки істотно спрощує облік відведення тепла від зразка, а й створює умови для можливої реалізації розмірного ефекту.

Переходячи до кількісного формулювання задачі, виберемо напрямок осі  $z$  перпендикулярно межах розділу середовищ і нехай у площині  $x - y$  – задача просторово однорідна. Відповідно до сказаного вище запишемо кінетичне рівняння для функції фононного розподілу  $N(\mathbf{q}, z)$  ( $\mathbf{q}$  — імпульс фонону) у вигляді

$$s_z(\partial N / \partial z) = \hat{\nu}N \quad (1.1)$$

Тут  $s_z$  – проекція швидкості фонону на напрям осі  $z$ ,  $\hat{\nu}N$  – інтеграл зіткнень фононів з електронами, який у нашому випадку, коли функція розподілу електронів є рівноважною ферміївською з температурою  $T_e$ , зводиться до вигляду  $\nu_{pe}[n(T_e) - N(z)]$ , де  $n(T_e)$  – рівноважна бозевська функція з температурою  $T_e$ , а  $\nu_{pe}$  має сенс частоти зіткнення фонону з енергією  $\hbar\omega$  з електронами. У розглянутій нами найпростішій моделі електронів з квадратичним та ізотропним законами дисперсії та дебаївської моделі для фононів  $\nu_{pe}$  визначається величиною ЕФВ і пропорційна  $\omega$  ( $\nu_{pe} \sim \omega s / v_F$ ,  $v_F$  – ферміївська швидкість,  $s$  – швидкість поздовжнього звуку).

Опускаючи проміжні обчислення та аналіз функцій розподілу з  $q_z > 0$  та  $q_z < 0$ , тобто функцій  $N^>$  і  $N^<$  наведемо остаточний результат для теплового потоку  $Q_1$  (вираз для  $Q_2$  відрізняється лише зміною індексів 1 і 2 і має зворотний знак):

$$Q_1 = \sum_{q_z > 0} \alpha_1 \gamma (1 - \beta_2 x^2) [n(T_1) - n(T_e)] - \alpha_2 x [n(T_2) - n(T_e)] \quad (1.2)$$

де

$$x = \exp(-d/l), l = s_z / \nu_{pe}, \gamma = \hbar\omega_q s_z / (-\beta_1 \beta_2 x^2) \text{ і } \beta = 1 - \alpha.$$

Розмір  $T_e$  визначається з рівняння теплового балансу для електронів  $Q = Q_1 - Q_2$ , де  $Q = j^2 d / \sigma$  — повна густина потоку тепла, що проходить через межі металевої пластини.

Звернімося тепер до питання важливого для експериментів із тепловими імпульсами про теплове випромінювання нагріваємої струмом металевої плівки в середовище з температурою  $T$ . Існуючий зв'язок між  $Q_1$  і  $T_e$ , що впливає з (1.2) за умов  $T_1 = T_2 = T$ , можна подати в компактному вигляді, вводячи ефективну сумарну прозорість кордонів

$$Q = \sum_{q_z > 0} \tilde{\alpha}(q, d) \hbar \omega_q s_z [n(T_e) - n(T)], \quad (1.3)$$

де

$$\tilde{\alpha} = (1 - x) [\alpha_1 (1 + \beta_2 x) + \alpha_2 (1 + \beta_1 x)] / (-\beta_1 \beta_2 x^2). \quad (1.4)$$

Зазначимо, що на відміну від "затримуючих" прозоростей  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , які для спрощення формул вважали такими, що не залежать від кута падіння фонона на межу розділу, ефективна прозорість  $\tilde{\alpha}$  має кутову залежність від  $q$ , пов'язану з величиною  $x$ .

### 1.1.3. Обговорення експериментальної ситуації

Зробимо докладніший аналіз виразів (1.3) і (1.4), оскільки вони мають зв'язок спостережуваної в досліді залежності  $T_e(Q)$  [9] з товщиною плівки і параметрами прозорості. Попередньо визначивши залежний від електронної температури параметр  $\varepsilon$  за формулою  $\varepsilon = 2d\beta_1\beta_2/l_{pe}(T_e)(1 - \beta_1\beta_2)$ , так що  $\varepsilon \sim T_e$ .

Формули, що відповідають звичайній інтерпретації [26], що ігнорує електронний внесок у тепловий опір межі, виходять із (1.3) і (1.4) при  $\varepsilon > 2$ . Дійсно, у цій межі  $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2$  і за  $T_e \ll \Theta_D$ , тоді з (1.3) впливає добре відомий результат Літтла [27]:  $Q = A(T_e^4 - T^4)$ , де величина  $A$  визначається лише акустичними характеристиками металу та діелектрика так, як і в теорії акустичної неузгодженості. Тепловий режим плівки в цьому випадку

відповідає звичайному "джоулевому" нагріванню. Зокрема, спектр фононів, що випромінюються плівкою, є рівноважним з температурою  $T_e$ , так що максимуму його спектральної інтенсивності відповідає енергія  $\hbar\omega_m \sim 2,8T_e$ . За  $Q = \text{const } T_e$  не залежить від  $d$ .

Якщо розглянути зворотній граничний випадок, коли  $d \ll l_{pe}(T_e)$ , але нерівність  $d > \Lambda$ , де  $\Lambda = \Lambda(T_e)$  — довжина хвилі теплового фонону в металі, зберігається, що дозволяє не враховувати деформацію фононного спектру плівки. Нагадаємо, що у розглянутій «чистій» межі  $\Lambda/l_{pe} \sim s/v_F \ll 1$ , так що зазначена вище подвійна нерівність може бути виконана. Оскільки  $\varepsilon \ll 1$ , то величина  $T_e$  залежить від параметрів прозорості взагалі. У цьому граничному випадку, електронного перегріву, більшість фононів, випромінюваних електронами, встигає піти з плівки, не перепоглинаючись всередині неї, і електрони і ґратки можна описати за допомогою двох різних температур:  $T_e$  і  $T$  [31]. В роботі [31],  $Q = B(T_e^5 - T^5)$ , де константа  $B$  пов'язана з електронними характеристиками металу. Зауважимо, що останню формулу можна написати відразу, користуючись умовою теплового балансу, що й було вперше зроблено в роботі [31], проте наведений тут її висновок у рамках кінетичного підходу дозволяє з'ясувати границі її застосування в умовах стаціонарного нагрівання електричним струмом. Режим електронного перегріву в задачі, що нас цікавить, реалізується в «чистому вигляді» лише в тому випадку, коли параметр  $\varepsilon$  задовольняє умові  $\varepsilon \ll 1$ .

У роботі [9] описано також усі "проміжні" можливості, які реалізуються між граничними ситуаціями чисто електронного перегріву ( $\varepsilon \ll 1$ ) і "джоулевого" нагрівання ( $\varepsilon \gg 1$ ) зі збільшенням розсіяної потужності  $P$ , а отже, зі збільшенням параметра  $Q$ . Цікаво відзначити також, що в режимі електронного перегріву випромінювання фононів із плівки нерівноважне і максимуму його спектральної інтенсивності відповідає енергія  $\hbar\omega_m \approx 3,9T_e$ .

Щодо «джоулевого» нагрівання, незважаючи на рівняння  $Q = A(T_e^4 - T^4)$ , все ще не можна припустити, як зазвичай [27], що фонони в плівці

знаходяться в рівновазі з температурою  $T_e$ , бо така функція розподілу обертає на нуль інтеграл зіткнень електронів з фононами, а отже, і передану фононам потужність  $P$ . Як показує аналіз виразу для  $N(q, z)$  в роботі [9], фононна функція розподілу в режимі, що розглядається, є суттєво неоднорідною на масштабі  $l_{pe}(T_e)$ . Тому в разі «джоулевого» нагріву можна лише стверджувати, що функція розподілу вилітаючих із металу фононів  $N^>$  на межі плівки  $z = d$ , відповідає рівноважним фононам з температурою  $T_e$ .

Тепер перейдемо до аналізу функції  $T_e(Q)$ , використовуючи вирази (1.3) і (1.4). З (1.3) видно, що  $Q$  залежить від  $T$  лише через  $n(T_e)$ . Тоді легко побачити, що  $dQ/dT_e > 0$  і  $d^2Q/dT_e^2 < 0$ , тобто функція  $T_e(Q)$  у загальному випадку монотонна і "опукла вгору". Наближений вигляд цих функцій за різних значень прозорості показано на рис. 1.2. Менш похилі криві відповідають меншим значенням прозорості. Перехід від залежності  $T^4$  до  $T^5$  відбувається при  $\varepsilon \sim 1$ . Важливою особливістю кривих на рис. 1.2 є те, що залежність  $Q \sim T_e^5$ , яка відповідає чистому електронному нагріванню, лежить на рисунку нижче, ніж решта кривих (за винятком ділянок, де вони практично збігаються). Це означає, що на межі  $\varepsilon \ll 1$  тепловіддача від плівки є найефективнішою (мінімальна  $T_e$  при заданому  $Q$ ), тобто її вже не можна збільшити за рахунок покращення акустичного узгодження металу та підкладки.

Слід зазначити, що в експериментах [26, 32] узгодження плівки з підкладкою виявляється кращим, ніж очікується з теорії акустичної неузгодженості (що в нашому випадку відповідає ділянкам кривих з  $\varepsilon > 2$ ). Для інтерпретації цих результатів автори [26, 32] використовують так звану модель абсолютного чорного тіла (АЧТ), яка, взагалі кажучи, зовсім не є теоретично обґрунтованою у випадку  $\alpha \neq 1$ . Із вищесказаного випливає, що реально можливим режимом є такий, в якому, поки  $\varepsilon \ll 1$ , тепловідлення є максимальним і не залежить від коефіцієнтів прозорості. Однак, на відміну від

моделі АЧТ, в режимі електронного перегріву тепловиділення визначається лише параметрами металу, які відповідають за величину ЕФВ.

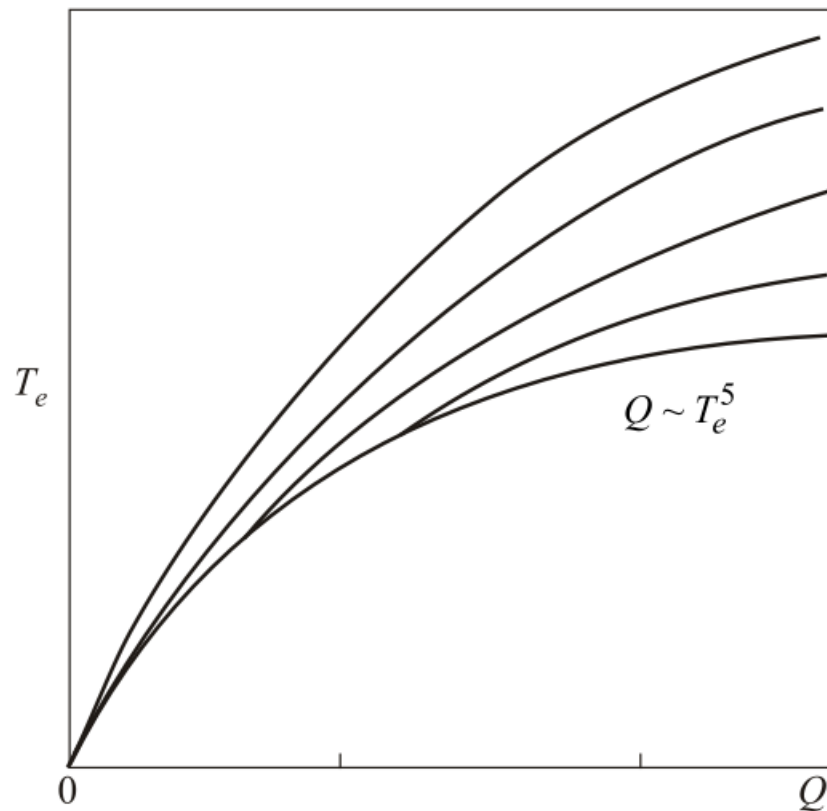


Рис. 1.2. Схематичний вид залежностей електронної температури  $T_e$  від величини теплового потоку  $Q$  до діелектрика при різних значеннях акустичної прозорості  $\alpha$  однієї з меж М-Д.

Відзначимо ще результати «аномальної» прозорості для плівок, напилених за кімнатної температури [26]. Зазвичай, досліджувана плівка напилюється на охолоджену підкладку (для плівок In, Sn, Al це легко помітити по невеликому зростанню температури надпровідного переходу) [26]. Така «аморфізація» плівки може суттєво ускладнити вихід фононів з неї і, отже, виконання умови  $\varepsilon \ll 1$ . Якщо плівки за своєю структурою близькі до масивного металу (напилювалися за кімнатної температури або добре відпалені) і затравальні прозорості  $\alpha$  не дуже малі, то, як показують оцінки, виконання умови  $\varepsilon \ll 1$  легко досяжно, як і пояснити результати [26] без залучення моделі АЧТ.

## 1.2. Магنون-фононні взаємодії у спін-ізоляторах

В епоху інформації та соціальних мереж удосконалення технологій зберігання та пам'яті пов'язане з появою високопродуктивних комп'ютерів і мобільних пристроїв, які дозволяють генерувати та зберігати величезну кількість інформації. У 1980-х роках комп'ютери відображали пам'ять у сотні кбайт, тоді як сьогодні найпоширеніші комп'ютери мають кілька порядків терабайт оперативної пам'яті. Ціна за ГБ жорсткого диска була знижена з 200 000 \$ в 1982 році до 0,06 \$ в 2012 році [33].

Фундаментальне питання полягає в тому, як продовжити прогрес електронних пристроїв з точки зору розміру, швидкості та зниження ціни, з додатковим завданням ефективної обробки та зберігання безупинно зростаючої кількості інформації. Постійна мініатюризація розміру пристрою для досягнення більшої щільності кола нерозривно пов'язана зі збільшенням розсіювання потужності через струми витоку [34], що значно обмежує вдосконалення електронних пристроїв. На цьому фоні новітні технології, які замінюють основну електроніку на основі заряду, є актуальною темою для дослідницьких спільнот і галузей.

Майбутні спінтронні пристрої повинні мати більш високу швидкість перемикання, нижче загальне споживання енергії та вищу щільність елементів схеми, що знижує виробництво тепла на перемикаючий елемент. Цього можна досягти, використовуючи спін електронів замість (або на додаток до) заряду. Спін відповідає додатковій квантово-механічній властивості електрона, яку можна описати як власний кутовий момент. Видатний прорив у галузі спінтроніки [35] стосується відкриття так званого ефекту гігантського магнітоопору (GMR), що вводить спін-залежний транспорт як новий фізичний підхід порівняно з відомим раніше магнітоопором. GMR було представлено незалежно лауреатами Нобелівської премії Альбертом Фертом і Петером Грюнбергом у 1988 році [36, 37], які повідомили про явища переносу, що залежать від спіну, у надбудовах, що складаються з магнітних і немагнітних

металевих шарів. Основна структура пристрою GMR, який розглядається як спіновий клапан, складається з двох феромагнітних (FM) шарів з різними магнітними перемикаючими полями, розділених шаром немагнітного металу (NM). Коли вектори намагніченості двох шарів FM паралельні, електрони зі спінами, паралельними намагніченості, майже не розсіюються, що призводить до стану низького електричного опору. При антипаралельному вирівнюванні електрони обох типів спіну зазнають значного розсіювання, що призводить до стану високого електричного опору. Поряд із цим незаперечним проривом у спінтроніці, Жюльєр та ін. [38] зрозуміли існування ефекту тунельного магнітоопору (GMR) у тришарі Fe/GeO/Co при 4,2 К.

Однак, незважаючи на цей прогрес, енергоспоживання все ще зростає, і з точки зору застосування це є найбільш складним аспектом у розвитку сучасних інформаційних технологій. Технології перетворення енергії забезпечують механізми трансформації надходження енергії (наприклад, тепла) у більш бажану та застосовну форму (наприклад, електрику), яка потенційно може бути використана для рекуперації відпрацьованого тепла та контролю температури. Спін-залежний електронний і тепловий транспорт у матеріалах обрамляється полем спінової калоритроніки [3,4,39,40], яка включена як додаткова галузь до встановленої галузі спінтроніки та термоелектрики. Перенесення заряду, намагніченості (спін) або тепла відбувається, коли відповідні частинки або квазічастинки (електрони, магнони або фонони) виводяться з термодинамічної рівноваги. Електрони провідності можуть бути використані для спінового транспорту за допомогою кількох механізмів, а також для транспортування теплової енергії через закон Відемана–Франца. Магнони, як бозонні квазічастинки, переносять лише тепло та обертаються через збурення локалізованих спінів у ґратці. Фонони, як подібні бозонні квазічастинки, з одного боку, вважаються переносниками тепла через збурення положень атомів. З іншого боку, вони здатні розсіювати та перетягувати електрони провідності та магнони і, таким чином, виводити ці



частинки з теплової рівноваги за наявності зовнішніх подразників, наприклад градієнта температури.

У галузі спінтроники та спінової калоритроніки різноманітні експериментальні та теоретичні дослідження були зосереджені на явищах спінового транспорту в двошарових системах NM/FM, де спіновий струм становить основну тему досліджень [3,4,35,39,40]. Генерація, маніпуляція та виявлення спін-поляризованих струмів у таких системах є дуже широким напрямком, який обіцяє реалізацію спінтронних пристроїв наступного покоління. Спостереження спінового ефекта Зеєбека SSE в ізоляторах FM (FMI) [11,41–47] дозволяє генерувати електричну напругу без теплових втрат, пов'язаних із рухливими носіями заряду, пропонуючи потенційну можливість застосування для нових функціональних пристроїв з точки зору збору енергії.

### **1.2.1. Нелінійна релаксація між магнонами та фононами в ізоляційних феромагнетиках**

Останніми роками велику увагу привернула спінова калоритроніка, яка вивчає взаємодію між спіновими та тепловими струмами в магнітних матеріалах [3,4,10]. Нещодавні відкриття, пов'язані з термічною спіноюю інжекцією за допомогою спінового ефекту Зеєбека [7,8,10-12], який може створювати густини спінового струму, які на два порядки більші, ніж ті, що створюються за допомогою електронних або резонансних підходів збудження. Наприклад, у контексті додатків перетворення енергії термічний спіновий транспорт забезпечує концептуально нові механізми для твердотілого перетворення теплової енергії на електричну, яка може бути використана для рекуперації відпрацьованого тепла та контролю температури [4]. Крім того, виникла галузь магنونної спінтроники [13], що займається структурами, пристроями та схемами, які використовують спінові струми, що переносяться магнонами, кванти спінових хвиль. Подібно до звичайних електричних струмів, струми на основі магنونів можуть використовуватися для перенесення, транспортування і обробки інформації як альтернатива

спінтронним пристроям, керованим зарядовим струмом [14,15]. Нещодавно для реалізації ефективних логічних пристроїв було запропоновано чисті магنونні спінові струми в ізоляційних феромагнетиках, що відрізняються відсутністю джоулевого нагрівання та зменшеним затуханням спінової хвилі [16]. У той же час спінові хвилі можуть переносити тепло так само, як збудження ґратки (фонони) переносять тепло через збурення положень атомів [17,18]. Перенесення тепла магнонами та їх релаксація на фононах стає особливо важливим у таких ізоляційних магнетичних матеріалах, як, наприклад,  $Y_3Fe_5O_{12}$  (YIG) [19], на відміну від металевих феромагнетиків, у теплопровідності яких переважають електрони провідності. У той час як електрон-фононна та магنون-фононна релаксація була присвячена серії теоретичних робіт [17,31,47–52], нелінійна релаксація магنونів на фононах досі не розглядалася теоретично. У цьому відношенні найбільш близькою доступною теоретичною роботою, яка схожа як за постановкою задачі, так і за схемою розв’язання, є проблема нелінійної релаксації електронів на фононах, розглянута Кагановим, Ліфшицем і Танатаровим (KLT) ще в 1956 році [31]. У цій роботі, яка досі є основною моделлю для аналізу експериментів з енергетичної релаксації збуджених електронів у металах [54,55], нелінійний тепловий струм  $Q$  від гарячих електронів при температурі  $T_e$  до холодних фононів при температурі  $T_p$  у металах розраховувався в рамках двотемпературної моделі, де  $T_e$  і  $T_p$  нижчі за температуру Дебая  $\Theta_D$ . Отримано нелінійний вираз для теплового струму  $Q = A(T_e^5 - T_p^5)$  від електронів до фононів, де  $A$  – константа, виражена через електропровідність і параметри ґратки металу [31]. Зокрема, результати КЛТ дозволили проаналізувати різні аспекти залежної від часу динаміки гарячих електронів у тонких металевих плівках при низьких температурах  $T \ll \Theta_D$  [51, 53]. У той же час, хоча існують феноменологічні описи спінової релаксації за межами лінійного режиму на основі рівняння Фоккера–Планка [56,57], досі проблема релаксації між магнонами та фононами в ізоляційних феромагнетиках розглядалася лише

мікроскопічно у лінійному режимі  $Q \sim T_s - T_l$ , де  $T_s$  – температура магنونів, а  $T_l$  – температура фононів. У той же самий час, в експериментах при низьких температурах [58–60] та/або при потужній спіновій накачці [61]  $T_s$  може бути істотно вищим за  $T_l$ . Особливо це виправдано у випадку сильних спінових струмів; розробка підходів до їх генерації є нині основним напрямком спінтроніки [62–64] та спінової калоритроніки [3,4,10]. Зокрема, хоча спінові вимірювання Зеєбека зазвичай проводяться на двошарах (наприклад, YIG і Pt), велика різниця між  $T_s$  і  $T_l$  має важливий вплив на тепловий струм через їх межу. Зокрема, нелінійність опору теплової межі (опору Капіци) [51, 65] стає найбільш вираженою при низьких температурах, і очікується, що це змінить розрахунок лінійної відповіді профілів температури фононів, електронів і магنونів, застосованих при кімнатній температурі [4]. Зокрема, у лінійному наближенні  $T$  відповідає співвідношенню Ньютона для теплового струму  $Q \approx R^{-1} \Delta T$ , де  $\Delta T = T_s - T_l$  і  $R(T)$  є аналогом опору Капіци, який змінюється як  $\sim 1/T^3$ . Очевидно, що  $R(T)$  зростає на три порядки при зниженні температури від 300 до 30 К, тоді як у низькотемпературному експерименті при 3 К його збільшення досягає  $10^6$  разів. Тому зрозуміло, що навіть не дуже – велика різниця між  $T_s$  і  $T_l$  сильно впливатиме на  $Q$  за низьких температур, що вимагає теоретичного пояснення нелінійного режиму.

### 1.2.2. Основні результати

Розглянуто наступну проблему, нелінійну релаксацію між спіновими хвилями (магнонами) і кристалічною решіткою (фононами) в ізоляційному феромагнетику. У феромагнетику магнони характеризуються температурою  $T_s$ , яка істотно перевищує температуру фононів  $T_l$ , тобто  $T_s > T_l$ . Час встановлення рівноваги магنونів у феромагнетику набагато менший, ніж час встановлення рівноваги між маггнонами та кристалічною решіткою [66]. Ця умова виправдана при температурах вище 1 К. Відповідно, магنونну підсистему розглядають у квазірівноважному режимі, який описується

звичайним розподілом Бозе–Ейнштейна  $n(\varepsilon_k/T_s) = [\exp(\varepsilon_k/T_s) - 1]^{-1}$ , де  $\varepsilon_k = \Theta_C k(ak)^2$  – закон дисперсії магنونів у довгохвильовій межі  $ka \ll 1$ , де  $\Theta_C$  – температура Кюрі,  $a$  – стала ґратки,  $k = |\mathbf{k}|$  – хвильовий вектор магнона. Теоретична задача полягає в отриманні мікроскопічно нелінійного теплового струму  $Q$  від гарячих магنونів при температурі  $T_s$  до холодних фононів при температурі  $T_l$ .

Для цього проводились обчислення зміни кількості фононів із заданим хвильовим вектором  $\mathbf{q}$  за одиницю часу  $(\dot{N}_{\mathbf{q}})_s$  через інтеграл фонон-магنونного зіткнення  $L_{ls}\{N, n\}$  [54], що описує поглинання або випромінювання

$$L_{ls}\{N, n\} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum |\psi_{sl}(\mathbf{q}, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|)|^2 \{ (N_{\mathbf{q}} + 1)(n_{\mathbf{k}} + 1)n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - N_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + 1) \} \delta(\hbar\omega_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}). \quad (1.5)$$

Тут  $|\psi_{sl}(\mathbf{q}, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|)|^2$  є елементом квадратної матриці ймовірності переходу. Він знаходиться [53]

$$|\psi_{sl}(\mathbf{q}, |\mathbf{k} + \mathbf{q}|)|^2 = \frac{\Theta_C^2}{N} \frac{\hbar}{\rho a^3 \omega_{\mathbf{q}}} a^4 \mathbf{k}^2 (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 \mathbf{q}^2, \quad (1.6)$$

де  $\rho = M/a^3$ ,  $M$  – маса магнітного іона,  $a$  – постійна ґратки,  $\Theta_C$  – температура Кюрі,  $N$  – кількість атомів,  $\omega_{\mathbf{q}} = s q$  – частота фононів із хвильовим вектором  $\mathbf{q}$ ,  $s$  – середня швидкість звуку,  $\delta$  – дельта-функція Дірака.

У рівнянні (1.5)  $N_{\mathbf{q}}$  і  $n_{\mathbf{k}}$  – рівноважний розподіл Бозе–Ейнштейна для фононів при температурі  $T_l$  і магنونів при температурі  $T_s$ , а саме:

$$N_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\exp[(\hbar\omega_{\mathbf{q}}/T_l) - 1]}, \quad n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_{\mathbf{k}}/T_s) - 1]}. \quad (1.7)$$

де  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \Theta_C (ak)^2$  – закон дисперсії магنونів у довгохвильовій межі  $ka \ll 1$ . У граничному випадку  $T_l = T_s$  з рівняння (1.5) випливає, що  $L_{ls}\{N, n\} = 0$ .

У результаті розрахунку виявляється шукана зміна числа фононів

$$\dot{N}_{\mathbf{q}} = D(T_s) \left[ n \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}}}{T_s} - n \frac{\varepsilon_{\mathbf{q}}}{T_l} \right] \sum_{p=1}^{\infty} (1 - e^{-px}) \int_{y_0}^{\infty} dy (yx + y^2) e^{-py} \quad (1.8)$$

де  $D(T_s) = (\Theta_C \Theta_D / 8\pi \hbar \Theta_p) (T_s / \Theta_C)^3$ ,  $\Theta_D = \hbar s / a$ ,  $\Theta_p = Ms^2$ ,  $x \equiv \varepsilon_{\mathbf{q}} / T_l \equiv \hbar \omega_{\mathbf{q}} / T_l$  та  $y_0 = \Theta_D^2 / 4T_s \Theta_C$ , яка відіграє роль ефективної зворотної температури. В інтегралі по безрозмірній енергії магнона  $y = \varepsilon_{\mathbf{k}} / T_s$  нижня межа інтегрування  $y_0$  відображає черенковський характер випромінювання фононів магнонами, а саме, лише магнони, енергія яких перевищує  $\Theta_D^2 / 4\Theta_C$ , можуть випромінювати фонони.

При переході від підсумовування по  $\mathbf{k}$  до інтегрування та після введення параметра “перегріву” магнонів  $\gamma = T_s / T_l$  тепловий струм  $Q = \sum_{\mathbf{q}} (\hbar \omega_{\mathbf{q}}) \dot{N}_{\mathbf{q}}$  від магнонів до фононів набуває вигляду магнонів  $(\dot{N}_{\mathbf{q}})_s = L_{ls} \{N, n\}$ . Враховуючи збереження імпульсу,  $L_{ls} \{N, n\}$  можна виразити як

$$Q = \frac{N}{8\pi^3} \frac{\Theta_D^2 \Theta_C}{2\hbar \Theta_p} \left( \frac{T_s}{\Theta_C} \right)^3 \left( \frac{T_s}{\Theta_D} \right)^4 K(p) \quad (1.9)$$

де

$$K(p) = \int_0^{\infty} \frac{u^3 du}{e^u - 1} [J_D(T_s, = u, y_0) - \gamma^{-4} J_D(T_s, = u/\gamma, y_0)] \quad (1.10)$$

та

$$J_D(T) = \sum_{p=1}^{\infty} (1 - e^{-px}) e^{-py} \left[ x \left( \frac{y_0}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \left( \frac{y_0^2}{p} + \frac{2y_0}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) \right]. \quad (1.11)$$

У той час як рівняння (1.9)–(1.11) справедливі при будь-якій довільній температурі  $T_l$ , коли  $T_s \ll \Theta_D$ , умова  $T_s \ll \Theta_D$  дозволяє істотно спростити рівняння (1.11) в межах низьких температур. Тобто, можна обмежитися  $p = 1$ , коли  $y_0(T_s) = \Theta_D^2 / 4T_s \Theta_C \gg 1$ , оскільки  $J_D(T_s) \sim e^{-2y_0} \ll 1$  для  $p = 2$ . А саме, при  $T_s \ll \Theta_D$

$$K(p = 1) = [\varphi_1 \Gamma(5) [1 + \mu^5 [\zeta(5, 1 + \mu) - \zeta(5)]] + \varphi_2 \Gamma(4) [1 + \mu^4 [\zeta(4, 1 + \mu) - \zeta(4)]]], \quad (1.12)$$

де  $\Gamma(n)$  – гамма-функція,  $\zeta(n, m)$  – узагальнена дзета-функція,  $\varphi_1 = e^{-y_0}(y_0 + 1)$  та  $\varphi_2 = e^{-y_0}(y_0^2 + 2y_0 + 2)$ ,  $\mu = 1/\gamma = T_l/T_s$ . Кінцевий результат для  $Q(p = 1)$  отримано шляхом підстановки рівняння (1.12) у рівняння (1.9).

Нарешті крім  $T_s \ll \Theta_D$  розглянемо граничний випадок  $\gamma \rightarrow 1$ , коли різниця між магنونною та фононною температурами мала, тобто  $(T_s - T_l) \ll T_s$ . Відповідно, для  $Q = AB = A(T_s/\Theta_C)^3[(T_s/\Theta_C)]^4 K(p = 1)$  з  $A = N/8\pi^3(\Theta_D^2\Theta_C/2\hbar\Theta_p)$  отримано  $B \approx 4T_s^6(T_s - T_l)/(\Theta_C^3\Theta_C^4)$ . Таким чином, лінійний режим  $Q \propto T_s - T_l$  відновлюється з рівняння (1.9) у граничному випадку  $T_s \ll \Theta_D$  та  $T_s - T_l \ll T_s$ . Цей лінійний режим відповідає  $\gamma \rightarrow 1$  і  $y_0 \rightarrow \infty$ .

Рівняння (1.9)–(1.11) описують нелінійний тепловий потік між магнонами та фононами в ізоляційному феромагнетик у випадку, коли стани магنونної та фононної підсистем описуються рівноважними розподілами Бозе–Ейнштейна з різними температурами  $T_s$  та  $T_l$  відповідно. Експериментально умова  $T_s > T_l$  може бути реалізована як наслідок, наприклад, параметричного накачування спінових хвиль в ізолюючих феромагнетиках. Теоретично постановка задачі, що розглядається, концептуально подібна до двотемпературної КЛТ-задачі [31] нелінійної релаксації між електронами та фононами в металевому зразку. Оскільки модель КЛТ широко використовується для аналізу експериментів з енергетичної релаксації збуджених електронів у металах [10, 54,55,66].

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

В рамках теорії акустичної неузгодженості між твердими тілами обговорюється роль електронів провідності в формуванні ефективної акустичної прозорості інтерфейсу між вузькими металевими плівками і діелектричними підкладками з високою теплопровідністю. Розглянуто випромінювання фононів з металевих плівок, що нагріваються струмом за низьких температур. Теоретичний розгляд цих задач проведено з

використанням кінетичних рівнянь для фононої та електронної функцій розподілу. У більшості випадків обговорено зв'язок між теоретичними результатами та існуючою експериментальною ситуацією.

В другій частині огляду розглянуто результати роботи [118], де теоретично дослідили нелінійну релаксацію між магнонами та фононами в ізоляційному феромагнетику. Магнони і фонони описувалися рівноважними розподілами Бозе-Ейнштейна з різними температурами. Нелінійний тепловий потік від магنونів до фононів розраховано мікроскопічно в термінах черенковського випромінювання фононів магнонами. Отримані результати в роботі [118] у галузі спінкалоритроніки, виконані на кафедрі фізики низьких температур Харківського національного університету. Розглянуто нові напрямки у магнітоелектроніці — спінтроніка, спінкалоритроніка та магنونіка, які виникли із метою зменшення дисипації у звичайній напівпровідниковій мікроелектроніці. Розроблені теоретичні обґрунтування в роботі [118] є актуальним для експериментів зі спіновою накачкою при низьких температурах і термоелектричних приладів, у яких температура магنونів істотно вища за фононну.

## РОЗДІЛ 2

### ОБ'ЄКТИ І МЕТОДИКА ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### 2.1. Класифікація наноматеріалів

Наноматеріали — це матеріали з принаймні одним зовнішнім розміром 100 нанометрів (нм) або менше або з внутрішньою структурою 100 нм або менше. Наноматеріали, які мають той самий склад, що й відомі матеріали в масовій формі, можуть мати інші фізико-хімічні властивості. Матеріали, зменшені до нанорозміру, можуть раптово продемонструвати зовсім інші властивості порівняно з тими, що вони показують на макромасштабі. Наприклад, непрозорі речовини стають прозорими (мідь); інертні матеріали стають каталізаторами (платина); стійкі матеріали перетворюються на горючі (алюміній); тверді речовини переходять у рідину при кімнатній температурі (золото); ізолятори стають провідниками (кремній).

Наноматеріали — це не просто ще один крок у мініатюризації матеріалів або частинок. Вони часто вимагають дуже різних підходів до виробництва. Існує кілька процесів створення наноматеріалів різних розмірів, класифікованих як «зверху вниз» і «знизу вгору».

Наноматеріали можна створювати методами «зверху вниз», створюючи дуже маленькі структури з більших шматочків матеріалу, наприклад, шляхом травлення для створення схем на поверхні кремнієвого мікрочіпа.

Вони також можуть бути створені методами «знизу вгору», атом за атомом або молекула за молекулою. Одним із способів зробити це є самозбірка, під час якої атоми або молекули об'єднуються в структуру завдяки своїм природним властивостям.

Наноматеріали можна класифікувати на основі їх розмірів, наприклад 0D, 1D та 2D структури. Нульвимірні (0D) наноматеріали є сферичними наночастинками і є найпростішим типом наноматеріалів. Приклади 0D наноматеріалів включають металеві наночастинки, такі як золото та срібло, наночастинки напівпровідників, такі як квантові точки, та наночастинки



оксидів, такі як діоксид титану [67]. Ці наноматеріали мають унікальні фізичні та хімічні властивості порівняно з їх об'ємними аналогами, такі як високе співвідношення поверхні до об'єму та ефекти квантового обмеження. Одновимірні (1D) наноматеріали, мають один вимір у нанорозмірному діапазоні. Приклади одновимірних наноматеріалів включають нанодроти, нанотрубки [68] та нанострижні [69]. Вуглецеві нанотрубки, кремнієві нанодроти та нанострижні з оксиду цинку є поширеними прикладами одновимірних наноматеріалів. Ці наноматеріали привабливі для використання в широкому діапазоні електричних, фотонних і накопичувальних програм завдяки їхнім відмінним механічним, електронним і оптичним можливостям, які є результатом їхньої одновимірної структури. Нарешті, ті наноматеріали, які ми досліджуємо в своїх роботах, це двовимірні (2D) наноматеріали, вони мають два виміри в нанорозмірному діапазоні. Двовимірна (2D) кристалічна решітка з плоскими листами товщиною лише в один атом, як у графенів [70], і тонкі плівки, що складаються з чергування шарів двох різних матеріалів, надграток [71-72]. Ці наноматеріали мають унікальні електронні, механічні та оптичні властивості, які роблять їх перспективними кандидатами для різноманітних застосувань, включаючи датчики, накопичувачі енергії і електронні пристрої.

## **2.2. Тепловий транспорт у наноструктурах**

За останні два десятиліття швидкий розвиток обробки нанорозмірних матеріалів створив великий інтерес до теплового транспорту в низькорозмірних наноматеріалах. Перенесення тепла в гетерогенних наноструктурах - це процес передачі тепла через матеріали, які складаються зі шарів різних матеріалів або гетероструктур. Дослідження перенесення тепла в багатошарових структурах є дуже важливими для багатьох галузей науки і технології. В галузі наноелектроніки та оптичної електроніки в гетероструктурах на основі напівпровідників і металів перенесення тепла може визначати ефективність електронних і оптичних пристроїв, таких як

транзистори, фотодетектори, лазери і світлодіоди. Оптимізація теплообміну грають ключову роль в їхній розробці. В області теплової електроніки вивчаються методи конвертації тепла в електричну енергію, і для цього важливо зрозуміти, як тепло переноситься в різних матеріалах і структурах. В науці про теплову інженерію і охолодження в розробці мікроелектронних пристроїв і компонентів систем охолодження важливе розуміння процесів теплообміну для керування тепловими режимами і запобігання перегріву. У наноматеріалів і нанокомпозитів може бути унікальні теплові властивості, і дослідження перенесення тепла в таких системах визначає їхні можливості для застосувань у сенсорах, теплообмінних пристроях, електроніці тощо. В деяких випадках, зокрема в термоелектричних матеріалах і в ефективних теплових ізоляторах, гетероструктури можуть бути виготовлені для зменшення перенесення тепла і поліпшення теплової ізоляції. Розглянемо особливості перенесення тепла в наноструктурах:

*Балістична теплопровідність* є фізичною властивістю матеріалів, яка описує, як ефективно тепло передається через них за допомогою "балістичних" механізмів, де теплові фонони рухаються практично без розсіювання. Для наноматеріалів ця властивість може бути істотною через особливості їхньої структури та розміру. Однією з основних особливостей наноматеріалів є зменшення розміру та відповідний збільшений вплив квантових ефектів на їхню електронну та фононну структури. У наноматеріалах може спостерігатися більша міжфазова межа, і це може призводити до зменшення балістичної теплопровідності. Крім того, розмірні обмеження наноматеріалів можуть спричиняти зменшення можливостей для вільного руху фононів. Однак існують певні наноматеріали, такі як нанотрубки та графен, які можуть мати високу балістичну теплопровідність завдяки їхній унікальній структурі та електронним властивостям.

*Контактний тепловий опір*, відомий також як тепловий опір Капиці, виникає внаслідок переходу тепла між двома тілами через контактну площу між ними. У типовому твердому тілі швидкість звуку на порядок вища, ніж у

рідкому *He*. Тому імпульси фононів у твердому тілі сильно відрізняються від імпульсів в рідкому *He* при тій самій температурі. Фонони, що стикаються з поверхнею розділу, не можуть вільно проходити, оскільки енергія та імпульс не можуть зберігатися при довільних кутах падіння. Таким чином передача фононної енергії через межу розділу перешкоджається, і цей імпеданс відображається на зміні температури на поверхні розділу щоразу, коли теплова енергія транспортується через неї [73].

*Розсіювання частинок на межах наноструктур.* Розсіювання фононів та електронів на межах наноструктур може впливати на теплопровідність. Розсіювання може бути дзеркальним або дифузним, і це визначає характер переносу тепла [74].

*Квантово-розмірні структури* [74-75]. У наноструктурах зі зменшеними розмірами, наприклад, квантово-краплі або квантові точки, квантові ефекти можуть бути суттєвими. Електрони та фонони можуть мати квантовані енергійні рівні, і це може впливати на теплопровідність та інші теплові властивості.

Наноструктури з високою теплопровідністю можуть бути застосовані для розсіювання тепла. Для прискорення застосування наноструктури в терморегулюванні необхідне всебічне дослідження, що поєднує теоретичне моделювання, обчислювальне моделювання і експериментальні дослідження.

Крім великого інтересу до застосувань, існує також інтерес до досліджень теплопровідності в системах низької розмірності. Теплопровідність — одне з найважливіших фундаментальних фізичних явищ у природі. Традиційно вважається, що тепловий потік через однорідний матеріал відповідає закону Фур'є, який стверджує, що тепловий потік пропорційний градієнту температури вздовж шляху теплового потоку, як  $Q = -k\nabla T$   $k$ - коефіцієнт теплопровідності. Теплопровідність матеріалу визначає кількість тепла, яка переноситься через матеріал при певному градієнті

температури. Цей закон є добре відомим і застосовується в багатьох галузях, де важливо розуміти процеси передачі тепла через матеріали.

Проте за останні кілька десятиліть було виявлено, що закон Фур'є порушується в низькорозмірних ґратках [76-78]. Наномасштабних структурах можуть виникати відмінності в теплопровідності через квантові ефекти, взаємодію електронів і фононів, а також інші фізичні процеси, які потребують більш детального моделювання і дослідження.

### 2.3. Теорії для опису теплопередачі в наноматеріалах

В останні роки були розроблені деякі теорії для опису теплопередачі в наноматеріалах [79-81]. Деякі з основних методів та підходів до дослідження теплопередачі в наноматеріалах включають наступні структурні елементи.

*Молекулярна динаміка (MD)* [82]: MD-симуляції дозволяють моделювати рух атомів і молекул у матеріалах і вивчати теплопередачу на молекулярному рівні.

*Метод Монте-Карло (MC)* [83]: MC-симуляції використовуються для моделювання випадкових процесів теплопередачі та дослідження статистичних властивостей.

*Динаміка ґратки (LD)* [84]: Цей метод використовує акустичні та оптичні вібрації у ґратці атомів для моделювання теплопередачі.

*Нерівноважна функція Гріна (NEGF)* [85]: NEGF використовується для дослідження електронного і теплового транспорту у наноструктурах, зокрема у квантових точках і нанодротах.

*Рівняння переносу тепла Больцмана (BTE)* [86]: BTE використовується для моделювання теплопередачі в напівпровідникових і металевих матеріалах.

Крім того, у міру розвитку мікро- та нанотехнологій повідомляється про все більше експериментальних вимірювань теплових властивостей наноматеріалів. Поєднання теоретичних, симуляційних та експериментальних досліджень безумовно прискорить наше розуміння теплопровідності в нанорозмірах.

## 2.4. Рівняння теплопровідності Больцмана (ВТЕ) у тонкій плівці

За останні два десятиліття теплоперенесення в тонких твердих плівках товщиною від десятків нанометрів до мікрометрів стало темою значної важливості [5,87]. Такі плівки використовуються в різних сферах застосування, починаючи від лазерів на квантових ямах і закінчуючи електронними пристроями [88]. Наприклад, граничне розсіювання в цих плівках призводить до зниження теплопровідності, що призводить до неефективного відведення тепла в транзисторах і світлодіодах [89]. Щоб розв'язати ці та інші проблеми, спочатку необхідно зрозуміти фундаментальну фізику теплопровідності в мікромасштабних твердих тонких плівках. Перенесення тепла в тонких плівках із товщиною, порівнянною з довжиною вільного пробігу фононів, регулюється рівнянням переносу тепла Больцмана.

Рівняння переносу тепла Больцмана (ВТЕ) — це інтегродиференціальне рівняння часу, реального простору та фазового простору, яке описує широкий спектр явищ у багатьох галузях, починаючи від астрономії до переносу нейтронів [90–91].

Фонони, так як і електрони, рухаються, змінюючи своє положення та імпульс, оскільки вони піддаються дифузії, зовнішнім полям і зіткненням. Вони підкоряються загальному рівнянню, яке є рівнянням Больцмана [92].

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{force} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{diff} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \quad (2.1)$$

де термін «force» відповідає силам, які діють на частинки через зовнішній вплив (а не між самими частинками), термін «diff» представляє дифузію частинок, а «coll» є терміном зіткнення – враховуючи сили діючи між частинками при зіткненнях. Рівняння (2.1) стає рівнянням Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \nabla f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} \quad (2.2)$$

У цьому контексті  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  — силове поле, що діє на частинки в рідині, а  $m$  — маса частинок. Термін у правій частині додано для опису ефекту

зіткнень між частинками; якщо він дорівнює нулю, то частинки не стикаються.

Рівняння (2.2) корисніше, ніж основне вище, але все ще неповне, оскільки  $f$  неможливо розв'язати, якщо не відомий член зіткнення в  $f$ . Цей термін не можна знайти так само просто чи загально, як інші – це статистичний термін, що представляє зіткнення частинок, і вимагає знання статистики, якій підкоряються частинки, такої як розподіл Максвелла–Больцмана, Фермі–Дірака чи Бозе–Ейнштейна.

Коли члени зіткнень записані в явному вигляді, рівняння Больцмана набуває інтегродиференціальної форми. Як уже було сказано, це рівняння часто розв'язують у наближенні часу релаксації для легкого порівняння з експериментальними даними. В наступних розділах нами детально розглянуто рівняння Больцмана для фононів та його розв'язку в наближенні часу релаксації.

Фонони - це квазічастинки, що вводяться в гармонічне наближення коливань ґратки квантуванням коливальних мод. Згадаймо, що квазічастинки виникають, коли мікроскопічна система, наприклад, тверде тіло, моделюється сукупністю різних слабо взаємодіючих частинок у вільному просторі, що відповідає об'єму, який займає система. Таким чином, сукупність фононів є газом, де квазічастинки взаємодіють, створюючи тепловий транспорт у ґратці. Кубічні члени відповідної функції гамільтоніана дають трифононні процеси, які розрізняються на нормальні та фононні процеси перекидання. Перекидні процеси можуть передавати імпульс ґратці в цілому, погіршуючи тепловий струм.

Рівняння Больцмана вперше було використано для опису фононів у твердих тілах Пайерлсом у 1929 році [93]. У 1958 році Енглман отримав аналітичні рішення ВТЕ з простішими умовами зіткнення для опису теорії переносу температурних хвиль в ізоляторах [94]. Пізніше Вільямс розширив теорію Енглмана й отримав простіші форми розв'язку [95].

У 1960-х і 1970-х роках Саймонс розробив теорію високочастотних теплових хвиль в діелектриках, в яких фонони можуть зазнавати як нормальних, так і резистивних процесів взаємодії на основі рівняння переносу тепла Больцмана (BTE) [96]. Десятиліттям пізніше рівняння Больцмана було повторно досліджено Механом і Кларо [97] для вивчення ефектів нелокального теплообміну під час перехідного нагрівання. Маджумдар вивів рівняння переносу фононного випромінювання з (BTE) [98], яке було застосовано для дослідження теплообміну через тонкі плівки алмазу як для стаціонарного, так і для перехідних випадків [99]. Чен продемонстрував невиконання закону Фур'є в непланарних наноструктурах і запропонував загальне рішення для підвищення температури нанометрових і мікрометрових частинок, що генерують тепло, вбудованих у головне середовище на основі (BTE). Пізніше він вивів рівняння балістично-дифузійної теплопровідності з (BTE), які давали краще наближення, ніж закон Фур'є в малих масштабах, але було набагато простіше для вирішення, ніж (BTE) [79]. Потім ця двоканальна модель була використана для вирішення кількох планарномасштабних задач теплопровідності [100]. Нещодавно Miranda та ін. отримав визначальне рівняння для теплопровідності, отримане з точного розв'язку (BTE) шляхом розкладання в ряд [101]. Незважаючи на ці значні зусилля з вивчення фононного транспорту за допомогою (BTE), більшість попередніх підходів залежали від спрощень, щоб зробити проблему вирішуваною. Наприклад, усі роботи, згадані вище, припускали довжину вільного пробігу одного фонону, хоча останні роботи показали, що транспортні властивості фононів у твердих тілах сильно змінюються в широкому тепловому спектрі [102]. Крім того, наведені вище розв'язки передбачають прості одновимірні (1D) геометрії, які рідко зустрічаються на практиці. Ряд числових підходів може вирішити ці проблеми [98,100].

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Нанотехнології відкривають безліч можливостей для створення наноструктурованих матеріалів з високою щільністю контрольованих інтерфейсів між різними складовими матеріалами. Перенесення енергії через межі розділу часто включає відбиття та дифракцію носіїв енергії. Коли складові матеріали на межі поділу різні, носії енергії також різні, і зв'язок між різними носіями енергії, наприклад електронами та фононами, магнонами та фононами є дуже важливим. Те, як енергія поєднується та транспортується через інтерфейси між різними групами носіїв енергії, залишається відкритою проблемою. Існують різні типи інтерфейсів, що представляють науковий та інженерний інтерес, наприклад, надпровідник/метал-ізолятор, феромагнетик/ізолятор. Розуміння основ транспортування енергії через інтерфейси є ключем до прориву в розробці нових матеріалів для високоефективного перетворення енергії та управління температурою. В останнє десятиліття було продемонстровано, що рівняння Больцмана є дійсним і корисним інструментом для вивчення ефекту класичного розміру фононного транспорту на нанорозмірі. Фононне рівняння переносу Больцмана (BTE) це метод, здатний моделювати перенесення фононів від балістичного до дифузійного режимів, і велика кількість досліджень була зроблена для розробки чисельних розрахунків для цього рівняння. Однак, через обмежену обчислювальну ефективність існуючих методів, фононне рівняння переносу Больцмана стикається з труднощами при застосуванні до складних задач, що залежать від моди, великими просторовими розмірами і великою температурною нерівновагою. У наступних розділах ми використовуємо рівняння Больцмана фононної функції розподілу, щоб обчислити поперечний потік тепла для трьох різних гетороструктур, а саме діелектрик-метал-діелектрик, ізолятор-феромагнітний ізолятор-ізолятор та метал-діелектрик-метал.



## РОЗДІЛ 3

### МІКРОСКОПІЧНИЙ АНАЛІЗ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В $I_1/N/I_2$ ГЕТЕРОГЕННИХ НАНОСТРУКТУР ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

#### 3.1. Кінетичний метод поперечного перенесення тепла через $I_1/N/I_2$ гетероструктуру

У даному розділі нами розглядається послідовний кінетичний підхід, що не спирається на уявлення про фононну температуру і на  $\tau$ - наближення. У рамках цього підходу розглянуто поперечне перенесення тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками, що мають температури  $T_H$  і  $T_B$ , причому  $T_H > T_B$ .

Аналіз поперечної теплопровідності шаруватої гетероструктури заснований на кінетичному рівнянні Больцмана для фононної функції розподілу  $N_q$ , а також на припущення, що електрони на плівці термалізовані внаслідок електрон-електронних зіткнень і мають температуру  $T_e$ . Передбачається, що фонони взаємодіють із електронами, але при описі електрон-фононної взаємодії фононна температура не вводиться. Оскільки перенесення тепла через  $N/I$ -границю здійснюється фононами, в аналізі важливу роль відіграють граничні умови для функції  $N_q$ . Ці умови враховують як відображення фононів від меж плівки, і обмін фононами між плівкою і масивними обкладками з температурами  $T_H$  і  $T_B$  [9]. Надалі температури обкладок вважаються досить низькими, внаслідок чого, по-перше, електрони можна вважати термалізованими, по-друге, знехтувати зіткненнями фононів з дефектами ґратки і один з одним і, по-третє, знехтувати процесами перекидання при електрон-фононних зіткненнях. Відзначимо, що відносна простота розглянутої мікроскопічної моделі дає можливість отримати результати в аналітичній формі. Якщо в наших розрахунках вважати, що частота фонон-електронних зіткнень дорівнює нулю, то ми приходимо до

випадку діелектричного (напівпровідникового) прошарку, де перенесення тепла здійснюється лише фононами. Товщина такого прошарку має бути досить мала, тому що ми не враховуємо розсіювання фононів на дефектах решітки та фонон-фононні зіткнення, вважаючи, що основним механізмом розсіювання фононів є їхня взаємодія з межами. При виконанні цих умов, які не є дуже жорсткими за низьких температур, можна порівняти результати цієї роботи з результатами, отриманими на підставі підходу, в якому фононна теплопровідність розглядається в термінах подібних до радіаційного переносу [98].

Розглянемо відносно просту гетероструктуру, зображену на рис. 3.1. Переходячи до формулювання моделі, припустимо, що діелектрик  $I_1$  має температуру  $T_B$ , а температура діелектрика  $I_2$  дорівнює  $T_H$  причому  $T_H > T_B$ . Фононний внесок у перенесення тепла через гетероструктуру було знайдено у припущенні, що електрони термалізовані внаслідок електронних зіткнень і мають температуру  $T_e$ .

Умовою термалізації електронної підсистеми є більш висока частота електронних зіткнень порівняно з частотою зіткнень електронів з фононами. В області низьких температур  $T_e \ll \theta_D$  для чистих металів ця умова виконується, якщо  $T_e \ll \theta_D^2/T_F$ , де  $\theta_D$  – температура Дебая, а  $T_F$  – температура Фермі. У чистих металах електронна підсистема термалізована при температурах порядку одиниць кельвінів, а у брудних металах через посилення електрон-електронної та ослаблення електрон-фононної взаємодії умова термалізації електронів виконується при  $T_e \lesssim 10K$  [103].

Щоб обчислити поперечний потік тепла в гетероструктурі, що розглядається, потрібно знайти функцію розподілу для фононів в  $N$ -шарі. Рівняння Больцмана для фононної функції розподілу має вигляд

$$\pm s_{nz} \frac{dN_q^{\approx}}{dz} + v_{nq} N_q^{\approx} = v_{nq} n_q [T_e(z)], \quad (3.1)$$

де  $n_q(T) = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_q}{T}\right) - 1 \right]^{-1}$  — функція розподілу Бозе - Ейнштейна,  $\nu_{nq}$  — частота зіткнень поздовжніх фононів з електронами, а  $s_{nz}$ - проекція швидкості фонона на вісь  $z$ , яка спрямована перпендикулярно до шарів.

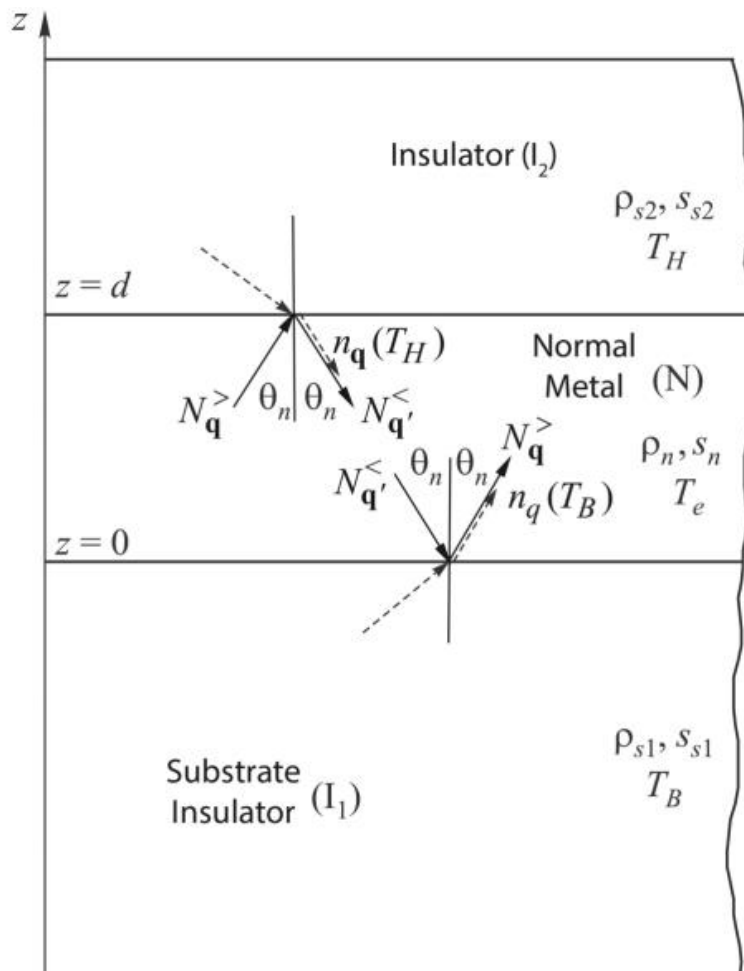


Рис. 3.1 Заломлення та відбиття фононних мод на межах середовищ у шаруватій структурі  $I_1/N/I_2$ . Числа заповнення фононних станів із хвильовими векторами  $\mathbf{q}$  позначені через  $N_{\mathbf{q}}^{\lessgtr}$ . Верхній індекс  $>$  означає фонони з позитивною  $z$ -компонентною вектора  $\mathbf{q}$ , а знак  $<$  — фонони з негативною  $z$ -компонентною вектора  $\mathbf{q}$ . Фонони, що переходять з діелектричних шарів в  $N$ -шар, показані штриховими лініями. Літерами  $\rho$  і  $s$  позначені густина та швидкість поздовжнього звуку відповідних середовищ.  $T_B$  — це температура масивної підкладки, яка грає роль термостата,  $T_e$  — температура електронів, а  $T_H$  — температура верхньої діелектричної обкладки  $T_H > T_B$ .

Граничні умови при  $z = 0$  і при  $z = d$  мають вигляд

$$N_{\mathbf{q}}^{\lessgtr}(0) = \alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 N_{\mathbf{q}}^{\lessgtr}(d), \quad (3.2)$$

$$N_{\mathbf{q}}^{\leq}(d) = \alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 N_{\mathbf{q}}^{\geq}(d). \quad (3.3)$$

Тут  $\alpha_{1(2)}$  та  $\beta_{1(2)}$ — коефіцієнти падіння та відбиття для межі  $I_1/N(I_2/N)$ . У записі граничних умов хвильові вектори  $\mathbf{q}$  і  $\mathbf{q}'$  представляють фонони, що мають позитивну або негативну  $z$ -компоненту хвильового вектора:  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z > 0)$ ,  $\mathbf{q}' = (q_x, q_y, -q_z)$ .

Зауважимо, що умови (3.2) і (3.3) допускають, що фонони, що вилетіли з шару  $N$  в діелектрик, назад вже не повертаються. Така картина характерна для монокристалічних діелектриків із високою теплопровідністю.

У моделі акустичної неузгодженості [27,104,105] ймовірність проходження  $\alpha$  залежить від кута падіння фонону  $\theta$  та акустичних імпедансів суміжних середовищ  $Z = \rho s$  і  $Z' = \rho' s'$ :

$$\alpha(\theta) = \frac{4ZZ' \cos\theta \cos\theta'}{(Z \cos\theta' + Z' \cos\theta)^2}, \quad (3.4)$$

Кути падіння та заломлення пов'язані співвідношенням  $s' \sin\theta = s \sin\theta'$ .

Рівняння для  $N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z)$ ,

$$\frac{N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z)}{dz} + \frac{1}{l_n} N_{\mathbf{q}}^{\geq} = \frac{1}{l_n} n_q(T_e(z)) \quad (3.5)$$

має розв'язок

$$N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z) = C_{\mathbf{q}}^{\geq} e^{-z/l_n} + \int_0^z \frac{1}{l_n} e^{-(z-z')/l_n} n_q(T_e(z')) dz', \quad (3.6)$$

де довжина вільного пробігу фонону  $l_n = |s_{nz}|/v_{nq}$ .

Розв'язок рівняння для  $N_{\mathbf{q}}^{\leq}(z)$  має такий вигляд:

$$N_{\mathbf{q}'}^{\leq}(z) = C_{\mathbf{q}'}^{\leq} e^{z/l_n} + \int_z^d \frac{1}{l_n} e^{(z-z')/l_n} n_q(T_e(z')) dz', \quad (3.7)$$

Постійні  $C_{\mathbf{q}}^{\geq}$  і  $C_{\mathbf{q}'}^{\leq}$ , що входять до (3.6) і (3.7) визначаються рівняннями, що випливають з граничних умов. Підстановка (3.6) та (3.7) в (3.2) та (3.3) дає

$$C_{\mathbf{q}}^{\geq} - \beta_1 C_{\mathbf{q}'}^{\leq} = \alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1, \quad (3.8)$$

$$C_{\mathbf{q}'}^{\leq} \exp(d/l_n) - \beta_2 C_{\mathbf{q}}^{\geq} \exp(-d/l_n) = \alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2, \quad (3.9)$$

де

$$J_1 = \frac{1}{l_n} \int_0^d e^{-z'/l_n} n_q [T_e(z')] dz', \quad (3.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{l_n} \int_0^d e^{-(d-z')/l_n} n_q [T_e(z')] dz', \quad (3.11)$$

Зауважимо, що, якщо  $d \gg l_n$ , то в інтеграл  $J_1$  основний внесок робить область  $z' \lesssim l_n \ll d$ , а в інтеграл  $J_2$  основний внесок робить область  $(d - z') \lesssim l_n \ll d$ . Якщо ж  $d \ll l_n$ , то фонони практично не взаємодіють з електронами, і перенесення тепла через тонкі  $N$  шари має суто фононну природу. При  $d \ll l_n$  інтеграли  $J_1$  і  $J_2$  малі, оскільки вони мають порядок  $d/l_n$ . Розв'язок системи рівнянь (3.8), (3.9) має вигляд

$$C_{q'}^{\leq} = \frac{1}{D} \{ \beta_2 \exp(-d/l_n) [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1] + [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2] \}, \quad (3.12)$$

$$C_{q'}^{\geq} = \frac{\beta_1}{D} [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2] - \frac{\exp(d/l_n)}{D} [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1], \quad (3.13)$$

де детермінант системи

$$D = \exp(d/l_n) - \beta_1 \beta_2 \exp(-d/l_n).$$

Підставивши ці вирази (3.6) і (3.7), для фононних функцій розподілу отримуємо

$$\begin{aligned} N_{q'}^{\geq}(z) &= \frac{\exp(-d/l_n)}{D} \{ \beta_1 [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2] \\ &+ \exp(d/l_n) [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1] \} \\ &+ \int_0^z \frac{1}{l_n} e^{-(z-z')/l_n} n_q(T_e(z')) dz', \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} N_{q'}^{\leq}(z) &= \frac{\exp(d/l_n)}{D} \{ \beta_2 \exp(-d/l_n) [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1] \\ &+ [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2] \} + \int_z^d \frac{1}{l_n} e^{(z-z')/l_n} n_q(T_e(z')) dz', \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рівнянням для  $T_e(z)$  може бути умова незалежності теплового потоку від координати  $z$ :

$$Q_z = -k_e [T_e(z)] \frac{dT}{dz} + \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_{nz} [N_q^<(z) - N_{q'}^<(z)]. \quad (3.16)$$

Тут другий доданок у правій частині - це частка потоку тепла, що переноситься фононами. Видно, що підстановка виразів (3.14) і (3.15) (3.16) дає інтегро-диференціальне рівняння для  $T_e(z)$ .

Нижче значну увагу приділено межі  $d \gg l_n$ , коли  $D \approx \exp(d/l_n)$ , оскільки саме в цій межі електрони дають істотний внесок у перенесення тепла через  $I_1/N/I_2$  гетероструктуру. Зазначимо, що обчислення  $J_1$  нехтує членами порядку  $\frac{d^2 T_e}{dz^2} |_{z=0}$ , а доданок пропорційний  $dT_e/dz$  випадає, оскільки

$$\frac{dT_e}{dz} |_{z=0} = 0.$$

В результаті маємо  $J_1 \approx n_q(T_e(0))$  і аналогічно  $J_2 \approx n_q(T_e(d))$ .

Фононна функція розподілу при  $d \gg l_n$ :

$$N_q^>(z) = \frac{e^{-z/l_n}}{D} \{ \beta_1 [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2] + e^{d/l_n} [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1] \} + \int_0^z \frac{1}{l_n} e^{-(z-z')/l_n} n_q(T_e(z')) dz', \quad (3.17)$$

Розкладання  $T_e(z')$  за малим градієнтом температури має вигляд

$$T_e(z') = T_e(z) + T_e(z') - T_e(z) = T_e(z) + \frac{dT_e}{dz} |_z (z - z').$$

Підстановка цього розкладання (3.17) дає

$$N_q^>(z) = e^{-z/l_n} [\alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 n_q(T_e(0))] + n_q(T_e(z)) - \frac{dn_q}{dT_e} \frac{dT_e}{dz} l_n - n_q(T_e(z)) e^{-z/l_n} + \frac{dn_q}{dT_e} \frac{dT_e}{dz} \left(1 + \frac{z}{l_n}\right) e^{-z/l_n} l_n, \quad (3.18)$$

аналогічним чином (3.15) впливає вираз

$$N_q^<(z) = e^{-(d-z)/l_n} [\alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 n_q(T_e(d))] + \quad (3.19)$$

$$+n_q(T_e(z)) + \frac{dn_q}{dT_e} \frac{dT_e}{dz} l_n -$$

$$-n_q(T_e(z)) e^{-(d-z)/l_n} - \frac{dn_q}{dT_e} \frac{dT_e}{dz} e^{-(d-z)/l_n} \left( \frac{d-z}{l_n} + 1 \right) l_n.$$

Якщо  $z \gg l_n$  і  $(d-z)/l_n \gg 1$ , то членами, які містять  $e^{z/l_n}$  і  $e^{-(d-z)/l_n}$ , можна знехтувати. Таким чином, в області, віддаленій від перехідних шарів, потік тепла може бути представлений рівністю

$$Q_z = -k_e(T_e(z)) \frac{dT_e}{dz} - 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{s_{nz}^2}{v_{nq}} \frac{dn_q}{dT_e} \frac{dT_e}{dz}. \quad (3.20)$$

Оскільки при  $z \gg l_n$  та при  $(d-z) \gg l_n$  електрони та фонони термалізовані, рівняння (3.20) може також бути записане у вигляді

$$Q_z = -k_e(T_e(z)) \frac{dT_e}{dz} - k_p(T_e(z)) \frac{dT_e}{dz},$$

де

$$k_p = 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{s_{nz}^2}{v_{nq}} \frac{dn_q}{dT_e}. \quad (3.21)$$

(Тут і нижче враховано, що в розглянутій області  $T_e = T_p$ ).

Зауважимо, що згідно (3.21) кінцеве значення фоновної теплопровідності пов'язане з фонон-електронними зіткненнями. У чистих металах частота фонон-електронних зіткнень дається виразом [106],

$$v_{nq} = \frac{m^2 \mu^2}{2\pi \hbar^4 \rho_n s_n} \hbar \omega_q, \quad (3.22)$$

у якому  $\mu$  — константа потенціалу деформації, яка має порядок енергії Фермі  $\varepsilon_F$ , а  $m$  — ефективна маса електрона. Вираз (2.22) дозволяє в явному вигляді обчислити фоновну теплопровідність:

$$k_p(T_e) = \frac{2\zeta(3)}{\pi} \frac{\hbar \rho_n s_n}{m^2 \mu^2} T_e^2. \quad (3.23)$$

Для порівняння наведемо вираз для електронної теплопровідності:

$$k_e(T_e) = \frac{\pi^2}{9} \frac{m p_F}{\pi^2 \hbar^3} v_F l_i T_e, \quad (3.24)$$

де  $l_i$ - довжина вільного пробігу електронів при розсіянні на домішках.

За порядком величини теплопровідність фононів  $T_e$  можна записати як  $k_p(T_e) \approx c_p(T_e)s_n l_{ep}$ , а електронну теплопровідність —  $k_e(T_e) = c_e(T_e)v_F l_i$ .

Відношення цих теплопровідностей має порядок

$$\frac{k_p}{k_e} \sim \left(\frac{T_e}{\Theta_D}\right)^2 \frac{l_{pe}}{l_i},$$

де  $l_{pe} = \hbar v_F / T_e$ .

Зауважимо, що за низьких температур, коли фонон-домішковим розсіюванням і процесами перекидання можна знехтувати, зменшення  $l_i$  веде до того, що  $k_p$  може виявитися порядку  $k_e$ . Таким чином, щоб  $k_p$  було багато менше  $k_e$ ,  $N$ -метал не повинен бути дуже «брудним».

Із загального рівняння  $Q_z(z)$  можна отримати рівняння для  $T_e(0)$  і  $T_e(d)$ . Нехай  $z = 0$ , тоді

$$\left. \frac{dT_e}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

та з урахуванням  $d \gg l_n$

$$\begin{aligned} Q_z &= - \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha_1 [n_q(T_e(0)) - n_q(T_B(0))] = \\ &= - \frac{\pi^2 \langle \alpha_1 \rangle}{120 \hbar^3 s_n^2} [T_e^4(0) - T_B^4]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $\langle \alpha_1 \rangle = \int_0^{\pi/2} \alpha_1(\theta) \sin(2\theta) d\theta$ .

У разі малих потоків тепла, коли  $T_e(0) - T_B \ll T_B$ ,

$$Q_z = - \frac{\pi^2 \langle \alpha_1 \rangle}{30 \hbar^3 s_n^2} T_B^3 [T_e(0) - T_B].$$

При  $z = d$  маємо з урахуванням  $\left. \frac{dT_e}{dz} \right|_{z=0} = 0$  та  $d \gg l_n$

$$\begin{aligned} Q_z &= - \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha_2 [n_q(T_H) - n_q(T_e(d))] = \\ &= - \frac{\pi^2 \langle \alpha_2 \rangle}{120 \hbar^3 s_n^2} [T_H^4 - T_e^4(d)]. \end{aligned}$$



У разі малих теплових потоків, коли  $T_H - T_B \ll T_B$ , і  $T_e(d) - T_B \ll T_B$  вираз для потоку тепла має вигляд

$$Q_z = -\frac{\pi^2 \langle \alpha_2 \rangle}{30 \hbar^3 s_n^2} T_B^3 [T_H - T_e(d)].$$

У  $N$ -області, що віддалена від пограничних шарів, градієнт електронної температури з точністю до доданків, пропорційних  $l_n/d$ , визначається рівністю

$$\frac{dT_e}{dz} = \frac{[T_e(d) - T_e(0)]}{d}.$$

При  $d \gg l_n$  ефективна теплопровідність  $N$ -шару  $k_{eff} \equiv |Q_z|d/(T_H - T_B)$ ,/ може бути отримана із системи рівнянь

$$|Q_z|R_{th,1} + |Q_z|R_{th,2} = T_H - T_e(d) + T_e(0) - T_B, \quad (3.26)$$

$$|Q_z| = (k_e + k_p)[T_e(d) - T_e(0)]/d, \quad (3.27)$$

де електронна та фононна теплопровідності беруться при  $T - T_B$ , а тепловий опір межі між металом та ізолятором записується як [9]

$$R_{th,i} = \frac{30 \hbar^3 s_n^2}{\pi^2 T_B^3} \frac{1}{\langle \alpha_i \rangle}. \quad (3.28)$$

Таким чином, при  $d \gg l_n$  маємо

$$k_{eff} = \frac{d}{R_{th,1} + R_{th,2} + d/(k_e + k_p)}. \quad (3.29)$$

Зауважимо, що двотемпературна модель, розглянута в розділі 3.2 дає для ефективної теплопровідності вираз (3.49), який при  $d \gg l_n$  в точності збігається з результатом мікроскопічного розрахунку (3.29).

Перейдемо до граничного випадку тонких  $N$ -шарів,  $d \ll l_n$ , коли детермінант системи  $D = 1 - \beta_1 \beta_2$ . Оскільки в лінійному наближенні по  $d/l_n$  потрібно покласти  $\exp(-z/l_n) \approx 1$  та  $\exp[(-d - z')/l_n] \approx 1$ , то  $J_1 = J_2 = dn_q(\bar{T}_e)/l_n$ , де  $\bar{T}_e = T_e(d/2)$ . Таким чином, інтеграли  $J_1$  і  $J_2$  мають порядок  $d/l_n$  і в нульовому наближенні  $d/l_n$  ними можна знехтувати. Як наслідок, у нульовому наближенні по  $d/l_n$  фононна функція розподілу задана рівняннями

$$N_q^> = \frac{1}{1 - \beta_1 \beta_2} \{ \beta_1 \alpha_2 n_q(T_H) + \alpha_1 n_q(T_B) \}, \quad (3.30)$$

$$N_q^< = \frac{1}{1 - \beta_1 \beta_2} \{ \beta_2 \alpha_1 n_q(T_B) + \alpha_2 n_q(T_H) \}. \quad (3.31)$$

Нехтуючи електронним перенесенням тепла (оскільки в тонких  $N$ -шарах фонони не встигають передати енергію електронам), маємо

$$\begin{aligned} Q_z &= - \frac{\pi^2}{120 \hbar^3 s_n^2} \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle (T_H^4 - T_B^4) \\ &\approx \frac{\pi^2 T_B^3}{30 \hbar^3 s_n^2} \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle (T_H - T_B). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Звідси отримуємо результат

$$k_{eff} = \frac{\pi^2 d}{30 \hbar^3 s_n^2} T_B^3 \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle \quad (3.33)$$

де, як уже зазначалося, середнє за кутами падіння визначається рівністю  $\langle f \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta f(\theta) d\theta$ .

### 3.2. Поперечна теплопровідність $I_1/N/I_2$ гетероструктури в двотемпературному наближенні

У використаному вище мікроскопічному методі обчислення внеску фононів у поперечну теплопровідність  $I_1/N/I_2$  потребувало розв'язання кінетичного рівняння. Для спрощення розрахунків теплопровідності бажано використовувати простіший феноменологічний підхід. Для цього ми використовуємо, модель двотемпературного наближення Каганова, Ліфшиця і Танатарова [31], де вважається, що електрони та фонони мають температури  $T_e$  і  $T_p$  відповідно. Тут ми припустимо, що ці температури залежать від поперечної координати  $z$ .

Спочатку, ми не враховуватимемо опір Капиці на  $I/N$  межі. При цьому найпростішим є постановка задачі із заданим потоком тепла  $Q_z$ , який дають внесок як фонони, так і електрони. Потік тепла, пов'язаний з фононами,

визначається рівністю  $\mathbf{Q}_p = -k_p \nabla T_p$ , де температура фононів підпорядковується стаціонарному рівнянню теплопровідності

$$-k_p = \frac{d^2 T_p}{dz^2} = \Sigma(T_e^5 - T_p^5) \quad (3.34)$$

Тут параметр  $\Sigma$  визначає силу електрон-фононної взаємодії за низьких температур  $T_B \ll \theta_D$  [31].

Аналогічне рівняння для електронної температури

$$-k_e = \frac{d^2 T_e}{dz^2} = \Sigma(T_p^5 - T_e^5) \quad (3.35)$$

дозволяє знайти електронний внесок у потік тепла  $\mathbf{Q}_e = -k_e \nabla T_e$ .

У лінійному наближенні, коли  $T_H - T_B \ll T_B$ , температури електронів і фононів мало відрізняються від температури підкладки  $T_B$ , тобто  $T_e = T_B + \Delta T_e$  і  $T_p = T_B + \Delta T_p$ , де  $\Delta T_e, \Delta T_p \ll T_B$ . Якщо ввести часи електрон-фононної  $\tau_{ep}$  і фонон-електронної  $\tau_{pe}$  енергетичної релаксації відповідно до рівності  $5\Sigma T_B^4 = c_p/\tau_{pe} = c_e/\tau_{ep}$ , то у розглянутому стаціонарному випадку рівняння для  $T_p$  і  $T_e$  мають вигляд

$$\frac{d^2 \Delta T_p}{dz^2} + \frac{c_p}{\tau_{pe} k_p} (\Delta T_e - \Delta T_p) = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{d^2 \Delta T_e}{dz^2} + \frac{c_e}{\tau_{ep} k_e} (\Delta T_p - \Delta T_e) = 0, \quad (3.37)$$

Щоб використовувати симетрію задачі, у цьому розділі ми вважатимемо, що металевий прошарок розташований в області  $-d/2 < z < d/2$ . При цьому граничні умови мають вигляд

$$T_p \left( -\frac{d}{2} \right) = T_B, \quad T_p \left( \frac{d}{2} \right) = T_H, \quad (3.38)$$

$$\frac{dT_e}{dz} \Big|_{-d/2} = \frac{dT_e}{dz} \Big|_{d/2} = 0, \quad (3.39)$$

Останній вираз відображає той факт, що електрони не переносять тепло через межі металевого прошарку. Зауважимо, що внаслідок симетрії  $\Delta T_p(0) = \Delta T_e(0) = \Delta T/2$ , де  $\Delta T = T_H - T_B$ .

Рівняння для теплового потоку

$$Q_z = -k_p \frac{d\Delta T_p}{dz} - k_e \frac{d\Delta T_e}{dz} \quad (3.40)$$

можна про інтегрувати від нуля до деякої координати  $z$ . Оскільки потік тепла в металевому прошарку постійний, маємо рівність

$$\Delta T_p = \frac{1}{k_p} \left[ k_e \Delta T_e(z) + \frac{(k_p + k_e)}{2} \Delta T - Q_z z \right]. \quad (3.41)$$

Із рівняння (3.37) випливає, що

$$-k_e \frac{d^2 \Delta T_e}{dz^2} + \frac{c_e}{\tau_{ep}} \left[ \Delta T_e + \frac{1}{k_p} \left( k_e \Delta T_e - \frac{k_T}{2} \Delta T + Q_z z \right) \right] = 0, \quad (3.42)$$

де  $k_T = k_e + k_p$ . Рішення рівняння для  $\Delta T_e$ , що задовольняє граничну умову (3.39), має вигляд

$$\Delta T_e(z) = \frac{Q_z \lambda}{k_T} \frac{sh(z/\lambda)}{ch(d/2\lambda)} + \frac{\Delta T}{2} - \frac{Q_z}{k_T} z. \quad (3.43)$$

Підставивши цей вираз у (3.41), отримуємо також

$$\Delta T_p(z) = -\frac{k_e Q_z \lambda}{k_p k_T} \frac{sh(z/\lambda)}{ch(d/2\lambda)} + \frac{\Delta T}{2} - \frac{Q_z}{k_T} z. \quad (3.44)$$

З урахуванням (3.38) для ефективної теплопровідності металевого шару,  $k_{\text{eff}} \equiv |Q_z| d / (T_H - T_B)$ , маємо

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_T}{1 + \frac{k_e}{k_p} \frac{2\lambda}{d} \text{th} \frac{d}{2\lambda}}, \quad (3.45)$$

де, як і в попередніх формулах,

$$\lambda = [\tau_{pe} k_e k_p / c_p (k_e + k_p)]^{1/2}.$$

Щоб з'ясувати фізичний зміст  $\lambda$ , розглянемо граничний випадок  $k_e \gg k_p$ . У цьому випадку  $\lambda = [\tau_{pe} k_p / c_p]^{1/2}$ . Для газу теплопровідність  $k \sim cl \bar{v}$ , де  $c$  - питома теплоємність газу,  $l$  - середня довжина вільного пробігу молекул газу,  $\bar{v}$  - середня теплова швидкість молекул. Для газу фононів  $\bar{v} = s$ , і, якщо немає домішкового розсіювання,  $l = l_{pe} = s\tau_{pe}$ . Таким чином, для газу

фононів маємо  $k_p = c_p s^2 \tau_{pe}$  і  $\lambda \sim s \tau_{pe} = l_{pe}$ . Отже,  $\lambda$  – це середня довжина, на якій фонони передають свою енергію електронам.

Розглянемо граничні випадки. У разі малих товщин  $d \ll \lambda$  ефективна теплопровідність  $k_{\text{eff}} \approx k_p$ . Оскільки великим значенням  $\lambda$  відповідають великі значення  $\tau_{pe}$ , у разі поганої передачі тепла від фононів до електронів ефективна теплопровідність визначається теплопровідністю фононного газу. При товщинах  $d \gg \lambda$  ефективна теплопровідність  $k_{\text{eff}} \approx k_e + k_p$ . Оскільки вважається, що  $k_e \gg k_p$ , то при  $d \gg \lambda$ , за доброї передачі тепла від фононів до електронів та високої електронної теплопровідності перенесення тепла в основному здійснюється електронами  $k_{\text{eff}} \approx k_e$ .

Врахування теплового опору Капиці не викликає труднощів. Насамперед зауважимо, що при врахуванні теплового опору Капиці рівняння (3.36) і (3.37) для  $\Delta T_p$  та  $\Delta T_e$  не зміняться. Коли  $Q_z \neq 0$ , на  $I/N$ -межах виникає стрибок температури  $\Delta T_k = |Q_z| R_{th}$ , де  $R_{th}$  – тепловий опір межі. Стрибок температури  $\Delta T_k$  змінює граничні умови для фононної температури. Вони набувають вигляду

$$T_H = T_p \left( \frac{d}{2} \right) + \Delta T_k, \quad T_B = T_p \left( -\frac{d}{2} \right) - \Delta T_k. \quad (3.46)$$

Граничні умови для  $\Delta T_e$  не змінюються. Як наслідок,  $\Delta T_e$  та  $\Delta T_p$ , як і раніше, описуються формулами (3.43) і (3.44).

Для ефективної теплопровідності отримуємо рівність

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_T}{1 + \frac{k_e}{k_p} \frac{2\lambda}{d} \text{th} \frac{d}{2\lambda} + 2 \frac{k_T}{d} R_{th}}, \quad (3.47)$$

У разі тонких  $N$  – шарів, коли  $d \ll \lambda$ , величина  $k_{\text{eff}} \approx (1/k_p + 2R_{th}/d)^{-1}$ , тобто в ефективній теплопровідності електронний внесок випадає, і конкурують фононна теплопровідність та опір Капиці. Якщо товщина  $d$  досить мала,  $d \ll k_p R_{th}$ , то  $k_{\text{eff}} = d/2R_{th} \ll k_p$ , тобто ефективна теплопровідність  $N$ -шару визначається акустичними властивостями  $N/I$ -межі.

В іншому граничному випадку  $d \gg \lambda$  ефективна теплопровідність

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_T}{1 + \frac{k_e}{k_p} \frac{2\lambda}{d} + 2 \frac{k_T}{d} R_{\text{th}}} \quad (3.48)$$

За досить великих  $d$  два останні доданки у знаменнику малі порівняно з одиницею і  $k_{\text{eff}} = k_T = k_e + k_p$ . Таким чином, у разі досить товстих  $N$ -шарів їхня теплопровідність визначається теплопровідностями електронної та фононної підсистем.

Вище ми вважали теплові опори на  $N/I_1$  та  $N/I_2$  межах однаковими. Якщо ж теплові опори інтерфейсів  $N/I_1$  і  $N/I_2$  різні й дорівнюють  $R_{\text{th},1}$  і  $R_{\text{th},2}$ , то можна показати, що ефективна теплопровідність дорівнюватиме

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_T}{1 + \frac{k_e}{k_p} \frac{2\lambda}{d} \text{th} \frac{d}{2\lambda} + \frac{k_T}{d} (R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2})}, \quad (3.49)$$

Зауважимо, що цей вираз при  $d \gg l_n$  у точності збігається з результатом мікроскопічного розрахунку (3.29). Водночас при малих товщинах  $N$ -шару,  $d \ll l_n$ , двотемпературна модель дає тільки якісно правильний результат, оскільки при малих товщинах не можна коректно ввести ні фононну температуру  $T_p$ , ні фононну теплопровідність  $k_p$ .

### 3.3. Обговорення отриманих результатів

З отриманих результатів (3.29) і (3.33) випливає, що за малих товщин  $N$ -шару поперечна теплопровідність шаруватих наноструктур здебільшого визначається міжшаровими межами, точніше, акустичною неузгодженістю суміжних матеріалів. Це означає, що в наноелектронних пристроях однією з головних проблем, що впливає на ефективність тепловідведення, є міжшарові межі або інтерфейси між різними шарами матеріалів в пристрої. Іншими словами, для поліпшення тепловідведення в таких пристроях потрібно підбирати суміжні матеріали з акустичними імпедансами, що мало відрізняються.

Згідно з формулою (3.29) розмірний ефект у теплопровідності шаруватих наноструктур починає проявлятися при товщинах  $N$ -шарів  $d_{cr} \sim R_{th} k_T$ . Якщо  $d \gg d_{cr}$ , теплопровідність  $N$ -шару приблизно дорівнює сумарній теплопровідності електронів і фононів, якщо ж  $d \ll d_{cr}$ , розсіювання електронів і фононів у  $N$ -шарі (тобто якість матеріалу  $N$ -шару) відіграє малу роль, і поперечна теплопровідність шаруватих наноструктур визначається акустичною неузгодженістю суміжних матеріалів. Зазначимо також, що величина  $d_{cr}$  збільшується при зменшенні температури термостата. Таким чином, при створенні електронних пристроїв, елементи яких мають субмікронні розміри, необхідно враховувати розмірний ефект у теплопровідності та його залежність від температури.

Розглянуту вище задачу про поперечну теплопровідність  $N$ -шару ми поширили на гетероструктури з проміжним шаром діелектрика, феродіелектрика в наступному розділі, оскільки теплопровідність цих матеріалів визначається фононами, а цей механізм передання тепла можна описати в рамках розвиненого формалізму, якщо покласти частоту фонон-електронних зіткнень  $\nu_{nq} = 0$ , це означає, що фонони не втрачають енергію внаслідок зіткнень з електронами, і це спрощує моделювання теплопровідності. Зауважимо, що для діелектричних наноструктур отримані результати можна поширити на ширший діапазон температур, оскільки в цьому разі не потрібне виконання умови термалізації електронів.

Задачу про поперечну теплопровідність багатошарових структур розглядали раніше в низці робіт. В одній із перших робіт [98] з кінетичного рівняння Больцмана було отримано рівняння радіаційного фононного теплопереносу та вираз для потоку тепла через  $I_1/N/I_2$  структуру. Зауважимо, що оскільки в статті [98] не враховували відбиття фононів на міжшарових межах, акустичні характеристики цих меж не ввійшли у вираз для ефективної теплопровідності, що не узгоджується з нашими результатами (3.29) і (3.33). У подальшій роботі [107], де розглянуто  $N/I/N$ -структуру, відбиття фононів

від  $N/I$ -меж також не враховували, оскільки ці межі вважали термалізованими, і вони випромінюють фонони аналогічно тому, як випромінює фотони абсолютно чорне тіло. У статті [108] у межах двотемпературного наближення вивчали перенесення тепла в багатошаровій  $N/I/N/I$  системі. Згідно з нашим аналізом застосовність результатів статті [109] обмежена випадком товстих  $N$ -шарів. Розглянутий же в цій роботі формалізм застосовний для опису багатошарових структур із довільною товщиною шарів аналогічно тому, як це зроблено під час аналізу теплових властивостей гетероструктур, які містять два металічні шари [108].

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Розглянуто поперечне перенесення тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками за низьких температур, коли електрони в металевому шарі термалізовані.

2. Обчислено ефективну поперечну теплопровідність у шаруватій гетероструктурі діелектрик-метал-діелектрик при довільному значенні товщини металевого шару.

3. Знайдені товщини, при яких у теплопровідності шаруватих наноструктур проявляється розмірний ефект.

4. Розраховано поперечну ефективну теплопровідність в рамках феноменологічної двотемпературної (2ТМ) моделі, тобто в термінах електронної та фононної температур.

Порівняння отриманих результатів показують, що відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплоперенесення в багатошаровій системі тільки у разі товстих металевих шарів, коли товщина шару значно більша за фонон-електронну довжину вільного пробігу. Для більш тонких металевих шарів двотемпературне наближення дає невірний вираз для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури.



Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора:  
[117].

## РОЗДІЛ 4

### ПЕРЕНЕСЕННЯ ТЕПЛА В ГЕТЕРОГЕННИХ НАНОСТРУКТУРАХ $I_1/FI/I_2$ ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

#### 4.1. Особливості перенесення тепла у шаруватій структурі, що містить шар феромагнітного ізолятора

У магнітовпорядкованих діелектричних кристалах магнони можуть передавати тепло, аналогічно до того, як збудження решітки, або фонони. [110-112]. Магнони - це квазічастинки або квазі-колективні стани, що виникають в магнетикованих системах з відмінною від нульової магнітною взаємодією між спінами атомів чи інших магнетикованих моментів. Їх можна розглядати як квантизовані магнітні збурення. Поширення магنونів може бути важливим механізмом передачі тепла в деяких магнітовпорядкованих матеріалах, особливо в низькотемпературних умовах. Аналогічно до фононів (коливання атомів у кристалічній решітці), магнони можуть переносити енергію від однієї області кристалу до іншої. Такий теплоперенос через магнони може бути важливим, наприклад, у феромагнетиках або антиферомагнетиках, де магнітні збурення мають великий вплив на електронну та теплопровідність.

Теплопередача в багат шарових гетероструктурах, що містять шар феромагнітного діелектрика, становить інтерес як для фундаментальних, так і для прикладних досліджень. За певних умов магнони можуть бути істотною частиною механізму теплопереносу в магнітовпорядкованих діелектричних кристалах, але вони не є єдиною можливістю. Теплоперенос також може залежати від інших факторів, таких як фонони та рух носіїв заряду, залежно від конкретного матеріалу і умов.

Для опису теплового потоку в наноструктурі  $I_1/FI/I_2$  ми також використовуємо мікроскопічний метод, який застосовували у випадку  $I_1/N/I_2$  гетероструктури, оскільки він дозволяє коректно врахувати вплив міжшарових меж на теплопровідність багат шарової структури.

У багатошарових системах теплопередача відіграє важливу роль у спіновому ефекті Зеєбека (SSE) і в цілому в галузі спінової калоритроніки, яка активно розвивається в останні роки [3,4,10]. Зокрема, спінова калоритроніка розглядає проблеми генерації та керування спіновими струмами за допомогою теплових потоків [3]. Першою проблемою є розрахунок стрибка температури на межі поділу  $FI/I$ , тобто термічного опору межі поділу  $R_{th}$  (який зазвичай називають "опором Капіці"). Раніше це питання було детально розглянуто в [113]. Другою проблемою, яка досі не була розв'язана на мікроскопічному рівні, є розрахунок ефективної поперечної теплопровідності шаруватої системи  $I_1/FI/I_2$  (з температурою  $T_1 \neq T_2$  для  $I_1$  та  $I_2$ ) при довільній товщині шару  $FI$ , де тепловий потік переносять як магнони, так і фонони.

В роботі [113] було показано, що для інтерфейсу феродіелектричного ізолятора  $FI/I$  при низьких температурах ( $T \ll \theta_D$ , де  $\theta_D$  - температура Дебая шару  $FI$ ) існує розмірний ефект. Останнє проявляється в залежності опору Капіці  $R_{th}$  для тонких  $FI$  пластин (плівок) від частоти фонон-магنونних зіткнень, тоді як для товстих пластин значення  $R_{th}$  не містить магнітних характеристик феродіелектрика. Щоб пояснити зростання магнітного внеску зі зменшенням товщини шару  $FI$ , зазначимо, що передача тепла від нагрітих магنونів до більш холодного  $I$  шару здійснюється за допомогою фононів. Якщо товщина  $d$  шару  $FI$  набагато більша за середню довжину вільного пробігу фононів щодо їх розсіювання на магнонах,  $l_{pm}$ , то магнони та фонони в шарі  $FI$  термалізуються, а  $R_{th}$  визначається акустичною прозорістю  $FI/I$  інтерфейсу. У цьому випадку внесок магنونів у  $R_{th}$  відсутній.

Однак якщо  $d \ll l_{pm}$ , то більшість фононів, випромінюваних магнонами в плівці, залишають її, не взаємодіючи з магнонами, навіть після кількох відбивань від межі. У результаті, на відміну від випадку  $d \gg l_{pm}$ , опір Капіці  $R_{th}$  більше залежить від магнон-фононної взаємодії, ніж від акустичної прозорості межі  $FI/I$ .

У нашому підході розглядається поперечний тепловий потік через шар  $FI$ , розташований між двома масивними ізоляторами з температурами  $T_H$  і  $T_B$  ( $T_H > T_B$ ). Аналіз поперечної теплопровідності шаруватої гетероструктури базується на кінетичному рівнянні Больцмана для функції розподілу фононів  $N_q$ , а також на припущенні, що магнони в шарі  $FI$  термалізовані внаслідок магнон-магнонних зіткнень і мають температуру  $T_m$ . Це припущення виправдане, оскільки час магнон-магнонної релаксації зазвичай менший за час магнон-фононного зіткнення [114,115]. Передбачається, що фонони взаємодіють з магнонами, однак температура фононів не вводиться при описі фонон-магнонної взаємодії. Оскільки тепло передається фононами через межу  $FI/I$ , важливою частиною аналізу становлять граничні умови для функції  $N_q$ .

Ці умови враховують відбиття фононів від границь  $FI$  та обмін фононами між шаром  $FI$  і масивними пластинами  $I$  з температурами  $T_H$  і  $T_B$ . Температуру  $T_H$  будемо вважати достатньо низькою, тому можна знехтувати зіткненнями фононів з дефектами ґратки та один з одним, а також процесами фонон-магнонного перекиду. Оскільки ми нехтуємо фонон-фононними зіткненнями, то температуру фононів у шарі  $FI$  не може бути введена. Зауважимо, що відносна простота такої мікроскопічної моделі дозволяє отримати результати в аналітичному вигляді.

#### 4.2. Кінетичний метод теплопередачі через інтерфейси $I_1/FI/I_2$

У цьому розділі розглядається поперечний теплообмін у гетероструктурах, що містять шар феромагнітного ізолятора. Хоча наш метод може бути застосований до різних шаруватих гетероструктур, тут ми розглянемо лише відносно просту гетероструктуру, зображену на рис. 4.1. Припустимо, що ізолятор  $I_1$  має температуру  $T_B$ , а температура ізолятора  $I_2$  дорівнює  $T_H$ , а  $T_H > T_B$ .

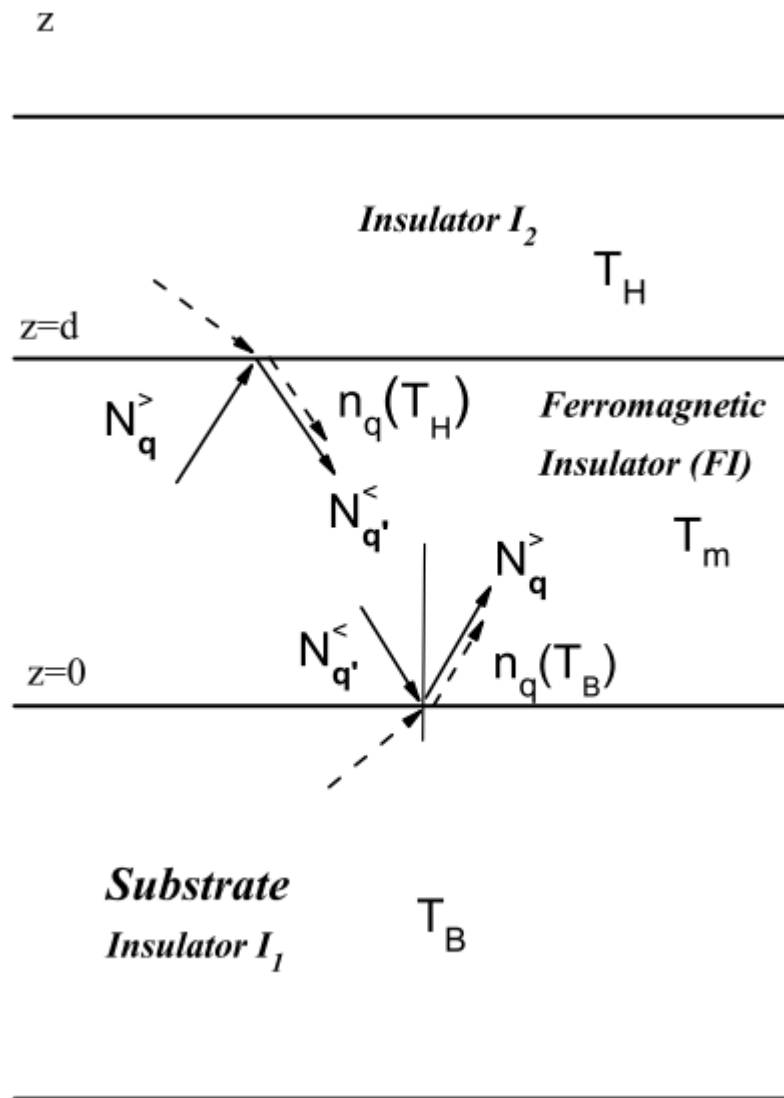


Рис.4.1 Відбивання та заломлення фонових мод на границях середовищ у шаруватій структурі  $I_1/FI/I_2$ . Числа заповнення фонових станів хвильовими векторами  $\mathbf{q}$  позначаються  $N_{\mathbf{q}}^{\lessgtr}$ . Символ  $>$  позначає фонони з позитивною  $z$ -компонентою хвильового вектора  $\mathbf{q}$ , тоді як символ  $<$  позначає фонони з негативною  $z$ -компонентою  $\mathbf{q}$ . Штриховими лініями показані фонони, що переходять із шару діелектрика до шару  $FI$ .  $T_B$  – температура масивної підкладки, яка грає роль термостата,  $T_m$  – температура магнона,  $T_H$  – температура верхньої діелектричної пластини  $T_H > T_B$ .

Внесок фононів у тепловий потік через гетероструктуру знайдено в припущенні, що магнони термолізовані внаслідок магнон-магنونних зіткнень і мають температуру  $T_m$ . Умовою термалізації магنونної підсистеми у  $FI$  є те,

що частота магнон-магнонних зіткнень вища за частоту магнон-фононних зіткнень. До речі, навіть коли температуру магнонів з розподілу Бозе-Ейнштейна вже не можна встановити на основі прямих міжмагнонних зіткнень,  $T_m$  все ще можна ввести [116]. А саме, значення  $T_m$  виправдано в межі  $d \gg l_{pm}$  через ефективні міжмагнонні зіткнення через фонони. Ці обставини дозволяють звести сформульовану задачу до розв'язку стаціонарного кінетичного рівняння для функції розподілу фононів, а потім визначити  $\nabla T_m$  як функцію теплового потоку  $Q$  та температур ізоляторів із рівняння теплового балансу.

Крім того, особливий інтерес становлять хороша прозорість  $\alpha_1 \sim 1$  і  $\alpha_2 \sim 1$  інтерфейсів  $FI/I$ , оскільки це дає змогу накласти прості граничні умови на функцію розподілу фононів. Балістичне поширення фонона, що випромінюється шаром  $FI$ , не тільки спрощує вирази для розсіювання тепла в зразку, але й обумовлює необхідну умову для реалізації розмірного ефекту, продумано описаного в [113].

Відповідно до наведених вище міркувань будемо вважати, що розподіл магнонів характеризується температурою  $T_m$ . У той же час функцію розподілу для фононів  $N_q(z)$ , де  $\mathbf{q}$  — фононний хвильовий вектор, слід визначати з кінетичного рівняння

$$s_z \frac{dN_q(z)}{dz} = L_{pm}\{N, n\} \quad (4.1)$$

з відповідними граничними умовами. У рівнянні (4.1),  $s_z$  — проекція швидкості фонона на вісь  $z$ , а  $L_{pm}$  — інтеграл зіткнення фонон-магнонів [116], який можна виразити як

$$L_{pm}\{N, n\} = v_{pm}(T_m(z), q)[n(T_m(z)) - N_q(z)]. \quad (4.2)$$

Тут  $n(T_m(z)) = [\exp(\varepsilon_k/T_m) - 1]^{-1}$  — рівноважний розподіл Бозе-Ейнштейна із залежною від  $z$  температурою магнона  $T_m(k_B = 1)$ . У довгохвильовій межі  $ka \ll 1$ , закон дисперсії магнонів такий:  $\varepsilon_k = \theta_C(ak)^2$ , де  $a$  — стала ґратки, а  $\theta_C$  — температура, яка за порядку величини збігається з

температурою Кюрі. У формулі (4.2),  $\nu_{pm}(T_m(z), q)$  – частота зіткнень між фононом частоти  $\omega_q = sq$  і магнонами. Залежність частоти  $\nu_{pm}$  від температури магнона призводить до того, що довжина вільного пробігу фононів залежить від поперечної координати  $z$ . Ця особливість дещо ускладнює аналіз системи  $I_1/FI/I_2$  порівняно з системою  $I_1/N/I_2$ , де довжина вільного пробігу фононів у нормальному металі  $N$  не залежить від температури електрона [117].

Додавши схему розв'язку з посилання [9] для кінетичного рівняння з деталями, з подробицями, розміщеними в розділі додатків [113], позначимо коефіцієнти відбиття фононів на межі 1 і 2 як  $\beta_1$  і  $\beta_2$ , такі, що  $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , де  $\alpha(\theta)$  – коефіцієнт прозорості. Ми розглядаємо випадок балістичного поширення фононів, що випромінюються  $FI$ , через межу  $FI/I$ , враховуючи кінцеву прозорість інтерфейсу  $FI/I$  в рамках теорії акустичної невідповідності [27]. В роботі використано позначення  $N_q^{\geq}(z) = N(z, q_x, q_y, q_z \geq 0)$  дозволяє нам записати граничні умови для  $N_q(z)$  у рівнянні (4.1) для  $z = 0$  і  $z = d$  наступним чином (див. рис. 4.1):

$$N_q^{\geq}(0) = \alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 N_q^{\leq}(0), \quad (4.3)$$

$$N_q^{\leq}(d) = \alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 N_q^{\geq}(d). \quad (4.4)$$

Ці граничні умови свідчать про те, що фонони, що випромінюються з  $FI$ -шару до ізоляторів  $I_1$  і  $I_2$ , більше не повертаються. Це припущення виправдано, коли  $I_1$  і  $I_2$ , є монокристалічними діелектриками з високою теплопровідністю.

У моделі акустичної невідповідності [37,104,105] ймовірність проходження  $\alpha$  залежить від кута падіння фонона  $\theta$  та акустичних імпедансів сусідніх середовищ  $Z = ps$  і  $Z' = p's'$

$$\alpha(\theta) = 4ZZ' \cos \theta \cos \theta' / (Z \cos \theta' + Z' \cos \theta)^2. \quad (4.5)$$

Умовою незалежності теплового потоку від  $z$ -координати може слугувати рівнянням для  $T_m(z)$ :

$$Q_z = -k_m \frac{dT_m}{dz} + \int_{q_z > 0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z [N_{q>}(z) - N_{q'<}(z)] \quad (4.6)$$

Тут  $k_m$  — магنونна теплопровідність, другий доданок у правій частині — частка теплового потоку, що переноситься фононами. Видно, що підстановка рівняння (A9) і рівняння (A10) в рівняння (4.6) дає інтегродиференціальне рівняння для  $T_m(z)$ .

Нижче значну увагу приділено межі  $d \gg l_{pm}$ , коли детермінант  $D \approx 1$ , оскільки саме в цій межі магнони роблять значний внесок у тепловий потік через гетероструктуру  $I_1/FI/I_2$ . Зауважимо, що при обчисленні інтеграла  $J_1$  нехтують доданками порядку  $(d^2 T_m / dz^2)|_{z=0}$ , а член, пропорційності  $dT_m/dz$  випадає, оскільки  $(dT_m/dz)|_{z=0} = 0$ . В результаті маємо  $J_1 \approx n_q$  і аналогічно інтеграл  $J_2 \approx n_q(T_m(d))$ .

Вираз  $T_m(z')$  відносно малого градієнта температури має виглядає  $T_m(z') = T_m(z) + (dT_m/dz)|_z(z - z')$ . Підставлення цього виразу в рівняння (A9) дає функцію розподілу фононів при  $d \gg l_{pm}$ :

$$N_q^>(z) = e^{-r(z)} \{ \alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 n_q(T_m(0)) \} + n_q(T_m(z)) [1 - e^{-r(z)}] + \frac{dn_q}{dT_m} \frac{dT_m}{dz} \frac{dz}{dr} [-1 + (r+1)e^{-r(z)}], \quad (4.7)$$

і так само з рівняння (A10) отримуємо вираз

$$N_{q'}^>(z) = e^{-r(d)+r(z)} \{ \alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 n_q(T_m(d)) \} + n_q(T_m(z)) [1 - e^{-r(d)+r(z)}] + \frac{dn_q}{dT_m} \frac{dT_m}{dz} \frac{dz}{dr} [-1 + (r(d) - r(z))e^{-r(d)+r(z)}], \quad (4.8)$$

Якщо  $z \gg l_{pm}$  і  $(d - z) \gg l_{pm}$ , тоді доданками, що містять  $\exp(z/l_{pm})$  і  $\exp[-(d - z)/l_{pm}]$ , можна знехтувати. Таким чином, в області, яка віддалена від перехідних шарів, тепловий потік можна записати як

$$Q_z = -k_m(T_m(z)) \quad (4.9)$$



$$\frac{dT_m}{dz} - 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar\omega_q \frac{s_z^2}{v_{pm}} \frac{dn_q}{dT_m} \frac{dT_m}{dz}.$$

Оскільки при  $z \gg l_{pm}$  і при  $(d - z) \gg l_{pm}$  магнони і фонони термалізовані, то рівняння (4.9) також можна записати як

$$Q_z = -k_m(T_m(z)) \frac{dT_m}{dz} - k_p(T_m(z)) \frac{dT_m}{dz} \quad (4.10)$$

3

$$k_p = 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar\omega_q \frac{s_z^2}{v_{pm}(T)} \frac{dn_q}{dT} \quad (4.11)$$

(Тут і нижче враховується  $T_p = T_m$ ). Зауважимо, що значення фононної теплопровідності визначається частотою фонон-магنونних зіткнень.

У чистому феромагнітному ізоляторі частота фонон-магنونних зіткнень  $v_{pm}(T)$  задається виразом [113]

$$v_{pm}(T) = D(T) J_D(T, x, y_0), \quad (4.12)$$

в якому  $D(T) = (\theta_C \theta_D / 8\pi \hbar \theta_p) (T/\theta_C)^3$ , де  $\theta_D = \hbar s/a$ ,  $\theta_p = Ms^2$ ,  $s$  — середня швидкість звуку,  $M$  — маса магнітного іону та

$$J_D(T, x, y_0) = \int_{y_0}^{\infty} dy y (x + y) \left[ \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{e^{x+y} - 1} \right]. \quad (4.13)$$

Тут  $x = \hbar\omega_q/T$ ,  $y = \varepsilon_k/T$ , і  $y_0 = \theta_D^2/4T\theta_C$ . В інтегралі за безрозмірною енергією магнона у нижня межа інтегрування  $y_0$  відображає черенковський характер випромінювання фононів магнонами. А саме, тільки магнони енергія яких більша  $\theta_D^2/4\theta_C$  можуть випромінювати фонони.

При низьких температурах  $T \ll \theta_D^2/4\theta_C$  фононна теплопровідність має вигляд

$$k_p(T) = \frac{4C}{3\pi} \frac{\theta_C^2 \theta_p}{\hbar^2 s \theta_D} \left( \frac{4T\theta_C}{\theta_D^2} \right)^2 \exp\left( \frac{\theta_D^2}{4T\theta_C} \right), \quad (4.14)$$

де  $C = \int_0^{\infty} x^4 e^{2x} (e^x - 1)^{-3} dx \approx 27,41$ . Швидке зростання фононної теплопровідності зі зниженням температури є наслідком черенковського

характеру випромінювання фононів магнонами. Зауважимо, що формула (4.14) справедлива, якщо  $l_{pm}$  менше  $d$ .

Із загального рівняння для  $Q_z(z)$  можна вивести рівняння для  $T_m(0)$  і  $T_m(d)$ . Нехай  $z = 0$ , тоді  $(dT_m/dz)|_{z=0} = 0$  і враховуючи, що  $d \gg l_{pm}$

$$\begin{aligned} Q_z &= - \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_z \alpha_1 [n_q(T_m(0)) - n_q(T_B)] = \\ &= - \frac{\pi^2 \langle \alpha_1 \rangle}{120 \hbar^3 s^2} [T_m^4(0) - T_B^4], \end{aligned} \quad (4.15)$$

де  $\langle \alpha_1 \rangle = \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta) \sin(2\theta) d\theta$ .

У разі малих теплових потоків, коли  $T_m(0) - T_B \ll T_B$

$$Q_z = - \frac{\pi^2 \langle \alpha_1 \rangle T_B^3}{30 \hbar^3 s^2} [T_m(0) - T_B].$$

При  $z = d$ , враховуючи, що  $(dT_m/dz)|_{z=d} = 0$  і  $d \gg l_m$

$$Q_z = - \frac{\pi^2 \langle \alpha_2 \rangle T_B^3}{30 \hbar^3 s^2} [T_H^4 - T_m^4(d)]. \quad (4.16)$$

У разі малих теплових потоків, коли  $T_H - T_B \ll T_B$  та  $T_m(d) - T_B \ll T_B$ ,

$$Q_z = - \frac{\pi^2 \langle \alpha_2 \rangle T_B^3}{30 \hbar^3 s^2} [T_H - T_m(d)].$$

В області  $FI$ , видаленої з приграничних шарів, градієнт температури  $FI$  з точністю до доданків пропорційний  $l_{pm}/d$ , визначається рівнянням

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{[T_m(d) - T_m(0)]}{d},$$

При  $d \ll l_{pm}$  ефективну теплопровідність  $FI$  шару  $k_{eff} = |Q_z|d/(T_H - T_B)$  можна отримати із систем рівнянь

$$|Q_z|R_{th,1} + |Q_z|R_{th,2} = T_H - T_m(d) + T_m(0) - T_B, \quad (4.17)$$

$$|Q_z| = (k_m + k_p)[T_m(d) - T_m(0)]/d, \quad (4.18)$$

де магنونна і фононна теплопровідності беруться при  $T = T_B$ , а тепловий опір границі між  $FI$  та ізолятором записується як

$$R_{th,i} = \frac{30 \hbar^3 s^2}{\pi^2 \langle \alpha_i \rangle T_B^3}. \quad (4.19)$$

Таким чином, при  $d \gg l_{pm}$  маємо

$$k_{eff} = \frac{d}{R_{th,1} + R_{th,2} + d/(k_m + k_p)}. \quad (4.20)$$

Зауважимо, що двотемпературна модель, розглянута далі, дає рівняння (4.36) для ефективної теплопровідності, яка точно збігається з результатом мікроскопічного розрахунку (4.20) при  $d \gg l_{pm}$ .

Перейдемо до граничного випадку тонких шарів  $FI$ ,  $d \ll l_{pm}$ , коли детермінант системи  $D = 1 - \beta_1\beta_2$ . Оскільки в лінійному наближенні відносно  $d/l_{pm}$  ми повинні встановити  $\exp(-z/l_{pm}) \approx 1$  і  $\exp[-(d-z)/l_{pm}] \approx 1$ , то  $J_1 = J_2 = dn_q(\bar{T}_m)/l_{pm}$ , де  $\bar{T}_m = T_m(d/2)$ .

Таким чином, інтеграли  $J_1$  і  $J_2$  мають порядок  $d/l_{pm}$  і ними можна знехтувати в нульовому наближенні відносно  $d/l_{pm}$ . В результаті в нульовому наближенні відносно  $d/l_{pm}$  розподіл фононів задається рівняннями

$$N_q^> = \left[ \alpha_1 n_q(T_B + \beta_1 \alpha_2 n_q(T_H)) \right] / (1 - \beta_1 \beta_2) \quad (4.21)$$

$$N_q^< = \left[ \alpha_2 n_q(T_B + \beta_1 \alpha_1 n_q(T_H)) \right] / (1 - \beta_1 \beta_2) \quad (4.22)$$

Нехтуючи магнонним теплообміном (оскільки в тонких шарах  $FI$  фонони не встигають передати енергію магнонам), маємо

$$Q_z = -\frac{\pi^2}{120\hbar^3 s^2} \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle (T_H^4 - T_B^4) \\ \approx -\frac{\pi^2 T_B^3}{30\hbar^3 s^2} \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle (T_H - T_B). \quad (4.23)$$

Звідси отримуємо результат

$$k_{eff} = \frac{\pi^2 T_B^3}{30\hbar^3 s^2} d \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle, \quad (4.24)$$

де усереднення за кутами падіння визначається як  $\langle f \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta f(\theta) d\theta$ . Зауважимо, що у випадку тонких  $FI$ -шарів і  $\alpha_i$  теплопровідність  $k_{eff}$  має порядок  $c_p s d$ , тобто збігається з фононою теплопровідністю із середньою

довжиною вільного пробігу фонона порядку товщини шару  $FI$ . (У нашій моделі фононна питома теплопровідність  $c_p = (2\pi/15)(T_B^3/\hbar^3 s^3)$ .)

### 4.3. Теплопровідність $I_1/FI/I_2$ гетероструктура в двухтемпературному наближенні

У мікроскопічному підході, використаному вище, розрахунок фононного внеску в поперечну теплопровідність системи  $I_1/FI/I_2$  вимагав розв'язання кінетичного рівняння. Щоб спростити розрахунки теплопровідності, бажано використовувати більш простий феноменологічний підхід. Як буде показано нижче, для цієї задачі може підійти двотемпературне наближення, в якому фонони і магнони мають температури  $T_p$  і  $T_m$  відповідно [17,118].

Спочатку ми не будемо враховувати опір Капіци на межі  $I/FI$ , так само як і в другому розділі для  $I/N$  межі. Найпростішим є формулювання задачі із заданим тепловим потоком  $Q_z$ , який отримує внесок від фононів і магнонів, на відмінну від  $I/N$  де внесок дають як фонони так і електрони. Тепловий потік, пов'язаний з фононами, визначається рівністю  $Q_p = -k_p \nabla T_p$ , де температура фононів підпорядковується стаціонарному рівнянню теплопровідності

$$-k_p \frac{d^2 T_p}{dz^2} = D(T_m) K(T_m, T_p), \quad (4.25)$$

де  $D(T_m)$  представлено в рівнянні (4.12) і

$$K(T_m, T_p) = \int_0^\infty \frac{u^3 du}{e^u - 1} [J_D(T_m, x = u, y_0) - \mu^4 J_D(T_m, x = u\mu, y_0)]$$

з

$$J_D(T_m, x, y_0) = \sum_{p=1}^{\infty} (1 - e^{-px}) e^{-py_0} \left[ x \left( \frac{y_0}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \left( \frac{y_0^2}{p} + \frac{2y_0}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) \right]$$

Тут  $\mu = T_p/T_m$ . Можна бачити, що коли  $\mu = 1$ , тобто фононна і магнонна температури рівні,  $K = 0$ , як і очікувалося. У граничному випадку великих  $y_0$ , що відповідає межі низьких температур,  $K$  стає експоненціально малим:  $K \sim$

$e^{-y_0}$ . Оскільки внесок у  $J_D(T_m, x, y_0)$  члена з  $p = 2$  пропорційний  $e^{-2y_0}$ , ми можемо обмежитися  $p = 1$  у граничному випадку  $y_0 \gg 1$ , отримавши: [7]

$$K(T_m, T_p) = \varphi_1 \Gamma(5) [1 + \mu^5 [\zeta(5, 1 + \mu) - \zeta(5)]] + \varphi_2 \Gamma(4) [1 + \mu^4 [\zeta(4, 1 + \mu) - [\zeta(4)]]],$$

Тут  $\varphi_1 = e^{-y_0}(y_0 + 1)$ ,  $\varphi_2 = e^{-y_0}(y_0^2 + 2y_0 + 2)$  і  $(n) \in \Gamma$ -функція від  $n$ , а  $\zeta(n, 1 + \mu) \in$  узагальненою  $\zeta$ -функцією Рімана від  $n$  та  $(1 + \mu)$ , а саме [113]

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (k)^{-s}, \quad \zeta(s, 1) = \zeta(s),$$

$$\zeta(s, 1 + p) = \sum_{k=0}^{\infty} [k + (1 + p)]^{-s}$$

Аналогічне рівняння для температури магнів

$$-k_m \frac{d^2 T_m}{dz^2} = -D(T_m) K(T_m, T_p). \quad (4.26)$$

У лінійному наближенні, коли  $T_H - T_B \ll T_B$ , температури магнів і фононів мало відрізняються від температури підкладки  $T_B$ . Якщо час релаксації енергії магнів-фонон  $\tau_{mp}$  і фонон-магнів  $\tau_{pm}$  ввести відповідно до  $c_p/\tau_{pm} = c_m/\tau_{mp}$ , то рівняння для  $T_p$  і  $T_m$  виглядають так:

$$\frac{d^2 T_p}{dz^2} + \frac{c_p}{\tau_{pm} k_p} (T_m - T_p) = 0, \quad (4.27)$$

$$\frac{d^2 T_m}{dz^2} + \frac{c_p}{\tau_{pm} k_m} (T_p - T_m) = 0, \quad (4.28)$$

У цьому розділі будемо також вважати, що шар  $FI$  розташований в області  $-d/2 < z < d/2$ . Але в цьому випадку граничні умови виглядають так

$$T_p \left( -\frac{d}{2} \right) = T_B + |Q_z| R_{th,1}, \quad T_p \left( \frac{d}{2} \right) = T_H - |Q_z| R_{th,2}, \quad (4.29)$$

$$dT_m(dz)|_{-d/2} = dT_m/dz|_{d/2} = 0. \quad (4.30)$$

Вираз (4.30) відображає той факт, що тут магнони не переносять тепло через межі шару  $FI$ . Зауважимо, що через симетрію  $T_p(0) = T_m(0)$ . Рівняння теплового потоку

$$Q_z = -k_p \frac{dT_p}{dz} - k_m \frac{dT_m}{dz} \quad (4.31)$$

можна інтегрувати від нуля до деякої координати  $z$ . Оскільки тепловий потік у шарі  $FI$  постійний, маємо рівність

$$T_p = \frac{1}{k_p} [-k_m T_m(z) + (k_p + k_m) T_p(0) - Q_z z]. \quad (4.32)$$

З рівняння (4.28) випливає, що

$$\frac{d^2 T_m}{dz^2} - \frac{c_p}{\tau_{pm} k_m} \left[ T_m + \frac{1}{k_p} (k_m T_m - k_T T_p(0) + Q_z z) \right] = 0, \quad (4.33)$$

де  $k_T = k_m + k_p$ . Розв'язок рівняння для  $T_m$ , що задовольняє граничну умову (4.30), виглядає так

$$T_m(z) = T_m(0) + \frac{Q_z \lambda}{k_T} \frac{\sinh(z/\lambda)}{\cosh(d/2\lambda)} - \frac{Q_z}{k_T} z, \quad (4.34)$$

де  $\lambda = [\tau_{pm} k_m k_p / c_p (k_m + k_p)]^{1/2}$ . Підставляючи  $T_m(z)$  у рівняння (4.32), отримуємо

$$T_p(z) = T_p(0) - \frac{k_m}{k_p} \frac{Q_z \lambda}{k_T} \frac{\sinh(z/\lambda)}{\cosh(d/2\lambda)} - \frac{Q_z}{k_T} z \quad (4.35)$$

Розглядаючи рівняння (4.29) для ефективної теплопровідності шару  $FI$ ,  $k_{eff} \equiv |Q_z| d / (T_H - T_B)$ , маємо

$$k_{eff} = k_T / \left[ 1 + \frac{k_m}{k_p} \frac{2\lambda}{d} \tanh \frac{d}{2\lambda} + \frac{k_T}{d} (R_{th,1} + R_{th,2}) \right]. \quad (4.36)$$

На відміну від роботи [21], вираз (4.36) враховує внесок теплового опору границь у  $k_{eff}$ . Цей внесок може бути значним за низьких температур ( $T_B \sim 1K$ ), і його необхідно враховувати при аналізі експериментальних даних.

Зауважимо, що при  $d \gg l_m$  вираз (4.36), отриманий на основі двотемпературної моделі, точно збігається з результатом мікроскопічного

розрахунку (3.20). У той же час при малих товщинах  $FI$  шару  $d \ll l_{pm}$  двотемпературна модель дає лише якісно правильний результат.

Фізичний зміст довжини  $\lambda$  стає зрозумілим, якщо розглянути граничний випадок  $k_m \gg k_p$ , коли  $\lambda = (\tau_{pm} k_p / c_p)^{1/2}$ . Добре відомо, що для газу теплопровідність  $k \sim cl\bar{v}$ , де  $c$  – питома теплоємність газу,  $l$  – середня довжина вільного пробігу частинок,  $v$  – їх середня теплова швидкість. Для фононного газу  $\bar{v} = s$  і якщо знехтувати розсіюванням на домішках, то середня довжина вільного пробігу фононів  $l = l_{pm}$ . Таким чином, для фононного газу маємо  $k_p \sim c_p s^2 \tau_{pm}$ , а  $\lambda \sim s \tau_{pm} = l_{pm}$ . Отже,  $\lambda$  — довжина фонон-магنونних зіткнень, тобто довжина, на якій фонони передають свою енергію магнонам.

Відповідно до рівнянь (4.20) і (4.36), для товстих  $FI$  шарів ( $d \gg l_{pm}$ ), розмірний ефект у теплопровідності шаруватих наноструктур починає проявлятися при товщинах  $FI$  шару  $d_{cr} \sim k_T (R_{th,1} + R_{th,2})$ . Якщо  $d \gg d_{cr}$  теплопровідність товстого шару  $FI$  приблизно дорівнює загальній теплопровідності магنونів і фононів, а якщо  $d \ll d_{cr}$  то розсіювання магنونів і фононів у шарі  $FI$  (тобто якість шару  $FI$ ) відіграє незначну роль, а поперечна теплопровідність шаруватих наноструктур визначається акустичною неузгодженістю суміжних матеріалів  $k_{eff} = d / (R_{th,1} + R_{th,2})$ . У разі тонких шарів  $FI$  з товщиною  $d \ll l_{pm}$  коефіцієнт теплопровідності  $k_{eff}$  визначається рівнянням (4.24). Хочу підкреслити, що оскільки значення  $l_{pm}$  і  $d_{cr}$  зростають зі зниженням температури термостата, роль розмірного ефекту в поперечній теплопровідності шаруватих структур зростає зі зниженням температури.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Розглянуто кінетичний підхід переносу тепла фононами та магнонами через шар феромагнітного ізолятора, розташованого між двома масивними ізоляторами при низьких температурах, коли магнони в шарі феромагнітного

ізолятора термалізовані внаслідок магنون-магنونних зіткнень і мають температуру магنونів.

2. Розраховано ефективну поперечну теплопровідність шаруватої системи, що містить шар феромагнетного ізолятора розташованого між двома масивними ізоляторами  $I_1/FI/I_2$  (з температурою  $T_1 \neq T_2$  для  $I_1$  та  $I_2$ ) при довільній товщині шару  $FI$ , де тепловий потік переносять як магنونи, так і фонони.

3. Знайдено товщину, при якій розмірний ефект проявляється в теплопровідності. Зауважено, що при зростанні значень  $l_{pm}$  і  $d_{cr}$  зі зниженням температури термостата, роль розмірного ефекту в поперечній теплопровідності шаруватих структур зростає зі зниженням температури.

4. Показано, що при порівнянні результатів отриманих у роботі, відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплообміну в багатошаровій системі лише у випадку товстих шарів  $FI$ , у яких товщина шару значно більша за вільний пробіг фонон-магنونів. Для більш тонких шарів  $FI$  двотемпературне наближення дає лише якісно правильний результат для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури.

Залежність поперечної теплопровідності шаруватих структур  $I_1/FI/I_2$  від товщини шару  $FI$  значно зростає із зниженням температури; тому при аналізі експериментальних результатів для низьких температур необхідно враховувати розмірний ефект.

Результати досліджень даного розділу наведено в публікаціях автора: [137].



## РОЗДІЛ 5

### ЕФЕКТИВНА ПОПЕРЕЧНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ МУЛЬТИШАРІВ МЕТАЛ-ДИЕЛЕКТРИК ПРИ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

#### 5.1. Мікроскопічний підхід до аналізу поперечного теплообміну в системі з двома металевими шарами

В даному розділі розглянуто шарувату систему, що містить два металеві шари. Ми розглядаємо мікроскопічну теорію, оскільки макромасштабний закон Фур'є не може бути використаний для розрахунку ефективної поперечної теплопровідності шаруватих структур, якщо товщина шару менша за довжину, на якій відбувається термалізація фононів. У середині таких шарів фонони не знаходяться в локальній термодинамічній рівновазі, і це робить неможливим введення локальної температури [119].

Раніше аналіз поперечної теплопровідності шаруватих структур проводився на основі рівняння Больцмана в термінах фононної інтенсивності, тобто потоку енергії фононів у певному напрямку. Такий опис зазвичай використовує припущення, що всі фононні моди мають однаковий час релаксації [98,120-121]. У недавній роботі [122] також використовується  $\tau$ -наближення, хоча припускається, що кожна фононна мода має власний час релаксації. Зауважимо, що для тонких шарів і великих перепадів температури використання інтеграла зіткнень у  $\tau$ -наближенні з залежною від температури рівноважною функцією розподілу фононів не є виправданим, оскільки неможливо коректно ввести локальну температуру.

Наш мікроскопічний підхід до розрахунку поперечної теплопровідності в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками, ґрунтується на рівнянні Больцмана для функції розподілу фононів та умові термалізації електронної підсистеми в металевих шарах. Розглянуто ситуацію, коли електрони в металі термалізовані, а фонони - ні, реалізується при

достатньо низьких температурах, за яких характерний час електрон-електронних зіткнень значно менший за час зіткнень електронів з фононами.

Проста оцінка показує, що в чистих металах така картина має місце при температурах  $T < k_B \Theta_D^2 / \varepsilon_F \sim 1 \text{ K}$ . Тут  $k_B$  — стала Больцмана,  $\Theta_D$  — температура Дебая,  $\varepsilon_F$  — енергія Фермі. Зауважимо, що в брудних металах посилення електрон-електронної взаємодії та послаблення електрон-фононої взаємодії може на порядок збільшити оцінку верхньої температурної межі [103].

Інтерес до області гелієвих температур викликаний, зокрема, тим, що зі зниженням температури знижується рівень теплового шуму в електронних пристроях. Це зменшення шуму дозволило розробити високочутливі наноболометри гарячих електронів [123–125] і детектори одиночних фотонів [126, 127]. На нашу думку, отримані нижче результати можуть бути корисними для проектування та аналізу режимів роботи низькотемпературних електронних пристроїв із шаруватою структурою.

Розглянемо шарувату систему, що містить два металеві шари (див. рис. 5.1) і припустимо, що фонони мають лише поздовжню лінію коливаль.

У стаціонарному випадку запишемо рівняння переносу Больцмана для функції розподілу фононів  $N_q^{(k)}$  у металевому шарі  $M_k$  ( $k = 1, 2$ ) у вигляді

$$s_{kz} \frac{dN_{\mathbf{q}}^{(k)}}{dz} = I_{pe} (N_{\mathbf{q}}^{(k)}), \quad (5.1)$$

тут  $s_{kz}$  - проекція швидкості фонона на вісь  $z$ , перпендикулярну до шарів,  $q$  — фононний хвильовий вектор  $I_{pe}$  інтеграл фонон-електронних зіткнень.

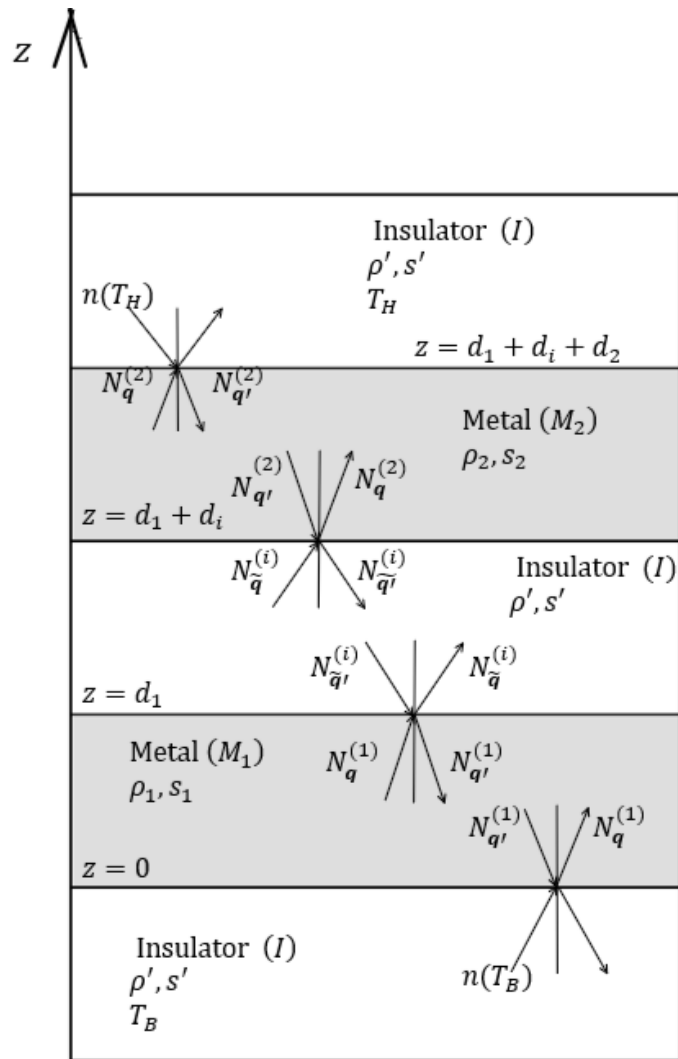


Рис.5.1 Заломлення та відбиття фононних мод на межах метал - діелектрик у шаруватій структурі  $I/M_1/I/M_2/I$ . Показано напрямки хвильових векторів фононів та числа заповнення відповідних фононних станів.  $T_B$  – температура нижньої підкладки,  $T_H$  – температура верхньої діелектричної пластини.  $s_{1(2)}(s')$  - швидкості поздовжнього звуку в металах (діелектрику),  $\rho_{1,2}$ , - густина шарів металу,  $\rho'$  - густина діелектрика. Вважається, що метали  $M_1$  та  $M_2$  різні, матеріал діелектричної підкладки збігається з матеріалом шару  $I$  і матеріалом верхньої діелектричної пластини.

У випадку функції розподілу електронів Фермі загальна форма інтеграла зіткнень  $I_{pe}$  значно спрощується і набуває вигляду  $\tau$ -наближення, яке описує релаксацію функції розподілу фононів у шарі  $M_k$  до бозе-розподілу з локальною температурою електронів:

$$I_{pe} \left( N_q^{(k)} \right) = v_k \left[ n(T_k) - N_q^{(k)}(z) \right], \quad (5.2)$$

тут  $n(T) = \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega_q}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}$  – функція розподілу Бозе - Ейнштейна ( $k_B$  - стала Больцмана), з  $z$  залежною температурою електронів  $T_k$ .

У чистих металах частота фонон-електронних зіткнень визначається наступним виразом:

$$\nu_k = \frac{m_k \mu_k \omega_q}{2\pi \hbar^3 \rho_k s_k},$$

де  $m_k$  – ефективна маса електронів,  $\mu_k$  – константа деформаційного потенціалу,  $\rho_k$  - густина,  $s_k$  – швидкість повздовжнього звуку в шарі  $M_k$ . Зазначимо, що фононна частота  $\omega_q$  не змінюється при переході з одного середовища в інше. Вираз для  $\nu_k$  можна узагальнити на випадок брудних металів [128, 129], а частоту зіткнень фонон-електрон можна переписати як

$$\nu_k = \frac{m \mu_{kr}^2}{2\pi \hbar^4 \rho_k s_k} (\hbar\omega_q)^{\{1+r\}}$$

Тут  $\mu_{kr}$  - константа, що характеризує взаємодію електронів з ґраткою. Число  $r$  описує вплив пружного розсіювання електронів на дефектах кристалічної ґратки на частоту непружних зіткнень електронів і фононів. За експериментальними даними будемо вважати, що значення  $r$  є довільним числом від  $-1$  до  $1$  [130].

Для формулювання граничних умов звернемося до рис. 5.1, який ілюструє процеси відбивання та заломлення фононних мод на межах шарів. У металевому шарі  $M_1$  на межі з підкладкою функція розподілу фононів, що мають позитивну  $z$ -компоненту хвильового вектора, містить два внески. Перший визначається фононами, що прийшли з підкладки, другий — фононами металу, відбитими від межі:

$$N_{\mathbf{q}}^{(1)}(0) = \alpha_1 n(T_B) + \beta_1 N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(0), \quad (5.3)$$

Тут  $\alpha_1, \beta_1$  - коефіцієнти пропускання та відбивання для межі поділу між металами  $M_1$  та діелектриком,  $T_B$  – температура діелектричної підкладки. У записі граничних умов хвильові вектори  $\mathbf{q}$  і  $\mathbf{q}'$  являють собою фонони, що мають позитивну або негативну  $z$ -компоненту хвильового вектора:  $\mathbf{q} =$

$(q_x, q_y, q_z > 0)$ ,  $\mathbf{q}' = (q_x, q_y, -q_z)$ . Коефіцієнт пропускання інтерфейсу для фононів, що падають на межу розділу під кутом  $\theta$ , визначається акустичними імпедансами сусідніх середовищ  $Z = \rho s$  і  $Z' = \rho' s'$ :

$$\alpha(\theta) = 4ZZ' \cos \theta \cos \theta' / (Z \cos \theta' + Z' \cos \theta)^2$$

де  $\theta'$  – кут заломлення [37,105,131].

Умови на межах  $z = d_1$  і  $z = d_1 + d_i$  записуються аналогічно до співвідношення (5.3). При  $z = d_1$  маємо

$$N_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(i)} = \alpha_1 N_{\mathbf{q}}^{(1)}(d_1) + \beta_1 N_{\tilde{\mathbf{q}}'}^{(i)}, \quad (5.4)$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(d_1) = \alpha_1 N_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(i)} + \beta_1 N_{\mathbf{q}}^{(1)}(d_1), \quad (5.5)$$

тоді як при  $z = d_1 + d_i$

$$N_{\mathbf{q}}^{(2)}(d_1 + d_i) = \alpha_2 N_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(i)} + \beta_2 N_{\mathbf{q}'}^{(2)}(d_1 + d_i), \quad (5.6)$$

$$N_{\tilde{\mathbf{q}}'}^{(i)} = \alpha_2 N_{\mathbf{q}'}^{(2)}(d_1 + d_i) + \beta_2 N_{\mathbf{q}}^{(i)}. \quad (5.7)$$

Зазначимо, що граничні умови написані у припущенні, що метали  $M_1$  та  $M_2$  різні, але матеріали підкладки, верхньої пластини та прошарку однакові. Оскільки ми нехтуємо розсіювання фононів у прошарку  $I$ , числа заповнення  $N_{\tilde{\mathbf{q}}}^{(i)}$  не залежать від координати  $z$ . Остання гранична умова:

$$N_{\mathbf{q}'}^{(2)}(d_1 + d_i + d_2) = \alpha_2 n(T_H) + \beta_2 N_{\mathbf{q}}^{(2)}(d_1 + d_i + d_2). \quad (5.8)$$

Тут  $\alpha_2, \beta_2$  - коефіцієнти пропускання і відбивання для межі поділу між металом  $M_2$  і діелектриком.

Рівняння для  $N_{\mathbf{q}}^{(k)}(z)$ ,  $k = 1, 2$

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}^{(k)}}{dz} + \frac{1}{l_k} N_{\mathbf{q}}^{(k)} = \frac{1}{l_k} n(T_k(z)), \quad (5.9)$$

має наступний розв'язок:

$$N_{\mathbf{q}}^{(k)}(z) = C_{\mathbf{q}}^{(k)} e^{-z/l_k} + \int_{z_{ik}}^z \frac{1}{l_k} e^{-(z-z')/l_k} n(T_k(z')) dz', \quad (5.10)$$

де  $z_{i1} = 0, z_{i2} = d_1 + d_i$ ,  $l_k = |s_{kz}|/v_k$  – довжина вільного пробігу фонону в шарі  $M_k$ .

Зауважимо, що рівняння для  $N_{\mathbf{q}'}^{(k)}(z)$  відрізняється від (5.9) знаком перед першим доданком в лівій частині. Рішення рівняння для  $N_{\mathbf{q}'}^{(k)}(z)$  має такий вигляд:

$$N_{\mathbf{q}'}^{(k)}(z) = C_{\mathbf{q}'}^{(k)} e^{z/l_k} + \int_z^{z_{fk}} \frac{1}{l_k} e^{(z-z')/l_k} n(T_k(z')) dz', \quad (5.11)$$

де  $z_{f1} = d_1$ ,  $z_{f2} = d_1 + d_i + d_2$ .

Постійні  $C_{\mathbf{q}}^{(k)}$ ,  $C_{\mathbf{q}'}^{(k)}$  визначаються граничними умовами (5.3-5.8). Для цих констант отримано досить громіздкі вирази:

$$C_{\mathbf{q}}^{(1)} = \frac{e^{d_1/l_1}}{D} \{ e^{d_1/l_1} (\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11}) (e^{2d_2/l_2} - E_2 \beta_2) + \beta_1 J_{12} \beta_2 (E_1^2 - E_2^2) + \beta_1 E_1 e^{d_2/l_2} [(\alpha_2 n(T_H) + \beta_2 J_{22}) + e^{d_2/l_2} (E_2 J_{12} + E_1 J_{21})] \}, \quad (5.12a)$$

$$C_{\mathbf{q}'}^{(1)} = \frac{1}{D} \{ \beta_2 (E_1^2 - E_2^2) (J_{12} e^{d_1/l_1} + (\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11})) + E_1 e^{d_2/l_2} e^{d_1/l_1} (\alpha_2 n(T_H) + \beta_2 J_{22}) + e^{2d_2/l_2} [e^{d_1/l_1} (E_2 J_{12} + E_1 J_{21}) + E_2 (\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11})] \}, \quad (5.12b)$$

$$C_{\mathbf{q}}^{(2)} e^{-(d_1+d_i)/l_2} = \frac{e^{d_2/l_2}}{D} \{ E_1 e^{d_1/l_1} e^{d_2/l_2} (\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11}) + \beta_1 (E_1^2 - E_2^2) (J_{21} e^{d_2/l_2} + \alpha_2 n(T_H) + \beta_2 J_{22}) + e^{2d_1/l_1} [e^{d_2/l_2} (E_1 J_{12} + E_2 J_{21}) + E_2 (\alpha_2 n(T_H) + \beta_2 J_{22})] \}, \quad (5.12b)$$

$$C_{\mathbf{q}'}^{(2)} e^{(d_1+d_i)/l_2} = \frac{1}{D} \{ (\alpha_2 n(T_H) + \beta_2 J_{22}) e^{d_2/l_2} (e^{2d_1/l_1} - E_2 \beta_1) + \beta_2 e^{2d_1/l_1} (E_1 J_{12} + E_2 J_{21}) + \beta_2 E_1 e^{d_1/l_1} (\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11}) + \beta_1 \beta_2 J_{21} (E_1^2 - E_2^2) \}, \quad (5.12\Gamma)$$

де

$$E_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(1 - \beta_2 \beta_1)}, \quad E_2 = \frac{\beta_2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_2}{(1 - \beta_2 \beta_1)}$$

де детермінант системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів  $C_{\mathbf{q}}^{(k)}$ , та  $C_{\mathbf{q}'}^{(k)}$  має вигляд

$$D = e^{2d_1/l_1} e^{2d_2/l_2} - \beta_1 E_2 e^{2d_2/l_2} - \beta_2 E_2 e^{2d_1/l_1} - \beta_1 \beta_2 (E_1^2 - E_2^2).$$

Рівняння (5.12) також містять константи  $J_{ik}$ , які визначаються такими рівностями:

$$J_{11} = \frac{1}{l_1} \int_0^{d_1} e^{-z'/l_1} n(T_1(z')) dz', \quad (5.13a)$$

$$J_{12} = \frac{1}{l_1} \int_0^{d_1} e^{-(d_1-z')/l_1} n(T_1(z')) dz', \quad (5.13б)$$

$$J_{21} = \frac{1}{l_2} \int_{z_{i2}}^{z_{f2}} e^{(z_{i2}-z')/l_2} n(T_2(z')) dz', \quad (5.13 в)$$

$$J_{22} = \int_{z_{i2}}^{z_{f2}} \frac{1}{l_2} e^{-(z_{f2}-z')/l_2} n(T_2(z')) dz', \quad (5.13 г)$$

## 5.2. Ефективна поперечна теплопровідність

За стаціонарних умов поперечний тепловий потік у шаруватій системі є сталою величиною, і тому його можна обчислити для будь-якої координати  $z$ . За умови, що електрони перебувають у локальній термодинамічній рівновазі, проекція теплового потоку на  $z$  у шарі  $M_1$  представляється виразом

$$Q_z = -\kappa_{e1} [T_1(z)] \frac{dT_1}{dz} + \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_{1z} [N_{\mathbf{q}}^{(1)} - N_{\mathbf{q}'}^{(1)}], \quad (5.14)$$

де  $\kappa_{e1}$  - електронна теплопровідність у шарі  $M_1$  [132]. Другий доданок у правій частині є часткою теплового потоку, що переноситься фононами. Підстановка функції розподілу фононів, в рівняння (5.14) призводить до громіздкого

виразу, який навряд чи придатний для з'ясування фізичної картини теплопередачі в шаруватих структурах. Для отримання такої картини необхідно перейти від загального випадку до граничних випадків тонкого і товстого шарів металу.

### 5.2.1. Тонкі шари металу

Перейдемо до випадку тонких  $M$ -слоїв, тобто будемо вважати, що  $d_1 \ll l_1$ , і  $d_2 \ll l_2$ . У нульовому наближенні в  $d_1/l_1$  функція розподілу фононів у шарі  $M_1$  описується наступними рівняннями:

$$N_{\mathbf{q}}^{(1)} = \frac{1}{D} \{ \alpha_1 n(T_B) - E_2 \beta_2 \alpha_1 n(T_B) + E_1 \beta_1 \alpha_2 n(T_H) \}, \quad (5.15)$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{(1)} = \frac{1}{D} \{ E_1 \alpha_2 n(T_H) + E_2 \alpha_1 n(T_B) + \alpha_1 \beta_2 n(T_B) (E_1^2 - E_2^2) \}, \quad (5.16)$$

$$D = 1 - \beta_1 E_2 - \beta_2 E_2 - \beta_1 \beta_2 (E_1^2 - E_2^2).$$

Нехтуючи електронним внеском у теплопровідність шару металу (оскільки фонони в тонких шарах  $M$  не встигають передати енергію електронам), маємо

$$Q_z = \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_{1z} [N_{\mathbf{q}}^{(1)} - N_{\mathbf{q}'}^{(1)}], \quad (5.17)$$

Підставляючи  $N_{\mathbf{q}}^{(1)}$  і  $N_{\mathbf{q}'}^{(1)}$  у рівняння (5.17), отримуємо такий вираз для теплового потоку для довільної різниці температур між нагрітим верхнім шаром і холодною підкладкою:

$$Q_z = - \frac{\pi^2}{120} \frac{k_B^4}{\hbar^3 s_1^2} (T_B^4 - T_H^4) \left\langle \frac{E_1}{1 + E_2} \right\rangle. \quad (5.18)$$

Тут кутові дужки позначають усереднення за кутами падіння  $\theta_1$

$$\langle f \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta_1) f(\theta_1) d\theta_1.$$

Ефективна теплопровідність шаруватої структури з двома металевими шарами  $M_1$  і  $M_2$  визначається співвідношенням



$$\kappa_{eff} = \frac{|Q_z|(d_1 + d_i + d_2)}{T_H - T_B} \quad (5.19)$$

за умови  $T_H - T_B \ll T_B$ . Для системи з двома тонкими металевими шарами ми маємо

$$\kappa_{eff} = \frac{\pi^2 k_B^4 T_B^3}{30 \hbar^3 s_1^2} \left\langle \frac{E_1}{1 + E_2} \right\rangle (d_1 + d_i + d_2). \quad (5.20)$$

З'ясуємо фізичний зміст результату (5.20) і узагальнимо його на системи з  $n$  тонкими металевими шарами. Ймовірність проходження фононів через двошарову систему з тонкими  $M$  – шарами позначимо через  $T^{(2)}$ . За відсутності поглинання фононів у  $M$ -шарах

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= T_1^{(1)} T_2^{(1)} + T_1^{(1)} T_2^{(1)} R_1^{(1)} R_2^{(1)} + T_1^{(1)} T_2^{(1)} (R_1^{(1)} R_2^{(1)})^2 + \dots = \\ &= \frac{T_1^{(1)} T_2^{(1)}}{1 - R_1^{(1)} R_2^{(1)}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$T_k^{(1)}$  - ймовірність проходження фонона через один металевий шар  $M_k$  ( $k = 1, 2$ ).  $R_k^{(1)}$  - ймовірність відбиття фонона від одиночного металевого шару  $M_k$ . Подібно до попередньої формули для ймовірності  $T^{(2)}$  можна записати

$$T_k^{(1)} = \alpha_k^2 + \alpha_k^2 \beta_k^2 + \alpha_k^2 \beta_k^4 + \dots = \frac{\alpha_k^2}{1 - \beta_k^2} = \frac{\alpha_k}{1 + \beta_k} \quad (5.22)$$

Ймовірність відбиття фонона від одиночного металевого шару металевого  $M_k$

$$R_k^{(1)} = \frac{2\beta_k}{1 + \beta_k}. \quad (5.23)$$

Звідси ми маємо, що ймовірність проходження фононів через двошарову систему з тонкими шарами  $M$  визначається як

$$T^{(2)} = \frac{E_1}{1 + E_2}. \quad (5.24)$$

Цей вираз такий самий, як і вираз у кутових дужках у рівнянні (5.18). Таким чином, рівняння (5.18) включає ймовірність проходження фононів

через двошарову систему  $T^{(2)}$ . Це означає, що  $k_{eff}$  системи з  $n$  металевих шарів має визначатися аналогічною ймовірністю пропускання  $T^{(n)}$ .

Оскільки в багатошаровій системі зазвичай усі металеві шари виготовлені з одного металу, а діелектричні (або напівпровідникові) шари виготовлені з одного й того ж діелектрика (напівпровідника), ймовірність  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  і  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ .

В такому випадку

$$T^{(1)} = \frac{\alpha}{1 + \beta}, \quad T^{(2)} = \frac{\alpha}{1 + 3\beta}. \quad (5.25)$$

Можна показати, що для  $n$ -шарової системи ймовірність передачі становить

$$T^{(k)} = \frac{\alpha}{1 + (2n - 1)\beta}. \quad (5.26)$$

Отже, вираз для теплового потоку в  $n$ -шаровій системі має вигляд

$$Q_z = \frac{\pi^2}{120} \frac{k_B^4}{\hbar^3 s^2} (T_H^4 - T_B^4) \left\langle \frac{\alpha}{1 + (2n - 1)\beta} \right\rangle. \quad (5.27)$$

Ефективна теплопровідність багатошарової системи з  $n$  однакових тонких  $M$ -шарів і  $n - 1$  однакових діелектричних прошарків становить

$$\kappa_{eff} = \frac{\pi^2}{30} \frac{k_B^4 T_B^3}{\hbar^3 s^2} \left\langle \frac{\alpha}{1 + (2n - 1)\beta} \right\rangle \cdot [nd_m + (n - 1)d_i] \quad (5.28)$$

де  $d_m$  — товщина  $M$ -шару,  $s$  — швидкість поздовжнього звуку в  $M$ -шарі,  $d_i$  — товщина  $I$  — шару. Якщо  $n \gg 1$ ,

$$\kappa_{eff} = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_B^4 T_B^3}{\hbar^3 s^2} \left\langle \frac{\alpha}{\beta} \right\rangle (d_m + d_i). \quad (5.29)$$

Таким чином, ефективна теплопровідність багатошарової системи з тонкими металевими шарами визначається періодом і не залежить від кількості шарів. Якщо порівняти (5.29) із добре відомим виразом для фононної теплопровідності  $\kappa_p \sim c_p \cdot s \cdot l_p$ , де  $c_p$  — фононна теплоємність, а  $l_p$  — довжина вільного пробігу фононів, отримаємо  $l_{eff} \sim \left\langle \frac{\alpha}{\beta} \right\rangle (d_m + d_i)$ ;  $l_{eff}$  — ефективна довжина вільного пробігу фононів.

### 5.2.2. Товсті шари металу

Вище ми отримали вираз для теплового потоку у випадку тонких  $M$ -шарів. Знайдемо тепер вираз для теплового потоку у випадку товстих  $M$ -шарів. Для цього необхідно використати вирази (5.10) і рівняння (5.11) з коефіцієнтами  $C_q$ , обчисленими в межах  $d_1 \gg l_1, d_2 \gg l_2$ . Для шару  $M_1$  ми маємо

$$N_{\mathbf{q}}^{(1)}(z) = e^{-z/l_1} \cdot [\alpha_1 n(T_B) + \beta_1 J_{11}] + \frac{1}{l_1} \int_0^z e^{-(z-z')/l_1} n(T_1(z')) dz', \quad (5.30 \text{ а})$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(z) = e^{(z-d_1)/l_1} \cdot (E_2 J_{12} + E_1 J_{21}) + \frac{1}{l_1} \int_z^{d_1} e^{(z-z')/l_1} n(T_1(z')) dz'. \quad (5.30 \text{ б})$$

При невеликому перепаді температури в шарі  $M_1$  функцію  $n(T_1(z'))$  можна розкласти поблизу точки  $z$ :

$$n(T_1(z')) \approx n(T_1(z)) - \frac{dT_1(z)}{dz} \cdot (z - z').$$

У частинах металевого шару  $M_1$ , які розташовані не надто близько до країв шару, тобто для  $z \gg l_1$  і  $d_1 - z \gg l_1$ , показники  $e^{-z/l_1}$  і  $e^{-(d_1-z)/l_1}$  невеликі. Як наслідок, компоненти в  $N_{\mathbf{q}}^{(1)}(z)$  і в  $N_{\mathbf{q}'}^{(1)}(z)$ , що містять  $e^{-z/l_1}$  і  $e^{-(d_1-z)/l_1}$ , можна знехтувати. Для функції розподілу фононів отримуємо такий вираз:

$$N_{\mathbf{q}(\mathbf{q}')}^{(1)}(z) = n(T_1(z)) \mp l_1 \frac{dn}{dT} \frac{dT_1(z)}{dz}, \quad (5.31)$$

Потік тепла, що переноситься фононами, дорівнює

$$Q_z = -2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q s_{1z} l_1 \frac{dn}{dT} \frac{dT_1(z)}{dz}. \quad (5.32)$$

Загальний тепловий потік у шарі  $M_1$  складається двох вкладів електронного та фононного.  $z$ -проекція повного теплового потоку має вигляд

$$Q_z = -\kappa_{e1}(T_B) \frac{dT_1}{dz} - \kappa_{p1}(T_B) \frac{dT_1}{dz}. \quad (5.33)$$

де  $\kappa_{p1}(T_B)$  - фононна теплопровідність металу  $M_1$  при температурі  $T_B$ .

З наведених вище результатів випливає, що

$$\begin{aligned} \kappa_{p1}(T) &= 2 \int_{q_z > 0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{s_{1z}^2}{v_1} \frac{dn_q}{dT} = \\ &= \Gamma(3-r) \zeta(3-r) \frac{(3-r)}{3\pi} \frac{\hbar \rho_1}{m_1^2 \mu_{1r}^2} k_B^{3-r} T^{2-r}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

де  $\Gamma$  і  $\zeta$  - гамма-функція та зета-функція Рімана відповідно. Вираз (5.34) узагальнює відоме співвідношення для фононної теплопровідності чистих металів  $\kappa_{p1} \propto T^2$  на випадок забруднених металів.

У випадку товстих  $M$ -шарів різницю  $T_H - T_B$  можна представити як суму перепадів температур на межі  $z = 0$  і  $z = d_1 + d_i + d_2$ , а також на шарах  $M_1$  і  $M_2$  та на прошарку  $I$ . Перепади температури на межах  $z = d_1$  і  $z = d_1 + d_i + d_2$  визначаються тепловими опорами границь як  $|Q|R_{th,k}$ , де  $k = 1, 2$ . Термічний опір межі отримано з результатів Літтла [27]. У наших позначеннях

$$R_{th,k} = \left[ \frac{\pi}{30} \frac{k_B^4 T_B^3}{\pi^3 s_k^2} \cdot \langle \alpha_k \rangle \right]^{-1}. \quad (5.35)$$

Перепад температури на шарі  $M_k$  визначається тепловим потоком як  $|Q_z|d_k/\kappa_{T,k}$ , де  $\kappa_T = \kappa_{e,k} + \kappa_{p,k}$ . Різницю температур  $T_2(d_1 + d_i) - T_1(d_1)$  можна знайти з виразу для теплового потоку в діелектричному прошарку  $I$ . Розрахунки приводять до результату  $|Q_z| = R_I[T_2(d_1 + d_i) - T_1(d_1)]$ , де тепловий опір діелектричного прошарку

$$R_{thI} = \left[ \frac{\pi^2}{30} \frac{k_B^4 T_B^3}{\hbar^3 s_i^2} \cdot \left\langle \frac{\alpha_1 \alpha_2}{1 - \beta_1 \beta_2} \right\rangle \right]^{-1}. \quad (5.36)$$

Тут  $s_i$  швидкість поздовжніх хвиль у прошарку. Таким чином, для ефективної теплопровідності в шаруватій системі з двома металевими шарами маємо вираз

$$\kappa_{eff} = \frac{d_1 + d_i + d_2}{R_{th1} + R_{th2} + R_{thI} + \frac{d_1}{\kappa_{T,1}} + \frac{d_2}{\kappa_{T,2}}}. \quad (5.37)$$

Цей вираз легко узагальнюється на випадок  $n$  - металевих шарів. Ми отримуємо

$$k_{eff} = \frac{\sum_{k=1}^n d_l + \sum_{l=1}^{n-1} d_{i,l}}{R_{th1} + R_{th2} + \sum_{l=1}^{n-1} R_{thl,l} + \sum_{k=1}^n \frac{d_l}{\kappa_{T,l}}}. \quad (5.38)$$

Тут  $d_{i,l}$  – товщина діелектричного прошарку з числом  $l$ , а  $R_{thl,l}$  – тепловий опір прошарку з числом  $l$ .

У випадку багат шарової системи ( $n \gg 1$ ) з однаковими шарами металу товщиною  $d_m$  та однаковими прошарками діелектрика товщиною  $d_i$  вираз для ефективної теплопровідності поперечної площини зводиться до

$$\kappa_{eff} = \frac{d_m + d_i}{R_{thl} + \frac{d_m}{\kappa_{T,m}}}. \quad (5.39)$$

Тут  $\kappa_{T,m}$  – сумарна теплопровідність металевого шару, а у виразі (5.36) для  $R_{thl}$  потрібно покласти  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  і  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ . Цей результат відрізняється від відомого виразу для поперечної теплопровідності надгратки, отриманого на основі уявлень про послідовно з'єднані термічні опори металевих і діелектричних шарів, а також межі між ними [133– 135]. Різниця виникає тому, що ми не припускаємо, що фонони в шарах діелектрика термалізовані. Така ситуація є цілком реальною для області низьких температур, яку ми розглядаємо.

### 5.3. Обговорення отриманих результаті

Теплообмін у шаруватих системах ”метал-діелектрик” або ”метал-напівпровідник” розглянуто мікроскопічно на основі аналітичного розв’язку рівняння Больцмана для функції розподілу фононів за умови термалізації електронів у шарах металу. Як зазначалося в даному розділі, ця умова виконується при досить низьких температурах, коли частота фононно-електронних зіткнень значно нижча за частоту електрон-електронних зіткнень. Іншою особливістю моделі є те, що враховується тільки одна частина

фононного спектра. Саме в цьому припущенні записані граничні умови. Хоча в рамках представленого мікроскопічного підходу можна врахувати всі хвилі коливань, таке узагальнення призвело б до надзвичайно громіздких і погано прозорих виразів. Зауважимо, що в використаному наближенні ми отримали кінцеві результати щодо теплопровідностей металевих шарів та термічних опорів меж розділу та діелектричних шарів, тобто у вигляді, який не залежить від числа врахованих хвиль фононного спектру. Така форма результатів дає можливість порівняти теоретичні результати з експериментальними.

При аналізі теплопередачі в шаруватих структурах важливо виділити розмірний ефект, який має спільні риси з розмірним ефектом, коли тепло відводиться від металевої плівки до діелектричної підкладки [20]. Якщо товщина металевого шару менше або порядку довжини вільного пробігу теплових фононів,  $d_m \lesssim l_p$ , реалізується так званий балістичний режим теплообміну. Відповідно до рівняння (5.29), в цьому режимі ефективна теплопровідність багатошарової системи пропорційна її періоду і сильно залежить від температури ( $\kappa_{eff} \propto T_B^3$ ).

У протилежному випадку ( $d_m \gg l_p$ ) теплопередача має дифузійний характер. Якщо в рівнянні (5.39)  $R_{thl} \ll d_m/\kappa_m$  і  $d_m \approx d_i$ , ефективна теплопровідність  $\kappa_{eff}$  визначається властивостями шарів металу і слабо залежить від товщини періоду шаруватої структури. Коли температура досить низька, так що  $R_{thl} \gg d_m/\kappa_m$ , ефективна теплопровідність визначається термічним опором шару діелектрика, і можна сказати, що саме в цьому випадку проявляється шарувата природа багатошарової системи.

Залежність  $\kappa_{eff}$  від товщини періоду надгратки, подібна до залежності, що описується рівняннями (5.29) і (5.39), експериментально спостерігалася при кімнатній температурі [136]. Зауважимо, що область переходу від балістичного режиму до дифузійного режиму може бути використана для оцінки довжини вільного пробігу теплових фононів у металевому шарі. На

підставі результатів, наведених у [136] можна отримати, що для металевого шару  $(\text{Ti,W})\text{N}$  за кімнатної температури  $l_p \approx 30$  нм.

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Розглянуто перенесення тепла в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками при низьких температурах та умові термалізації електронної підсистеми в металевих шарах.

2. Отримано аналітичний вираз для ефективної теплопровідності структур з довільною кількістю шарів, а також для надграток.

3. Проаналізовано розмірний ефект теплопровідності і показано, що фононна механіка теплопровідності суттєво відрізняється для випадків товстих і тонких металевих шарів. Якщо товщина металевих шарів у надгратці набагато менша за довжину вільного пробігу фонона, то ефективна поперечна теплопровідність пропорційна товщині періоду надгратки. У протилежному випадку така теплопровідність слабо залежить від товщини періоду надгратки.

Вплив відбиття фононів від межі розділу метал/діелектрик на теплопровідність між площинами збільшується зі зниженням температури. Таким чином, саме при низьких температурах шарувата природа системи може призвести до значного зниження теплопровідності між площинами. У теплопровідності проаналізовано розмірний ефект і показано, що фононна механіка теплопровідності суттєво відрізняється для випадків товстих і тонких металевих шарів (у порівнянні з вільною довжиною фононів у металах). Отримані в роботі результати з ефективної теплопровідності відрізняються від їхніх високотемпературних аналогів, опублікованих іншими авторами. Результати роботи дають пояснення особливостей перенесення тепла в наноструктурах і є важливою для розробки наноструктурованих матеріалів для застосувань в області термоелектрики, спінової калоритроніки, плазмоніки та інших галузях.

## ВИСНОВКИ

1. Розглянуто поперечне перенесення тепла через металевий шар, розташований між двома масивними діелектриками за низьких температур, коли електрони в металевому шарі термалізовані.

2. Обчислено ефективну поперечну теплопровідність у шаруватій гетероструктурі діелектрик-метал-діелектрик при довільному значенні товщини металевого шару.

3. Знайдені товщини, при яких у теплопровідності шаруватих наноструктур проявляється розмірний ефект.

4. Розраховано поперечну ефективну теплопровідність в рамках феноменологічної двотемпературної (2ТМ) моделі, тобто в термінах електронної та фононної температур.

Порівняння отриманих результатів показують, що відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплоперенесення в багатошаровій системі тільки у разі товстих металевих шарів, коли товщина шару значно більша за фонон-електронну довжину вільного пробігу. Для більш тонких металевих шарів двотемпературне наближення дає невірний вираз для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури.

5. Розглянуто кінетичний підхід переносу тепла фононами та магнонами через шар феромагнітного ізолятора, розташованого між двома масивними ізоляторами при низьких температурах, коли магнони в шарі феромагнітного ізолятора термалізовані внаслідок магнон-магнонних зіткнень і мають температуру магнонів.

6. Розраховано ефективну поперечну теплопровідність шаруватої системи, що містить шар феромагнітного ізолятора розташованого між двома масивними ізоляторами  $I_1/FI/I_2$  (з температурою  $T_1 \neq T_2$  для  $I_1$  та  $I_2$ ) при довільній товщині шару  $FI$ , де тепловий потік переносять як магнони, так і фонони.



7. Знайдено товщину, при якій розмірний ефект проявляється в теплопровідності. Зауважено, що при зростанні значень  $l_{pm}$  і  $d_{cr}$  зі зниженням температури термостата, роль розмірного ефекту в поперечній теплопровідності шаруватих структур зростає зі зниженням температури.

8. Показано, що при порівнянні результатів отриманих у роботі, відносно просте двотемпературне наближення коректно описує кінетику теплообміну в багатошаровій системі лише у випадку товстих шарів  $FI$ , у яких товщина шару значно більша за вільний пробіг фонон-магنونів. Для більш тонких шарів  $FI$  двотемпературне наближення дає лише якісно правильний результат для ефективної поперечної теплопровідності шаруватої структури.

Залежність поперечної теплопровідності шаруватих структур  $I_1/FI/I_2$  від товщини шару  $FI$  значно зростає із зниженням температури; тому при аналізі експериментальних результатів для низьких температур необхідно враховувати розмірний ефект.

9. Розглянуто перенесення тепла в системі металевих шарів, розділених діелектричними прошарками при низьких температурах та умові термалізації електронної підсистеми в металевих шарах.

10. Отримано аналітичний вираз для ефективної теплопровідності структур з довільною кількістю шарів, а також для надграток.

11. Проаналізувано розмірний ефект теплопровідності і показано, що фононна механіка теплопровідності суттєво відрізняється для випадків товстих і тонких металевих шарів. Якщо товщина металевих шарів у надгратці набагато менша за довжину вільного пробігу фонона, то ефективна поперечна теплопровідність пропорційна товщині періоду надгратки. У протилежному випадку така теплопровідність слабо залежить від товщини періоду надгратки.

Вплив відбиття фононів від межі розділу метал/діелектрик на теплопровідність між площинами збільшується зі зниженням температури. Таким чином, саме при низьких температурах шарувата природа системи може призвести до значного зниження теплопровідності між площинами. У

теплопровідності проаналізовано розмірний ефект і показано, що фононна механіка теплопровідності суттєво відрізняється для випадків товстих і тонких металевих шарів (у порівнянні з вільною довжиною фононів у металах). Отримані в роботі результати з ефективної теплопровідності відрізняються від їхніх високотемпературних аналогів, опублікованих іншими авторами. Результати роботи дають пояснення особливостей перенесення тепла в наноструктурах і є важливою для розробки наноструктурованих матеріалів для застосувань в області термоелектрики, спінової калоритроніки, плазмоніки та інших галузях.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. E. Pop, Energy dissipation and transport in nanoscale devices, *Nano Res.* 3, 147 (2010). DOI: 10.1007/s12274-010-1019-z
2. Franklin, A. D. Nanomaterials in transistors: From high-performance to thin-film applications. *Science*, 349(6249), (2015). DOI:10.1126/science.aab2750
3. G. E. W. Bauer, E. Saitoh, and B. J. van Wees, Spin caloritronics. *Nature Materials*, *Nat. Mater.* 11, 391 (2012). DOI: 10.1038/NMAT3301
4. S. R. Boona, R.C. Myers and J.P. Heremans, Spin caloritronics, *Energy Environ. Sci.* 7, 885, (2014). DOI: 10.1039/c3ee43299h
5. D.G. Cahill, P.V. Braun, G. Chen, D.R. Clarke, S. Fan, K.E. Goodson, P. Keblinski, W.P. King, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, S.R. Phillpot, E. Pop, and L. Shi, Nanoscale Thermal Transport. II. 2003–2012, *Applied Physics Reviews*, 1, 011305 (2014). DOI: 10.1063/1.4832615
6. G. Chen, Nonlocal and Nonequilibrium Heat Conduction in the Vicinity of Nanoparticles. *Journal of Heat Transfer*, 118(3), 539, (1996). DOI:10.1115/1.2822665
7. T. B. Noack, H. Y. Musiienko - Shmarova, T. Langner, F. Heussner, V. Lauer, B. Heinz, B. D. A., V. I. Vasyuchka, A. Pomyalov, V. S. Lvov, B. Hillebrands, and A. A. Serga, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 51, 234003 (2018). DOI: 10.1088/1361-6463/aac0f1  
M. Weiler, M. Althammer, M. Schreier, J. Lotze, M. Pernpeintner, S. Meyer, H. Huebl, R. Gross, A. Kamra, J. Xiao, Y.-T. Chen, H. J. Jiao, G. E. W. Bauer, and S.T.B. Goennenwein, *Phys. Rev.Lett.* 111, 176601 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.176601

8. V. A. Shklovskij, Thermal resistance of metal-insulator boundary and nonlinear electric resistivity of metal films at low temperatures, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 78, 1281-1293 (1980)
9. M. Schreier, A. Kamra, M. Weiler, J. Xiao, G. E.W. Bauer, R. Gross, and S. T. B. Goennenwein, Magnon, phonon, and electron temperature profiles and the spin Seebeck effect in magnetic insulator/normal metal hybrid structures. *Phys. Rev. B* 88, 094410 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.094410
10. A. Sola, P. Bougiatioti, M. Kuepferling, D. Meier, G. Reiss, M. Pasquale, T. Kuschel, and V. Basso, Longitudinal spin Seebeck coefficient: heat flux vs. temperature difference method. *Scientific Reports*, 7(1) (2017). DOI:10.1038/srep46752
11. K. Uchida, S. Takahashi, K. Harii, J. Ieda, W. Koshibae, K. Ando, S. Maekawa, & E. Saitoh, Observation of the spin Seebeck effect. *Nature*, 455(7214) (2017), 778–781. DOI:10.1038/nature07321
12. A. V. Chumak, V. I. Vasyuchka, A. A. Serga, and B. Hillebrands, Magnon spintronics *Nat. Phys.* 11, 453 (2015). DOI.org/10.1038/nphys3347
13. D. Grundler, Nanomagnonics around the corner. *Nature Nanotechnology*. 11, 407 (2016). DOI.org/10.1038/nnano.2016.16
14. A. V. Chumak, A. A. Serga, and B. Hillebrands, Magnon transistor for all-magnon data processing. *Nature Communications*. 5, 4700 (2014). DOI.org/10.1038/ncomms5700
15. J. Cramer, F. Fuhrmann, U. Ritzmann, V. Gall, T. Niizeki, R. Ramos, Z. Qiu, D. Hou, T. Kikkawa, J. Sinova, U. Nowak, E. Saitoh, and M. Kläui, Magnon detection using a ferroic collinear multilayer spin valve. *Nature*

- Communications, 9(1). DOI:10.1038/s41467-018-03485-5 1089 (2018). DOI.org/10.1038/s41467-018-03485-5
16. D. J. Sanders and D. Walton, Effect of magnon-phonon thermal relaxation on heat transport by magnons. *Physical Review B*, 15(3),1489 (1977). DOI.org/10.1103/PhysRevB.15.1489
  17. T. An, V. I. Vasyuchka, K. Uchida, A. V. Chumak, K. Yamaguchi, K. Harii, J. Ohe, M. B. Jungfleisch, Y. Kajiwara, H. Adachi, B. Hillebrands, S. Maekawa, and E. Saitoh, An, Unidirectional spin-wave heat conveyer. *Nature Materials*, 12(6), 549 (2013). DOI:10.1038/nmat3628
  18. A. A. Serga, A. V. Chumak, and B. Hillebrands, YIG magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 43(26), 264002 (2010). DOI.org/10.1088/0022-3727/43/26/264002
  - 19.A. Giri, P.E. Hopkins, A Review of Experimental and Computational Advances in Thermal Boundary Conductance and Nanoscale Thermal Transport across Solid Interfaces. *Adv. Funct. Mater.* 30, 1903857 (2020). DOI: 10.1002/adfm.201903857
  20. B. Saha, A. Shakouri, and T.D. Sands, Rocksalt nitride metal/semiconductor superlattices: a new class of artificially structured materials *Appl. Phys. Rev.* 5, 021101, (2018). DOI: 10.1063/1.5011972
  21. L. Mascaretti A. Naldoni, Hot electron and thermal effects in plasmonic photocatalysis, *J. Appl. Phys.* 128, 041101 (2020). DOI: 10.1063/5.0013945
  - 22.G.J. Snyder, E.S. Toberer, Complex thermoelectric materials, *Nature Mater.* 7, 105 (2008). DOI: 10.1038/nmat2090

23. Z. Li, C. Xiao, Y. Xie, Layered thermoelectric materials: Structure, bonding, and performance mechanisms. *Appl Phys Rev.* 9, 011303 (2022). DOI: 10.1063/5.0074489
24. R. Vaßen, M.O. Jarligo, T. Steinke, D.E. Mack, D. Stöver, Overview on advanced thermal barrier coatings, *Surf. Coat. Technol.* 205, 938 (2010). DOI: 10.1016/j.surfcoat.2010.08.151
25. Cheeke, J. D. N., Hebral, B., & Martinon, C., Transfert de chaleur entre deux solides en dessous de 100 K. *Journal de Physique*, 34 (2-3), 257–272. (1973). DOI:10.1051/jphys:01973003402-3025700
26. Little, W. A. (1959). The transport of heat between dissimilar solids at low temperatures. *Canadian Journal of Physics*, 37(3), 334–349. DOI:10.1139/p59-037
27. A. F. Andreev, The effect of conducting electrons on the Kapitza temperature jump *JETP* 16 (1963).
28. K. V. Maslov and V. A. Shklovskij, Distribution of "hot" electrons in a metal at low temperatures. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 71, 1514-1519 (1976)
29. K. V. Maslov and V. A. Shklovskij, Distribution function of hot electrons and nonlinear resistivity of a metal at low temperatures, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 78, 1223-1227 (1980)
30. M. I. Kaganov, I. M. Lifshitz and L. V. Tanatarov, Relaxation between electrons and the Crystalline Lattice, *J. Exptl. Theoret. Phys.* 31, 232-237 (1956)
31. R. Gutfeld, in: *Physical Acoustics*, W. A. Mason, ed., Vol. 5, Academic, (1968)

- 32.S. Waner and S. R. Costenoble, *Finite Mathematics*, Cengage Learning, Boston, USA (2017)
- 33.Pop, E., Sinha, S., & Goodson, K. E., Heat Generation and Transport in Nanometer-Scale Transistors. *Proceedings of the IEEE*, 94(8), 1587–1601. (2015). DOI:10.1109/jproc.2006.879794
- 34.Hoffmann, A., & Bader, S. D. Opportunities at the Frontiers of Spintronics. *Physical Review Applied*, 4(4) (2015). DOI:10.1103/physrevapplied.4.0470
- 35.Baibich, M. N., Broto, J. M., Fert, A., Van Dau, F. N., Petroff, F., Etienne, P., Chazelas, J., Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices. *Physical Review Letters*, 61(21) 1988), 2472–475. DOI:10.1103/physrevlett.61.2472
36. Binasch, G., Grünberg, P., Saurenbach, F., & Zinn, W., Enhanced magnetoresistance in layered magnetic structures with antiferromagnetic interlayer exchange. *Physical Review B*, 39(7) (1989), 4828–4830. DOI:10.1103/physrevb.39.4828
- 37.Julliere, M. Tunneling between ferromagnetic films. *Physics Letters A*, 54(3) (1975), 225–226. DOI:10.1016/0375-9601(75)90174-7
- 38.Goennenwein, S. T. B., & Bauer, G. E. W. ,Electron spins blow hot and cold. *Nature Nanotechnology*, 7(3) (2012), 145–147. DOI:10.1038/nnano.2012.26
39. Yu, H., Brechet, S. D., & Ansermet, J.-P., Spin caloritronics, origin and outlook. *Physics Letters A*, 381(9) (2017), 825–837. DOI:10.1016/j.physleta.2016.12.03

40. Qu, D., Huang, S. Y., Hu, J., Wu, R., & Chien, C. L., Intrinsic Spin Seebeck Effect in Au/YIG. *Physical Review Letters*, 110(6) (2013). DOI:10.1103/physrevlett.110.06720
41. Agrawal, M., Vasyuchka, V. I., Serga, A. A., Kirihara, A., Pirro, P., Langner, T., Hillebrands, B., Role of bulk-magnon transport in the temporal evolution of the longitudinal spin-Seebeck effect. *Physical Review B*, 89(22) (2014). DOI:10.1103/physrevb.89.224414
42. Kehlberger A., Jakob G., Onbasli M. C., H. Kim, D. Ross, C. A. Kläui, Investigation of the magnetic properties of insulating thin films using the longitudinal spin Seebeck effect. *Journal of Applied Physics*, 115(17) (2014), 17C731. DOI:10.1063/1.4864252
43. M. Schreier, Bauer, G. E. W. Vasyuchka, V. I. Flipse, J. Uchida, K. Lotze, J. Goennenwein, S. T. B., Sign of inverse spin Hall voltages generated by ferromagnetic resonance and temperature gradients in yttrium iron garnet platinum bilayers. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 48(2) (2014), 025001. DOI:10.1088/0022-3727/48/2/025001
44. K. Uchida, Ishida, M. Kikkawa, T. Kirihara, A. Murakami, T. & Saitoh, E., Longitudinal spin Seebeck effect: from fundamentals to applications. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 26(34) (2014). , 343202. DOI:10.1088/0953-8984/26/34/343202
45. D. Meier, Reinhardt, D. van Straaten, M. Klewe, C. Althammer, M. Schreier, M. Reiss, Longitudinal spin Seebeck effect contribution in transverse spin Seebeck effect experiments in Pt/YIG and Pt/NFO. *Nature Communications*, 6(1) (2015). DOI:10.1038/ncomms9211



46. D. Meier, T. Kuschel, S. Meyer, S. T. B. Goennenwein, L. Shen, A. Gupta, G. Reiss, Detection of DC currents and resistance measurements in longitudinal spin Seebeck effect experiments on Pt/YIG and Pt/NFO. *AIP Advances*, 6(5) (2016), 056302. DOI:10.1063/1.4942796
47. C. M. Bhandari and G. S. Verma, S., Scattering of Magnons and Phonons in the Thermal Conductivity of Yttrium Iron Garnet. *Physical Review*. 152, 731 (1966). DOI.org/10.1103/PhysRev.152.731
48. V. V. Kabanov and A. S. Alexandrov, Electron relaxation in metals: Theory and exact analytical solutions. *Physical Review B* 78, 174514 (2008). DOI.org/10.1103/PhysRevB.78.174514
49. J. Xiao, G. E. W. Bauer, K. Uchida, E. Saitoh, and S. Maekawa, Theory of magnon-driven spin Seebeck effect. *Physical Review B*, 81, 214418 (2010), DOI.org/10.1103/PhysRevB.81.214418
50. A. I. Bezuglyj and V. A. Shklovskij, High-frequency large-amplitude oscillations of a non-isothermal N/S boundary. *Low Temperature Physics*, 42(10), 905–915 (2016). DOI:10.1063/1.4965898
51. Y. Liu, L.-S. Xie, Z. Yuan, and K. Xia, Magnon-phonon relaxation in yttrium iron garnet from first principles. *Physical Review B*, 96(17), (2017). DOI:10.1103/physrevb.96.174416
52. A. I. Bezuglyj and V. A. Shklovskij, Kinetics of electron cooling in metal films at low temperatures and revision of the two-temperature model. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 30(29), 295001, (2018). DOI:10.1088/1361-648x/aacb72

53. J. G. Fujimoto, J. M. Liu, E. P. Ippen, and N. Bloembergen, N.. Femtosecond Laser Interaction with Metallic Tungsten and Nonequilibrium Electron and Lattice Temperatures. *Physical Review Letters*, 53(19), 1837–1840, (1984) DOI:10.1103/physrevlett.53.1837
54. H. E. Elsayed-Ali, T. B. Norris, M. A. Pessot, and G. A. Mourou,, Time-resolved observation of electron-phonon relaxation in copper. *Physical Review Letters*58, 1212 (1987), DOI.org/10.1103/PhysRevLett.58.1212
- 55.S. Hoffman, K. Sato, and Y. Tserkovnyak, Landau-Lifshitz theory of the longitudinal spin Seebeck effect. *Physical Review B*, 88, 064408 (2013), DOI:10.1103/physrevb.88.064408
56. K. Miyazaki and K. Seki, Brownian motion of spins revisited. *The Journal of Chemical Physics*, 108(17), 7052–7059,(1998). DOI:10.1063/1.476123
57. B. L. Giles, Z. Yang, J. S. Jamison, and R. C. Myers, Long-range pure magnon spin diffusion observed in a nonlocal spin-Seebeck geometry. *Physical Review B*, 92(22), (2015).. DOI:10.1103/physrevb.92.224415
58. E.-J. Guo, J. Cramer, A. Kehlberger, C. A. Ferguson, D. A. MacLaren, G. Jakob, and M. Kläui, Influence of Thickness and Interface on the Low-Temperature Enhancement of the Spin Seebeck Effect in YIG Films. *Physical Review X*, 6(3), (2016). DOI:10.1103/physrevx.6.031012
59. A. Prakash, B. Flebus, J. Brangham, F. Yang, Y. Tserkovnyak, and J. P. Heremans, Evidence for the role of the magnon energy relaxation length in the spin Seebeck effect. *Physical Review B*, 97(2), (2018). . DOI:10.1103/physrevb.97.020408

60. M. B. Jungfleisch, A. V. Chumak, A. Kehlberger, V. Lauer, D. H. Kim, M. C. Onbasli, C. A. Ross, M. Kläui, and B. Hillebrands, Thickness and power dependence of the spin-pumping effect in  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}/\text{Pt}$  heterostructures measured by the inverse spin Hall effect. *Physical Review B*, 91(13), (2015). DOI:10.1103/physrevb.91.134407.
61. S. A. Wolf, D. D. Awschalom, R. A. Buhrman, J. M. Daughton, S. von Molnár, M. L. Roukes, A. Y. Chtchelkanova, and D. M. Treger, Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future. *Science*, 294(5546), (2001). 1488–1495. DOI:10.1126/science.1065389
62. I. Zutic, J. Fabian, and S. Das Sarma, Spintronics: Fundamentals and applications. *Reviews of Modern Physics*, 76(2), 323–410. (2004). DOI:10.1103/revmodphys.76.323
63. J. Sinova and I. Zutic, New moves of the spintronics tango. *Nature Materials*, 11(5), 368–371, (2012).. DOI:10.1038/nmat3304
64. P. L. Kapitza Cain in literature. *Notes and Queries*, 181(13), 181–181, (1941). DOI:10.1093/nq/181.13.181f
65. R. W. Schoenlein, W. Z. Lin, J. G. Fujimoto, and G. L. Eesley, Femtosecond studies of nonequilibrium electronic processes in metals. *Physical Review Letters*. 58, 1680 (1987). DOI.org/10.1103/PhysRevLett.58.1680
66. Chen, Y.; Zhao, X.; Li, Y.; Jin, Z.-Y.; Yang, Y.; Yang, M.-B.; Yin, B. Light- and Magnetic-Responsive Synergy Controlled Reconfiguration of Polymer Nanocomposites with Shape Memory Assisted Self-Healing Performance for Soft Robotics. *J. Mater. Chem. C* 2021, 9, 5515–5527. DOI: 10.1039/D1TC00468A

- 67.S. Maruyama, Molecular dynamics simulation of heat conduction of a finite length single-walled carbon nanotube. *Microscale Thermophysical Engineering*, 7(1), 41–50. 7, 41 (2003). DOI:10.1080/10893950390150467
68. S.G. Volz and G. Chen, Molecular dynamics simulation of thermal conductivity of silicon nanowires. *Applied Physics Letters*, 75(14), 2056–2058, (1999). DOI:10.1063/1.124914
- 69.A. A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan F.Miao, and C. N. Lau, Superior Thermal Conductivity of Single-Layer Graphene. *Nano Letters*, *Nano Lett.* 8, 902 (2008). DOI.org/10.1021/nl0731872
70. G. Chen, J., Size and Interface Effects on Thermal Conductivity of Superlattices and Periodic Thin-Film Structures. *Journal of Heat Transfer*, 119(2), 220, (1997). DOI:10.1115/1.2824212
71. K. Huang and B.-F. Zhu, Long-wavelength optic vibrations in a superlattice. *Physical Review B*, 38(3), 2183–2186, (1988). DOI:10.1103/physrevb.38.2183
- 72.G. L.Pollack, Kapitza Resistance. *Reviews of Modern Physics*, 41(1), 48–81, (1969). DOI:10.1103/revmodphys.41.48
73. Zou J., Balandin A., J. Phonon Heat Conduction in a Semiconductor Wire. *J. Appl. Phys.*, 2001, vol. 89, pp. 2932–2938. DOI:10.1063/1.1345515
- 74.Frick W., Waldmann D., Eisemenger W. Phonon Emission Spectra in Metallic Films. *J. Appl. Phys.*, 1975, vol. 8, pp. 163–171. DOI.org/10.1007/BF00896033

75. Li, B., & Wang, J., Anomalous Heat Conduction and Anomalous Diffusion in One-Dimensional Systems. *Physical Review Letters*, 91(4), (2003). DOI:10.1103/physrevlett.91.044301
76. Wang, J.-S., & Li, B., Intriguing Heat Conduction of a Chain with Transverse Motions. *Physical Review Letters*, 92(7), (2004). DOI:10.1103/physrevlett.92.074302
77. Zhao, H., Yi, L., Liu, F., & Xu, B., Influence of heat bath on the heat conductivity in disordered anharmonic chain. *The European Physical Journal B*, 54(2), 185–188, (2006). DOI:10.1140/epjb/e2006-00442-0
78. Chen, G. (2001). Ballistic-Diffusive Heat-Conduction Equations. *Physical Review Letters*, 86(11), 2297–2300. DOI:10.1103/physrevlett.86.2297
79. Li, N., Tong, P., & Li, B. (2006). Effective phonons in anharmonic lattices: Anomalous vs. normal heat conduction. *Europhysics Letters (EPL)*, 75(1), 49–55. DOI:10.1209/epl/i2006-10079-7
80. Alvarez, F. X., Jou, D., & Sellitto, A. (2009). Phonon hydrodynamics and phonon-boundary scattering in nanosystems. *Journal of Applied Physics*, 105(1), 014317. DOI:10.1063/1.3056136
81. Alder BJ, Wainwright T (August 1959). "Studies in Molecular Dynamics. I. General Method". *The Journal of Chemical Physics*. 31 (2): 459–466 DOI:10.1063/1.1730376.
82. Alex F Bielajew. *Fundamentals of the Monte Carlo method for neutral and charged particle transport*. (2001)
83. Yang, N., Ni, X., Jiang, J.-W., & Li, B. (2012). How does folding modulate thermal conductivity of graphene? *Applied Physics Letters*, 100(9), 093107. DOI:10.1063/1.3690871

84. Xu, Y., Wang, J.-S., Duan, W., Gu, B.-L., & Li, B.. Nonequilibrium Green's function method for phonon-phonon interactions and ballistic-diffusive thermal transport. *Physical Review B*, 78(22), (2008). DOI:10.1103/physrevb.78.224303
85. Chen, G.. Phonon Wave Heat Conduction in Thin Films and Superlattices. *Journal of Heat Transfer*, 121(4), 945, (1999). DOI:10.1115/1.2826085
- 86.A. A. Balandin and D. L. Nika, "Phononics in low-dimensional materials," *Mater. Today* 15(6), 266–275 (2012).
87. I. Chowdhury, R. Prasher, K. Lofgreen, G. Chrysler, S. Narasimhan, R. Mahajan, D. Koester, R. Alley, and R. Venkatasubramanian, "On-chip cooling by superlattice-based thin-film thermoelectrics," *Nat. Nanotechnol.* 4(4), 235–238 (2009). DOI: 10.1038/nnano.2008.417
88. Z. Yan, G. Liu, J. M. Khan, and A. A. Balandin, "Graphene quilts for thermal management of high power gan transistors," *Nat. Commun.* 3, 827 (2012).
- 89.S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1950).
90. C. E. Siewert and P. F. Zweifel, An exact solution of equations of radiative transfer for Local Thermodynamic Equilibrium in the non-gray case. Picket fence approximation. *Annals of Physics*, 36(1), 61–85.(1966). DOI:10.1016/0003-4916(66)90290-9 .
- 91.Ziman, J.M., *Electrons and phonons: The theory of transport phenomena in solids*. Clarendon Press. Reprint Edition in 2001. ISBN-10: 0198507798, (1962). ISBN-13: 978-0198507796

92. Peierls, R. Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen. *Annalen Der Physik*, 395(8), 1055–1101, (1929). DOI:10.1002/andp.19293950803
93. R. Englman, The Transport Theory of Temperature Waves in Insulators. *Proceedings of the Physical Society*, 72(3), 391–400, (1958). DOI:10.1088/0370-1328/72/3/309
94. M. M. R. Williams, Some comments on the propagation of temperature waves in insulators. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 4(8), 1201–1206. (1971). DOI:10.1088/0022-3727/4/8/322
95. S. Simons, The application of high frequency thermal propagation data to the measurement of phonon relaxation times. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 4(14), (1971). 2089–2096. DOI:10.1088/0022-3719/4/14/024
96. G. D. Mahan and Francisco Claro, Nonlocal theory of thermal conductivity *Phys. Rev. B* 38, 1963 (1988). DOI.org/10.1103/PhysRevB.38.1963
97. A. Majumdar, Microscale Heat Conduction in Dielectric Thin Films. *Journal of Heat Transfer*, 115(1), 7. (1993). DOI:10.1115/1.2910673
98. G. Chen, Nonlocal and Nonequilibrium Heat Conduction in the Vicinity of Nanoparticles. *Journal of Heat Transfer*, 118(3), 539, (1996). DOI:10.1115/1.2822665
99. Yang R., Chen G., Laroche M., Taur Y. Simulation of nanoscale (2005) 127:298–306. DOI: 10.1115/1.1857941.
100. J. Ordonez-Miranda, R. Yang, and J. J. Alvarado-Gil, A constitutive equation for nano-to-macro-scale heat conduction based on the Boltzmann transport equation. *Journal of Applied Physics*, 109(8), 084319, (2011). DOI:10.1063/1.3573512

101. K. Esfarjani, G. Chen, and H. T. Stokes, Heat transport in silicon from first-principles calculations. *Physical Review B*, 84, 085204 (2011). DOI:10.1103/physrevb.84.085204
102. E.M. Gershenzon, M.E. Gershenzon, G.N. Gol'tsman, A.D. Semenov, and A. V. Sergeev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 36, 244 (1982) [*Sov. Phys. JETP Lett.* 36, 296 (1982)].
103. Kaplan, S. B., Acoustic matching of superconducting films to substrates. *Journal of Low Temperature Physics*, 37(3-4), 343–365. (1979). DOI:10.1007/bf0011919
104. Swartz, E. T., & Pohl, R. O. Thermal boundary resistance. *Reviews of Modern Physics*, 61(3), 605–668. (1989). DOI:10.1103/revmodphys.61.605
105. A.H. Wilson, *The Theory of Metals*, Cambridge University Press, London (1953)
106. Joshi, A. A., & Majumdar, A. Transient ballistic and diffusive phonon heat transport in thin films. *Journal of Applied Physics*, 74(1), 31–39. (1993). DOI:10.1063/1.354111
107. Bezuglyj, A. I., Phonon transport of energy in nanostructures containing two metallic layers. *Low Temperature Physics*, 41(8), 619–624, (2015). DOI:10.1063/1.4929776
108. Ordonez-Miranda, J., Alvarado-Gil, J. J., & Yang, R., The effect of the electron-phonon coupling on the effective thermal conductivity of metal-nonmetal multilayers. *Journal of Applied Physics*, 109(9), 094310, (2011). DOI:10.1063/1.3585824



109. H. Sato, On the Thermal Conductivity of Ferromagnetics. *Prog. Theor. Phys.* 13, 119 (1955). DOI: 10.1143/PTP.13.119
110. S. R. Boona and J. P. Heremans, Magnon thermal mean free path in yttrium iron garnet *Phys. Rev. B* 90, 064421 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevB.90.064421
111. S. M. Rezende and J. C. Lopez Ortiz, Thermal properties of magnons in yttrium iron garnet at elevated magnetic fields, *Phys. Rev. B* 91, 104416 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevB.91.104416
112. V.A. Shklovskij, V.V. Kruglyak, R.V. Vovk, and O.V. Dobrovolskiy, Role of magnons and the size effect in heat transport through an insulating ferromagnet/insulator interface, *Phys. Rev. B* 98, 224403 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevB.98.224403
113. C. Kittel, E. Abrahams, Relaxation Process in Ferromagnetism, *Rev. Mod. Phys.* 25, 233 (1953). DOI: 10.1103/RevModPhys.25.233
114. M. I. Kaganov V. M. Tsukernik, *Sov. Phys. JETP* 9, 151 (1959).
115. A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar, and S.V. Peletminskii, *Spin Waves* (North Holland, Amsterdam, 1968).
116. A.I. Bezuglyj, V. A. Shklovskij, R.V. Vovk, and I.V. Mironenko, Microscopic analysis of heat transfer in I1/N/I2 heterogeneous nanostructures at low temperatures., *Low Temp. Phys.* 45, 537 (2019). DOI: 10.1063/1.5097364
117. V.A. Shklovskij, V.V. Mezinova, O.V. Dobrovolskiy, (2018). Nonlinear relaxation between magnons and phonons in insulating

- ferromagnets. *Phys. Rev. B* 98, 104405 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevB.98.104405
118. G. Chen, Non-Fourier phonon heat conduction at the microscale and nanoscale, *Nat. Rev. Phys.* 3, 555 (2021). DOI: 10.1038/s42254-021-00334-1
119. G. Chen, Thermal conductivity and ballistic-phonon transport in the cross-plane direction of superlattices, *Phys. Rev. B* 57, 14958 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevB.57.14958
120. J. Ordonez-Miranda, R. Yang, S. Volz, and J.J. Alvarado Gil, Steady state and modulated heat conduction in layered systems predicted by the analytical solution of the phonon Boltzmann transport equation, *J. Appl. Phys.* 118, 075103 (2015). DOI: 10.1063/1.4928770
121. C. Hua and A.J. Minnich, Semi-analytical solution to the frequency-dependent Boltzmann transport equation for cross-plane heat conduction in thin films, *J. Appl. Phys.* 117, 175306 (2015). DOI: 10.1063/1.4919432
122. J. Wei, D. Olaya, B.S. Karasik, S.V. Pereverzev, A.V. Sergeev, M.E. Gershenson, Ultrasensitive hot-electron nanobolometers for terahertz astrophysics, *Nature Nanotech* 3, 496 (2008). DOI: 10.1038/nnano.2008.173
123. B.S. Karasik, A.V. Sergeev, and D.E. Prober, Nanobolometers for THz Photon Detection, *IEEE Trans. Terahertz Sci. Tech.* 1, 97 (2011). DOI: 10.1109/TTHZ.2011.2159560.

124. R. Kokkonen, J. Govenius, V. Vesterinen, R.E. Lake, A.M. Gunyho, K.Y. Tan, S. Simbierowicz, L. Grönberg, J. Lehtinen, M. Prunnila, J. Hassel, A. Lamminen, O.-P. Saira, and M. Mottönen, Nanobolometer with ultralow noise equivalent power, *Commun. Phys.* 2, 124 (2019). DOI: 10.1038/s42005-019-0225-6
125. G.N. Goltsman, O. Okunev, G. Chulkova, A. Lipatov, A. Semenov, K. Smirnov, B. Voronov, A. Dzardanov, C. Williams, and R. Sobolewski, Picosecond superconducting single-photon optical detector, *Appl. Phys. Lett.* 79,705 (2001). DOI: 10.1063/1.1388868
126. M. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. Polyakov, Invited review article: Single-photon sources and detectors, *Rev. Sci. Instrum.* 82, 071101 (2011). DOI: 10.1063/1.3610677
127. G. Bergmann, W. Wei, . Zou, R.. Mueller, Nonequilibrium in metallic microstructures in the presence of high current density, *Phys. Rev.* 41, 7386 (1990). DOI: 10.1103/PhysRevB.41.7386
128. A.I. Bezuglyj and V.A. Shklovskij, The kinetics of lowtemperature electron-phonon relaxation in a metallic film following instantaneous heating of the electrons, 9 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 111, 2106 (1997) [*JETP* 84, 1149 (1997)].
129. J.J. Lin and J.P. Bird, Recent experimental studies of electron dephasing in metal and semiconductor mesoscopic structures, *J. Phys. Condens. Matter* 14, R501 (2002). DOI: 10.1088/0953-8984/14/18/201
130. J. Chen, X. Xu, J. Zhou, B. Li, Interfacial thermal resistance: Past, present, and future, *Rev. Mod. Phys.* 94, 025002 (2022). DOI: 10.1103/RevModPhys.94.025002.

131. A.A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals* (NorthHolland, Amsterdam, 1988).
132. W.S. Capinski, H.J. Maris, T. Ruf, M. Cardona, K. Ploog, and D.S. Katzer, Thermal-conductivity measurements of GaAs/AlAs superlattices using a picosecond optical pump-and-probe technique, *Phys. Rev. B* 59, 8105 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevB.59.8105
133. Z. Aksamija, I. Knezevic, Thermal Conductivity of Si<sub>1-x</sub>Gex/Si<sub>1-y</sub>Gey Superlattices: Competition between Interfacial and Internal Scattering, *Phys. Rev. B* 88, 155318 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.155318
134. V. Rawat, Y.K. Koh, D.G. Cahill, T.D. Sands, Thermal conductivity of (Zr,W)N/ScN metal/semiconductor multilayers and superlattices, *J. Appl. Phys.* 105, 024909 (2009). DOI: 10.1063/1.3065092
135. B. Saha, Y.R. Koh, J. Comparan, S. Sadasivam, J.L. Schroeder, M. Garbrecht, A. Mohammed, J. Birch, T. Fisher, A. Shakouri, and T.D. Sands, Cross-plane thermal conductivity of (Ti,W)N/(Al,Sc)N metal/semiconductor superlattices, *Phys. Rev. B* 93 045311 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevB.93.045311
136. V.A. Shklovskij, A.I. Bezuglyj, I.V. Mironenko, Heat transport in I<sub>1</sub>/FI/I<sub>2</sub> heterogeneous nanostructures at low temperatures / *Phys. Rev. B* 103, 024440 – Published 25 January 2021.[doi.org/10.1103/PhysRevB.103.024440](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.024440)

## ДОДАТОК А

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікації у наукових фахових виданнях України, які входять до міжнародних наукометричних баз Scopus:

1. A. I. Bezuglyj, V. A. Shkovskij, R. V. Vovk, and I. V. Mironenko, Microscopic analysis of heat transfer in  $I_1/N/I_2$  heterogeneous nanostructures at low temperatures. Low Temperature Physics 45, 537 (2019), (Scopus, Q3).

DOI.org/10.1063/1.5097364

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці та обговоренні задачі, а також її розв'язання, технічне оформлення тексту роботи)*

2. V.A. Shklovskij, A.I. Bezuglyj, I.V. Mironenko, Heat transport in  $I_1/FI/I_2$  heterogeneous nanostructures at low temperatures / Phys. Rev. B 103, 024440 – Published 25 January 2021. (Scopus, Q1).

DOI.org/10.1103/PhysRevB.103.024440

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці, обговоренні та розв'язання поставленої задачі, проведенні теоретичних розрахунків, технічне оформлення тексту роботи)*

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

1. I.V.Мироненко, В.О.Шкловський, О.І.Безуглий, Р.В.Вовк, Мікроскопічний аналіз перенесення тепла в  $I_1/N/I_2$  гетерогенних наноструктурах при низьких температурах, *Фізичні явища в твердих тілах* : матеріали XIV міжнародної наукової конференції (3-5 груд. 2019 р. Харків). Харків : ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2019. С. 23.

*(Особистий внесок здобувача: участь у постановці та обговоренні задачі, а також її розв'язання, підготовлення матеріалів для конференції)*

## ДОДАТОК Б

## Функція розподілу фононів

Рівняння для  $N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z)$  :

$$\frac{dN_{\mathbf{q}}^{\geq}}{dz} + \frac{1}{l_{pm}(z)} N_{\mathbf{q}}^{\geq} = \frac{1}{l_{pm}(z)} n_{\mathbf{q}}(T_m(z)), \quad (\text{A1})$$

має рішення

$$N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z) = N_{\mathbf{q}}^{\geq}(0)e^{-r(z)} + \int_0^z \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{[r(z')-r(z)]} n_{\mathbf{q}}(T_m(z')), \quad (\text{A2})$$

де середній вільний пробіг фонона  $l_{pm}(z) = |s_z|/v_{pm}(z)$

$$r(z) = \int_0^z \frac{dz'}{l_{pm}(z')}, \quad (\text{A3})$$

Розв'язок рівняння для  $N_{\mathbf{q}}^{\leq}(z)$  має вигляд:

$$N_{\mathbf{q}'}^{\leq}(z) = N_{\mathbf{q}'}^{\leq}(d)e^{[r(z)-r(d)]} + \int_z^d \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{[r(z)-r(z')]} n_{\mathbf{q}}(T_m(z')) \quad (\text{A4})$$

Постійні  $N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z)$  і  $N_{\mathbf{q}'}^{\leq}(d)$  визначаються граничними умовами.

Підстановка рівнянь (A2) та (A4) в граничні умови дає

$$N_{\mathbf{q}}^{\geq}(z) = \frac{1}{D} \{ \alpha_1 n_{\mathbf{q}}(T_B) + \beta_1 \alpha_2 e^{-r(d)} n_{\mathbf{q}}(T_H) + \beta_1 J_1 + \beta_1 \beta_2 e^{-r(d)} J_2 \}, \quad (\text{A5})$$

$$N_{\mathbf{q}'}^{\leq}(z) = \frac{1}{D} \{ \alpha_2 n_{\mathbf{q}}(T_H) + \beta_2 \alpha_1 e^{-r(d)} n_{\mathbf{q}}(T_B) + \beta_2 J_2 + \beta_1 \beta_2 e^{-r(d)} J_1 \}, \quad (\text{A6})$$

де детермінант  $D = 1 - \beta_1 \beta_2 e^{-2r(d)}$

$$J_1 = \int_0^d \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{-r(z')} n_{\mathbf{q}}(T_m(z')), \quad (\text{A7})$$

$$J_2 = \int_0^z \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{-r(d)+r(z')} n_{\mathbf{q}}(T_m(z')), \quad (\text{A8})$$

Зауважимо, що якщо  $d \gg l_{pm}$ , то інтеграл  $J_1$  отримує свій основний внесок з області  $z' \lesssim l_{pm} \ll d$  а інтеграл  $J_2$  отримує свій основний внесок з області  $d - z' \lesssim l_{pm} \ll d$ . Якщо  $d \ll l_{pm}$  то фонони майже не взаємодіють з магнонами, і перенесення тепла через тонкий шар  $FI$  має суто фононну природу. При  $d \ll l_{pm}$  інтеграли  $J_1$  і  $J_2$  малі, оскільки вони мають порядок  $d/l_{pm}$ .

Підставляючи  $N_q^>(z)$  і  $N_q^<(d)$  в рівняння (A2) і (A4), отримаємо для розподілу фононів функції:

$$N_q^>(z) = \frac{\exp(-r(z))}{D} \{ \alpha_1 n_q(T_B) + \beta_1 J_1 + \beta_1 \alpha_2 e^{-r(d)} n_q(T_H) + \beta_1 \beta_2 e^{-r(d)} J_2 \} + \int_0^z \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{-r(z)+r(z')} n_q(T_m(z')), \quad (A9)$$

$$N_q^<(z) = \frac{\exp(-r(d) + r(z))}{D} \{ \alpha_2 n_q(T_H) + \beta_2 J_2 + \beta_2 \alpha_1 e^{-r(d)} n_q(T_B) + \beta_1 \beta_2 e^{-r(d)} J_1 \} + \int_z^d \frac{dz'}{l_{pm}(z')} e^{-r(z')+r(z)} n_q(T_m(z')), \quad (A10)$$

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ  
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 22:50:53 11.11.2023

Назва файлу з підписом: Myronenko\_diss.pdf.pdf.xml  
Розмір файлу з підписом: 16.7 КБ

Назва файлу без підпису: Myronenko\_diss.pdf.pdf  
Розмір файлу без підпису: 1.6 МБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: МИРОНЕНКО ІРИНА ВІКТОРІВНА

П.І.Б.: МИРОНЕНКО ІРИНА ВІКТОРІВНА

Країна: Україна

РНОКПП: 3280804786

Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА

Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 22:46:38  
11.11.2023

Сертифікат виданий: АЦСК АТ КБ «ПРИВАТБАНК»

Серійний номер: 248197DDFAB977E50400000058941301E38C4E04

Тип носія особистого ключа: Незахищений

Алгоритм підпису: ДСТУ-4145

Тип підпису: Удосконалений

Тип контейнера: Підпис та дані в окремих файлах (XAdES detached)

Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)

Сертифікат: Кваліфікований