АНОТАЦІЯ

Гончарук А. Б. Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2023.

Дисертацію присвячено вивченню лінійних диференціальних рівнянь з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями та неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями.

Перший розділ присвячений історії вивчення питань, розглянутих в дисертації. Також там наведено стислий опис конструкцій, до яких в цій роботі будуються аналоги, а також сформульовані відомі результати, що використовуються в подальшому.

У **другому розділі** розглядається наступне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами та неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями:

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \quad (1)$$

де $f(x)$ є формальним степеневим рядом, $a_0, \ldots, a_m$ і коефіцієнти формального степеневого ряду $f(x)$ належать деякому комутативному кільцю K з одиницею, а розв'язок шукається в кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з K.

Нас цікавлять питання єдиності та існування розв'язку рівняння (1), а також явна формула або метод знаходження цього розв'язку. В дисертації отриманий повний опис ситуацій, в яких це рівняння має єдиний розв'язок у випадку, коли права частина є поліномом. Для вивчення випадку, коли права частина є формальним степеневим рядом з нескінченною кількістю

ненульових коефіцієнтів, введений формальний розв'язок цього рівняння, який є сумою формальних степеневих рядів, і доведено що, якщо ця сума є коректно визначеною, то вона є розв'язком рівняння (1) (наслідок 2.1). Доведено, що формальний розв'язок є коректно визначеним рядом у кільці K з дискретною топологією тоді і тільки тоді, коли неоднорідність $f(x)$ є поліномом. Знайдені умови, за яких формальний розв'язок є коректно визначеним, якщо кільце K є кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням. Таким чином знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння (1) і явний вигляд цього розв'язку.

Основним результатом розділу є наступна теорема.

Теорема ***(достатня умова існування і єдиності розв'язку).*** Нехай F повне відносно неархімедового нормування $|\cdot|$ поле характеристики нуль, K – його кільце нормування, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \leq i \leq m$, а $c_k \in K$ задовольняють рівність

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots . \quad (2)$$

Тоді ряд $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ збігається в $K[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності і його сума є єдиним в $K[[x]]$ розв'язком рівняння (1).

Цей результат уточнюється для кільця цілих p-адичних чисел.

Теорема. Нехай $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ цілі. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок з $\mathbb{Z}_p[[x]]$ для будь-якого простого p, що не є дільником a_0.

Також у випадку кільця нормування неархімедового поля введено спеціальне поняття згортки формального ряду Лорана з від'ємними степенями і формального степеневого ряду.

Означення. Нехай $q_i \to 0$ в K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x} K[[\frac{1}{x}]]$ і $f \in K[[x]]$. За означенням покладемо

$$(Q * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Побудовано аналог фундаментального розв'язку диференціального оператору, тобто доведено, що за умови існування, розв'язок можна представити у вигляді згортки формального ряду Лорана, який залежить тільки від правої частини рівняння, з неоднорідністю.

Теорема. Припустимо, що виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (1). Тоді єдиний розв'язок з $K[[x]]$ цього рівняння має вигляд $w(x) = (\mathcal{E} * f)(x)$, де $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

Третій розділ присвячений вивченню неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями виду

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_0 w_n = f_n, \tag{3}$$

де $a_0, \ldots, a_m$ і f_n для всіх $n \geq 0$ належать деякому комутативному кільцю з одиницею.

Нас цікавить питання єдиності і існування такої послідовності елементів кільця K, яка б задовольняла це різницеве рівняння. Аналогічно до того, як це зроблено в попередньому розділі, отримано повний опис ситуацій, в яких це рівняння має єдиний розв'язок у випадку, коли права частина є фінітною послідовністю. Для вивчення випадку, коли права частина є нефінітною, введений формальний розв'язок цього рівняння і доведено що, якщо він коректно визначений, то він є розв'язком рівняння (3) (наслідок 3.1). Доведено, що формальний розв'язок є коректно визначеним рядом у кільці K з дискретною топологією тоді і тільки тоді, коли неоднорідність є фінітною. Знайдені умови, за яких формальний розв'язок є коректно визначеним, якщо кільце K є кільцем нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням. Таким чином знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння (3) і явний вигляд цього розв'язку.

Один з основних результатів цього розділу – це наступна теорема.

Теорема *(достатня умова існування і єдиності розв'язку).* Нехай F повне відносно неархімедового нормування $|\cdot|$ поле характеристики нуль, K – його кільце нормування, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \leq i \leq m$, а $c_k \in K$ задовольняють рівність (2). Тоді ряди $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ збігаються в кільці K і послідовність їх сум є єдиним в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3).

Цей результат можна переформулювати для будь-якого повного факторіального кільця, у тому числі кільця цілих p-адичних чисел і кільця формальних степеневих рядів.

Теорема. Нехай кільце K – факторіальне, поле $F = Frac(K)$ повне відносно нормування $|\cdot|_v$, всі a_j для $1 \le j \le m$ діляться на v, а a_0 не ділиться на v. Тоді ряди $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ збігаються в кільці K, а послідовність їх сум є єдиним в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3).

Більш детально вивчається різницеве рівняння першого порядку в кільці поліномів

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[z],\ n = 0, 1, 2, \dots. \tag{4}$$

Для нього уточнений попередній результат.

Теорема. Якщо існує таке z_0, що $b(z_0) = 0$, а $a(z_0) \neq 0$, то або послідовність сум формальних степеневих рядів $w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z),\ n = 0, 1, 2, \dots,$ є послідовністю поліномів, що задовольняє рівняння , або це рівняння не має поліноміального розв'язку.

Наступні теореми є одними з основних результатів розділу.

Теорема. Нехай $a(z) = 1$. Якщо формальний степеневий ряд $w_0(z)$ з є поліномом, то всі наступні $w_n(z)$ також є поліномами.

Теорема. Нехай $\deg a < \deg b$. Якщо послідовність поліномів $w_n(z)$ є розв'язком рівняння , то існує такий номер k для якого виконується нерівність $\deg w_k \le \deg f_k - \deg b + \deg a$.

Четвертий розділ присвячено більш детальному вивченню рівнянь першого порядку над кільцем цілих чисел. В ньому розглянуто операторне рівняння $(Aw)(x)+f(x) = w(x)$, де $w(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ і оператор A діє на кшталт $A(w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \dots$, яке узагальнює як диференціальне (якщо $\alpha_n = n$), так і різницеве (якщо $\alpha_n = b$) рівняння першого порядку. Розглянуто a-адичну метрику і топологію, пов'язану з послідовністю α_n, на кільці цілих чисел і поповнення $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ за цією метрикою. Для розглянутого операторного рівняння доведено наступні теореми.

Теорема. Рівняння $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$ має єдиний розв'язок

$w(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$, де ряд в правій частині рівності є збіжним в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності.

Теорема. Нехай $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. Наступні твердження є еквівалентними:

1. $f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$;
2. Рівняння $Aw + f(x) = w$ має розв'язок в $\mathbb{Z}[[x]]$.

Наслідками цієї теореми є наступні критерії, які і є основними результатами цього розділу.

Теорема. Наступні твердження є еквівалентними:

1. Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $\sum_{n=0}^{\infty} n! b^n f_n = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх простих p.
2. Рівняння $bw'(x) + f(x) = w(x)$ має розв'язок з $\mathbb{Z}[[x]]$.

Теорема. Наступні твердження є еквівалентними:

1. Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $\sum_{n=0}^{\infty} b^n f_n = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх p, які є простими дільниками b.
2. Рівняння $bw_{n+1} + f_n = w_n, n \geq 0$ має цілочисельний розв'язок.

У **п'ятому розділі** лінійне диференціальне і лінійне різницеве рівняння (1) і (3) над кільцем нормування K повного неархімедового поля розглядаються у вигляді системи $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$, де $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots)^\intercal$. Позначатимемо $\mathcal{A}_n$ матрицю, що отримана з матриці $\mathcal{A}$ заміною $n+1$-ого стовпця на вектор $\mathbf{f}$. За $\Delta_{n,r}$ позначимо головний кутовий мінор $r+1$-го порядку цієї матриці, а за Δ_r – головний кутовий мінор $r+1$-го порядку цієї матриці $\mathcal{A}$. Нехай визначники нескінченних матриць знаходяться як наступні границі послідовностей в K за нормуванням $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r, \quad \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Основними результатами розділу є наступні твердження про те, що при виконанні умов теорем про єдиність і існування розв'язку, єдиний розв'язок цих систем можна знаходити за допомогою правила Крамера.

Теорема. Нехай виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (1) і $a_0 = 1$. Тоді коефіцієнти єдиного розв'язку рівняння (1) з кільця $K[[x]]$ можна знайти за допомогою правила Крамера $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема. Нехай виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (3) і $a_0 = 1$. Тоді єдиний розв'язок цього рівняння над кільцем K можна знайти за допомогою аналога правила Крамера $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ключові слова: лінійне диференціальне рівняння, лінійне різницеве рівняння, лінійне операторне рівняння, теореми єдиності і існування, поліноми, формальні степеневі ряди, цілочисельні розв'язки, неархімедові поля, кільця p-адичних чисел, нескінченні лінійні системи, нескінченні матриці, формальні узагальнені функції (розподіли), фундаментальний розв'язок диференціального оператора, згортка

ABSTRACT

Anna B. Goncharuk. Algebraic constructions in linear differential equations and in the theory of implicit linear difference equations. – Qualification scientific work is as a manuscript.

A thesis on the degree of doctor of philosophy: Specialty 111 – Mathematics (Mathematics and statistics). – V.N.Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2023.

The thesis is devoted to the study of linear differential equations with inhomogeneity in the form of a formal power series over commutative rings and implicit linear difference equations over commutative rings

The first chapter is devoted to the history of questions considered. This section also provides a short description of the structures whose analogs we will introduce and formulates the known results used in the thesis.

In **the second section**, we consider the following linear differential equation with constant coefficients and inhomogeneity in the form of a formal power

series over commutative rings:

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \quad (5)$$

where $f(x)$ is a formal power series, $a_0, \ldots, a_m$ and the coefficients of formal power series $f(x)$ belong to some commutative ring K with identity, and we are looking for the solutions from the ring of formal power series with coefficients from K.

We are interested in the uniqueness and existence of a solution to (5) and an explicit formula or method for finding the solution. This thesis provides a complete description of the situations in which this equation has a unique solution in the case when the right-hand side is a polynomial. To study the case when the right-hand side is a formal power series with an infinite number of non-zero coefficients, a formal solution of this equation is introduced, which is the sum of formal power series, and it is proved that if this sum is correctly defined, then it is a solution of the equation (5) (consequence 2.1). It is proved that the formal solution is a well-defined series in a ring K with discrete topology if and only if the inhomogeneity $f(x)$ is a polynomial. The conditions under which the formal solution is correctly defined are found if the ring K is the valuation ring of the complete field of characteristic zero with non-Archimedean valuation. Therefore, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the equation (5) and the explicit form of this solution are found.

The main result of this section is the following theorem.

Theorem *(sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution).* Let F be complete with respect to the non-Archimedean valuation $|\cdot|$ field of characteristic zero, K – its valuation ring, $|a_0| = 1$ and $|a_i| < 1$ for any $1 \le i \le m$, and $c_k \in K$ satisfy the equality

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots . \quad (6)$$

Then the series $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ converges in $K[[x]]$ with respect to the topology of the coefficient-wise convergence. Sum of this series is the unique solution of (5) in $K[[x]]$.

This result is specified for the ring of p-adic integers.

Theorem. Let $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ be integers. Then equation (5) has a unique solution in $\mathbb{Z}_p[[x]]$ for any prime p, that is not a divisor of a_0.

Also, in the case of the valuation ring of a non-Archimedean field, we introduce a special notion of convolution of the formal Laurent series with only negative degrees and the formal power series.

Definition. Let $q_i \to 0$ in K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, and $f \in K[[x]]$. By definition, put

$$(Q * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

An analog of the fundamental solution of a differential operator is constructed, i.e., it is proved that if the solution exists, it can be represented as a convolution of the formal Laurent series, which depends only on the right-hand side of the equation, with inhomogeneity.

Theorem. Assume that the conditions of the existence and uniqueness theorem for the equation (5) are hold. Then the unique solution in $K[[x]]$ of this equation could be written as $w(x) = (\mathcal{E} * f)(x)$, where $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

The third section is devoted to the study of implicit linear difference equations over commutative rings

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_0 w_n = f_n, \tag{7}$$

where $a_0, \ldots, a_m$ and f_n for all $n \geq 0$ belong to some commutative ring with identity.

We are interested in the uniqueness and existence of a sequence of elements of the ring K that satisfies this difference equation. Similarly to what was done in the previous section, we obtain a complete description of situations in which this equation has a unique solution in the case when the right-hand side is a finite sequence. To study the case when the right-hand side is infinite, a formal solution of this equation is introduced, and it is proved that if it is correctly defined, then it is a solution of the equation (7) (consequence 3.1). It is proved that the formal solution is a well-defined series in a ring K with discrete topology if and only if the inhomogeneity is fifnite. The conditions under which the formal solution is correctly defined are found if the ring K is the valuation ring of the complete field of characteristic zero with non-Archimedean valuation. Therefore, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the equation (7) and the explicit form of this solution are found.

One of the main results of this section is the following theorem.

Theorem *(sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution).* Let F be a complete with respect to the non-Archimedean valuation $|\cdot|$ field of the characteristic zero, K – its valuation ring, $|a_0| = 1$ and $|a_i| < 1$ for all $1 \leq i \leq m$, and $c_k \in K$ satisfy the equality (6). Then the series $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ converge in K and the sequence of sums of these series is the unique in $K^{\mathbb{N}_0}$ solution of (7).

This result can be reformulated for any complete factorial ring, including rings of p-adic numbers and rings of formal power series.

Theorem. Suppose the ring K is factorial, the field $F = Frac(K)$ is complete with respect to the valuation $|\cdot|_v$, all a_j, $1 \leq j \leq m$ are divisible by v, and a_0 is not divisible by v. Then the series $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ converge in the ring K, and the sequence of their sums is the unique in $K^{\mathbb{N}_0}$ solution of (7).

The first-order difference equation in the ring of polynomials

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[z],\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

is studied in more detail. The previous result is specified for it.

Theorem. If there exists z_0 such that $b(z_0) = 0$, and $a(z_0) \neq 0$, then either the sequence of sums of formal power series $w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, is a polynomial solution of the equation (8) or this equation has no polynomial solution.

The following theorems are some of the main results of the chapter.

Theorem. Let $a(z) = 1$. If the formal power series $w_0(z)$ is polynomial, then all other $w_n(z)$ also are polynomials.

Theorem. Let $\deg a < \deg b$. If the sequence of polynomials $w_n(z)$ is a solution of the equation (8), then there exists number k for that the inequality $\deg w_k \leq \deg f_k - \deg b + \deg a$ holds.

The fourth section is devoted to a more detailed study of first-order equations over a ring of integers. It considers the operator equation $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$, where $w(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ and the operator A acts as follows $A(w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots$, which generalizes both a differential (if $\alpha_n = n$) and a difference (if $\alpha_n = b$) equation of the first order. We consider the a-adic metric and topology associated with the sequence α_n on the ring of integers and the completion of $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ by this metric. The following theorems are proved for the considered operator equation.

Theorem. The equation $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$ has a unique solution $w(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots$ in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$, where the series on the right-hand side of the equality is convergent in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ with respect to the topology of coefficient-wise convergence.

Theorem. Suppose $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. The following statements are equivalent:

1. $f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1 \alpha_2 f_2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 f_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 a_4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$;
2. The equation $Aw + f(x) = w$ has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$.

The consequences of this theorem are the following criteria, which are the main results of this section.

Theorem. The following statements are equivalent:

1. There exists $c \in \mathbb{Z}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} n! b^n f_n = c$ in $\mathbb{Z}_p$ for all prime p.
2. The equation $bw'(x) + f(x) = w(x)$ has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$.

Theorem. The following statements are equivalent:

1. There exists $c \in \mathbb{Z}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} b^n f_n = c$ in $\mathbb{Z}_p$ for all prime divisors of b.
2. The equation $bw_{n+1} + f_n = w_n, n \geq 0$ has an integer solution.

In **the fifth section**, the linear differential and linear difference equations (5) and (7) over the valuation ring K of a complete non-Archimedean field are considered as the system $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$, where $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots)^\mathsf{T}$. Let us denote by $\mathcal{A}_n$ the matrix obtained from matrix $\mathcal{A}$ by replacing the $n+1$th column with the vector $\mathbf{f}$. We denote by $\Delta_{n,r}$ the principal corner minor of the $r+1$th order of this matrix, and by $\Delta_r$the principal corner minor of the $r+1$th order of this matrix $\mathcal{A}$. Suppose that the determinants of infinite matrices are the following limits in K with respect to the valuation $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r, \quad \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}, n = 1, 2, 3, \dots$$

The main results of the chapter are the following statements: under the conditions of the uniqueness and existence theorems, the unique solution of these systems can be found using Cramer's rule.

Theorem. Let the conditions of the existence and uniqueness theorem for the solution of (5) hold and $a_0 = 1$. Then the coefficients of the unique solution of (5) in the ring $K[[x]]$ can be found using Cramer's rule $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \dots$.

Theorem. Let the conditions of the existence and uniqueness theorem for the solution of (7) hold and $a_0 = 1$. Then the unique solution of this equation over the ring K can be found by using an analog of Cramer's rule $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Key words: linear differential equation, linear difference equation, linear operator equation, uniqueness and existence theorems, polynomials, formal power series, integer solutions, non-Archimedean fields, ring of p-adic numbers, infinite linear systems, infinite matrices, formal distributions, fundamental solution of a differential operator, convolution