Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Гончарук Анна Борисівна

УДК 517.922, 517.962.22, 511.225

ДИСЕРТАЦІЯ

"АЛГЕБРАЇЧНІ КОНСТРУКЦІЇ В ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ТА В ТЕОРІЇ НЕЯВНИХ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ"

Спеціальність 111 – "Математика"

(Галузь знань 11 - "Математика та статистика")

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії з математики.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
_____________ А. Б. Гончарук

Науковий керівник Гефтер Сергій Леонідович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Харків - 2023

АНОТАЦІЯ

Гончарук А. Б. Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 – Математика (Галузь знань 11 – Математика та статистика). – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України, Харків, 2023.

Дисертацію присвячено вивченню лінійних диференціальних рівнянь з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями та неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями.

Перший розділ присвячений історії вивчення питань, розглянутих в дисертації. Також там наведено стислий опис конструкцій, до яких в цій роботі будуються аналоги, а також сформульовані відомі результати, що використовуються в подальшому.

У **другому розділі** розглядається наступне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами та неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативними кільцями:

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \quad (1)$$

де $f(x)$ є формальним степеневим рядом, $a_0, \ldots, a_m$ і коефіцієнти формального степеневого ряду $f(x)$ належать деякому комутативному кільцю K з одиницею, а розв'язок шукається в кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з K.

Нас цікавлять питання єдиності та існування розв'язку рівняння (1), а також явна формула або метод знаходження цього розв'язку. В дисертації отриманий повний опис ситуацій, в яких це рівняння має єдиний розв'язок у випадку, коли права частина є поліномом. Для вивчення випадку, коли права частина є формальним степеневим рядом з нескінченною кількістю

ненульових коефіцієнтів, введений формальний розв'язок цього рівняння, який є сумою формальних степеневих рядів, і доведено що, якщо ця сума є коректно визначеною, то вона є розв'язком рівняння (1) (наслідок 2.1). Доведено, що формальний розв'язок є коректно визначеним рядом у кільці K з дискретною топологією тоді і тільки тоді, коли неоднорідність $f(x)$ є поліномом. Знайдені умови, за яких формальний розв'язок є коректно визначеним, якщо кільце K є кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням. Таким чином знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння (1) і явний вигляд цього розв'язку.

Основним результатом розділу є наступна теорема.

Теорема *(достатня умова існування і єдиності розв'язку).* Нехай F повне відносно неархімедового нормування $|\cdot|$ поле характеристики нуль, K – його кільце нормування, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \le i \le m$, а $c_k \in K$ задовольняють рівність

$$(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots . \quad (2)$$

Тоді ряд $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ збігається в $K[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності і його сума є єдиним в $K[[x]]$ розв'язком рівняння (1).

Цей результат уточнюється для кільця цілих p-адичних чисел.

Теорема. Нехай $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ цілі. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок з $\mathbb{Z}_p[[x]]$ для будь-якого простого p, що не є дільником a_0.

Також у випадку кільця нормування неархімедового поля введено спеціальне поняття згортки формального ряду Лорана з від'ємними степенями і формального степеневого ряду.

Означення. Нехай $q_i \to 0$ в K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ і $f \in K[[x]]$. За означенням покладемо

$$(Q * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Побудовано аналог фундаментального розв'язку диференціального оператору, тобто доведено, що за умови існування, розв'язок можна представити у вигляді згортки формального ряду Лорана, який залежить тільки від правої частини рівняння, з неоднорідністю.

Теорема. Припустимо, що виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (1). Тоді єдиний розв'язок з $K[[x]]$ цього рівняння має вигляд $w(x) = (\mathcal{E} * f)(x)$, де $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

Третій розділ присвячений вивченню неявних лінійних різницевих рівнянь над комутативними кільцями виду

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_0 w_n = f_n, \qquad (3)$$

де $a_0, \ldots, a_m$ і f_n для всіх $n \geq 0$ належать деякому комутативному кільцю з одиницею.

Нас цікавить питання єдиності і існування такої послідовності елементів кільця K, яка б задовольняла це різницеве рівняння. Аналогічно до того, як це зроблено в попередньому розділі, отримано повний опис ситуацій, в яких це рівняння має єдиний розв'язок у випадку, коли права частина є фінітною послідовністю. Для вивчення випадку, коли права частина є нефінітною, введений формальний розв'язок цього рівняння і доведено що, якщо він коректно визначений, то він є розв'язком рівняння (3) (наслідок 3.1). Доведено, що формальний розв'язок є коректно визначеним рядом у кільці K з дискретною топологією тоді і тільки тоді, коли неоднорідність є фінітною. Знайдені умови, за яких формальний розв'язок є коректно визначеним, якщо кільце K є кільцем нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням. Таким чином знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння (3) і явний вигляд цього розв'язку.

Один з основних результатів цього розділу – це наступна теорема.

Теорема *(достатня умова існування і єдиності розв'язку).* Нехай F повне відносно неархімедового нормування $|\cdot|$ поле характеристики нуль, K – його кільце нормування, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \leq i \leq m$, а $c_k \in K$ задовольняють рівність (2). Тоді ряди $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ збігаються в кільці K і послідовність їх сум є єдиним в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3).

Цей результат можна переформулювати для будь-якого повного факторіального кільця, у тому числі кільця цілих p-адичних чисел і кільця формальних степеневих рядів.

Теорема. Нехай кільце K – факторіальне, поле $F = Frac(K)$ повне відносно нормування $|\cdot|_v$, всі a_j для $1 \leq j \leq m$ діляться на v, а a_0 не ділиться на v. Тоді ряди $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ збігаються в кільці K, а послідовність їх сум є єдиним в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3).

Більш детально вивчається різницеве рівняння першого порядку в кільці поліномів

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[z],\ n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Для нього уточнений попередній результат.

Теорема. Якщо існує таке z_0, що $b(z_0) = 0$, а $a(z_0) \neq 0$, то або послідовність сум формальних степеневих рядів $w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots$, є послідовністю поліномів, що задовольняє рівняння , або це рівняння не має поліноміального розв'язку.

Наступні теореми є одними з основних результатів розділу.

Теорема. Нехай $a(z) = 1$. Якщо формальний степеневий ряд $w_0(z)$ з є поліномом, то всі наступні $w_n(z)$ також є поліномами.

Теорема. Нехай $\deg a < \deg b$. Якщо послідовність поліномів $w_n(z)$ є розв'язком рівняння , то існує такий номер k для якого виконується нерівність $\deg w_k \leq \deg f_k - \deg b + \deg a$.

Четвертий розділ присвячено більш детальному вивченню рівнянь першого порядку над кільцем цілих чисел. В ньому розглянуто операторне рівняння $(Aw)(x)+f(x) = w(x)$, де $w(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ і оператор A діє на кшталт $A(w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots$, яке узагальнює як диференціальне (якщо $\alpha_n = n$), так і різницеве (якщо $\alpha_n = b$) рівняння першого порядку. Розглянуто a-адичну метрику і топологію, пов'язану з послідовністю α_n, на кільці цілих чисел і поповнення $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ за цією метрикою. Для розглянутого операторного рівняння доведено наступні теореми.

Теорема. Рівняння (4.1) має єдиний розв'язок $w(x) = f(x)+(Af)(x)+$

$(A^2f)(x)+(A^3f)(x)+\ldots$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$, де ряд в правій частині рівності є збіжним в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності.

Теорема. Нехай $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots$. Наступні твердження є еквівалентними:

1. $f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$;
2. Рівняння $Aw + f(x) = w$ має розв'язок в $\mathbb{Z}[[x]]$.

Наслідками цієї теореми є наступні критерії, які і є основними результатами цього розділу.

Теорема. Наступні твердження є еквівалентними:

1. Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $\sum_{n=0}^{\infty} n!b^n f_n = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх простих p.
2. Рівняння $bw'(x) + f(x) = w(x)$ має розв'язок з $\mathbb{Z}[[x]]$.

Теорема. Наступні твердження є еквівалентними:

1. Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $\sum_{n=0}^{\infty} b^n f_n = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх p, які є простими дільниками b.
2. Рівняння $bw_{n+1} + f_n = w_n, n \geq 0$ має цілочисельний розв'язок.

У **п'ятому розділі** лінійне диференціальне і лінійне різницеве рівняння (1) і (3) над кільцем нормування K повного неархімедового поля розглядаються у вигляді системи $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$, де $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \ldots)^\intercal$. Позначатимемо $\mathcal{A}_n$ матрицю, що отримана з матриці $\mathcal{A}$ заміною $n+1$-ого стовпця на вектор $\mathbf{f}$. За $\Delta_{n,r}$ позначимо головний кутовий мінор $r+1$-го порядку цієї матриці, а за Δ_r – головний кутовий мінор $r+1$-го порядку цієї матриці $\mathcal{A}$. Нехай визначники нескінченних матриць знаходяться як наступні границі послідовностей в K за нормуванням $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r, \quad \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Основними результатами розділу є наступні твердження про те, що при виконанні умов теорем про єдиність і існування розв'язку, єдиний розв'язок цих систем можна знаходити за допомогою правила Крамера.

Теорема. Нехай виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (1) і $a_0 = 1$. Тоді коефіцієнти єдиного розв'язку рівняння (1) з кільця $K[[x]]$ можна знайти за допомогою правила Крамера $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема. Нехай виконуються умови теореми про існування і єдиність розв'язку рівняння (3) і $a_0 = 1$. Тоді єдиний розв'язок цього рівняння над кільцем K можна знайти за допомогою аналога правила Крамера $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Ключові слова: лінійне диференціальне рівняння, лінійне різницеве рівняння, лінійне операторне рівняння, теореми єдиності і існування, поліноми, формальні степеневі ряди, цілочисельні розв'язки, неархімедові поля, кільця p-адичних чисел, нескінченні лінійні системи, нескінченні матриці, формальні узагальнені функції (розподіли), фундаментальний розв'язок диференціального оператора, згортка

ABSTRACT

Anna B. Goncharuk. Algebraic constructions in linear differential equations and in the theory of implicit linear difference equations. – Qualification scientific work is as a manuscript.

A thesis on the degree of doctor of philosophy: Specialty 111 – Mathematics (Mathematics and statistics). – V.N.Karazin Kharkiv National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kharkiv, 2023.

The thesis is devoted to the study of linear differential equations with inhomogeneity in the form of a formal power series over commutative rings and implicit linear difference equations over commutative rings

The first chapter is devoted to the history of questions considered. This section also provides a short description of the structures whose analogs we will introduce and formulates the known results used in the thesis.

In **the second section**, we consider the following linear differential equation with constant coefficients and inhomogeneity in the form of a formal power

series over commutative rings:

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x), \quad (5)$$

where $f(x)$ is a formal power series, $a_0, \ldots, a_m$ and the coefficients of formal power series $f(x)$ belong to some commutative ring K with identity, and we are looking for the solutions from the ring of formal power series with coeficients from K.

We are interested in the uniqueness and existence of a solution to (5) and an explicit formula or method for finding the solution. This thesis provides a complete description of the situations in which this equation has a unique solution in the case when the right-hand side is a polynomial. To study the case when the right-hand side is a formal power series with an infinite number of non-zero coefficients, a formal solution of this equation is introduced, which is the sum of formal power series, and it is proved that if this sum is correctly defined, then it is a solution of the equation (5) (consequence 2.1). It is proved that the formal solution is a well-defined series in a ring K with discrete topology if and only if the inhomogeneity $f(x)$ is a polynomial. The conditions under which the formal solution is correctly defined are found if the ring K is the valuation ring of the complete field of characteristic zero with non-Archimedean valuation. Therefore, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the equation (5) and the explicit form of this solution are found.

The main result of this section is the following theorem.

Theorem ***(sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution).*** Let F be complete with respect to the non-Archimedean valuation $|\cdot|$ field of characteristic zero, K – its valuation ring, $|a_0| = 1$ and $|a_i| < 1$ for any $1 \le i \le m$, and $c_k \in K$ satisfy the equality

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots . \quad (6)$$

Then the series $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ converges in $K[[x]]$ with respect to the topology of the coefficient-wise convergence. Sum of this series is the unique solution of (5) in $K[[x]]$.

This result is specified for the ring of p-adic integers.

Theorem. Let $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ be integers. Then equation (5) has a unique solution in $\mathbb{Z}_p[[x]]$ for any prime p, that is not a divisor of a_0.

Also, in the case of the valuation ring of a non-Archimedean field, we introduce a special notion of convolution of the formal Laurent series with only negative degrees and the formal power series.

Definition. Let $q_i \to 0$ in K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, and $f \in K[[x]]$. By definition, put

$$(Q * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

An analog of the fundamental solution of a differential operator is constructed, i.e., it is proved that if the solution exists, it can be represented as a convolution of the formal Laurent series, which depends only on the right-hand side of the equation, with inhomogeneity.

Theorem. Assume that the conditions of the existence and uniqueness theorem for the equation (5) are hold. Then the unique solution in $K[[x]]$ of this equation could be written as $w(x) = (\mathcal{E} * f)(x)$, where $\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

The third section is devoted to the study of implicit linear difference equations over commutative rings

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_0 w_n = f_n, \tag{7}$$

where $a_0, \ldots, a_m$ and f_n for all $n \geq 0$ belong to some commutative ring with identity.

We are interested in the uniqueness and existence of a sequence of elements of the ring K that satisfies this difference equation. Similarly to what was done in the previous section, we obtain a complete description of situations in which this equation has a unique solution in the case when the right-hand side is a finite sequence. To study the case when the right-hand side is infinites, a formal solution of this equation is introduced, and it is proved that if it is correctly defined, then it is a solution of the equation (7) (consequence 3.1). It is proved that the formal solution is a well-defined series in a ring K with discrete topology if and only if the inhomogeneity is fifnite. The conditions under which the formal solution is correctly defined are found if the ring K is the valuation ring of the complete field of characteristic zero with non-Archimedean valuation. Therefore, sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the equation (7) and the explicit form of this solution are found.

One of the main results of this section is the following theorem.

Theorem *(sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution).* Let F be a complete with respect to the non-Archimedean valuation $|\cdot|$ field of the characteristic zero, K – its valuation ring, $|a_0| = 1$ and $|a_i| < 1$ for all $1 \leq i \leq m$, and $c_k \in K$ satisfy the equality (6). Then the series $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ converge in K and the sequence of sums of these series is the unique in $K^{\mathbb{N}_0}$ solution of (7).

This result can be reformulated for any complete factorial ring, including rings of p-adic numbers and rings of formal power series.

Theorem. Suppose the ring K is factorial, the field $F = Frac(K)$ is complete with respect to the valuation $|\cdot|_v$, all a_j, $1 \leq j \leq m$ are divisible by v, and a_0 is not divisible by v. Then the series $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_{n+k}$ converge in the ring K, and the sequence of their sums is the unique in $K^{\mathbb{N}_0}$ solution of (7).

The first-order difference equation in the ring of polynomials

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[z],\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad (8)$$

is studied in more detail. The previous result is specified for it.

Theorem. If there exists z_0 such that $b(z_0) = 0$, and $a(z_0) \neq 0$, then either the sequence of sums of formal power series $w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, is a polynomial solution of the equation (8) or this equation has no polynomial solution.

The following theorems are some of the main results of the chapter.

Theorem. Let $a(z) = 1$. If the formal power series $w_0(z)$ is polynomial, then all other $w_n(z)$ also are polynomials.

Theorem. Let $\deg a < \deg b$. If the sequence of polynomials $w_n(z)$ is a solution of the equation (8), then there exists number k for that the inequality $\deg w_k \leq \deg f_k - \deg b + \deg a$ holds.

The fourth section is devoted to a more detailed study of first-order equations over a ring of integers. It considers the operator equation $(Aw)(x) + f(x) = w(x)$, where $w(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ and the operator A acts as follows $A(w_0 + w_1x + w_2x^2 + \ldots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots$, which generalizes both a differential (if $\alpha_n = n$) and a difference (if $\alpha_n = b$) equation of the first order. We consider the a-adic metric and topology associated with the sequence α_n on the ring of integers and the completion of $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ by this metric. The following theorems are proved for the considered operator equation.

Theorem. The equation (4.1) has a unique solution $w(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots$ in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$, where the series on the right-hand side of the equality is convergent in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ with respect to the topology of coefficient-wise convergence.

Theorem. Suppose $f \in \mathbb{Z}[[x]],\ f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$. The following statements are equivalent:

1. $f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$;
2. The equation $Aw + f(x) = w$ has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$.

The consequences of this theorem are the following criteria, which are the main results of this section.

Theorem. The following statements are equivalent:

1. There exists $c \in \mathbb{Z}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} n! b^n f_n = c$ in $\mathbb{Z}_p$ for all prime p.
2. The equation $bw'(x) + f(x) = w(x)$ has a solution in $\mathbb{Z}[[x]]$.

Theorem. The following statements are equivalent:

1. There exists $c \in \mathbb{Z}$ such that $\sum_{n=0}^{\infty} b^n f_n = c$ in $\mathbb{Z}_p$ for all prime divisors of b.
2. The equation $bw_{n+1} + f_n = w_n, n \geq 0$ has an integer solution.

In **the fifth section**, the linear differential and linear difference equations (5) and (7) over the valuation ring K of a complete non-Archimedean field are considered as the system $\mathcal{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$, where $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots)^{\mathsf{T}}$. Let us denote by $\mathcal{A}_n$ the matrix obtained from matrix $\mathcal{A}$ by replacing the $n+1$th column with the vector $\mathbf{f}$. We denote by $\Delta_{n,r}$ the principar corner minor of the $r+1$th order of this matrix, and by $\Delta_r$the principar corner minor of the $r+1$th order of this matrix $\mathcal{A}$. Suppose that the determinants of infinite matrices are the following limits in K with respect to the valuation $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r, \quad \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}, n = 1, 2, 3, \dots$$

The main results of the chapter are the following statements: under the conditions of the uniqueness and existence theorems, the unique solution of these systems can be found using Cramer's rule.

Theorem. Let the conditions of the existence and uniqueness theorem for the solution of (5) hold and $a_0 = 1$. Then the coefficients of the unique solution of (5) in the ring $K[[x]]$ can be found using Cramer's rule $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \dots$.

Theorem. Let the conditions of the existence and uniqueness theorem for the solution of (7) hold and $a_0 = 1$. Then the unique solution of this equation over the ring K can be found by using an analog of Cramer's rule $w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Key words: linear differential equation, linear difference equation, linear operator equation, uniqueness and existence theorems, polynomials, formal power series, integer solutions, non-Archimedean fields, ring of p-adic numbers, infinite linesr systems, infitite matrices, formal distributions, fundamental solution of a differential operator, convolution

Список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

1. Гефтер С.Л., Гончарук А.Б., Півень О.Л.: Цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння. Доповіді НАН України **11**, 11–18 (2018) DOI: 10.15407/dopovidi2018.11.011
2. Goncharuk, A.: Implicit linear difference equation over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **93**, 18–33 (2021) DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03
3. Goncharuk, A.: Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **95**, 39–48 (2022) DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Hefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Linear Differential Equation with Inhomogeneity in the Form of a Formal Power Series Over a Ring with Non-Archimedean Valuation. Ukr Math J **74**, 1463–1477 (2022) DOI: 10.1007/s11253-023-02163-0

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

5. Gefter, S., Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formula for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of Abstracts of V International Conference "Analisis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine (2017) DOI: 10.13140/RG.2.2.24135.80805

6. Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formulas for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of abstracts of The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, pp. 57-58 (2017)
7. Goncharuk A.: Implicit linear differential equation over the ring of polynomials. Збірник тез доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, с. 5 (2020)
8. Goncharuk A., Gefter S.: Non-homogeneous implicit linear differential equation over the ring of formal power series. Збірник тез доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, с. 50 (2021)
9. Goncharuk A.: Implicit difference equation over the ring of polynomials. In: Book of abstracts of Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, p. 29 (2021)
10. Gonmcharuk, A., Gefter, S., Piven', A.: Implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, p. 154 (2021)
11. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series over a topologicl ring. Збірник тез Міжнародної конференції з комплексного і функціонального аналізу, присвяченої пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, с. 19 (2021)
12. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series. In: Book of Abstracts of The 5-th International Conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT 2021), Kharkiv, p. 19 (2021)
13. Gefter, S.L., Goncharuk, A.B., Piven', A.L.: Quasi-polynomial solutions

of implicit linear difference equations over a local commutative ring. In: Book of Abstracts of The International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", Ivano-Frankivsk, p. 32 (2022)

14. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Periodic and quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 27th International Conference on Difference Equations and Applications, Paris, p. 137 (2022)

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертаційної роботи (опубліковані праці конференцій):

15. Gefter, S., Goncharuk, A.: Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: Böttcher, A., Potts, D., Stollmann, P., Wenzel, D. (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Birkhäuser, Cham. pp. 247–259 (2018) DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13

16. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenović, M.R.S., Kalabušić, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham. pp. 199–216 (2023) DOI: 10.1007/978-3-031-25225-9_10

ЗМІСТ

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Лінійні різницеві рівняння виду

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_0 w_n = f_n$$

є добре вивченими над полями нульової характеристики. Вони завжди мають нескінченно багато розв'язків, і ці розв'язки можуть бути знайдені за допомогою рекурентних формул. Тим не менш, до останнього часу такі рівняння майже не вивчалися над кільцями, хоча питання "якщо $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ та всі f_n є цілими числами, то чи існує та чи є єдиним розв'язок в цілих числах такого різницевого рівняння?", є дуже природним.

Так само є загальновідомі формули для розв'язків лінійних диференціальних рівнянь виду

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x),$$

але якщо розглядати таке рівняння для цілих $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$, у випадку коли $f(x)$ є формальним степеневим рядом з цілими коефіцієнтами, то метод невизначених коефіцієнтів призведе до рекурентних рівнянь, що дуже схожі на розглянуті вище різницеві рівняння. Тому для них питання, чи існують розв'язки, які б були формальними степеневими рядами з цілими коефіцієнтами, також є природним.

В роботах [1] і [2] були отримані повні відповіді на це питання для диференціальних і різницевих рівнянь першого порядку над кільцем цілих p-адичних чисел. Також подібні питання для різницевого рівняння другого порядку розглядалися в статті [3]. Ці результати можуть бути використані для знаходження розв'язку або для доведення того, що він не існує для деяких конкретних рівнянь над кільцем цілих чисел. Але повної відповіді на поставлені питання над кільцем цілих чисел досі не існує навіть для рівнянь першого порядку.

Так само, і для різницевих, і для диференціальних рівнянь цікавим є подібне питання для будь-якого іншого комутативного кільця, за умови, що у цьому кільці старший коефіцієнт рівняння не є оборотним. Слід зауважити, для диференціального рівняння випадок кільця цілих чисел дійсно стоїть окремо через вигляд коефіцієнтів, що виникають при диференціюванні формальних степеневих рядів.

З цих загальних питань природним чином виокремлюються більш конкретні. Наприклад, оскільки для кожного комутативного кільця відповідь залежить від властивостей цього кільця, є сенс розглянути ці рівняння над поширеними кільцями, наприклад, над кільцем поліномів, і скористатися для пошуку розв'язку рівняння додатковими властивостями кільця поліномів. Або навпаки, для рівняння з неоднорідністю спеціального вигляду можна сформулювати умови існування і єдиності розв'язку для ширшого класу кілець.

Також для таких рівнянь цікаво знаходити аналоги конструкцій, притаманних загальній теорії диференціальних рівнянь, наприклад знаходити розв'язок у вигляді згортки фундаментального розв'язку відповідного диференціального оператора з неоднорідністю.

Оскільки розглянуті рівняння можна розглядати як нескінченну систему лінійних рівнянь, яка в тих ситуаціях, які розглядаються в дисертації, переважно має єдиний розв'язок, то також постає задача про можливість знаходження розв'язку за допомогою деякого аналогу метода Крамера.

Саме цими питаннями і зумовлений вибір теми дисертації.

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної дисертації є дослідження диференціальних та різницевих рівнянь над кільцями, встановлення умов існування та єдиності їх розв'язків та знаходження розв'язків.

Об'єкт дослідження – лінійні диференціальні і різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами над кільцями.

Предмет дослідження – існування та єдиність розв'язків лінійних диференціальних та різницевих рівнянь над кільцями, формули для знаходження цих розв'язків.

Завдання дослідження:

- знайти достатні умови для існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального та різницевого лінійного рівнянь над кільцями для якомога ширшого класу кілець;
- побудувати конструкцію, що є аналогом фундаментального розв'язку диференціального оператора, для лінійного диференціального рівняння над кільцями
- описати методи для знаходження розв'язку деяких типів різницевих рівнянь першого порядку над кільцем поліномів;
- у випадку кільця цілих чисел дослідити операторне рівняння першого порядку, що є узагальненням різницевого і диференціального рівняння;
- дослідити лінійні диференціальні і різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами як нескінченні лінійні системи, застосувати до них метод Крамера.

Методи дослідження. У роботі використовувалися загальні методи комутативної алгебри, загальної топології, неархімедового, зокрема p-адичного, аналізу, лінійної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. У даній дисертації знайдені достатні умови існування та єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m-того порядку зі сталими коефіцієнтами над кільцем дискретного нормування з неархімедовою топологією, знайдений загальний вид розв'язку у вигляді ряду, збіжного в топології покоефіцієнтної збіжності. Вводиться поняття згортки ряду Лорана з від'ємними степенями і формального степеневого ряду з коефіцієнтами з цього кільця, і показано, що розв'язок розглянутого диференціального рівняння можна представити як згортку деякого ряду Лорана, що залежить тільки від лівої частини рівняння, з неоднорідністю.

Знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку різницевого рівняння m-того порядку в повному комутативному кільці з неархімедовою метрикою та знайдений розв'язок у вигляді збіжного ряду.

Розглянуто операторне рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел, що об'єднує обидва часткові випадки – диференціального і різницевого рівняння. Для нього знайдені достатні умови існування і єдиності розв'язку в кільці a-адичних цілих чисел, що є поповненням кільця цілих чисел.

Показано, що всі ці рівняння можуть розглядатися як нескінченні лінійні системи і розв'язуватись за допомогою правила Крамера.

Практичне значення отриманих результатів. Робота носить теоретичний характер. Отримані результати встановлюють зв'язки між теорією різницевих і диференціальних рівнянь, теорією кілець і теорією чисел. Ці результати можуть бути використані в теорії лінійних диференціальних і різницевих рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівнику. В роботі [4] здобувачеві належить теореми, що відносяться до кільця цілих чисел: наслідок 5 про єдиність розв'язку і наслідок 1 про розв'язок рівняння зі сталою неоднорідністю. Дві статті – [5] і [6], що ввійшли до дисертаційної роботи написані без співавторів. Статті [7], [8] і розділ 4 роботи [9] написані у співавторстві з науковим керівником. Усі результати, що ввійшли до дисертації, були отримані авторкою особисто, але постійно обговорювалися з науковим керівником. Результати, що належать іншим математикам, згадуються за необхідністю для повноти викладу та супроводжуються відповідними посиланнями.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися й обговорювалися на наступних конференціях та семінарах:

1. The V International Conference "Analisis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine, June 19–24, 2017. (Форма участі у конференції: очна.)

2. The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, 14-18 August, 2017. (Форма участі у конференції: очна.)

3. The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, 18 - 23 September, 2017. (Форма участі у конференції: очна.)

4. XV Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, Україна, 13–14 березня, 2020. (Форма участі у конференції: очна.)

5. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3–5, 2021. (Форма участі у конференції: онлайн.)

6. Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, July 19 - 24, 2021. (Форма участі у конференції: онлайн.)

7. The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, July 26-30, 2021. (Форма участі у конференції: онлайн.)

8. Міжнародна конференція з комплексного і функціонального аналізу, присвячена пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, Україна, 13-16 вересня, 2021. (Форма участі у конференції: онлайн.)

9. The 5-th International Conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT 2021), Kharkiv, Ukraine, September 27-29, 2021. (Форма участі у конференції: очна.)

10. The International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", Ivano-Frankivsk, Ukraine, May 12-15, 2022. (Форма участі у конференції: онлайн.)

11. Семінар кафедри прикладної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, 8 червня, 2022.

12. The 27th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2022), Paris, France, July 18–22, 2022 (Форма участі у конференції: онлайн.)

13. Семінар з функціонального аналізу університету Мурсії, Іспанія, 1 грудня, 2022.

14. Засідання Харківського математичного товариства, Харків, 28 лютого, 2023.

15. Семінар з теорії чисел Інституту математики Польської академії наук, 8 травня, 2023.

16. Міжнародна конференція Numbers in Universe, Київ, Україна, 7–11 серпня, 2023. (Форма участі у конференції: очна.)

Публікації. Всі основні результати роботи опубліковані у фахових журналах, пройшли апробацію на наукових конференціях і семінарах. Результати дисертації містяться у шести наукових публікаціях, у тому числі в чотирьох статтях у спеціалізованих журналах, з яких дві написані без співавторів і в збірниках трудів двох спеціалізованих конференцій, а також в тезах доповідей [10]–[19] на 10 конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків до дисертації, переліку використаних джерел, який містить 67 пунктів, та додатків. Повний обсяг роботи – 144 сторінки. Обсяг основної частини дисертації – 115 сторінок. Розділ 1, присвячений огляду літератури, займає 18 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано на кафедрі фундаментальної математики факультету математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна у відповідності до тематики пріоритетних досліджень кафедри та в рамках проєкту Національного фонду досліджень України "Підтримка досліджень провідних та молодих вчених" "Оператори в нескінченновимірних просторах: взаємозв'язок геометрії, алгебри і топології". (Реєстраційний номер Проєкту: 2020.02/0096.)

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР ТЕМИ

1.1 Диференціальне та різницеве рівняння

Нехай K – цілісне комутативне кільце. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, що належать K

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Наступні питання будуть одними з центральний питань дисертаційної роботи:

Питання 1.1. *Нехай $f(x)$ є поліномом з коефіцієнтами з кільця K. Чи існує розв'язок рівняння (1.1), який також є поліномом з коефіцієнтами з K? Чи є такий розв'язок єдиним? Як його знайти?*

Питання 1.2. *Нехай $f(x)$ є формальним степеневим рядом з коефіцієнтами з кільця K. Чи існує розв'язок рівняння (1.1), який також є формальним степеневим рядом з коефіцієнтами K? Чи є такий розв'язок єдиним? Як його знайти?*

Починаючи з 2009 року, Гефтер, Півень і Стулова у роботах [20]–[25] розглядали подібні питання (пошук розв'язку деякого типу) для рівнянь у банахових та векторних просторах. Горбачук Потім подібне питання розглядалося в [1] в кільці формальних рядів Лорана, що мають скінченну кількість додатних степенів. Питання для кільця формальних степеневих рядів були поставлені спочатку для кільця цілих чисел і рівнянь першого порядку і розглядалися в [2]. Розглянуте рівняння першого порядку іншими методами було вивчене Бакінгемом в [26]. Схожі питання розглядались В. М. Горбачуком та В. І. Горбачук в [27] і [28] у випадку рівнянь у неархімедових банахових просторах.

Ми означатимемо похідну від поліному та від формального степеневого ряду з коефіцієнтами, що належать кільцю K наступним чином: якщо

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, то $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n f_n x^{n-1}$. Це цілком коректне означення: якщо $f_n, n \in \mathbb{N}_0$ є елементами кільця, то nf_n також є його елементами.

Рівняння (1.1), де $f(x)$ є неперервною функцією, а коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – дійсними числами є добре вивченим (див., наприклад, [29]). Відомо, що таке рівняння має нескінченно багато розв'язків, і кожен з цих розв'язків можна представити як суму деякого часткового розв'язку цього рівняння і одного з розв'язків однорідного диференціального рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = 0. \quad (1.2)$$

Розв'язок однорідного рівняння матиме вигляд

$$\sum_{n=0}^{m} P_n(x) e^{\lambda_n x}, \quad (1.3)$$

де λ_n – корені характеристичного рівняння.

Частковий розв'язок рівняння для будь-якої неоднорідності можна записати у вигляді

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} K(x-s) f(s)\, ds,$$

де $K(t)$ – це функція Коші, тобто функція, яка задовольняє наступні умови:

- $K(t)$ – розв'язок однорідного рівняння.
- $K(0) = K'(0) = \ldots = K^{(m-2)}(0) = 0,\ K^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m}$.

Тоді загальний розв'язок рівняння 1.1 матиме вигляд

$$w(x) = w_h(x) + \int_{x_0}^{x} K(x-s) f(s)\, ds,$$

де $w_h(x)$ є розв'язком (1.2) і матиме вигляд (1.3). Тим не менш, знаходження загального розв'язку у такий спосіб не дає відповіді на сформульовані питання: невідомо, чи належать один чи декілька розв'язків розглядуваним кільцям.

Одним із методів розв'язання рівняння 1.1 є знаходження розв'язку, що є формальним степеневим рядом ([29, 3.3], [30, Ch.7]. Методом невизначених коефіцієнтів це рівняння зводиться до системи лінійних рівнянь і знаходження послідовності, яка задовольняє деяке рекурентне співвідношення. Тобто якщо $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$, то $w^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} w_n x^{n-k}$. Таким чином рівняння можна переписати у вигляді

$$a_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} w_n x^{n-m} + \ldots + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} n w_n x^{n-1} + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = f_n,$$

тобто

$$a_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} w_{n+m} x^n + \ldots + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1} x^n + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n = f_n.$$

Отже, для будь-якого n маємо

$$\frac{(n+m)!}{n!} a_m w_{n+m} + \ldots + a_1 (n+1) w_{n+1} + a_0 w_n = f_n. \tag{1.4}$$

Підставляючи будь-які початкові значення $w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}$, можна знайти всю послідовність $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$. Якщо K є полем нульової характеристики, то ряд $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ буде єдиним розв'язком задачі Коші в кільці формальних степеневих рядів $K[[x]]$ ([30, Ch.7, Prop.2.1]).

Зауваження 1.1. В класичному випадку ($K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{Q}$) права частина є аналітичною функцією в деякому околі нуля, то ряд $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ також буде аналітичною функцією в деякому околі нуля.

Якщо $f(x)$ є поліномом або формальним степеневим рядом з коефіцієнтами з кільця K, коефіцієнти шуканого розв'язку $w(x)$ можна знайти з рівності 1.4 тобто розв'язування диференціального рівняння зводиться до знаходження розв'язку різницевого рівняння. У випадку, коли коли над кільцем K елементи $\frac{(n+m-1)!}{n!} a_{m-1}, \ldots, (n+1)a_1, a_0$ діляться на $\frac{(n+m)!}{n!} a_m$, існує нескінченно багато розв'язків цього різницевого рівняння. Але невідомо, чи існує розв'язок за інших умов.

Розглянемо тепер у деякому сенсі більш простий випадок: лінійне різницеве рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_2 w_{n+2} + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \tag{1.5}$$

де $f_n \in K, a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Шукатимемо послідовність $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, елементи якої належать кільцю K, і яка задовольняє це рівняння.

Гефтер, Герасимов, Рибалко, Марценюк, Півень, Берестовський, Ніконоров і Гончарук вивчали рівняння першого і другого порядку над кільцем цілих чисел в [31]–[35]. Рівняння вищіх порядків вивчали Гефтер, Марценюк і Півень в [36].

Так само, для випадку, коли K є полем, або коли $a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ діляться на a_m у кільці K, це рівняння має нескінченно багато розв'язків – один для кожного початкового значення $w_0, w_1, \ldots w_{m-1}$. Послідовності, що є розв'язками таких рівнянь, добре вивчені над полями (див. [37], [38]). Тому дійсно дивним є той факт, що наступне природне питання не є вивченим:

Питання 1.3. *Чи має рівняння (1.5) розв'язок для даного кільця K? Чи він єдиний? Як його знайти?*

Ідея розв'язання сформульованих питань спирається на метод знаходження часткового розв'язку диференціального рівняння, що був запропонований Б.Бріссоном у 1808 році для рівнянь першого порядку та узагальнений У. Броджі для диференціальних рівнянь вищого порядку. Якщо позначити $D = \dfrac{d}{dx}$, то частковий випадок диференціального рівняння першого порядку можна записати у вигляді

$$Dw + w = f. \tag{1.6}$$

Б. Бріссон ([39]) стверджує, що це рівняння формально має розв'язок

$$w = f - Df + D^2 f - \ldots,$$

маючи на увазі, що цей ряд є розв'язком за умови його збіжності. Наприклад, якщо f є поліномом, то сума цього ряду також є поліномом з коефіцієнтами з того ж кільця, що частково відповідає на питання 1.1. Якщо позначити $S\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, то частковий випадок $a_0 = 1$ різницевого рівняння першого порядку можна записати у вигляді

$$a_1 S\{w_n\} + \{w_n\} = \{f_n\}. \tag{1.7}$$

Так само, це рівняння формально матиме розв'язок

$$\{w_n\} = f_n - a_1 S\{w_n\} + a_1^2 S^2\{f_n\} - \ldots . \tag{1.8}$$

Знаходження розв'язку такого рівняння у вигляді 1.8 було корисним і для рівнянь у банаховому просторі (див. [21]–[25]), і для рівнянь з неоднорідністю, що є формальним рядом Лорана (див. [1]).

У. Броджі ([40, §5, 22.1]) узагальнює попередній результат для рівняння (1.1), шукаючи розв'язок цього рівняння у вигляді суми ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(x)$, де c_n – коефіцієнти, що знаходяться з рівності

$$(a_m s^m + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n.$$

Так само, він розглядає ці ряди над полями дійсних або комплексних чисел, при виконанні деяких умов збіжності.

Для випадку, коли коефіцієнтами таких рядів є елементи довільного кільця, такі умови збіжності не підходять. Але ряди, елементами яких є елементи деякого кільця, зустрічаються, наприклад, у p-адичному аналізі, де ряд, що складається з цілих чисел, може збігатися до цілого числа за p-адичною метрикою. Такі побудови можливі, коли введено неархімедове нормування або квазінормування([41, Chapter XII]). Варто зазначити, що термінологія в цій області є трохи невизначеною, в різних джерелах однакові поняття можуть мати різні назви.

1.2 Неархімедове нормування і квазінормування

Нехай K – цілісне комутативне кільце з одиницею.

Означення 1.1. ([41, Chapter XII,§1]) *Будемо називати нормуванням відображення* $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$, *для якого виконуються наступні умови:*

- $|x| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = 0$*;*
- $|xy| = |x||y|$*;*

- $|x+y| \le |x| + |y|$.

Означення 1.2. ([42]) *Будемо називати квазінормуванням відображення* $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$, *для якого виконуються наступні умови:*

- $|x| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = 0$;
- $|xy| \le |x||y|$;
- $|x+y| \le |x| + |y|$.

Означення 1.3. ([43, 1.5.1, Definition 1]) *Нормування або квазінормування називається неархімедовим, якщо замість звичайної нерівності трикутника* $|x+y| \le |x| + |y|$ *виконується сильна нерівність трикутника* $|x+y| \le \max(|x|, |y|)$.

Існування такого нормування або квазінормування дозволяє ввести на кільці метрику $\sigma(x,y) = |x-y|$ і відповідну топологію.

Для неархімедового нормування в повному кільці виконується наступний критерій збіжності рядів:

Теорема 1.1. [43, 1.1.8, Proposition 1] *Ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *збігається тоді і тільки тоді, коли* a_k *прямує до нуля при* $k \to \infty$.

Доведення. Дійсно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ збігається тоді і тільки тоді, коли часткові суми $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ прямують до нуля. В повному кільці послідовність прямує до нуля тоді і тільки тоді, коли вона є фундаментальною, тобто коли $S_n - S_m$ прямує до нуля при $n \to \infty$ і $m \to \infty$. Але

$$|S_n - S_m| = |S_n - S_{n-1} + S_{n-1} - S_{n-2} + \ldots + S_{m+1} - S_m| \le \\ \le \max(|S_n - S_{n-1}|, |S_{n-1} - S_{n-2}|, \ldots, |S_{m+1} - S_m|), \quad (1.9)$$

за сильною нерівністю трикутника. Отримуємо, що $S_n - S_m$ прямує до нуля тоді і тільки тоді, коли $S_k - S_{k-1} = a_k$ прямує до нуля при $k \to \infty$. ■

Означення 1.4. *Нехай на кільці K введено нормування $|\cdot|$. Будемо називати K кільцем нормування, якщо всі його елементи мають нормування не більше, ніж 1.*

Зауваження 1.2. *(*[41, Chapter XII, §4], [43, 1.6.1, Definition 1]*)* Зазначимо, що описана нами конструкція є насправді кільцем дискретного нормування (зазвичай кільцем нормування (valuation ring) називають кільце K, що для будь-якого елементу з його поля часток хоча б один елемент з x або x^{-1} належав K). Всюди в подальшому використовуватимемо слова "кільце нормування" саме для конструкції з попереднього означення.

Означення 1.5. *Кільцем нормування $|\cdot|$ поля F називаєтьcя таке кільце $K = \{s \in F : |s| \leq 1\}$, всі елементи якого мають нормування не менше за 1.*

Лема 1.1. *(*[41, Chapter XII, §4]*) Нормування будь-якого кільця нормування K можна продовжити на його поле часток $F = Frac(K)$, так що $|a^{-1}| = |a|^{-1}$. Тоді K буде кільцем нормування поля F.*

Лема 1.2. *Елемент $a \in K$ кільця нормування є оборотним тоді і тільки тоді, коли $|a| = 1$.*

Доведення. Очевидно, що $|1| = |1|^2$ має дорівнювати 1. Припустимо, що елемент a є оборотним. Тоді $|1| = |a \cdot a^{-1}| = |a| \cdot |a^{-1}| = 1$. Оскільки $|a| \leq 1$ та $|a^{-1}| \leq 1$, то $|a| = |a^{-1}| = 1$. У зворотній бік, якщо $|a| = 1$, то в полі часток F для зворотного елементу $|a^{-1}| = 1$, тобто a^{-1} повинно належати кільцю нормування K. ■

Наступний клас кілець є прикладом кілець нормування з неархімедовою метрикою.

Означення 1.6. *Кільце називаєтьcя факторіальним, якщо кожний елемент в цьому кільці має єдину факторизацію.*

В будь-якому факторіальному кільці можна ввести нормування у наступний спосіб [44, Chapter VII, §3.3]. Нехай K є факторіальним кільцем, $v \in K$ – простий елемент. Тоді будь-який елемент x з поля часток $Frac(K)$ єдиним чином представляється у вигляді $x = v^t \cdot c$ так, що $t \in \mathbb{Z}$ і $c = \frac{r}{s}$, де $r, s \in K$ і обидва елементи r, s не містять v у своїй факторизації. Покладемо за означенням $|x|_v = e^{-t}$. Нормування $|\cdot|_v$ поля $Frac(K)$ є неархімедовим.

Наведемо два важливих приклади факторіальних кілець з введеними на них таким чином нормуваннями:

Приклад 1.1. *(Кільце цілих p-адичних чисел)*([45, Section 1.2], [41, Ch.XII, §6].) Розглянемо кільце цілих чисел $\mathbb{Z}$. Його полем часток є поле раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Зафіксуємо довільне просте число p. Будь-яке ціле число може бути єдиним чином представлено у вигляді $x = p^t \cdot c$ так, що $t \in \mathbb{Z}$ і $(c, p) = 1$, а будь-яке раціональне число єдиним чином представляється у вигляді $x = p^t \cdot c$ так, що $t \in \mathbb{Z}$ і $c = \frac{r}{s}$, де $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, p) = 1$, $(s, p) = 1$ і $(r, s) = 1$. Покладемо за означенням $|x|_p = e^{-t}$.

Кільцем нормування поля раціональних чисел за цим нормуванням є кільце всіх таких раціональних чисел, у яких у вигляді нескоротних дробів знаменник не ділиться на p, тобто кільце p-цілих чисел $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{r}{s} :\ r, s \in \mathbb{Z},\ (s, p) = 1\}$.

Всі ці кільця є неповними за вказаним нормуванням.

Означення 1.7. *Кільце цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ є поповненням кільця $\mathbb{Z}$ за p-адичним нормуванням, при чому нормування з кільця $\mathbb{Z}_p$ є природнім продовженням нормування з кільця $\mathbb{Z}$.*

Означення 1.8. *Поле p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ є поповненням поля $\mathbb{Q}$ за p-адичним нормуванням, при чому нормування з кільця $\mathbb{Q}_p$ є природнім продовженням нормування з кільця $\mathbb{Q}$.*

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, елементами якого є цілі числа, за теоремою 1.1 збігається в $\mathbb{Q}_p$ тоді і тільки тоді, коли $|a_n|_p \to 0$. Але він може збігатися як до раціонального числа, так і до числа з $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$.

Приклад 1.2. Послідовність $\{n!\}$ прямує до нуля відносно $|\cdot|_p$ за будь-якого p. Отже, ряди виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!$ збігаються в будь-якому $\mathbb{Q}_p$. Питання про раціональність сум таких рядів вивчалися в численних роботах, наприклад, в роботі [46].

Приклад 1.3. Неважко показати за допомогою індукції, що

$$\sum_{n=0}^{k} n \cdot n! = (k+1)! - 1.$$

Тому $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n! = \lim_{k\to\infty}(k+1)! - 1 = -1$.

Приклад 1.4. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ є збіжним у будь-якому $\mathbb{Z}_p$, але питання, чи збігається він до раціонального числа хоч у якомусь $\mathbb{Q}_p$, залишається відкритим. Але, наприклад, про нього відомо, що якщо він має раціональні значення у всіх $\mathbb{Q}_p$, то це не може бути одне й те саме число для всіх p ([46]).

Ще один важливий приклад – кільце формальних степеневих рядів.

Приклад 1.5. ([41, Ch.XII, §6]). Нехай F є полем характеристики нуль. Зафіксуємо довільне $z_0 \in F$ і розглядатимемо в якості кільця K кільце формальних степеневих рядів $F[[z-z_0]]$. Поле часток кільця $F[[z-z_0]]$ – це поле рядів Лорана $F((z-z_0))$, воно є повним, і кільце $F[[z-z_0]]$ є кільцем нормування для $F((z-z_0))$. За означенням, для $w \in F((z-z_0))$ візьмемо $|w(z-z_0)|_{z-z_0} = 2^t$, де t – найменше ціле число, для якого $(z-z_0)^t \cdot w(z-z_0) \in F[[z-z_0]]$.

Тепер введемо одну з найбільш загальних конструкцій, для яких можна ввести неархімедове квазінормування (див. [42]).

Нехай K – комутативне кільце з одиницею і $\mathcal{I}$ – його ідеал, Задамо функцію $w : K \to \mathbf{N}_0$ формулою

$$w(x) = \begin{cases} \sup\{k \in \mathbf{N}_0 : x \in \mathcal{I}^k\}, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Позначивши $e^{-\infty} = 0$, розглядатимемо відстань

$$d(x,y) = e^{-w(x-y)}, \quad x, y \in K.$$

Ця метрика породжує $\mathcal{I}$-адичну топологію на кільці K.

Приклад 1.6. В кільці $K = R[[x]]$, де R є комутативним кільцем з одиницею розглядатимемо ідеал $\mathcal{I} = xK[[x]]$. Він породжує в цьому кільці $\mathcal{I}$-адичну топологію.

Відмітимо, що в кільці $K[[x]]$ така метрика може бути описана наступним чином: для рядів $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ і $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ відстань дорівнює $d(a(x), b(x)) = e^{-k}$, де k – найменше число, для якого $a_k \neq b_k$. Збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$, $w_k(x) \in K[[x]]$ в цій топології означає, що коефіцієнт при кожному степені x^n є сумою скінченної кількості елементів з K.

Помітимо, що функція $w(x)$ має наступні властивості:

- $w(xy) \geq w(x) + w(y)$;
- $w(x+y) \geq \min(w(x), w(y))$.

Дійсно, якщо $x \in \mathcal{I}^n$ і $y \in \mathcal{I}^m$, де $n \leq m$, то $xy \in \mathcal{I}^{n+m}$, а $x + y \in \mathcal{I}^n$.

Позначимо $|a| = d(a, 0)$. Тоді для будуть виконуватись такі умови:

- $|xy| \leq |x||y|$;
- $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$.

Якщо перетин степенів ідеалу $\bigcap_n \mathcal{I}^n = \{0\}$, то $v(x) = e^{-\infty} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$. За цієї умови $|\cdot|$ є неархімедовим квазінормуванням, тому що $|x| = 0$ тільки якщо $x = 0$ і дві інші умови теж виконані.

Є великий клас локальних нетерових кілець, в якому така побудова цілком можлива.

Означення 1.9. *Кільце називаєтьcя локальним, якщо в ньому існує єдиний максимальний ідеал.*

Означення 1.10. *Кільце називається нетеровим, якщо в ньому будь-яка зростаюча послідовність ідеалів стабілізується, тобто якщо*

$$\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}_3 \subseteq \ldots,$$

то існує таке n для якого

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_{n+2} = \ldots.$$

Теорема 1.2. [44, Chapter III, §3.2]***(Krull Intersection Theorem)*** *Нехай K – нетерове локальне кільце і $\mathcal{I}$ – його максимальний ідеал. Тоді $\bigcap_n \mathcal{I}^n = \{0\}$.*

З попередньої теореми випливає, що в будь-якому нетеровому локальному кільці можна ввести $\mathcal{I}$-адичне нормування, де $\mathcal{I}$ є максимальним ідеалом цього кільця.

1.3 a-адична метрика на кільці цілих чисел

Наступне питання виникає через те, що в операторному вигляді стає очевидним, що рівняння (1.6) і (1.7) можуть бути узагальнені, якщо замість звичайних операторів диференціювання та лівого зсуву взяти оператор зсуву A з вагою α, означений наступним чином.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ – це послідовність елементів з кільця цілих чисел. Нехай оператор оператор A діє на кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами на кшталт

$$A(w_0 + w_1x + w_2x^2 + \ldots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots.$$

Розглядатимемо рівняння

$$(Aw)(x) + f(x) = w(x), \tag{1.10}$$

де $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots \in \mathbb{Z}[[x]]$. Будемо шукати розв'язок цього рівняння в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$.

Зазначимо, що якщо розглядатимемо $\alpha = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, тоді A буде оператором диференціювання, і рівняння (4.1) матиме вигляд $w'(x) + f(x) = w(x)$, а якщо $\alpha = (b, b, b, b, \ldots)$, $b \neq 1$, тоді $A = b \cdot S^*$, де S^* – оператор лівого зсуву у кільці $\mathbb{Z}[[x]]$. В загальному випадку, оператор A можна розглядати як аналог узагальненого оператора диференціювання Гельфонда-Леонт'єва. (див., наприклад, [47])

Для цього рівняння постає аналогічне питання щодо існування розв'язку, його єдиності та способу знаходження, яке в цій дисертаційній роботі розглядається для кільця цілих чисел. Для цього кільця вводиться α-адична метрика, побудову якої можна знайти в [48, Chapter 2, §10].

Нехай тепер $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ – послідовність натуральних чисел, що більші за одиницю. Для довільного цілого числа M можна послідовним діленням з остачею на α_n у наступний спосіб, отримати рівність

$$M = x_0 + \alpha_0(x_1 + \alpha_1(x_2 + \alpha_2(x_3 + \ldots)\ldots)) = \\ = x_0 + \alpha_0 x_1 + \alpha_0\alpha_1 x_2 + \alpha_0\alpha_1\alpha_2 x_3 + \ldots, \quad (1.11)$$

де $x_n \in \{0, 1, \ldots, a_n - 1\}$. Оскільки частка строго спадає, то процес буде скінченним, а, отже,

$$M = x_0 + \alpha_0 x_1 + \alpha_0\alpha_1 x_2 + \alpha_0\alpha_1\alpha_2 x_3 + \ldots + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} x_k,$$

Тобто за кожним цілим числом можна побудувати єдину скінченну послідовність $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$.

Розглянемо множину всіх послідовностей $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, для яких $x_n \in \{0, 1, \ldots, a_n - 1\}$. Нехай $x = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ і $y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$. Означимо суму послідовностей $x + y$ у такий спосіб:

Означення 1.11. ([48, Chapter 2, 10.2]) *Нехай m_0 – номер першого ненульового елемента послідовності x, а n_0 – номер першого ненульового елемента послідовності y, і $p_0 = \min\{m_0, n_0\}$. Означимо $z_n = 0$ для всіх $n \leq p_0$. Додамо $x_{p_0} + y_{p_0}$ і поділимо з остачею на α_{p_0}:*

$$x_{p_0} + y_{p_0} = t_{p_0}\alpha_{p_0} + z_{p_0}, \;\; z_{p_0} \in \{0, 1, \ldots, a_{p_0} - 1\}, \;\; t_{p_0} \in \mathbb{Z}$$

Продовжуючи, означаємо послідовно t_k *і* z_k*:*

$$t_k + x_{k+1} + y_{k+1} = t_{k+1}\alpha_{k+1} + z_{k+1}, \;\; z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - 1\}, \;\; t_{k+1} \in \mathbb{Z}$$

Таким чином отримуємо $z = \{z_n\}$*. Неважко перевірити, що для скінченних* x *і* y*, тобто таких, що відповідають цілим числам,* $z = x + y$*. Множина таких послідовностей з операцією додавання називається* α*-адичними цілими числами і позначається* Δ_α*.*

Означення 1.12. ([48, Chapter 2, 10.4]) *Для елементів* $x \neq y \in \Delta_\alpha$ *за означенням покладемо* $\sigma(x, y) = 2^{-n}$*, де* n *– найменше ціле число, для якого* $x_n \neq y_n$ *і* $\sigma(x, x) = 0$*.*

Твердження 1.1. ([48, Chapter 2, 10.5]) σ *є метрикою і породжує топологію на* Δ_α*, при чому* $\sigma(x + y, 0) \leq \max\{\sigma(x, 0), \sigma(y, 0)\}$*, тобто ця метрика є неархімедовою.*

Означення 1.13. ([48, Chapter 2, 10.7]) *Для елементів* $x \neq y \in \Delta_\alpha$*, візьмемо тільки скінченну частину* ${}^n x = \{x_0, x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}$ *і* ${}^n y = \{y_0, y_1, \dots, y_n, 0, 0, \dots\}$*. Елементи* ${}^n x$ *і* ${}^n y$ *відповідають цілим числам, тому означимо* ${}^n x {}^n y$ *як скінченну послідовність, що відповідає добутку цих чисел. Для нескінченних послідовностей означимо* $xy = \lim_{n\to\infty} {}^n x {}^n y$*. Ця границя існує і означає асоціативну, комутативну і дистрибутивну операцію, що є неперервною.*

1.4 Фундаментальний розв'язок

Однією з важливих ідей знаходження розв'язку неоднорідної лінійної початкової задачі є метод побудови функції Гріна, що був запропонований вперше в [49]. Більш сучасною побудовою є фундаментальний розв'язок диференціального оператора. Основною ідеєю цієї побудови є знаходження узагальненої функції, що залежить тільки від лівої частини рівняння і дає змогу знайти розв'язок неоднорідного диференціального рівняння за будь-якої неоднорідності.

Однією з цілей цієї дисертаційної роботи є побудова аналога такої конструкції, побудови аналога простору узагальнених функцій, поняття згортки і знаходження деякої узагальненої функції з описаного простору, яка залежить тільки від лівої частини диференціального рівняння, але дає змогу знаходити розв'язок неоднорідного рівняння як згортку цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю.

Наведемо стисле викладення класичного варіанту цієї теорії, повна побудова якої описана, наприклад, в [50, 1.3, 1.4] або в [51, 1, 2.2].

Нехай $f(x)$ є локально інтегрованою функцією в просторі $\mathbb{R}^n$ і $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\ dx = (f,\varphi)$ – дійсне число, що відповідає кожній фінітній тестовій функції $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тоді f буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Довільний неперервний лінійний функціонал у $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ будемо називати узагальненою функцією (розподілом). Позначимо лінійний простір узагальнених функцій за $\mathcal{D}'$. Означимо узагальнену функцію δ (дельта-функцію Дірака) як $(\delta,\varphi) = \varphi(0)$.

Означення 1.14. *Нехай f і g є локально інтегровними функціями в $\mathbb{R}^n$, то, якщо інтеграл $\int f(y)g(x-y)\ dy$ існує для майже всіх x і є локально інтегровною функцією, то згорткою f і g називається*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\ dy$$

Для деяких узагальнених функцій $f \in \mathcal{D}'$ і $g \in \mathcal{D}'$ можна означити згортку $f * g$, що буде також узагальненою функцією. Також можна означити згортку будь=-якої кількості узагальнених функцій.

Для будь-яких $f \in \mathcal{D}'$ і $g \in \mathcal{D}'$ згортка буде лінійною, а також виконуватимуться наступні властивості:

- якщо існує $f * g$, то існує і $g * f$, та $f * g = g * f$ (комутативність);
- якщо існують згортки $f * g$, $f * g * h$, то існує також згортка $(f * g) * h$, причому $f * (g * h) = f * g * h$ (асоциативність);
- якщо існує $f * g$, то існують також $f * D^k g$ і $D^k f * g$, і для них $D^k(f * g) = (D^k f * g) = (f * D^k g)$;

- одиничним елементом щодо згортки є дельта-функція Дірака, тобто $(f * \delta) = (\delta * f) = f$.

Будемо називати розв'язок $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{D}'$ рівняння

$$P(D)\mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

де $P(D) = a_0 + a_1 D + \ldots + a_m D^m$ диференціальний оператор m-того порядку зі сталими коефіцієнтами, фундаментальним розв'язком оператора $P(D)$. Мальгранжем (у 1953) та Еренпрайсом (у 1954) була доведена теорема проіснування фундаментальних розв'язків:

Теорема 1.3. *Будь-який диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами* $P(D) \neq 0$ *має фундаментальний розв'язок з* $\mathcal{D}'$.

Наступний важливий результат, що є широко вживаним в математичній фізиці, і є тим самим результатом, до якого ми поставили собі за ціль сформулювати аналог.

Теорема 1.4. *Нехай* $\mathcal{E}(x)$ *є фундаментальним розв'язком оператора* $P(D)$, $f \in \mathcal{D}'$. *Тоді можна побудувати розв'язок* $u \in \mathcal{D}'$ *рівняння*

$$P(D)u(x) = f,$$

у вигляді згортки

$$u = \mathcal{E} * f,$$

якщо ця згортка існує в в $\mathcal{D}'$.

Оскільки коло питань, що розглядаються в цій роботі, стосується не класичний узагальнених функцій, то вочевидь для побудови аналога описаної вище конструкції необхідно ввести простір формальних розподілів, для яких простором основних функцій були б не функції з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$, а поліноми. Подібні побудови *формальних* розподілів відомі. Наприклад, така конструкція описана у [52, Chapter 2, 2.1]. Там розглядалися ряди виду $\sum_{m,n,\ldots \in \mathbb{Z}} a_{m,n,\ldots} z^m w^n \ldots \in U[[z, \frac{1}{z}, w, \frac{1}{w}, \ldots]]$, які називалися формальними розподілами, де $a_n \in U$, а U є комплексним векторним простором. Добуток двох формальних розподілів взагалі кажучи не є коректно означеним, тобто його можна розглядати тільки за умови, що коефіцієнти при всіх степенях є скінченними або збіжними сумами.

Означення 1.15. *Лишком формального розподілу* $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ *будемо називати* $Res_z a(z) = a_{-1}$.

Означення 1.16. *Означимо відображення* $U[[z, \frac{1}{z}]] \times \mathbb{C}[z, \frac{1}{z}] \to U$ *як*

$$(f, \varphi) = Res_z f(z)\varphi(z).$$

Тобто поліноми Лорана можна розглядати як тестові функції для формальний розподілів.

Твердження 1.2. *Формальні розподіли* $a(z)$ *і* $b(z)$ *дорівнюють один одному тоді і тільки тоді, коли* $(a, \varphi) = (b, \varphi)$ *для всіх* $\varphi \in \mathbb{C}[z, \frac{1}{z}]$.

Також означений аналог дельта-функції.

Означення 1.17. *Формальним дельта-розподілом будемо називати формальний розподіл*

$$\delta(z - w) = \frac{1}{z} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{w}{z}\right)^n \in \mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}, w, \frac{1}{w}]].$$

Твердження 1.3. *Для будь-якої функції* $f(z) \in U[[z, \frac{1}{z}]]$ *виконується рівність* $Res_z f(z)\delta(z - w) = f(w)$.

Описана структура є деяким аналогом звичайного простору узагальнених функцій, де простором основних функцій є не простір нескінченно диференційованих функцій зі скінченним носієм, як зазвичай, а простір поліномів Лорана $\mathbb{C}[z, \frac{1}{z}]$. Лишок можна розглядати як аналог інтегрування. Згортка як така введена не була, але ліва частина рівності з останнього твердження показує, що лишок добутку формального ряду Лорана з $U[[z, \frac{1}{z}]]$ і формального розподілу з $\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}, w, \frac{1}{w}]]$ є формальним рядом

Лорана, тобто цей лишок міг би бути означенням деякої згортки. Більше того, остання теорема в такому випадку означала б, що узагальнена дельта-функція є одиничним елементом щодо згортки.

В цій дисертації описані подібні конструкції, але вони мають певні розбіжності. Зокрема, простір основних функцій у вказаному вище прикладі – поліноми Лорана $\mathbb{C}[z, \frac{1}{z}]$, а нас цікавлять формальні степеневі ряди, коефіцієнтами яких є елементи деякого кільця K з неархімедовим нормуванням. В нашому випадку згортка є відображенням $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]] \times K[[z]] \to K[[z]]$, де $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ є простором рядів Лорана з від'ємними степенями – деяким аналогом простором формальних розподілів. Також це означає, що є потреба розглядати рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = g(x), \quad (1.12)$$

де $g(x)$ належить $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ і розв'язок шукається також в $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$.

Виявляється, можна у такий самий спосіб означити згортку двох рядів Лорана з від'ємними степенями, що є відображенням $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]] \times \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]] \to \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$. Отримана згортка буде збігатися з відомим відображенням, що називається добуток Гурвиця.

Означення 1.18. [53, §1, 1.5] *Нехай*

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+1}}.$$

Тоді добутком Гурвиця називається ряд

$$\mathfrak{H}(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \quad c_n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

1.5 Метод Крамера

Всі розглянуті різницеві рівняння насправді можна записати як нескінченні лінійні системи рівнянь, і у матричному вигляді така система матиме вигляд $Aw = f$, де A – нескінченна матриця, що залежить від коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_m$, а $w = (w_0, w_1, \ldots)^\top$ і $f = (f_0, f_1, \ldots)^\top$ є нескінченними векторами.

Таким чином, можна розв'язувати таку систему методами лінійної алгебри. Наприклад, загальновідомим методом Крамера, який для скінченної системи над полем нульової характеристики формулюється наступним чином.

Теорема 1.5. *Якщо визначник* $\det A \neq 0$, *то розв'язок рівняння* $Aw = f$ *знаходиться за формулою* $w_n = \dfrac{\det A_n}{\det A}$, *де* A_n *– матриця, що отримується з матриці* A *заміною* n*-того стовпця на вектор* f.

Наостанок скажімо, що рівняння та системи, що вивчаються у дисертаційній роботі є добре вивченими над полями дійсних та комплексних чисел. Наприклад, розв'язки, що є формальними степеневими рядами, лінійних диференціальних рівнянь з раціональними та мероморфними коефіцієнтами вивчались у [54]–[56]. Диференціальні рівняння у просторах збіжних p-адичних степеневих рядів та диференціальних рівнянь над полями додатної характеристики вивчались у [57]–[62]. Також нескінченні лінійні системи розглянуті, наприклад, в [63]–[65]). Формальні степеневі ряди над кільцями вивчались в [66] у зв'язку з теорією автоматів.

Тим не менш, питання щодо диференціальних і різницевих рівнянь над кільцями досі вивчалися мало, теорія лінійних диференціальних рівнянь над кільцями почала розвиватися приблизно десять років тому.

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ m-ТОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В КІЛЬЦІ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Нехай K – довільна область цілісності з одиницею. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння m-того порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x),\ a_m \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ і $f(x) \in K[[x]]$. Шукатимемо формальний степеневий ряд $w(x)$, що задовольняє це рівняння.

2.1 Поліноміальна неоднорідність

В цьому розділі сформульовано і доведено декілька простих результатів, що виникають, якщо розглядати рівняння (2.1) з поліноміальною неоднорідністю.

Теорема 2.1. *Нехай $a_0, a_1, \ldots a_m \in K$. Рівняння (2.1) має поліноміальний розв'язок для будь-якого $f(x) \in K[x]$ тоді і тільки тоді, коли елемент a_0 є оборотним. При цьому, поліноміальний розв'язок є єдиним і має вигляд (2.3). Відмітимо, що він має степінь, не більший за степінь $f(x)$.*

Доведення. Позначимо $D = \frac{d}{dx}$ і $P(t) = a_m t^m + \ldots + a_1 t + a_0$. Якщо a_0 є оборотним, поліном $P(t)$ є оборотним в кільці формальних степеневих рядів $K[[t]]$. Тоді можемо переписати рівняння (2.1) як $P(D)w = f$, і це рівняння матиме єдиний розв'язок $w = P^{-1}(D)f$. Формальний степеневий ряд $(P(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ є оборотним до $P(t)$, і його коефіцієнти c_k однозначно визначені рівністю

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots. \tag{2.2}$$

Отримуємо, що розв'язок $w = P^{-1}(D)f$ рівняння (2.1) знаходиться за формулою

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x). \tag{2.3}$$

З іншого боку, нехай рівняння має поліноміальний розв'язок для будь-якого поліному $f(x)$, зокрема для $f(x) = 1$. Степені похідних $w'(x), \ldots, w^{(m)}(x)$ менші за степінь $w(x)$. Тоді максимальний степінь $w(x)$ має дорівнювати 0, тобто розв'язок рівняння (2.1) має вигляд $w(x) = C$. Тому $a_0 C = 1$, тобто елемент a_0 є оборотним. ■

Для рівнянь першого та другого порядку, коефіцієнти c_j, а, отже, і розв'язок у вигляді (2.3), можуть бути знайдені явно, як показано в наступному зауваженні.

Зауваження 2.1. *Нехай $a_0, a_1, a_2 \in K$, $f \in K[x]$ і a_0 – оборотний елемент.*

Якщо $m = 1$, маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j t^j.$$

Отже, $c_j = (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j$. Рівняння $a_1 w' + a_0 w = f(x)$ має єдиний в $K[x]$ розв'язок

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_0^{-k-1} a_1^k f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} a_1^n \frac{(n+k)!}{k!} f_{k+n} \right) x^k.$$

Якщо $m = 2$, маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}(n+k)!}{a_0^{n+k+1} k! n!} a_1^n a_2^k t^{n+2k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \frac{(-1)^{j-k}(j-k)!}{a_0^{j-k+1} k! (j-2k)!} a_1^{j-2k} a_2^k = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Отже,

$$c_j = \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Рівняння $a_2 w'' + a_1 w' + a_0 w = f(x)$ *має єдиний в* $K[x]$ *розв'язок*

$$w(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f^{(j)}(x) \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-k} \binom{j-k}{k} \frac{a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{k!} f_{k+j} \sum_{n=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-n} \binom{j-n}{n} \frac{a_1^{j-2n} a_2^n}{a_0^{j-n+1}} \right) x^k.$$

Зауваження 2.2. *Позначимо за* F *поле часток кільця* K. *Якщо* $a_0 \neq 0$ *не є оборотним у* K, *тоді застосовуючи теорему 2.1 для* F, *отримуємо єдиний в* $F[x]$ *розв'язок рівняння* (2.1). *Тоді або цей розв'язок належить* $K[x]$, *або рівняння* (2.1) *не має розв'язку з* $K[x]$. *Якщо ж* $a_0 = 0$ *і* K *нескінченне, тоді рівняння* (2.1) *або має нескінченно багато розв'язків в* $K[x]$, *або жодного. Дійсно, розв'язуватимемо* (2.1) *відносно* $v(x) = w^{(l)}(x)$, *де* l *– мінімальний номер, для якого* $a_l \neq 0$. *Це рівняння має єдиний розв'язок з* $F[x]$. *Отримуємо рівняння* $w^{(l)}(x) = v(x)$, *яке має або нескінченно багато, або жодного розв'язку з* $K[x]$.

Приклад 2.1. *Розглянемо рівняння* $3w' + 2w = 2x + 5$ *над* $\mathbb{Z}$ *і* $\mathbb{Q}$. *В цьому випадку* $a_0 = 2 \neq 0$, $a_1 = 3$. *Тому* $c_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2}$ *і* $c_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} = -\frac{3}{4}$. *За теоремою 2.1, єдиний розв'язок з* $\mathbb{Q}[x]$ *має вигляд*

$$w(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) = \frac{1}{2}(2x+5) - 2 \cdot \frac{3}{4} = x + 1 \text{ і } w \in \mathbb{Z}[x].$$

Приклад 2.2. *Рівняння* $3w' + 2w = x + 5$ *має таку саму ліву частину, як і рівняння з попереднього прикладу, тому* $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = -\frac{3}{4}$. *За теоремою 2.1 єдиний в* $\mathbb{Q}[x]$ *розв'язок має вигляд*

$$w(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) = \frac{1}{2}(x+5) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Він не належить $\mathbb{Z}[x]$, *і тому рівняння не має розв'язків в* $\mathbb{Z}[x]$.

Приклад 2.3. *Рівняння $w'(x) = x$ не має розв'язків $\mathbb{Z}[x]$, але має нескінченно багато розв'язків в кільці 3-цілих чисел*

$$\mathbb{Z}_{(3)} = \left\{ \frac{n}{m} : \ (n,m) = 1 \text{ і } m \text{ не ділиться на } 3 \right\}.$$

Дійсно, поліноми $w(x) = \frac{x^2}{2} + C$, де $C \in \mathbb{Q}$ і тільки вони є розв'язками цього рівняння в $\mathbb{Q}[x]$, всі вони належать $\mathbb{Z}_{(3)}[x]$ і жоден з них не належить $\mathbb{Z}[x]$.

2.2 Неоднорідність з кільця K[[x]]

Спочатку зазначимо, що у рівняння виду (2.1) з неоднорідністю, що належить $K[[x]] \setminus K[x]$, не може бути розв'язку з $K[x]$. Дійсно, якщо поліном $w(x)$ є розв'язком (2.1), тоді неоднорідність рівняння (2.1) дорівнює $a_m w^{(m)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w$, тобто також є поліномом. Але таке рівняння може мати розв'язок з $K[[x]]$. Як видно з доведення теореми 2.1, для поліноміальної неоднорідності природно шукати розв'язок (2.1) у вигляді (2.3). Якщо неоднорідність належить $K[[x]]$, то, взагалі кажучи, сума формальних степеневих рядів (2.3) не є коректно визначеною. Тим не менш, її можна розглядати як "формальний" розв'язок і використовувати для знаходження розв'язку рівняння (2.1).

2.2.1 Формальний розв'язок диференціального рівняння

В цьому розділі буде строго означено, в якому сенсі суму формальних степеневих рядів (2.3) можна вважати формальним розв'язком рівняння (2.1). Для цього буде встановлена відповідність між цим рівнянням і деяким рівнянням в кільці $K[[x]][[y]]$.

Нагадаємо, що K – довільна область цілісності з одиницею. Розглянемо кільце $K[[x]][[y]]$ формальних степеневих рядів, що мають вигляд

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) y^k,$$

де $w_k \in K[[x]]$. Нехай $\tilde{D} : K[[x]][[y]] \to K[[x]][[y]]$ є K-лінійним оператором, який кожному ряду $w(x,y)$ ставить у відповідність ряд $\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) \cdot y$. Для будь-якого $f(x) \in K[[x]]$ за означенням покладемо $\tilde{f}(x,y) = f(x)$. Розглянемо наступне рівняння в кільці $K[[x]][[y]]$:

$$a_m \tilde{D}^m w + a_{m-1} \tilde{D}^{m-1} w + \ldots + a_1 \tilde{D} w + a_0 w = \tilde{f}, \tag{2.4}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$.

Теорема 2.2. *Нехай a_0 є оборотним елементом в кільці K. Тоді рівняння (2.4) в кільці $K[[x]][[y]]$ має єдиний розв'язок*

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x) y^k, \tag{2.5}$$

де коефіцієнти c_k знаходяться з рівності (2.2).

Доведення. Як було відмічено в доведенні теореми 2.1, поліном $P(t) = a_m t^m + \ldots + a_1 t + a_0$ оборотний в $K[[t]]$. Рівняння (2.4) можна записати у вигляді $P(\tilde{D})w = \tilde{f}$. Воно має єдиний розв'язок $(P(\tilde{D}))^{-1}\tilde{f}$, де $(P(t))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Так як $(\tilde{D}^k \tilde{f})(x,y) = f^{(k)}(x) y^k$, ми отримуємо розв'язок (2.5). ■ Якщо $f(x) \in K[x]$ і елемент a_0 є оборотним, ряд (2.3) є розв'язком рівняння (2.1). Якщо $f(x) \in K[[x]] \setminus K[x]$, ми можемо говорити, що (2.3) є *формальним* розв'язком (2.1).

Означення 2.1. *Нехай $w_k \in K[[x]]$. Ряд $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ є формальним розв'язком рівняння (2.1), якщо $w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) y^k$ задовольняє рівняння (2.4).*

Розглянемо тепер диференціальне рівняння (2.1) над K з неоднорідністю $f(x) \in K[[x]]$ і наведемо зв'язок між ним і рівнянням (2.4).

Теорема 2.3. *Припустимо, що коефіцієнт a_0 рівняння (2.1) оборотний в кільці K.*

- *Якщо послідовність $\{c_k\}$ задовольняє рівність (2.2), то ряд (2.3) є формальним розв'язком рівняння (2.1).*

- *Нехай K – область цілісності і $\mathbb{Z}$-модуль без кручень, тобто для $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ і $a \in R$, з рівності $na = 0$ випливає, що $a = 0$ і нехай $f \in K[[x]] \setminus K[x]$. Якщо $\sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(x)$ є формальним розв'язком рівняння (2.1), тоді $\{c_k\}$ є послідовністю, що задовольняє рівність (2.2).*

Доведення. Перше твердження випливає з теореми 2.2.

Нехай тепер $b_k \in K$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k f^{(k)}(x)$ задовольняє (2.1). Якщо c_k – послідовність, що задовольняє (2.2), тоді ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - c_k) f^{(k)}(x) y^k$ є розв'язком однорідного рівняння

$$a_m \tilde{D}^m w + a_{m-1} \tilde{D}^{m-1} w + \ldots + a_1 \tilde{D} w + a_0 w = 0. \tag{2.6}$$

З теореми 2.2 випливає, що $(b_k - c_k) f^{(k)}(x) = 0$ для будь-якого k.

Тепер припустимо від супротивного, що існує j, для якого $b_j \neq c_j$. Так як K – область цілісності, то $\frac{(j+i)!}{j!} f_{j+i} = 0$ для будь-якого i. Оскільки K – $\mathbb{Z}$-модуль без кручень, маємо $f_j = f_{j+1} = \ldots = 0$, тобто $f \in K[x]$, що суперечить умові теореми. ■

Наступна лема, за деяких умов, розв'язку рівняння (2.4) ставить у відповідність розв'язок рівняння (2.1).

Лема 2.1. *Нехай деякий K-лінійний оператор $T: K[[x]][[y]] \to K[[x]]$ з областю визначення $\mathfrak{D}(T)$ задовольняє такі умови:*

- $\tilde{D}(\mathfrak{D}(T)) \subset \mathfrak{D}(T)$;
- $T(\tilde{D} w) = (Tw)'(x)$ *для кожного* $w \in \mathfrak{D}$;
- *для будь-якого* $f \in K[[x]]$, *якщо* $\tilde{f}(x, y) = f(x)$, *то* $T\tilde{f} = f$.

Якщо $w \in \mathfrak{D}(T)$ є розв'язком (2.4), то Tw є розв'язком (2.1).

Доведення. Так як w належить $\mathfrak{D}(T)$, то $\tilde{D} w, \tilde{D}^2 w, \ldots, \tilde{D}^m w$ належить $\mathfrak{D}(T)$.

Ряд $w(x,y) \in \mathfrak{D}(T)$ є розв'язком (2.4), тому

$$T(a_m\tilde{D}^m w + a_{m-1}\tilde{D}^{m-1}w + \ldots + a_1\tilde{D}w + a_0 w) = T\tilde{f}.$$

Для будь-якого j маємо $T(\tilde{D}^j w(x,y)) = (Tw)^{(j)}$ і $T\tilde{f} = f$, тому

$$a_m(Tw)^{(m)} + a_{m-1}(Tw)^{(m-1)} + \ldots + a_1(Tw)' + a_0 Tw = f.$$

■

2.2.2 Збіжність формального розв'язку в $\mathcal{I}$-адичній топології

В кільці $R = K[[x]]$ розглядатимемо ідеал $\mathcal{I} = xK[[x]]$. Як було сказано в розділі 1.2, він породжує в цьому кільці $\mathcal{I}$-адичну топологію. Нагадаємо, що збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$, $w_k(x) \in K[[x]]$ в цій топології означає, що коефіцієнт при кожному степені x^n є сумою скінченної кількості елементів з K.

Наслідок 2.1. *Нехай ряд $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$, що збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології в кільці $K[[x]]$, є формальним розв'язком рівняння (2.1). Тоді цей ряд є розв'язком (2.1) і дорівнює ряду (2.3). Також його можна записати у вигляді*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(n+k)!}{k!} f_{k+n}\right) x^k, \tag{2.7}$$

де коефіцієнт при кожному степені x^k насправді є скінченною сумою елементів K.

Доведення. Нехай відображення $T : K[[x]][[y]] \to K[[x]]$ з областю визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \{v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) y^k \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) \text{ збігається в } \mathcal{I}\text{-адичній топології}\}$$

задається рівністю

$$T(v(x,y)) = v(x,1). \tag{2.8}$$

Оператор T задовольняє всі умови леми 2.1. Дійсно, оскільки $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x)$ збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології, то $\sum_{k=0}^{\infty} v_k'(x)$ також збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології, тому $v_x'(x,y)y \in \mathfrak{D}(T)$. Також $T\tilde{f}(x,y) = f(x)$ для $f \in K[[x]]$ і $T(\tilde{D}w) = T(w_x'(x,y)y) = (w_x'(x,y)y)\Big|_{y=1} = w_x'(x,1) = (Tw)'$.

Нехай $w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)y^k$. Тоді з леми 2.1 маємо, що $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$ є розв'язком (2.1). За теоремою 2.2 можна записати $w(x)$ як (2.3). Неважко перевірити, що коефіцієнт при степені x^k дорівнює $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(n+k)!}{k!} f_{k+n}$. ■

Нехай тепер характеристика поля часток $F = Frac(K)$ кільця K дорівнює 0. Розглянемо рівняння (2.1) з неоднорідністю із $F[[x]]$. За теоремою 2.3, ряд (2.3) є формальним розв'язком (2.1). В теоремі 2.4 буде показано, що ряд (2.3) збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є поліномом.

Оскільки ряд (4.6) збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(k+j)! f_{k+j}$ має скінченну кількість доданків для кожного k, маємо наступну умову збіжності.

Лема 2.2. *Нехай $c_j, f_j \in F$, $j = 0, 1, 2, \dots$ – довільні елементи F. Тоді ряд (4.6) збігається в $\mathcal{I}$-адичній топології в $F[[x]]$ тоді і тільки тоді, коли для кожного k існує i таке, що $c_j f_{j+k} = 0$ для будь-якого $j > i$.*

Наступний приклад демонструє, що теорема 2.4 не випливає очевидним чином з цієї леми, тому що умова леми може виконуватись навіть якщо ні $\{c_j\}$, ні $\{f_j\}$ не є фінітними послідовностями.

Приклад 2.4. Нехай $F = \mathbb{Q}$. Розглянемо послідовність $\{c_i\}$, для якої $c_j = 1$ якщо існує r таке, що $j = 2^r$, інакше $c_i = 0$. Також розглянемо $\{f_i\}$, таку що $f_i = 1$, якщо $i = 2^r + r$ і $f_i = 0$ в іншому разі.

Для будь-якого k позначимо $i = 2^{k+1}$. Оскільки для будь-якого $j > i$, для якого $c_j \neq 0$, існує r, такий що $j = 2^r$, маємо $j = 2^r > i = 2^{k+1}$, отже $k \leq r - 1$. Тоді $f_{k+j} = f_{2^r+k} = 0$, так як $2^{r-1} + r - 1 < 2^r < 2^r + k < 2^r + r$. Отримуємо, що якщо $c_j \neq 0$, то $f_{k+j} = 0$. Тому $c_j f_{j+k} = 0$.

Незважаючи на це, якщо $\{c_j\}$ є не довільною послідовністю, а такою, що задовольняє (2.2), виконується наступна теорема.

Теорема 2.4. *Нехай $f(x) \in F[[x]]$, $a_j \in F$, $a_0 \neq 0$ і c_j задовольняє (2.2). Тоді ряд (2.3) збігається в $F[[x]]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) \in F[x]$.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки $\{c_j\}$ задовольняє (2.2), ця послідовність не є фінітною і є розв'язком системи

$$\begin{cases} a_0c_0 &= 1, \\ \sum_{i=0}^{j} a_i c_{j-i} &= 0, \ \ j = 1, 2, 3, \dots, m \\ \sum_{i=0}^{m} a_i c_{j-i} &= 0, \ \ j = m+1, m+2, \dots \end{cases}$$

Спочатку відмітимо, що для будь-якого j існує $1 \leq i \leq m$ таке, що $c_{j+i} \neq 0$. Дійсно, якщо існує j таке, що $c_{j+1} = c_{j+2} = \ldots = c_{j+m} = 0$, то з системи маємо $c_i = 0$ для всіх $i \geq j+1$. Це суперечить тому, що $\{c_j\}$ не є фінітною.

Доведемо, що коли $f(x)$ не є поліномом, то для деякого k послідовність $\{c_j(k+j)! f_{k+j}\}$ не є фінітною. Припустимо протилежне, що для кожного k існує i_k таке що $c_j f_{k+j} = 0$ для будь-якого $j > i_k$. Розглянемо $j > \max\limits_{k=0,1,\dots,m} i_k$, такий що $c_j \neq 0$. Тоді $f_j = f_{j+1} = \ldots = f_{j+m} = 0$. Як показано раніше, існує таке $1 \leq i \leq m$, що $c_{j+i} \neq 0$, отже $f_{j+i} = f_{j+i+1} = \ldots = f_{j+i+m} = 0$. Таким чином, оскільки $j+i+m > j+m$, для кожного $k > j$ маємо $f_k = 0$, що суперечить припущенню. ∎

2.3 Кільце неархімедового нормування

Нехай $(F, |\cdot|)$ – поле характеристики нуль з неархімедовим нормуванням і $K = \{s \in F : |s| \leq 1\}$ – це кільце нормування цього поля (означення 1.5).

В цьому розділі на кільці $K[[x]]$ ми будемо розглядати топологію покоефіцієнтної збіжності (див. [67, Chapter 1, Section 3]).

Теорема 2.5. *Нехай в рівнянні (2.1) коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_m$ належать K, $|a_0| = 1$ і $|a_i| < 1$ для будь-якого $1 \leq i \leq m$. Тоді це рівняння має не більше одного розв'язку з $K[[x]]$.*

Доведення. Розглянемо однорідне рівняння

$$a_m y^{(m)}(x) + a_{m-1} y^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \qquad (2.9)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді $y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \ldots$. Тоді для будь-якого k виконується рівність

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(k+i)!}{k!} a_i y_{k+i} = 0.$$

Тому

$$y_k = -a_0^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(k+i+1)!}{k!} a_{i+1} y_{k+i+1}. \qquad (2.10)$$

Для набору індексів $i_1, \ldots, i_k$ позначимо $s_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$ та $p_k = \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1}$. Отримуємо

$$y_0 = -a_0^{-1} \sum_{i_1=0}^{m-1} (s_1+1)! p_1 y_{s_1+1} = a_0^{-2} \sum_{i_1=0}^{m-1} p_1 \sum_{i_2=0}^{m-1} (s_2+2)! a_{i_2+1} y_{s_2+2} =$$
$$= a_0^{-2} \sum_{i_1,i_2=0}^{m-1} (s_2+2)! p_2 y_{s_2+2} = -a_0^{-3} \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{m-1} (s_3+3)! p_3 y_{s_3+3} = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{m-1} (s_k+k)! p_k y_{s_k+k}.$$

Позначивши $b = \max_{i=1}^{m} |a_i| < 1$, маємо $|p_k| \le b^k \to 0$ при $k \to \infty$. Оскільки нормування $|\cdot|$ неархімедове, то $|y_0| \le b^k$, тому $y_0 = 0$. Так само, з рівності (2.10) отримуємо, що $y_k = 0$ для всіх k. ■

Тепер сформулюємо умови існування розв'язку. Для цього розглянемо перетворення T, що задається рівністю (2.8) і має область визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \{\sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) y^k : \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x) \text{ збігається в топології}$$
$$\text{покоефіцієнтної збіжності в } K[[x]]\}.$$

Теорема 2.6. *Нехай F повне відносно $|\cdot|$, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \le i \le m$. Тоді ряд (2.3) збігається в кільці $K[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності і його сума є єдиним в $K[[x]]$ розв'язком рівняння (2.1).*

Доведення. Відображення T задовольняє умови леми 2.1. Дійсно, так само як в наслідку 2.1, можна довести, що $T(\tilde{D}v) = (Tv)'(x)$ і $T\tilde{f}(x,y) = f(x)$ для $f \in K[[x]]$. Якщо $v \in \mathfrak{D}(T)$, то для будь-якого j ряд $\sum_{i=0}^{\infty} v_{ij}$ збігається в K відносно нормування $|\cdot|$. Тоді для будь-якого j ряд $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)v_{i(j+1)}$ також збігається в K відносно $|\cdot|$. Таким чином, $v'_x(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)v_{i(j+1)}x^j\right)y^i \in \mathfrak{D}(T)$.

Нехай ряд $w(x,y)$ є розв'язком (2.5) рівняння (2.4). Перевіримо, що (2.5) належить $\mathfrak{D}(T)$. Для цього оцінимо коефіцієнти c_j ряду $w(x,y)$, що знаходяться з рівності (2.2). Маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m} = \frac{a_0^{-1}}{1 - a_0^{-1}(-a_1 - a_2 t - \ldots - a_m t^{m-1})t} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_0^{-n-1}(a_1 + a_2 t + \ldots + a_m t^{m-1})^n t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n}(-1)^n\frac{n!}{i_1!i_2!\cdot\ldots\cdot i_m!}\cdot\frac{a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{i_m}}{a_0^{n+1}}t^{n+i_2+2i_3+\ldots+(m-1)i_m}.$$

Розглянемо степінь t^j. Оскільки $j = n + i_2 + 2i_3 + \ldots + (m-1)i_m \le mn$, то ми отримуємо нерівність $n \ge [\frac{j}{m}]$.

Так як $|\cdot|$ неархімедове, то $|c_j|$ не більше за максимум серед усіх чисел

$$|(-1)^n\frac{n!}{i_1!i_2!\cdot\ldots\cdot i_m!}\cdot\frac{a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{i_m}}{a_0^{n+1}}|, \text{ таких що } n+i_2+2i_3+\ldots+(m-1)i_m = j.$$

Позначивши $b = \max_{i=1}^{m}|a_i| < 1$, отримуємо

$$|(-1)^n a_0^{-n-1}\frac{n!}{i_1!i_2!\cdot\ldots\cdot i_m!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_m^{i_m}| < b^n \le b^{[\frac{j}{m}]} \tag{2.11}$$

Оскільки $b < 1$, то

$$|c_j| \le b^{[\frac{j}{m}]} \to 0 \text{ при } j \to \infty. \tag{2.12}$$

Позаяк $|\frac{(j+k)!}{k!}f_{k+j}| \le 1$ для будь-якого k, то ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\frac{(j+k)!}{k!}f_{k+j}$ з рівності (4.6) збігається в K. Тут ми скористалися тим фактом, що в повному неархімедовому полі ряд $\sum a_k$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\{a_k\}$ прямує до 0. Таким чином $w \in \mathfrak{D}(T)$. Тепер з леми 2.1 випливає, що Tw є розв'язком рівняння (2.1). ■

За w_k позначимо коефіцієнт при x^k розв'язку $w(x)$ рівняння (2.1). В наступному зауваженні знайдено загальний вигляд коефіцієнтів $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$.

Зауваження 2.3. *Нехай ряд (2.3) є збіжним за топологією покоефіцієнтної збіжності. Нехай* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. *Тоді* $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} f_{k+n} x^n$, *тому отримуємо, що*

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(n+k)!}{n!} f_{k+n}, \tag{2.13}$$

де ряди в правих частинах рівнянь збігаються за $|\cdot|$.

2.3.1 Диференціальне рівняння над кільцем цілих чисел

В частковому випадку, коли $(F, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ – поле p-адичних чисел, кільце нормування $\mathbb{Q}_p$ є кільцем цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$.

Наступний результат є уточненням теореми 2.6 у випадку, коли коефіцієнти рівняння (2.1) є цілими числами.

Теорема 2.7. *Нехай* $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ *цілі. Тоді рівняння (2.1) має єдиний розв'язок з* $\mathbb{Z}_p[[x]]$ *для будь-якого простого* p, *що не є дільником* a_0.

Доведення. Якщо p не є дільником a_0, то $|a_0|_p = 1$. Ряди $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{n+k}{n} n! f_{k+n}$ збігаються в $\mathbb{Z}_p$, оскільки $|c_n \binom{n+k}{n} f_{k+n}|_p \leq 1$ і $|n!|_p$ прямує до 0. Тому, скористувавшись таким саме відображенням T, що і в попередній теоремі, робимо висновок, що існує розв'язок рівняння (2.1) з $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

Тепер доведемо єдиність. Для набору індексів $i_1, \ldots, i_k$ позначимо $s_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$. Коефіцієнти розв'язку $y(x)$ однорідного рівняння задовольняють рівність

$$y_0 = k! \cdot (-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_k=0, k\in\mathbb{N}}^{m-1} \frac{(s_k + k)!}{k!} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1} y_{s_k+k}$$

для будь-якого k. Оскільки $|(-1)^k a_0^{-k} \sum_{i_k=0,k\in\mathbb{N}}^{m-1} \frac{(s_k+k)!}{k!} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j+1} y_{s_k+k}|_p \leq 1$ і $|k!|_p \to 0$ при $k \to \infty$, то $y_0 = 0$. Так само отримуємо і рівності $y_k = 0$ для всіх $k \geq 1$. ■

Зауваження 2.4. *Розв'язок з кільця $\mathbb{Z}_p[[x]]$ не обов'язково належить $\mathbb{Z}[[x]]$. Наприклад, рівняння $y' + y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, за попередньою теоремою, має єдиний розв'язок в $\mathbb{Z}_p[[x]]$ але, як було сказано у вступі, не має розв'язку в $\mathbb{Z}[[x]]$.*

Випадок, коли рівняння (2.1) має перший порядок розібрано окремо в Розділі 4.3.

2.4 Аналог фундаментального розв'язку

В цьому розділі нашою метою буде побудувати конструкцію, що є аналогом фундаментального розв'язку оператора з теорії лінійних диференціальних рівнянь для оператора $P(D)$, і представити розв'язок 2.3 рівняння (2.1) у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю f. Стислий опис такої конструкції, що є одною з центральний побудов математичної фізики, дано в розділі 1.

Далі буде показано, що природно в якості аналога узагальнених функцій брати формальні ряди Лорана по від'ємних степенях $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, тобто ряди вигляду $\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \frac{q_3}{x^3} \ldots$. В якості аналога інтегрування рядів Лорана будемо розглядати формальний лишок Res_x, тобто коефіцієнт при $\frac{1}{x}$ ряду Лорана (див. [52], Розділ 2.1)

$$Res_x(\ldots + \frac{c_{-2}}{x^2} + \frac{c_{-1}}{x} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) = c_{-1}.$$

Оскільки нам треба буде знаходити розв'язок, що є формальним рядом Лорана з від'ємними степенями, рівняння з неоднорідністю, що також є формальним рядом Лорана з від'ємними степенями, розглянемо спочатку такі рівняння.

Нехай K – довільне комутативне кільце з одиницею, а $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ – кільце формальних рядів Лорана, що мають вигляд $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{x^j}$. Спочатку розглянемо рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1}w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = g(x), \tag{2.14}$$

де $a_0, \ldots, a_m \in K$ і $g(x) \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$.

Теорема 2.8. *Нехай елемент a_0 оборотний, $g(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{g_j}{x^j}$, а послідовність $\{c_k\}$ єдиним чином визначено з рівності (2.2). Тоді ряд*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g^{(k)}(x) \tag{2.15}$$

є коректно визначеним рядом Лорана і єдиним в кільці $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ розв'язком рівняння (2.14). Цей ряд також можна представити у вигляді

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i c_i g_{k-i}\frac{(k-1)!}{(k-i-1)!}\right)x^{-k}. \tag{2.16}$$

Доведення. Спочатку доведемо єдиність. Нехай $w \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ – розв'язок однорідного рівняння

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1}w^{(m-1)}(x) + \ldots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = 0.$$

За $-k$ позначимо максимальний степінь x у нетривіальному розв'язку $w(x)$, що має ненульовий коефіцієнт. Тоді максимальний степінь доданків $a_m w^{(m)}(x), a_{m-1}w^{(m-1)}(x), \ldots, a_1 w'(x)$ не перевищує $-k-1$. Таким чином коефіцієнт при x^{-k} в $w(x)$ дорівнює нулю. З суперечності випливає, що однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок.

Тепер доведемо, що ряд (2.15) коректно визначений. Дійсно, максимальний степінь $\{g^{(k)}\}$ зменшується. З цього маємо, що в сумі (2.15) коефіцієнт при кожному степені x складається зі скінченної кількості доданків з K.

Так само як і в теоремі 2.1, можна перевірити, що ряд (2.15) є розв'язком рівняння (2.14). ■

Наслідок 2.2. *Нехай a_0 є оборотним. Тоді рівняння (2.14) з неоднорідністю $g(x) = \frac{1}{x}$ має єдиний в кільці $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ розв'язок*

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}. \tag{2.17}$$

Приклад 2.5. *У випадку $m = 2$ послідовність $\{c_k\}$ знайдена в зауваженні 2.1. В цьому випадку рівняння*

$$a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = \frac{1}{x}$$

має єдиний розв'язок з $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$:

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} (-1)^j C_j^{k-j} a_0^{-k+j-1} a_1^{k-2j} a_2^j \frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Тепер треба визначити поняття згортки. Оскільки нашою метою є аналог теореми 1.4, то нам знадобиться згортка ряду Лорана з від'ємними степенями з формальним степеневим рядом. Спочатку розглянемо згортку формального ряду Лорана з від'ємними степенями та полінома.

Означення 2.2. *Нехай $Q(x) = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \frac{q_3}{x^3} + \ldots \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ і $f(x) \in K[x]$. За означенням, покладемо*

$$(Q * f)(x) = \mathrm{Res}_y(Q(y) f(x-y)). \tag{2.18}$$

Тут ми розглядаємо $f(x-y)$ як елемент $K[x][y]$, тобто як поліном від y, коефіцієнтами якого є поліноми від x:

$$f(x-y) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!} y + \frac{f''(x)}{2!} y^2 - \frac{f'''(x)}{3!} y^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!} y^4 - \ldots.$$

Неважко перевірити, що це коректно визначено: всі коефіцієнти $f^{(k)}(x)$ діляться на $k!$.

Добуток $Q(y)f(x-y)$ таким чином є елементом з кільця $K[x][[y, \frac{1}{y}]]$, тобто двостороннім рядом Лорана від y, коефіцієнтами якого є поліноми з кільця $K[x]$.

З означення отримуємо наступну формулу для згортки:

$$(Q * f)(x) = q_1 f(x) - \frac{q_2}{1!} f'(x) + \frac{q_3}{2!} f''(x) - \frac{q_4}{3!} f'''(x) + \frac{q_5}{4!} f^{(4)}(x) - \ldots. \quad (2.19)$$

Якщо ми означимо згортку ряду Лорана з від'ємними степенями з формальним степеневим рядом у такий самий спосіб, використовуючи формулу (2.18), ми отримаємо нескінченні суми елементів з K в якості "коефіцієнтів". Дійсно, в цьому випадку $Q(y)f(x-y)$ належатиме $K[[x]][[y, \frac{1}{y}]]$, тоді у формулі для згортки (2.19) кожен степінь x зустрічатиметься нескінченно багато разів.

Нехай тепер $(K, |\cdot|)$ – кільце нормування поля F, де F – повне неархімедове поле характеристики 0. Розглядатимемо топологію покоефіцієнтної збіжності на кільці $K[[x]]$.

Коефіцієнт при y^n в (2.18) для всіх $n > 0$ дорівнюватиме

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k} q_k f^{(n+k)}(x)}{(n+k)!}. \quad (2.20)$$

Тоді коефіцієнт при x^m ряда (2.20) для всіх $n > 0$ дорівнюватиме

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{(n+m+k)!}{(n+k)!m!} f_{n+m+k} q_k. \quad (2.21)$$

Для всіх $n > 0$, Коефіцієнт (2.18) при $\frac{1}{y^n}$ буде дорівнювати

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q_{n+k} f^{(k)}(x)}{k!}. \quad (2.22)$$

Тоді, знов для всіх $n > 0$, коефіцієнт при x^m ряду (2.22) буде дорівнювати

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(m+k)!}{m!k!} f_{m+k} q_{n+k}. \quad (2.23)$$

Звідси, усвідомлюючи, що нормування $|\cdot|$ неархімедове, отримуємо наступну лему.

Лема 2.3. *Нехай*

$$Q(x) = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \ldots + \frac{q_n}{x^n} + \ldots \in \frac{1}{x} K[[\frac{1}{x}]],$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_k x^k \in K[[x]]$$

і нехай q_i *прямує до нуля при* $i \to \infty$. *Тоді послідовності*

$$\frac{(n+m+i)!}{(n+i)!m!} f_{n+m+i} q_i \quad \text{і} \quad \frac{(m+i)!}{m!i!} f_{m+i} q_{n+i}$$

також прямують до нуля при $i \to \infty$, *отже ряди* (2.21) *і* (2.23) *збіжні в* K. *Тому* $Q(y)f(x-y) \in K[[x]][[y, \frac{1}{y}]]$.

Доведення. Достатньо тільки зазначити, що $\frac{(n+m+i)!}{(n+i)!m!}$ і $\frac{(m+i)!}{m!i!}$ – цілі числа, а коефіцієнти $f(x)$ належать K, тому $|f_{n+m+i}| \leq 1$ і $|f_{m+i}| \leq 1$. ■

Таким чином, за лемою 2.3 маємо наступне означення згортки $Q \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ і $f \in K[[x]]$.

Означення 2.3. *Нехай* $q_i \to 0$ *в* K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, *і* $f \in K[[x]]$. *За означенням покладемо*

$$(Q * f)(x) = \mathrm{Res}_y(Q(y)f(x-y)), \tag{2.24}$$

де Res_y *є формальним лишком.*

В результаті згортки отримуємо елемент з $K[[x]]$, і цей елемент може бути записаний формулою (2.19), тобто в якості рівноцінного означення згортки можемо розглядати наступне.

Означення 2.4. *Нехай* $q_i \to 0$ *в* K, $Q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, *і* $f \in K[[x]]$. *За означенням покладемо*

$$(Q * f)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \tag{2.25}$$

Зауваження 2.5. *Розглянемо згортку двох формальних рядів Лорана* $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{x^i} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ *і* $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{x^i} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, *що була визначена у такий спосіб, подібний до попереднього означення:*

$$(f * g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i f_{i+1} \frac{g^{(i)}(x)}{i!}.$$

Неважко перевірити, що $(\frac{1}{x} * g)(x) = g(x)$ *для будь-якого* $g \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, *а, також* $(\mathcal{E} * g)(x)$, *де* $\mathcal{E}(x)$ *визначено з* (2.17), *збігається з правою частиною рівності* (2.15), *тобто* $(\mathcal{E} * g)(x)$ *є єдиним розв'язком рівняння* (2.14). *Це дозволяє розглядати* $\mathcal{E}(x)$ *як фундаментальний розв'язок* (2.14) *(див. Розділ 1.4).*

Приклад 2.6. *У випадку* $m = 2$ *формальний ряд Лорана* $\mathcal{E}(x)$ *з прикладу 2.5 є фундаментальним розв'язком рівняння* $a_2 w''(x) + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = g(x)$ *в кільці* $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$.

Лема 2.4. *Нехай*

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{x^i} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]], \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in K[[x]].$$

Якщо $b_i \to 0$, *то ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_{i+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \tag{2.26}$$

збігається в топології покоефіцієнтної збіжності в кільці $K[[x]]$.

Доведення. Коефіцієнти $\frac{f^{(i)}(x)}{i!}$ належать K, тому вони не перевищують 1 по нормуванню $|\cdot|$. Позаяк $b_i \to 0$, коефіцієнти при кожному степені x в (2.26) є збіжними рядами. ■

З цієї леми випливає, що наступне поняття згортки є коректно визначеним.

Означення 2.5. *Згорткою* $(b * f)(x)$ *формального ряду Лорана* $b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{x^i} \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$, *де* b_i *прямує до* 0, *і довільного формального степеневого ряду* $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \in K[[x]]$ *будемо називати ряд* (2.26).

Лема 2.5. *Для будь-яких* $b \in \frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$ *і* $f \in K[[x]]$ *виконуються наступні тотожності:*

1. $(b * f)'(x) = (b * f')(x) = (b' * f)(x)$;
2. $(\frac{1}{x} * f)(x) = f(x)$.

Доведення. Оскільки $b'(x) = -\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{ib_i}{x^{i+1}}$, то

$$(b' * f)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} b_i}{(i-1)!} f^{(i)}(x).$$

Отримуємо

$$(b * f)'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i b_{i+1}}{i!} f^{(i+1)}(x) =$$

$$= (b * f')(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} b_i}{(i-1)!} f^{(i)}(x) = (b' * f)(x).$$

■

Теорема 2.9. *Припустимо, що виконуються умови теореми 2.6. Тоді єдиний розв'язок з $K[[x]]$ рівняння (2.1) має вигляд*

$$w(x) = (\mathcal{E} * f)(x),$$

де $\mathcal{E}(x)$ визначено за рівністю (2.17).

Доведення. За умовами теореми 2.6, послідовності $\{c_k\}$, а тому і $\{k!c_k\}$, прямують до 0 (дивись нерівність (2.11)). Таким чином, за лемою 2.4, згортка $\mathcal{E} * f$ є коректно визначеною.

Розглянемо наступний диференціальний оператор у кільці $\frac{1}{x}K[[\frac{1}{x}]]$:

$$P(w) = a_m w^{(m)} + a_{m-1} w^{(m-1)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w.$$

Тоді рівняння (2.14) приймає вигляд $P(w) = f$. Розв'язок рівняння $(P(w))(x) = \frac{1}{x}$ отримуємо за формулою (2.17). З цього випливає, що $(\mathcal{E} * f)(x)$ є розв'язком рівняння (2.1). Дійсно, за властивостями згортки (лема 2.5), маємо

$$P(\mathcal{E} * f)(x) = (P(\mathcal{E}) * f)(x) = (\frac{1}{x} * f)(x) = f(x).$$

■

Наступний наслідок уточнює попередній результат для випадку рівняння з цілими коефіцієнтами.

Наслідок 2.3. *Нехай* $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, m$ *і просте число* p *не є дільником* a_0. *Тоді рівняння* (2.1) *в кільце* $\mathbb{Z}_p[[x]]$ *має єдиний розв'язок*

$$w(x) = (\mathcal{E} * f)(x).$$

Доведення. Нехай тепер $(F, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$. Повторимо міркування з доведення теореми 2.9 окрім твердження, що $\{c_k\}$ прямує до нуля. Тепер послідовність $\{k!c_k\}$ прямує до нуля 0, оскільки $|k!|_p \to 0$ і $|c_k|_p \leq 1$. ■

Зауваження 2.6. *Теорема 2.9 дозволяє розглядати ряд*

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

як фундаментальний розв'язок рівняння (2.1) *для кільця* $K[[x]]$.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі ми розглядали неоднорідне диференціальне рівняння m-того порядку. Для довільного кільця знайдена умова, за якої для поліноміальної неоднорідності таке рівняння має поліноміальний розв'язок, тобто відповідь на питання 1.1. Введено поняття формального розв'язку лінійного диференціального рівняння (2.1) у вигляді ряду, встановлено зв'язок між розв'язком рівняння і його формальним розв'язком. Доведено, що в $\mathcal{I}$-адичній топології ряд, що представляє формальний розв'язок, ніколи не є збіжним, якщо неоднорідність належить $K[[x]] \setminus K[x]$ (теорема 2.4).

Розглянуті кільця з неархімедовим нормуванням. Для таких кілець знайдені достатні умови єдиності і існування розв'язку розглянутого рівняння, що є частковою відповіддю на питання 1.2. Ці теореми уточнені для кільця цілих p-адичних чисел.

Також введено спеціальне поняття згортки формального степеневого ряду з коефіцієнтами з кільця нормування та ряду Лорана з коефіцієнтами з того ж кільця. Це дозволило знайти фундаментальний розв'язок відповідного оператора і представити розв'язок рівняння за умови його існування у вигляді згортки фундаментального розв'язку з неоднорідністю.

Основні результати розділу:

- Введено поняття формального розв'язку рівняння (2.1), встановлено зв'язок з фактичним розв'язком цього рівняння (теореми 2.2 і 2.3).

- Доведено, що формальний розв'язок рівняння (2.1) ніколи не є збіжним в $\mathcal{I}$-адичній топології (теорема 2.4).

- Умови існування і єдиності розв'язку рівняння (2.1) (теореми 2.5 і 2.6) для неоднорідності, що є формальним степеневим рядом з коефіцієнтами з кільця нормування неархімедового поля. Уточнення попередніх результатів для кільця цілих чисел (теорема 2.7).

- Введено спеціальне поняття згортки формального ряда Лорана з формальним степеневим рядом, описані її властивості (означення 2.5, лема 2.5)

- У випадку кільця нормування неархімедового поля введено поняття фундаментального розв'язку рівняння (2.1), доведені його існування та єдиність. Представлення розв'язку за умови його існування у вигляді згортки фундаментального розв'язку з неоднорідністю (теорема 2.9).

Знайдені умови існування і єдиності розв'язку є доволі жорсткими. Залишається великий клас рівнянь, що не відповідає цим умовам. Для них питання існування та єдиності розв'язку залишається відкритим.

Результати розділу були надруковані в [7] Випадок кільця цілих чисел опублікований в [4].

ЛІНІЙНІ РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ m-ТОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай K – довільна область цілісності з одиницею і $K^{\mathbb{N}_0}$ – модуль всіх послідовностей елементів з K, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Розглянемо неявне лінійне різницеве рівняння m-того порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \ a_m \neq 0, \ n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.1)$$

де коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ і члени послідовності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ належать кільцю K. Шукатимемо послідовність $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}_0}$, що задовольнятиме це рівняння.

Зауваження 3.1. Зауважимо, що у випадку, коли a_m є дільником інших коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ та неоднорідності f_n для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, зокрема якщо a_m є оборотним елементом в K, рівняння (3.1) зводиться до явного рівняння

$$w_{n+m} + \frac{a_{m-1}}{a_m} w_{n+m-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_m} w_{n+1} + \frac{a_0}{a_m} w_n = \frac{f_n}{a_m}, \ a_m \neq 0, \ n \in \mathbb{N}_0$$

що має по одному розв'язку для кожної початкової умови $\{w_0, \ldots, w_{m-1}\}$.

Зважаючи на це, в цьому розділі нас буде цікавити той випадок, коли рівняння, що розглядається, справді є неявним, тобто в кільці K його не можна поділити на a_m, зокрема елемент a_m не є оборотним.

Означення 3.1. *Різницеве рівняння (3.1) будемо називати цілком неявним, якщо хоча б один з коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ не ділиться на a_m в кільці K. Зокрема, елемент a_m має бути необоротним.*

Будемо спочатку розглядати суто алгебраїчний випадок, коли в кільці K розглядається тільки дискретна топологія. В цьому випадку можемо повністю розв'язати рівняння (3.1) для фінітної неоднорідності (розділ

3.1). Результати цього розділу і методи, якими вони отримані, не можуть бути прямо узагальнені на випадок неоднорідності, що має нескінченну кількість ненульових членів. Навіть більше: в розділі 3.2.2 показано, що ці методи ніяким чином не застосовні ні до якого рівняння з нефінітною неоднорідністю.

Для таких неоднорідностей в розділі 3.2.1 вводиться спеціальне поняття формального розв'язку, яке дозволяє нам розширити область застосованості методу.

3.1 Фінітна неоднорідність

Якщо неоднорідність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ є фінітною, маємо декілька наступних простих результатів (теорема 3.1, зауваження 3.2 і 3.3), що відносяться до довільних кілець, які можна розглядати як топологічні кільця з дискретною топологією.

Теорема 3.1. *Рівняння (3.1) має фінітний розв'язок для будь-якої фінітної послідовності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\infty}$ тоді і тільки тоді, коли елемент $a_0 \in K$ є оборотним. При цьому, фінітний розв'язок є единим, має вигляд*

$$\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}, \tag{3.2}$$

де коефіцієнти y_k визначаються з рівності

$$(a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0)(y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots) = 1 \tag{3.3}$$

і номер останнього ненульового коефіцієнта $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ такий самий, як і номер останнього ненульового коефіцієнта послідовності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Доведення. Позначимо за $S : K^{\infty} \to K^{\infty}$ оператор зсуву, що діє на кшталт $S\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$.

Позначивши послідовності $W = \{w_i\}_{i=0}^{\infty}$ і $F = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, різніцеве рівняння (3.1) можна переписати у вигляді наступного рівняння у модулі $K^{\mathbb{N}_0}$

$$a_m S^m W + a_{m-1} S^{m-1} W + \ldots + a_1 SW + a_0 W = F. \tag{3.4}$$

Нехай $\mathcal{X}(t)$ є характеристичним поліномом $a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ рівняння (3.1). Тоді переписуємо рівняння (3.4) у вигляді $\mathcal{X}(S)W = F$. Якщо елемент a_0 є оборотним у K, то і поліном $\mathcal{X}(t)$ є оборотним в кільці $K[[x]]$. Тому отримуємо єдиний розв'язок рівняння (3.4) як $W = P(S)^{-1}F$. Коефіцієнти представлення оператора $P(S)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} y_i S^i$ можуть бути знайдені за рівністю (3.3), що еквівалентна системі лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 y_0 = 1, \\ a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_k y_0 = 0, \quad k = 1, \ldots, m-1 \\ a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = 0, \quad k = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases}, \tag{3.5}$$

і має єдиний розв'язок у випадку, коли a_0 оборотний. Оскільки послідовність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ фінітна, то

$$\{w_i\}_{i=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k S^k \{f_i\}_{i=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \{f_{i+k}\}_{i=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{i+k}\}_{i=0}^{\infty}$$

є коректно визначеним розв'язком рівняння (3.1).

З іншого боку, нехай рівняння має фінітний розв'язок для будь-якої фінітної неоднорідності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, зокрема для $\{1, 0, 0, 0, \ldots\}$. Номери останніх ненульових елементів послідовностей $S\{w_n\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, S^m\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ менші за номер останнього ненульового елементу $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тоді для послідовності $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, що задовольняє рівняння (3.4), номер останнього ненульового елементу $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ має дорівнювати 0, тобто розв'язок рівняння (3.1) має вигляд $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{C, 0, 0, 0, \ldots\}$. Тому $a_0 C = f_0 = 1$, тобто елемент a_0 є оборотним. ■

Для рівнянь першого і другого порядку коефіцієнти y_k, а, отже, і розв'язок рівняння (3.1) можуть бути знайдені в явному вигляді, як це зроблено в наступному зауваженні. Для диференціальних рівнянь аналогічні формули були знайдені у зауваженні 2.1.

Зауваження 3.2. Нехай $a_0, a_1, a_2 \in K$, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ є фінітною і a_0 – оборотний елемент.

Якщо $m = 1$, маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j t^j.$$

Отже, $y_j = (-1)^j a_0^{-j-1} a_1^j$. Рівняння $a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n$ має єдиний в K^∞ розв'язок

$$\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_0^{-k-1} a_1^k S^k \{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} a_1^n f_{k+n} \right\}_{n=0}^{\infty}. \quad (3.6)$$

Якщо $m = 2$, маємо

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{a_0^{n+k+1}} a_1^n a_2^k t^{n+2k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Отже,

$$y_j = \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-k}{k} \frac{(-1)^{j-k} a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}}.$$

Рівняння $a_2 w_{n+2} + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n$ має єдиний в K^∞ розв'язок

$$\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} S^j \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-n} \binom{j-n}{n} \frac{a_1^{j-2n} a_2^n}{a_0^{j-n+1}} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j} \sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]} (-1)^{j-k} \binom{j-k}{k} \frac{a_1^{j-2k} a_2^k}{a_0^{j-k+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}. \quad (3.7)$$

Зауваження 3.3. Позначимо за F поле часток кільця K. Якщо $a_0 \neq 0$ не є оборотним у K, тоді, застосовуючи теорему 3.1 для F, отримуємо єдиний в F^∞ розв'язок рівняння (3.1). Таким чином, або цей розв'язок належить K^∞, або рівняння (3.1) не має розв'язку з K^∞.

Якщо ж $a_0 = 0$ і K нескінченне, тоді рівняння (3.1) або має нескінченно багато розв'язків в K^∞, або жодного. Дійсно, будемо розв'язувати рівняння (3.1) відносно $\{v_n\}_{n=0}^{\infty} = \{w_{n+l}\}_{n=0}^{\infty}$, де l – мінімальний номер, для якого $a_l \neq 0$. Це рівняння $(m-l)$-того порядку, що за теоремою 3.1 має єдиний розв'язок з F^{∞}. Як було зазначено вище, воно має не більше одного розв'язку з K^{∞}. Отримуємо рівняння $w_{n+l} = v_n$, яке має або нескінченно багато, або жодного розв'язку з K^{∞}.

Приклад 3.1. *Розглянемо рівняння*

$$3\{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} + 2\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{5, 2, 0, 0, \ldots\}$$

у $\mathbb{Z}$-модулі $\mathbb{Z}^{\infty}$ і в $\mathbb{Q}$-модулі $\mathbb{Q}^{\infty}$. В цьому випадку $a_0 = 2 \neq 0$, $a_1 = 3$. Тому $y_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2}$, $y_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} = -\frac{3}{4}$. За теоремою 3.1 єдиний розв'язок в $\mathbb{Q}^{\infty}$ має вигляд

$$\{w_0, w_1, \ldots\} = \{5y_0 + 2y_1, 2y_0, 0, 0, \ldots\} = \{1, 1, 0, 0, \ldots\} \in \mathbb{Z}^{\infty}.$$

Приклад 3.2. *Розглянемо тепер рівняння*

$$3\{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty} + 2\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{5, 1, 0, 0, \ldots\}$$

у тих же самих модулях. Воно має таку саму ліву частину, як і рівняння з попереднього прикладу, тому так само $y_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{2}$ і $y_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} = -\frac{3}{4}$. За теоремою 3.1 єдиний розв'язок в $\mathbb{Q}^{\infty}$ має вигляд

$$\{w_0, w_1, \ldots\} = \{5y_0 + y_1, y_0, 0, 0, \ldots\} = \{\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\}.$$

Він не належить $\mathbb{Z}^{\infty}$, тому рівняння не має розв'язків в $\mathbb{Z}^{\infty}$.

3.2 Нефінітна неоднорідність з кільця $K^{\mathbb{N}_0}$

Як видно з доведення теореми 3.1, для фінітної неоднорідності природно шукати розв'язок (3.1) у вигляді (3.2). Для нефінітної неоднорідності ця схема незастосовна через те, що, взагалі кажучи, сума (3.2) має нескінченно багато доданків, тобто не є коректно визначеною в дискретній топології. Натомість, рівняння може мати розв'язок з $K^{\mathbb{N}_0}$ і в цьому випадку.

Зауваження 3.4. Зазначимо, що рівняння виду (3.1) з неоднорідністю, що не є фінітною послідовністю, не може мати фінітного розв'язку. Дійсно, якщо фінітна послідовність є розв'язком (3.1), тоді неоднорідність (3.1) дорівнює $a_m S^m \{w_n\}_{n=0}^{\infty} + \ldots + a_1 S\{w_n\}_{n=0}^{\infty} + a_0\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, тобто також є фінітною.

Тим не менш таке рівняння може мати розв'язок з нескінченною кількістю ненульових членів, як показано в наступних прикладах.

Приклад 3.3. *Рівняння* $3w_{n+1} - w_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ *не має розв'язку в* $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$, *але має єдиний розв'язок* $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\frac{1}{2}\}_{n=0}^{\infty}$ *в модулі* $\mathbb{Z}_{(3)}^{\mathbb{N}_0}$, *де* $\mathbb{Z}_{(3)}$ *– кільце 3-цілих чисел.*

Приклад 3.4. *Рівняння* $3w_{n+1} - w_n = 2$, $n \in \mathbb{N}_0$ *має розв'язок* $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$.

Зазначимо, що ряд (3.2) *в цьому випадку записується у вигляді* $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k = -\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$, *тобто не є коректно визначеним.*

Далі покажемо, що суму (3.2) можна розглядати як "формальний" розв'язок (розділ 3.2.1) і використовувати для знаходження розв'язку рівняння (3.1) (розділ 3.3). Конструкція "формального" розв'язку буде пов'язана з послідовністю формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з K. Для диференціальних рівнянь подібна теорія була побудована в розділі 2.2.1.

3.2.1 Формальний розв'язок різницевого рівняння

Нехай K – довільна область цілісності з одиницею. Розглядатимемо кільце формальних степеневих рядів $K[[t]]$.

Послідовність таких формальних степеневих рядів з $K[[t]]^{\mathbb{N}_0}$ можна ототожнювати з формальним степеневим рядом, коефіцієнтами якого є послідовності з K-модуля $K^{\mathbb{N}_0}$:

$$\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} w_{n,j} t^j \right\}_{n=0}^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \{w_{n,j}\}_{n=0}^{\infty} t^j \in K^{\mathbb{N}_0}[[t]]$$

Нехай $\tilde{S} : K^{\mathbb{N}_0}[[t]] \to K^{\mathbb{N}_0}[[t]]$ є K-лінійним оператором, що діє наступним чином:

$$\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = t \cdot S\left\{\sum_{j=0}^{\infty} w_{n,j}t^j\right\}_{n=0}^{\infty},$$

де S – це оператор лівого зсуву у модулі $K[[t]]^{\mathbb{N}_0}$.

Тоді $\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{j=0}^{\infty} w_{i+1,j}t^{j+1}\}_{n=0}^{\infty} = \{tw_{n+1}(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Для будь-якого $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}_0}$ за означенням покладемо $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, тобто це є формальний степеневий ряд з $K^{\mathbb{N}_0}$, коефіцієнтами якого є послідовності, і всі коефіцієнти окрім першого дорівнюють нулю, а перший дорівнює послідовності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Розглянемо тепер наступне рівняння в K-модулі $K^{\mathbb{N}_0}[[t]]$:

$$a_m\tilde{S}^m\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} + a_{m-1}\tilde{S}^{m-1}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} + \ldots + a_1\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} + \\ + a_0\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (3.8)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m \in K$.

Означення 3.2. *Аналогічно до означення 3.1, рівняння виду (3.8) будемо називати цілком неявним, якщо хоча б один з коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ не ділиться на a_m в кільці K. Зокрема, елемент a_m має бути необоротним.*

Теорема 3.2. *Нехай a_0 є оборотним елементом K. Тоді цілком неявне рівняння (3.8) в K-модулі $K^{\mathbb{N}_0}[[t]]$ має єдиний розв'язок*

$$\{w_n(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k S^k\{f_n\}_{n=0}^{\infty}t^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}t^k, \quad (3.9)$$

де коефіцієнти y_k знаходяться з рівності (3.3).

Доведення. Як було зазначено в доведенні теореми 3.1, поліном $\mathcal{X}(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_mt^m$ є оборотним в кільці $K[[t]]$, якщо a_0 обернений. Переписуємо рівняння (3.8) у вигляді $\mathcal{X}(\tilde{S})\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, з чого отримуємо $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{X}(\tilde{S})^{-1}\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Отже маємо

$$\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k\tilde{S}^k\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} y_kf_{n+k}t^k\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Ці ряди є коректно визначеними формальними степеневими рядами. ■

Якщо послідовність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ фінітна і елемент a_0 є оборотним, послідовність (3.2) сум рядів є розв'язком рівняння (3.1). Якщо $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ має нескінченну кількість ненульових членів, ми будемо говорити, що (3.2) є *формальним* розв'язком (3.1).

З цього маємо наступне означення.

Означення 3.3. *Послідовність рядів* $\{w_i\}_{i=0}^{\infty} = \{\sum_{j=0}^{\infty} w_{i,j}\}_{i=0}^{\infty}$, *де* $w_{i,j} \in K$ *є формальним розв'язком рівняння* (3.1) *якщо послідовність формальних степеневих рядів* $\{w_i(t)\}_{i=0}^{\infty} = \{\sum_{j=0}^{\infty} w_{i,j}t^j\}_{i=0}^{\infty}$ *є розв'язком рівняння* (3.8), *яке також можна переписати у вигляді*

$$a_m t^m w_{i+m}(t) + a_{m-1}t^{m-1}w_{i+m-1}(t) + \ldots + a_1 t w_{i+1}(t) + a_0 w_i(t) = f_i(t). \quad (3.10)$$

Як було зазначено на початку цього розділу, цю послідовність рядів можна розглядати як ряд, елементами якого є послідовності.

Розглянемо знову різницеве рівняння (3.1) над кільцем K з неоднорідністю $f \in K^{\mathbb{N}_0}$ і сформулюємо зв'язок між ним і рівнянням (3.10).

Теорема 3.3. *Нехай коефіцієнт* a_0 *рівняння* (3.1) *оборотний.*

- *Якщо послідовність* $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє рівність* (3.3), *то послідовність* (3.2) *є формальним розв'язком рівняння* (3.1).

- *Нехай* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *має нескінченно багато ненульових членів. Якщо послідовність рядів виду* $\{\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ *є формальним розв'язком рівняння* (3.1), *тоді послідовність* $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ *задовольняє рівність* (3.3).

Доведення. Перше твердження випливає з теореми 3.2.

Нехай тепер $b_k \in K$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ і послідовність рядів $\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ є формальним розв'язком рівняння (3.1). Якщо $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність, що задовольняє (3.3), тоді послідовність рядів $\{\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - y_k) f_{n+k} t^k\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком однорідного рівняння

$$a_m t^m w_{i+m}(t) + a_{m-1}t^{m-1}w_{i+m-1}(t) + \ldots + a_1 t w_{i+1}(t) + a_0 w_i(t) = 0. \quad (3.11)$$

З теореми 3.2 випливає, що $(b_k - y_k)f_{n+k} = 0$ для будь-яких k і n.

Тепер припустимо від супротивного, що існує j, для якого $b_j \neq y_j$. Так як K – область цілісності, то $f_{j+n} = 0$ для будь-якого n, тобто $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ фінітна, що суперечить умові теореми. ∎

Наступна лема, за деяких умов, розв'язку рівняння (3.10) ставить у відповідність розв'язок рівняння (3.1).

Лема 3.1. *Нехай деякий K-лінійний оператор $T: \ K^{\mathbb{N}_0}[[t]] \to K^{\mathbb{N}_0}$ з областю визначення $\mathfrak{D}(T)$ задовольняє такі умови:*

1. $\tilde{S}(\mathfrak{D}(T)) \subset \mathfrak{D}(T)$;
2. $T(\tilde{S}w) = S(Tw)$ *для кожного* $w \in \mathfrak{D}$;
3. *для будь-якого* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}_0}$, *якщо* $\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, *тобто всі коефіцієнти окрім перших в кожному ряді* $\tilde{f}_n(t)$ *дорівнюють нулю, а перші дорівнюють* f_n, *то* $T\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Тоді якщо $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{D}(T)$ *є розв'язком* (3.10), *то* $T\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ *є розв'язком* (3.1).

Доведення. Оскільки $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ належить $\mathfrak{D}(T)$, то, зважаючи на першу умову, $\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}, \tilde{S}^2\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}, \ldots, \tilde{S}^m\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ належать $\mathfrak{D}(T)$.

Послідовність рядів $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{D}(T)$ є розв'язком (3.10), тому

$$T(a_m\tilde{S}^m\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} + \ldots + a_1\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} + a_0\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) = S\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Для будь-якого j маємо $T(\tilde{S}^j\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) = S^j(T\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty})$ і $T\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, тому

$$a_mS^m(T\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) + \ldots + a_1S(T\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) + a_0T\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}.$$

∎

3.2.2 Збіжність формального розв'язку в топології покоефіцієнтної стабілізації

В цьому розділі доведемо, що для жодної нефінітної неоднорідності ми не можемо отримати розв'язок у вигляді (3.2) без додаткових топологічних умов для кільця K.

У модулі $K^{\mathbb{N}_0}$ будемо розглядати топологію покоординатної стабілізації, тобто топологію добутку (нагадаємо, що в цьому розділі ми розглядаємо K як дискретне кільце).

Наслідок 3.1. *Нехай кожен з рядів $w_n = \sum_{k=0}^{\infty} w_{k,n}$ має скінченну кількість ненульових доданків, і послідовність сум рядів $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ є формальним розв'язком рівняння* (3.1). *Тоді ця послідовність є розв'язком* (3.1) *і дорівнює послідовності* (3.2), *яка так само складається з рядів, що мають скінченну кількість доданків.*

Доведення. Нехай відображення $T:\ K^{\mathbb{N}_0}[[t]] \to K^{\mathbb{N}_0}$ з областю визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \Bigg\{ \{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} v_{k,n} t^k\}_{n=0}^{\infty} \ : \\ \text{ряди } \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,n} \text{ мають скінченну кількість доданків} \Bigg\}$$

задається рівністю

$$T(\{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) = \{v_n(1)\}_{n=0}^{\infty}. \tag{3.12}$$

Оператор T задовольняє всі умови леми 3.1. Дійсно, оскільки $\sum_{k=0}^{\infty} v_{k,n}$ мають скінченну кількість доданків, то $\sum_{k=0}^{\infty} v_{k+1,n}$ також мають скінченну кількість доданків, тому $\tilde{S}\{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{D}(T)$. Також $T\{\tilde{f}_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ для $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}_0}$ і $T(\tilde{S}\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) = T(t \cdot S\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}) = (t \cdot \{w_{n+1}(t)\}_{n=0}^{\infty})\Big|_{t=1} = S\{w_n(1)\}_{n=0}^{\infty} = S(T\{w_n\}_{n=0}^{\infty})$.

Нехай $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} w_{k,n} t^k\}_{n=0}^{\infty}$. Тоді з леми 3.1 маємо, що $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} w_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком (3.1). За теоремою 3.2 можна записати $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ як $\sum_{k=0}^{\infty} y_k S^k \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Неважко перевірити, що цей ряд тотожній до послідовності $\{\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$. ■

Нехай тепер характеристика поля часток F кільця K дорівнює 0. Розглянемо рівняння (3.1) з неоднорідністю із $F^{\mathbb{N}_0}$. За теоремою 3.3, послідовність (3.2) є формальним розв'язком (3.1). В теоремі 3.4 буде показано, що послідовність (3.2) складається з рядів, що мають скінченну кількість доданків, тоді і тільки тоді, коли неоднорідність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ є фінітною.

Теорема 3.4. *Нехай $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in F^{\mathbb{N}_0}$, $a_0, \ldots, a_m \in F$, $a_0 \neq 0$ і y_j задовольняють (3.3). Тоді ряди*

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{n+k}, \tag{3.13}$$

що є членами послідовності (3.2) мають скінченну кількість доданків тоді і тільки тоді, коли $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ є фінітною.

Доведення цієї теореми аналогічно доведенню теореми 2.4 з розділу 2.2.2.

3.3 Кільце з неархімедовим нормуванням

Зв'язок формального і справжнього розв'язків рівняння (лема 3.1) дозволяє отримати певні результати для розв'язання рівняння (3.1) для спеціальних топологічних комутативних кілець і у випадку неоднорідностей, що мають нескінченну кількість ненульових членів.

Нагадаємо деякі конструкції, описані в розділі 1, означення 1.4 та 1.5: нехай $(F, |\cdot|)$ – поле характеристики нуль з неархімедовим нормуванням і $K = \{s \in F : |s| \leq 1\}$ – це його кільце нормування. Будемо розглядати кільце K з метрикою і топологією, що індукуються цим нормуванням. Нагадаємо, що елемент $a \in K$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $|a| = 1$ (лема 1.2). В модулі $K^{\mathbb{N}_0}$ будемо розглядати топологію покоординатної збіжності (топологія добутку).

Теорема 3.5. *Нехай в рівнянні* (3.1) *коефіцієнти* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *належать* K, $|a_i| < |a_0|$ *для будь-якого* $1 \leq i \leq m$ *та* $f_n \in K$ *для будь-якого* $n \in \mathbb{N}_0$. *Тоді це рівняння має не більше одного розв'язку з* $K^{\mathbb{N}_0}$.

Доведення. Щоб довести єдиність розв'язку рівняння (3.1) достатньо довести, що однорідне рівняння

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = 0, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.14}$$

в модулі $K^{\mathbb{N}_0}$ має тільки тривіальний розв'язок $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0\}$.

В модулі $F^{\mathbb{N}_0}$ розв'язок $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє рівняння

$$w_n = -\frac{a_m}{a_0} w_{n+m} - \frac{a_{m-1}}{a_0} w_{n+m-1} - \ldots - \frac{a_1}{a_0} w_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.15}$$

Беручи до уваги, що нормування є неархімедовим, тобто задовольняє сильну нерівність трикутника, маємо $|w_n| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{|\frac{a_i w_{n+i}}{a_0}|\}$. З цього випливає, що для будь-якого n існує i таке що

$$|w_n| \leq |\frac{a_i w_{n+i}}{a_0}| = |\frac{a_i}{a_0}||w_{n+i}|. \tag{3.16}$$

Позначимо $r = \max\limits_{1 \leq j \leq m} \{|\frac{a_j}{a_0}|\}$. Отримуємо, що для будь-якого n існує i таке що $|w_n| \leq r|w_{n+i}|$.

Фіксуємо довільне $k \in \mathbb{N}_0$. Починаючи з w_k, будуємо підпослідовність $\{w_{n_i}\}_{i=0}^{\infty}$, для якої $n_0 = k$ і кожен член можна оцінити таким чином: $|w_{n_j}| \leq r|w_{n_{j+1}}|$ для будь-якого j. Це можна зробити, бо для $n = n_j$ існує i таке що $|w_{n_j}| \leq r|w_{n_j+i}|$, тому ми можемо обрати $n_{j+1} = n_j + i$ номером наступного члена підпослідовності.

Таким чином, перший член цієї послідовності $|w_k| \leq r^j \cdot |w_{n_j}|$ для будь-якого j. Позаяк w_n належить K, то $|w_n| \leq 1$ для всіх n. Тоді $|w_k| \leq r^j$ для будь-якого j. Помітимо, що за умовою теореми $r < 1$. Тоді $w_k = 0$ і, через те, що ми фіксували довільне k, маємо $w_n = 0$ для всіх n. ∎

Тепер отримаємо умови існування розв'язку. Для цього розглянемо перетворення T, що задається рівністю (3.12) і має область визначення

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ \{v_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,n} t^k \right\}_{n=0}^{\infty} : \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,n} \text{ збігається в топології} \right.$$
$$\left. \text{покоефіцієнтної збіжності в } K^{\mathbb{N}_0} \right\}$$

Теорема 3.6. *Нехай поле F повне відносно нормування $|\cdot|$, $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \le i \le m$. Тоді ряди (3.13) збігаються в кільці K і послідовність їх сум є єдиним в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3.1).*

Доведення. Відображення T задовольняє умові леми 3.1. Дійсно, так само як в наслідку 3.1, можна довести, що $T(\tilde{D}v) = (Tv)'(x)$ і $T\tilde{f}(x,y) = f(x)$ для $f \in K^{\mathbb{N}_0}$. Якщо $v \in \mathfrak{D}(T)$, то для будь-якого j ряд $\sum_{i=0}^{\infty} v_{i,j}$ збігається в K відносно нормування $|\cdot|$. Тоді для будь-якого j ряд $\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j+1}$ також збігається в K відносно $|\cdot|$. Таким чином, $\tilde{S}v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j+1} \right) t^i \in \mathfrak{D}(T)$.

За теоремою 3.2 ряд $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty} = \{\sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{n+k} t^k\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком рівняння (3.10). Перевіримо, що $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ належить $\mathfrak{D}(T)$. Для цього оцінимо коефіцієнти $y_k f_{n+k}$ ряду $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Нормування $|\cdot|$ є неархімедовим, тому для того, щоб кожен з рядів (3.13), збігався над K, достатньо, щоб послідовність $\{|y_k f_{n+k}|\}_{n=0}^{\infty}$ прямувала до нуля (Теорема 1.1).

Виходячи з того, що f_n належить кільцю нормування R, маємо $|f_n| \le 1$ для всіх n. Завершимо доведення наступною лемою:

Лема 3.2. *Нехай $|a_0| = 1$ та $|a_i| < 1$ для всіх $1 \le i \le m$. Нехай $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє (3.3). Тоді $|y_n| \to 0$ при $i \to \infty$.*

Доведемо, що $|y_n| \le r^{[\frac{n}{m}]} \cdot S$, де $S = \max\limits_{0 \le j \le m-1} \{|y_j|\}$ і $r = \max\limits_{1 \le j \le m} \{|a_j|\}$.

Будемо доводити це за індукцією по n. Твердження очевидне для $n < m$. Дійсно, в цьому випадку $|y_n| \le S = \max\limits_{0 \le j \le m-1} \{|y_j|\}$.

Зауважимо, що оскільки $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ задовольняє (3.3), ця послідовність не є фінітною і є розв'язком системи (3.5), що означає, що для випадку $n = m = m + 0$ над полем F, маємо

$$y_m = -\frac{a_1}{a_0}y_{m-1} - \frac{a_2}{a_0}y_{m-2} - \ldots - \frac{a_m}{a_0}y_0,$$

отже, усвідомлюючи, що нормування $|\cdot|$ є неархімедовим і $|a_0| = 1$, можемо оцінити $|y_m|$:

$$|y_m| = |\frac{a_1}{a_0}y_{m-1} + \frac{a_2}{a_0}y_{m-2} + \ldots + \frac{a_m}{a_0}y_0| \leq$$
$$\leq \max_{1\leq j\leq m}\{|a_j y_{m-j}|\} \leq \max_{1\leq j\leq m}\{|a_j|\} \cdot \max_{1\leq j\leq m}\{|y_j|\} = r \cdot S.$$

Для доведення індуктивного переходу припустимо, що нерівність є вірною для $n \leq m+k-1$. Доведемо, що вона виконується також для $n = m+k$, тобто $|y_n| \leq r^{[\frac{k+m}{m}]} \cdot S$.

З системи (3.5) маємо

$$y_{k+m} = -\frac{a_1}{a_0}y_{k+m-1} - \frac{a_2}{a_0}y_{k+m-2} - \ldots - \frac{a_m}{a_0}y_k,$$

тому, усвідомлюючи, що нормування $|\cdot|$ неархімедове і $|a_0| = 1$, можемо оцінити $|y_{k+m}|$:

$$|y_{k+m}| \leq \max_{1\leq j\leq m}\{|a_j y_{k+m-j}|\} \leq \max_{1\leq j\leq m}\{|a_j|\}\cdot \max_{1\leq j\leq m}\{|y_{k+m-j}|\} = r \max_{k\leq j\leq k+m-1}\{|y_j|\}$$

За припущенням індукції, $|y_j| \leq r^{[\frac{j}{m}]} \cdot S$ для всіх $k \leq j \leq k+m-1$. Тому $\max\limits_{k\leq j\leq k+m-1}\{|y_j|\} \leq \max\limits_{k\leq j\leq k+m-1} r^{[\frac{j}{m}]}$. Оскільки $r < 1$ за означенням r і умовою теореми, то $r^{[\frac{j}{m}]} \leq r^{[\frac{k}{m}]}$ для всіх $k \leq j$. Маємо $\max\limits_{k\leq j\leq k+m-1} r^{[\frac{j}{m}]} \leq r^{[\frac{k}{m}]}$. Отже, $|y_{k+m}| \leq r \cdot r^{[\frac{k}{m}]} \cdot S = r^{[\frac{k+m}{m}]} \cdot S$.

Таким чином, ми довели, що нерівність $|y_n| \leq r^{[\frac{n}{m}]} \cdot S$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}_0$.

Позаяк $r < 1$, то $|y_n|$ прямує до нуля, тому кожен ряд, що є членом послідовності (3.2), збігається, що завершує доведення леми. ■

Зауваження 3.5. В частковому випадку $m = 1$ маємо рівняння

$$a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.17}$$

яке має єдиний розв'язок над K якщо $|a_0| = 1$ і $|a_1| < 1$. За теоремою 3.6, цей розв'язок має вигляд (3.2). В цьому випадку розв'язок рівняння (3.17) можна записати як (3.6).

Для $m = 2$ маємо рівняння

$$a_2 w_{n+2} + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

яке має єдиний розв'язок над K якщо $|a_0| = 1$, $|a_1| < 1$ і $|a_2| < 1$. За теоремою 3.6, цей розв'язок має вигляд (3.2). В цьому випадку розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді (3.7).

Теорема 3.6 дає умову збіжності рядів (3.2) і існування розв'язку рівняння (3.1) для будь-якої неоднорідності $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Відмітимо, що у порівнянні із теоремою 3.5, в цій теоремі вимагаємо більше від коефіцієнту a_0. Але замість цього можемо накласти деякі обмеження на неоднорідність.

Теорема 3.7. *Нехай поле F повне відносно нормування $|\cdot|$, $|a_i| < |a_0|$ для всіх $1 \leq i \leq m$ та $|f_n| \to 0$ при $n \to +\infty$. Тоді ряди (3.13) збігаються в кільці K і послідовність їх сум є единим в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3.1).*

Доведення. Проведемо всі міркування з доведення теореми 3.6, але зробимо висновок, що послідовність $\{|y_k f_{n+k}|\}_{n=0}^{\infty}$ прямує до нуля з того, що всі y_k належать кільцю нормування K, тому $|y_k| \leq 1$, і $f_k \to 0$ при $k \to +\infty$. ■

В теоремах 3.6 і 3.11 ми вимагали, щоб поле F було повним. Якщо поле F не є повним, то попередні теореми цілком застосовні для кільця $\hat{K}$, що є поповненням кільця K за $|\cdot|$. Тобто за виконання умов теореми 3.6 або теореми 3.11, існуватиме єдиний в $\hat{K}^{\mathbb{N}_0}$ розв'язок рівняння (3.1). На практиці є дійсно складною задачею з'ясувати, чи належить елемент з $\hat{K}^{\mathbb{N}_0}$ до $K^{\mathbb{N}_0}$ (див. приклад 1.4).

Наступна теорема показує, що за умови існування розв'язку рівняння (3.1), ряд (3.2) буде збігатися до елементу в K навіть якщо поле F буде неповним.

Для зручності будемо розглядати рівняння

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} \ldots + a_1 w_{n+1} + f_n = a_0 w_n \tag{3.18}$$

замість рівняння (3.1). Це не змінить основні оцінки, позаяк при множенні будь-яких з коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ на -1, їх нормування не зміниться.

В цьому випадку покладемо $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ таким, що задовольняє рівність

$$(a_0 - a_m t^m - a_{m-1} t^{m-1} - \ldots - a_1 t)(y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots) = 1 \tag{3.19}$$

або систему рівнянь

$$\begin{cases} a_0 y_0 = 1, \\ a_0 y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_k y_0, \quad k = 1, \ldots, m-1 \\ a_0 y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m}, \quad k = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases}, \tag{3.20}$$

а формальний розв'язок можна записати у вигляді (3.2).

Теорема 3.8. *Якщо рівняння (3.18) має розв'язок над кільцем K і $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, знайдене з (3.20), прямує до нуля, то кожен з рядів, що є членом послідовності (3.2), збігається в K. В цьому випадку (3.2) є единим розв'язком рівняння (3.18) в $K^{\mathbb{N}_0}$.*

Доведення. Нехай $\{w_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}_0}$ – розв'язок рівняння (3.1).

Вважаючи, що $y_k = 0$ для всіх $k < 0$, для всіх $i \le m$ та $k \in \mathbb{N}_0$ позначимо $A_i^k = a_i y_k + a_{i+1} y_{k-1} + \ldots + a_m y_{i+k-m}$. Зазначимо, що за цим означенням маємо

1. $A_i^0 = a_i y_0$ для будь-якого i;
2. $A_m^k = a_m y_k$ для будь-якого k;
3. $A_i^{k+1} = a_i y_{k+1} + A_{i+1}^k$ для будь-яких k і i;
4. $A_1^k = a_1 y_k + \ldots + a_m y_{k+1-m} = a_0 y_{k+1}$ для будь-яких k і i;
5. оскільки $y_i \to 0$ при $i \to +\infty$, то $A_i^k \to +\infty$ при $k \to 0$ для будь-якого i.

Будемо доводити за індукцією по k, що

$$w_n = \sum_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + \sum_{i=1}^{m} A_i^k w_{k+n+i} \tag{3.21}$$

для будь-якого $k \in \mathbb{N}_0$. Для випадку $k = 0$, домножимо рівняння (3.18) на y_0. Отримуємо

$$a_0 y_0 w_n = f_n y_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i y_0 w_{n+i}$$

Оскільки $a_0 y_0 = 1$ і $A_i^0 = a_i y_0$, маємо

$$w_n = y_0 f_n + \sum_{i=1}^{m} A_i^0 w_{n+i}.$$

Нехай для деякого k виконується $w_n = \sum\limits_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i^k w_{k+n+i}$. Тоді

$$\begin{aligned}
w_n = \sum_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + A_1^k w_{n+1+k} + \sum_{i=2}^{m} A_i^k w_{n+i+k} = [A_1^k = a_0 y_{k+1}] = \\
= \sum_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + a_0 y_{k+1} w_{n+1+k} + \sum_{i=2}^{m} A_i^k w_{n+i+k} = \\
= [a_0 w_{n+1+k} = f_{n+1+k} + a_1 w_{n+2+k} + \ldots + a_m w_{n+1+m+k}] = \\
= \sum_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + y_{k+1} f_{n+1+k} + y_{k+1} \sum_{i=1}^{m} a_i w_{n+i+k+1} + \sum_{i=1}^{m-1} A_{i+1}^k w_{n+i+k+1} = \\
= \sum_{i=0}^{k+1} y_i f_{n+i} + \sum_{i=1}^{m-1} (A_{i+1}^k + y_{k+1} a_i) w_{n+i+k+1} + a_m y_{k+1} w_{n+m+k+1} = \\
= [A_i^{k+1} = a_i y_{k+1} + A_{i+1}^k] = \\
= \sum_{i=0}^{k+1} y_i f_{n+i} + \sum_{i=1}^{m-1} A_i^{k+1} w_{n+i+(k+1)} + a_m y_{k+1} w_{n+m+k+1} = \\
= [A_m^{k+1} = a_m y_{k+1}] = \sum_{i=0}^{k+1} y_i f_{n+i} + \sum_{i=1}^{m} A_i^{k+1} w_{n+i+(k+1)}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким чином, ми довели (3.21) для будь-якого k. Оскільки $|A_i^k| \to 0$ при

$k \to +\infty$ для будь-якого i і нормування неархімедове, то

$$|\sum_{i=1}^{m} A_i^k w_{k+n+i}| \leq \max_{i=1}^{m}\{|A_i^k w_{k+n+i}|\} \leq [w_n \in R \Rightarrow |w_n| \leq 1] \leq$$
$$\leq \max_{i=1}^{m}\{|A_i^k|\} \to 0 \text{ при } k \to \infty$$

Отже, $w_n = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} y_i f_{n+i} + \sum_{i=1}^{m} A_i^k w_{k+n+i} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i f_{n+i}$. ■

Наслідок 3.2. *Нехай* $|a_0| = 1$ *та* $|a_i| < 1$ *для всіх* $1 \leq i \leq m$. *Якщо рівняння* (3.1) *має хоча б один розв'язок в* $K^{\mathbb{N}_0}$, *тоді ряди* (3.13) *збігаються в кільці* K *і послідовність їх сум є цим единим в* $K^{\mathbb{N}_0}$ *розв'язком рівняння* (3.1).

Доведення. За лемою 3.2, y_n прямує до 0 при $n \to \infty$. Тепер цей наслідок прямо випливає з теореми 3.12. ■

Сформулюємо декілька теорем, що є наслідками або доводяться аналогічно до попередніх теорем цього розділу, оскільки стосуються алгебраїчних конструкцій, на яких природно вводиться неархімедова топологія.

Нехай K – комутативне кільце з одиницею і $\mathcal{I}$ – його ідеал. На кільці K можна ввести $\mathcal{I}$-адичну топологію і відповідне квазінормування $|\cdot|$ (див. розділ 1.2).

Теорема 3.9. *Нехай в рівнянні* (3.1) *коефіцієнти* $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{I}$ *і* a_0 *– оборотний елемент,* $f_n \in K$ *для будь-якого* $n \in \mathbb{N}_0$. *Тоді це рівняння має не більше одного розв'язку з* $K^{\mathbb{N}_0}$.

Доведення. Оскільки a_0, то $a_0 \notin \mathcal{I}$. Тому $|a_0| = 1$, $|a_i| < 1$. Також для будь-якого елементу $x \in K$, $|x| \leq 1$. Подальше доведення збігається з доведенням теореми 3.5, але позаяк $|\cdot|$ – це квазі нормування, то замість 3.16 матимемо $|w_n| \leq |\frac{a_i w_{n+i}}{a_0}| \leq |\frac{a_i}{a_0}||w_{n+i}|$. ■

Доведення наступних леми і теорем повністю повторює доведення 3.2, 3.6, 3.11 і 3.12.

Лема 3.3. *Нехай* a_0 *– оборотний та* $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{I}$. *Нехай* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *задовольняє* (3.3). *Тоді* $|y_n| \to 0$ *при* $i \to \infty$.

Теорема 3.10. *Нехай поле* F *повне відносно нормування* $|\cdot|$, a_0 *– оборотний та* $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{I}$. *Тоді ряди* (3.13) *збігаються в кільці* K *і послідовність їх сум є єдиним в* $K^{\mathbb{N}_0}$ *розв'язком рівняння* (3.1).

Теорема 3.11. *Нехай поле* F *повне відносно нормування* $|\cdot|$, a_0 *– оборотний,* $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{I}$ *та* $|f_n| \to 0$ *при* $n \to +\infty$. *Тоді ряди* (3.13) *збігаються в кільці* K *і послідовність їх сум є єдиним в* $K^{\mathbb{N}_0}$ *розв'язком рівняння* (3.1).

Теорема 3.12. *Якщо рівняння* (3.18) *має розв'язок над кільцем* K *і* $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$, *знайдене з* (3.20), *прямує до нуля, то ряди* (3.13) *збігаються в кільці* K, *а послідовність їх сум* (3.2) *є єдиним в* $K^{\mathbb{N}_0}$ *розв'язком рівняння* (3.1).

Наслідок 3.3. *Нехай* a_0 *– оборотний та* $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{I}$. *Тоді якщо рівняння* (3.18) *має розв'язок над кільцем* K, *ряди* (3.13) *збігаються в кільці* K, *а послідовність їх сум* (3.2) *є єдиним в* $K^{\mathbb{N}_0}$ *розв'язком рівняння* (3.1).

Нехай K є факторіальним кільцем (див. означення 1.6), $v \in K$ – простий елемент. Нагадаємо, що тоді будь-який елемент x з поля часток $Frac(K)$ єдиним чином представляється у вигляді $x = v^t \cdot c$ так, що $t \in \mathbb{Z}$ і $c = \frac{r}{s}$, де $r, s \in K$ і обидва елементи r, s не містять v у своїй факторизації. Будемо говорити, що x ділиться на v, якщо $t > 0$, а x не ділиться на v, якщо $t = 0$. Якщо покладемо за означенням $|x|_v = 2^{-t}$, то нормування $|\cdot|_v$ поля $Frac(K)$ є неархімедовим і R_0 є його кільцем нормування.

У факторіальному кільці K сформулюємо наступні результати, що є прямими наслідками 3.6, 3.2, 3.11 і 3.12.

Теорема 3.13. *Нехай кільце* K *факторіальне,* $v \in K$, *коефіцієнти* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *в рівнянні* (3.1) *належать* K *і неоднорідність* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in$

$K^{\mathbb{N}_0}$. Нехай для будь-якого j маємо $a_j = v^{t_j} \cdot y_j$, де $t_j \in \mathbb{Z}$ і $y_j = \frac{r_j}{s_j}$, де $r_j, s_j \in R_0$ і обидва елементи r_j, s_j не містять v в своїй факторизації. Тоді якщо $t_j < t_0$ для всіх $1 \leq j \leq m$, рівняння (3.1) має не більше одного розв'язку з $K^{\mathbb{N}_0}$.

В цьому випадку отримуємо наступний наслідок теореми 3.13:

Наслідок 3.4. *Якщо існує таке $v \in K$, що всі a_j для $1 \leq j \leq m$ діляться на v, а a_0 не ділиться на v, то рівняння (3.1) має не більше ніж один розв'язок з $K^{\mathbb{N}_0}$.*

Теорема 3.14. *Нехай поле $F = Frac(K)$ повне відносно нормування $|\cdot|_v$, всі a_j для $1 \leq j \leq m$ діляться на v, а a_0 не ділиться на v. Тоді ряди (3.13) збігаються в кільці K, а послідовність їх сум (3.2) є единим в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3.1).*

Теорема 3.15. *Нехай поле F повне відносно нормування $|\cdot|_v$, всі a_j для $1 \leq j \leq m$ діляться на v, a_0 не ділиться на v та $|f_n|_v \to 0$ при $n \to +\infty$. Тоді ряди (3.13) збігаються в кільці K і послідовність їх сум є единим в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3.1).*

Наслідок 3.5. *Нехай всі a_j для $1 \leq j \leq m$ діляться на v, a_0 не ділиться на v. Тоді якщо рівняння (3.18) має розв'язок над кільцем K, ряди (3.13) збігаються в кільці K, а послідовність їх сум (3.2) є единим в $K^{\mathbb{N}_0}$ розв'язком рівняння (3.1).*

Зауваження 3.6. Оскільки кільце цілих чисел є факторіальним, то для будь-якого простого числа p на цьому кільці можна ввести неархімедове нормування. Але кільце цілих чисел не буде повним за цим нормуванням. Поповнення за цим неархімедовим нормуванням для простого p – це кільце цілих p-адичних чисел $\mathbb{Z}_p$ (див. приклад 1.1).

З огляду на це, можна використовувати попередні теореми для випадку $K = \mathbb{Z}_p$. Очевидно, що єдиність розв'язку виконуватиметься і для кільця цілих чисел.

Теорема 3.16. *Нехай* $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$ *і* $a_1, \ldots, a_m$ *мають спільний простий дільник, що не є дільником* a_0. *Тоді рівняння* (3.1) *має не більше одного цілочисельного розв'язку.*

Для сталої правої частини за умови єдиності розв'язку можна наступний результат описує умови існування розв'язку.

Наслідок 3.6. *Нехай* $a_0, \ldots, a_m, f \in \mathbb{Z}$ *і однорідне рівняння* (3.14) *має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. Тоді* $a_0 + a_1 + \ldots + a_m \neq 0$, *і рівняння*

$$a_m w_{n+m} + \ldots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f, \;\; a_m \neq 0, \;\; n \in \mathbb{N}_0$$

має цілочисельний розв'язок тоді і тільки тоді, коли f *ділиться на* $a_0 + a_1 + \ldots + a_m$. *При цьому розв'язок є сталим і дорівнює*

$$w_n = \frac{f}{a_0 + a_1 + \ldots + a_m}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Випадок, коли рівняння (3.1) має перший порядок розібрано окремо в Розділі 4.4.

3.3.1 Різницеве рівняння в кільці поліномів

Нехай F є полем характеристики нуль. Зафіксуємо довільне $z_0 \in F$ і розглядатимемо в якості кільця K кільце формальних степеневих рядів $F[[z - z_0]]$ (Див. приклад 1.5). Нагадаємо, що це факторіальни кільце, і елемент $(z - z_0)$ є простим в ньому. Поле часток кільця $F[[z - z_0]]$ – це поле рядів Лорана $F((z - z_0))$, воно є повним, і кільце $F[[z - z_0]]$ є кільцем нормування для $F((z - z_0))$. За означенням, для $w \in F((z - z_0))$ візьмемо $|w(z - z_0)|_{z - z_0} = 2^t$, де t – найменше ціле число, для якого $(z - z_0)^t \cdot w(z - z_0) \in F[[z - z_0]]$.

Переформулюємо теореми 3.5 і 3.6 у випадку цього кільця:

Наслідок 3.7. *Нехай в рівнянні (3.1) неоднорідність* $\{f_n(z-z_0)\}_{n=0}^{\infty} \in F[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$ *коефіцієнти* $a_0(z-z_0), a_1(z-z_0), \ldots, a_m(z-z_0)$ *також належать* $F[[z-z_0]]$ *та* $a_i(z-z_0) = (z-z_0)^{k_i} \cdot \tilde{a}_i(z-z_0)$*, де* $\tilde{a}_i(z_0) \neq 0$ *і* k_i *– невід'ємні цілі числа.*

Тоді якщо $k_0 < k_i$ *для будь-якого* $1 \leq i \leq m$*, тоді це рівняння має не більше одного розв'язку з* $F[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$*.*

Наслідок 3.8. *Нехай в рівнянні (3.1) неоднорідність* $\{f_n(z-z_0)\}_{n=0}^{\infty} \in F[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$ *коефіцієнти* $a_0(z-z_0), a_1(z-z_0), \ldots, a_m(z-z_0)$ *також належать* $F[[z-z_0]]$ *і* k_i *– невід'ємні цілі числа.*

Тоді якщо $a_i(z_0) = 0$ *для будь-якого* $1 \leq i \leq m$*, а* $a_0(z_0) \neq 0$*, то система (3.5) має єдиний розв'язок* $\{y_i\}_{i=0}^{\infty} = \{y_i(z-z_0)\}_{i=0}^{\infty}$ *в кільці* $F[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$ *і ряд*

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(z-z_0) f_{n+i}(z), \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.23}$$

збігається в цьому кільці та є єдиним розв'язком рівняння (3.1) з кільця $F[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$*.*

З цих наслідків випливає наступний результат, що стосується існування і єдиності розв'язку різницевого рівняння над кільцем поліномів. Для поліномів $a_m(z), \ldots, a_0(z), f_n(z) \in F[z]$, розглянемо рівняння

$$a_m(z) w_{n+m}(z) + \ldots + a_1(z) w_{n+1}(z) + a_0(z) w_n(z) = f_n(z), \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.24}$$

Оскільки будь-який поліном може бути розкладений у вигляді формального степеневого ряду з кільця $K[[z-z_0]]$ для будь-якого значення z_0, то це рівняння може бути розглянуто над кільцем $K[[z-z_0]]$ для будь-якого z_0.

Наслідок 3.9. *Якщо існує таке* z_0*, що рівняння (3.24), розглянуте над кільцем* $K[[z-z_0]]$*, задовольняє умови наслідку 3.7, то рівняння (3.24) має не більше ніж один поліноміальний розв'язок.*

Наслідок 3.10. *Якщо існує* z_0*, який є коренем поліномів* $a_m(z), \dots, a_1(z)$ *і не є коренем* $a_0(z)$*, то система* (3.5)*, всі коефіцієнти і невідомі якої розглядаються як формальні степеневі ряди з* $K[[z-z_0]]$ *має єдиний розв'язок* $\{y_i(z-z_0)\}_{i=0}^{\infty}$ *в кільці* $K[[z-z_0]]^{\mathbb{N}_0}$*. Тоді або послідовність сум* (3.28) *є послідовністю поліномів, що задовольняє рівняння* (3.24)*, або рівняння* (3.24) *не має поліноміального розв'язку.*

Доведення. За наслідком 3.7, рівняння (3.24) має не більше одного розв'язку з кільця формальних степеневих рядів, тому якщо воно має поліноміальний розв'язок, то ці розв'язки повинні збігатися. ■

3.3.1.1 Різницеві рівняння першого порядку в кільці поліномів

Для різницевого рівняння першого порядку

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[[z]],\ n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.25}$$

в кільці формальних степеневих рядів можемо переформулювати наслідки 3.8 і 3.10 у наступний спосіб:

Наслідок 3.11. *Нехай* $a(z_0) \neq 0$ *і* $b(z_0) = 0$*. Тоді послідовність рядів*

$$w_n(z-z_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z-z_0)}{a^{i+1}(z-z_0)} f_{n+i}(z-z_0),\ n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.26}$$

є єдиним розв'язком рівняння (3.25) *над кільцем* $K[[z-z_0]]$.

Тепер розглянемо рівняння першого порядку

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z) + f_n(z),\ b(z), a(z), f_n(z) \in K[z],\ n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.27}$$

в кільці поліномів. Оскільки будь-який поліном належить $K[[z-z_0]]$ для всіх z_0, отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 3.12. *Якщо існує таке z_0, що $b(z_0) = 0$, а $a(z_0) \neq 0$, то або послідовність сум*

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b^i(z)}{a^{i+1}(z)} f_{n+i}(z), \ n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.28}$$

є послідовністю поліномів, що задовольняє рівняння (3.27), або це рівняння не має поліноміального розв'язку.

В наступному прикладі показано, що рівняння (3.27) може не мати поліноміального розв'язку.

Приклад 3.5. Рівняння

$$zw_{n+1}(z) + 1 = w_n(z), \ n = 0, 1, 2, \dots,$$

не має поліноміального розв'язку. Дійсно, для нього виконуються умови наслідку 3.3.1.1, тому воно має єдиний розв'язок

$$w_n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \ n = 0, 1, 2, \dots$$

в кільці формальних степеневих рядів, який очевидно не є поліномом.

Наступна теорема прямо випливає з наслідку 3.3.1.1 якщо K є алгебраїчно замкненим. В загальному випадку вона потребує окремого доведення.

Теорема 3.17. *Однорідне рівняння*

$$b(z)w_{n+1}(z) = a(z)w_n(z), \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.29}$$

має тільки тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $a(z)$ не ділиться на $b(z)$. За цієї умови рівняння (3.27) має не більше ніж один поліноміальний розв'язок.

Доведення. Оскільки $a(z)$ не ділиться на $b(z)$, існує $p(z) \in K[z]$, що $p(z)$ ділить $b(z)$, але не ділить $a(z)$. З (3.29) випливає що

$$\frac{b^n(z)}{a^n(z)} w_n(z) = w_0(z), \ n = 0, 1, 2, \dots.$$

Маємо, що $w_0(z)$ ділиться на $p^n(z)$ для будь-якого степеня n, що є неможливим для ненульового $w_0(z)$. Оскільки $w_0(z) = 0$, то $w_n(x) = 0$ для всіх n.

Якщо $a(z)$ ділиться на $b(z)$, то рівняння (3.29) можна переписати у явному вигляді $w_n(z) = \frac{a(z)}{b(z)} w_0(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Є нескінченно багато розв'язків цього рівняння: свій розв'язок для кожного початкового значення $w_0(z)$. ■

Приклад 3.6. Нехай $f_n(z) = f(z)$ для всіх n і $a(z)$ ділиться на $b(z)$. Припустимо, що послідовність поліномів $\{w_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком різницевого рівняння

$$b(z)w_{n+1}(z) + f(z) = a(z)w_n(z).$$

Послідовність $\{w_{n+1}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ очевидно також задовольняє це рівняння. За теоремою 3.17 рівняння має не більше ніж один поліноміальний розв'язок, тому $w_n(z) = w_{n+1}(z)$ для всіх n. Це означає, що якщо розв'язок існує, він має бути сталим, і має задовольняти рівняння

$$b(z)w(z) + f(z) = a(z)w(z).$$

Таким чином, послідовність

$$w_n(z) = w(z) = \frac{f(z)}{a(z) - b(z)}$$

є єдиним можливим поліноміальним розв'язком цього рівняння у тому випадку, коли він є поліномом. Тому рівняння зі сталою неоднорідністю має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $f(z)$ ділиться на $a(z) - b(z)$.

Наприклад, рівняння $zw_{n+1}(z) + 1 = w_n(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ з попереднього прикладу не має жодного поліноміального розв'язку, оскільки $f(z) = 1$ не ділиться на $b(z) - a(z) = 1 - z$.

Розглянутий приклад в тому числі показує, що рівняння може не мати жодного поліноміального розв'язку, і щоб знаходити поліноміальний розв'язок за теоремою треба перевіряти, чи належить кожний елемент послідовності формальних степеневих рядів (3.28) кільцю поліномів. Наступна теорема стверджує, що для цього достатньо перевірити тільки чи є поліномом перший формальний степеневий ряд $w_0(z)$.

Теорема 3.18. *Нехай $a(z) = 1$. Якщо $w_0(z)$ з (3.28) є поліномом, то всі наступні $w_n(z)$ з (3.28) також є поліномами.*

Доведення. Доведемо це за індукцією. Оскільки $\{w_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком рівняння, то

$$w_{n+1}(z) = \frac{w_n(z) - f_n(z)}{b(z)}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Позаяк $w_n(z)$ і $f_n(z)$ всі є поліномами, то $w_n(z) - f_n(z)$ також є поліномами. Доведемо, що ця різниця поділяється на $b(z)$. З рівності (3.28), маємо

$$w_n(z) - f_n(z) = b(z) \left(f_{n+1}(z) + b(z) f_{n+2}(z) + b^2(z) f_{n+3}(z) + \ldots \right), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.30}$$

Оберемо елемент $\tilde{z}$ з алгебраїчного замикання $\tilde{K}$ кільця K, таке що $b(z)$ділиться на $z - \tilde{z}$, тобто $b(\tilde{z}) = 0$.

Нехай $\hat{b}(z - \tilde{z}) = b(z)$ і $\hat{f}_n(z - \tilde{z}) = f_n(z)$ для всіх n. Шукатимемо $\{w_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ у вигляді послідовності формальльних степеневих рядів $\hat{w}_n(z - \tilde{z})$ з $\tilde{K}[[z - \tilde{z}]]$. Тоді для кожного n ми отримаємо наступну рівність між двома формальними степеневими рядами з $\tilde{K}[[z - \tilde{z}]]$:

$$\hat{b}(z - \tilde{z}) \sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z - \tilde{z}) \hat{f}_{n+i+1}(z - \tilde{z}) = \hat{w}_n(z - \tilde{z}) - \hat{f}_n(z - \tilde{z}).$$

Так як $b(\tilde{z}) = 0$, то $\hat{b}(0) = 0$. Тому $w_n(\tilde{z}) - f_n(\tilde{z}) = \hat{w}_n(0) - \hat{f}_n(0) = 0$, тобто поліном $w_n(z) - f_n(z)$ ділиться на $z - \tilde{z}$. Тоді можна поділити цю рівність на $z - \tilde{z}$ і розглядати рівність

$$\frac{\hat{b}(z - \tilde{z})}{z - \tilde{z}} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z - \tilde{z}) \hat{f}_{n+i+1}(z - \tilde{z}) = \frac{\hat{w}_n(z - \tilde{z}) - \hat{f}_n(z - \tilde{z})}{z - \tilde{z}},$$

де права частина є поліномом з коефіцієнтами з $\tilde{K}$.

Повторюватимемо цю процедуру для всіх дільників $b(z)$, і отримаємо, що

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{b}^i(z-\tilde{z})\hat{f}_{n+i+1}(z-\tilde{z}) = \frac{\hat{w}_n(z-\tilde{z}) - \hat{f}_n(z-\tilde{z})}{\hat{b}(z-\tilde{z})} = \frac{w_n(z) - f_n(z)}{b(z)} = w_{n+1}(z),$$

є поліномом з коефіцієнтами з алгебраїчного замикання кільця K.

Ці коефіцієнти повинні належати K. Дійсно, коефіцієнти поліномів $w_n(z) - f_n(z)$ і $b(z)$ належать K. Позначимо за k степінь $w_{n+1}(z)$. Розглянемо $k+1$ попарно різних елементів з кільця $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k \in K$, що не є коренями $b(z)$. Елементи

$$\frac{w_n(x_j) - f_n(x_j)}{b(x_j)} \in K, \text{ де } 0 \le j \le k,$$

є значеннями полінома. Але є єдиний поліном степеня k, що приймає ці $k+1$ значення, і його коефіцієнти належать K. ■

Зауваження 3.7. *Насправді, з рівності (3.30) не випливає прямо, що $w_n(z) - f_n(z)$ поділяється на $b(z)$. Це здається очевидним, але насправді може бути так, що поліном не є дільником добутку цього поліному з формальним степеневим рядом, наприклад,*

$$(1-z)(1+z+z^2+z^3+\ldots) = 1.$$

Але в теоремі 3.11, розглядуваний формальний степеневий ряд має спеціальну структуру $f_n(z)+b(z)f_{n+1}(z)+b^2(z)f_{n+2}(z)+\ldots$, і саме це дозволило нам провести наведені міркування.

Приклад 3.7. Розглянемо рівняння

$$zw_{n+1}(z) + \sum_{j=0}^{k} A_j z^{n+j} = w_n(z).$$

В цьому випадку $a(z) = 1, b(z) = z$ і $f_n(z) = \sum_{j=0}^{k} A_j z^{n+j}$. Тобто, виконуються умови наслідку 3.11 і теореми 3.18 над кільцем $K[[z]]$. Тоді перший елемент розв'язку дорівнюватиме

$$w_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{j=0}^{k} A_j z^j = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=0}^{\infty} z^{i+j} = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{\infty} z^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} A_j (\sum_{i=j}^{k} z^i + \sum_{i=k+1}^{\infty} z^i) = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{k-1} z^i + \sum_{j=0}^{k} A_j \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} z^i.$$

Він є поліномом тоді і тільки тоді, коли $\sum_{j=0}^{k} A_j = 0$. Тоді

$$w_0(z) = \sum_{j=0}^{k} A_j \sum_{i=j}^{k-1} z^i.$$

За теоремою 3.18, інші елементи $w_n(z)$ також є поліномами.

Приклад 3.8. Розглянемо рівняння

$$(z-1)w_{n+1}(z) + A_n z + B_n = w_n(z).$$

В цьому випадку $a(z) = 1, b(z) = z-1, f_n(z) = A_n z + B_n$, тобто виконуються умови наслідку 3.11 і теореми 3.18 над кільцем $K[[z-1]]$. Перепишемо $f_n(z)$ як формальний степеневий ряд з кільця $K[[z-1]]$. Отримуємо

$$f_n(z) = A_n(z-1) + A_n + B_n.$$

Тоді перший формальний степеневий ряд послідовності, що є розв'язком, дорівнюватиме

$$w_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i z + B_i)(z-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i(z-1)^{i+1} + (A_i + B_i)(z-1)^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_{i-1}(z-1)^i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_i + B_i)(z-1)^i =$$

$$= A_0 + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_{i-1} + A_i + B_i)(z-1)^i \quad (3.31)$$

Цей формальний степеневий ряд є поліномом тоді і тільки тоді, коли існує таке j, що для будь-якого $i \geq j$ виконується рівність $A_{i-1} + A_i + B_i = 0$. За теоремою 3.18 отримуємо, що у такому випадку всі інші $w_n(z)$ також будуть поліномами.

Ще один спосіб визначити, чи буде формальний степеневий розв'язок (3.27) послідовністю поліномів полягає у тому, щоб прослідкувати за степенями.

Приклад 3.9. Рівняння $zw_{n+1}+1 = w_n$ не має жодного поліноміального розв'язку, адже $\deg w_n(z) = \deg w_{n+1}(z) + 1$, тобто степінь $w_n(z)$ спадає. Але це неможливо для послідовності поліномів.

Наступна теорема дає більш загальну інформацію про степінь поліномов, які є елементами послідовності-розв'язку деяких рівнянь виду (3.27).

Теорема 3.19. *Нехай* $\deg a < \deg b$. *Якщо послідовність поліномів* $w_n(z)$ *є розв'язком рівняння* (3.27), *то існує такий номер* k *для якого виконується нерівність*

$$\deg w_k \leq \deg f_k - \deg b + \deg a.$$

Доведення. Припустимо супротивне, що $\deg w_k > \deg f_k - \deg b + \deg a$ для всіх k. Розглянемо наступні випадки, усвідомлюючи, що $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ задовольняє (3.27), тобто $b \cdot w_{k+1} = a \cdot w_k + f_k$:

1. якщо $\deg f_k < \deg w_{k+1} + \deg b$, то $\deg(a \cdot w_k) = \deg(b \cdot w_{k+1})$, отже

$$\deg w_k + \deg a = \deg w_{k+1} + \deg b.$$

   Позаяк $\deg a < \deg b$, то $\deg w_{k+1} < \deg w_k$;

2. якщо $\deg f_k = \deg w_{k+1} + \deg b$, то $\deg w_{k+1} = \deg f_k - \deg b$, за припущенням $\deg f_k < \deg w_k + \deg b - \deg a$, з чого випливає, що

$$\deg w_{k+1} = \deg f_k - \deg b < \deg w_k - \deg a.$$

   Тому $\deg w_{k+1} < \deg w_k$;

3. якщо $\deg f_k > \deg w_{k+1}+\deg b$, то $\deg(a\cdot w_k) = \deg f_k$, тому отримуємо

$$\deg w_k + \deg a = \deg f_k > \deg w_{k+1} + \deg b.$$

   Знов через те, що $\deg a < \deg b$, маємо $\deg w_{k+1} < \deg w_k$;

В усіх цих випадках ми дістали висновку, що $\deg w_{k+1} < \deg w_k$, тобто ця нерівність виконуватиметься для всіх k. Оскільки послідовність степеней поліномів не може спадати, отримуємо суперечність.

Доведення завершено. ∎

Приклад 3.10. Розглянемо рівняння

$$(z+1)w_{n+1} + Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3} = w_n(z).$$

В цьому випадку $a(z) = 1, b(z) = z+1$, $f_n(z) = Az^n+Bz^{n+1}+Cz^{n+2}+Dz^{n+3}$. Умови наслідку 3.11 над кільцем $K[[z+1]]$ виконуються, тому ми можемо записати розв'язок

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (Az^n + Bz^{n+1} + Cz^{n+2} + Dz^{n+3})(z+1)^i.$$

Ми бачимо, що обов'язково $w_{n+1}(z) = zw_{n+1}(z)$. Але щоб перевірити, чи є цей розв'язок поліноміальним, доведеться або переписати $f_n(z)$ у вигляді формального степеневого ряду з $K[[z+1]]$, або переписати $b^i(z)$ у вигляді формального степеневого ряду з $K[[z]]$. І те, і інше зробити доволі важко.

За теоремою 3.19, якщо $w_n(z)$ є поліномом, то для деякого n його степінь буде не більше як $\deg(Az^n+Bz^{n+1}+Cz^{n+2}+Dz^{n+3})-\deg(z+1) = n+2$. Тобто якщо існує поліноміальний розв'язок, всі елементи, що мають більший степінь, мають скоротитися. Елементи, що мають менший степінь, є тільки в перших трьох доданках.

Тому якщо розглянуте рівняння має поліноміальний розв'язок, він має бути сумою елементів зі степенем не більшим за $n+2$ з перших трьох доданків:

$$w_n(z) = Az^n + (A+B)z^{n+1} + (2A+B+C)z^{n+2}$$

Оскільки $w_{n+1}(z) = zw_n(z)$, то зараз достатньо перевірити, коли цей розв'язок задовольняє рівняння:

$$(z+1)(Az^{n+1}+(A+B)z^{n+2}+(2A+B+C)z^{n+3})+ \\ +Az^n+Bz^{n+1}+Cz^{n+2}+Dz^{n+3}= \\ =Az^n+(A+B)z^{n+1}+(2A+B+C)z^{n+2}. \quad (3.32)$$

Коефіцієнти при z^n, z^{n+1} та z^{n+2} скорочуються автоматично, а з коефіцієнтів при z^{n+3} і z^{n+4} ми отримуємо умови $3A+2B+C+D=0$ та $2A+B+C=0$. Дістаємо висновку, що розглянуте рівняння має поліноміальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $D=A+C$ і $2A+B+C=0$. Цей розв'язок дорівнює

$$w_n(z)=Az^n+(A+B)z^{n+1}.$$

3.3.2 Квазіполіноміальна неоднорідність

Розглянемо наступне неявне різницеве рівняння з квазіполіноміальною неоднорідністю над кільцем K

$$a_m w_{n+m}=a_{m-1}w_{n+m-1}+\ldots+a_1 w_{n+1}+a_0 w_n+\lambda^n\sum_{j=0}^{s}p_j n^j,\ n\in\mathbb{N}_0 \quad (3.33)$$

де $\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_m, p_j \in R$ $(j=0,1,\ldots,s), \lambda\neq 0$.

Доведення двох наступних теорем можна отримати, застосувавши до цього рівняння метод невизначених коефіцієнтів ([37, Розділ 2.4]), тобто є класичним результатом. Ми повторюємо всі обчислення, бо в цьому випадку для нас ключовими умови є подільності.

Теорема 3.20. *Нехай K - область цілісності з нульовою характеристикою. Нехай λ не є розв'язком характерістичного рівняння*

$$\mathcal{X}(x)=a_m x^m-a_{m-1}x^{m-1}-\ldots-a_1 x-a_0=0.$$

Тоді існує не більше одного квазіполіноміального з параметром λ розв'язку рівняння (3.33).

Доведення. Якщо існує хоча б два розв'язки рівняння (3.33) з параметром λ, то їх різниця, що також є квазіполіномом з параметром λ, є розв'язком однорідного рівняння

$$a_m w_{n+m} - a_{m-1} w_{n+m-1} - \ldots - a_1 w_{n+1} - a_0 w_n = 0 \tag{3.34}$$

Нехай існує розв'язок цього рівняння, що має вигляд

$$w_n = \lambda^n \sum_{j=0}^{t} q_j n^j, \tag{3.35}$$

де $q_j \in K$ для всіх $j \in \mathbb{N}_0$ і $q_t \neq 0$. Підставляючи його в рівняння і усвідомлюючи, що

$$\lambda^{n+k} \sum_{j=0}^{s} q_j (n+k)^j = \lambda^{n+k} \sum_{j=0}^{s} q_j \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} n^r k^{j-r},$$

отримуємо

$$a_m \lambda^{n+m} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{s} q_j \binom{j}{r} m^{j-r} - a_{m-1} \lambda^{n+m-1} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{s} q_j \binom{j}{r} (m-1)^{j-r} - \ldots$$
$$\ldots - a_2 \lambda^{n+2} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{s} q_j \binom{j}{r} 2^{j-r} - a_1 \lambda^{n+1} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} - a_0 \lambda^n \sum_{r=0}^{t} q_r n^r = 0$$

Оскільки K є областю цілісності, то з цього випливає, що

$$a_m \lambda^{m} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} m^{j-r} - a_{m-1} \lambda^{m-1} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} (m-1)^{j-r} - \ldots$$
$$\ldots - a_2 \lambda^{2} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} 2^{j-r} - a_1 \lambda \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} - a_0 \sum_{r=0}^{t} q_r n^r = 0$$

Можемо переписати подвійні суми наступним чином

$$\sum_{j=0}^{t} q_j \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} n^r k^{j-r} = \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{s} q_j \binom{j}{r} k^{j-r},$$

і отримаємо

$$a_m\lambda^m \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} m^{j-r} - a_{m-1}\lambda^{m-1} \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} (m-1)^{j-r} - \ldots$$
$$\ldots - a_2\lambda^2 \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} 2^{j-r} - a_1\lambda \sum_{r=0}^{t} n^r \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} - a_0 \sum_{r=0}^{t} q_r n^r = 0 \tag{3.36}$$

Позаяк K є кільцем характеристики нуль, натуральні числа є попарно різними і не дорівнюють нулю як елементи кільця K. Оскільки K також є нескінченною областю цілісності, прирівнюючи коефіцієнти степеня n в рівності (3.36), маємо

$$a_m\lambda^m \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} m^{j-r} - a_{m-1}\lambda^{m-1} \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} (m-1)^{j-r} - \ldots$$
$$\ldots - a_2\lambda^2 \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} 2^{j-r} - a_1\lambda \sum_{j=r}^{t} q_j \binom{j}{r} - a_0 q_r = 0,\ \ r = 0, 1, \ldots, t.$$

Об'єднавши суми, запишемо це як

$$\lambda \sum_{j=r}^{t} \binom{j}{r} q_j \left(a_m\lambda^{m-1} m^{j-r} - \ldots - a_2\lambda 2^{j-r} - a_1\right) = a_0 q_r, \tag{3.37}$$

що виконується для будь-якого $r = 0, 1, \ldots, t$.

У випадку $r = t$ рівність (3.37) означає

$$q_t(a_m\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \ldots - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0) = 0.$$

Оскільки $q_t \neq 0$, то λ є коренем

$$\mathcal{X}(x) = a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Якщо $r = t - 1$ рівність (3.37) означає

$$\binom{t}{1} q_t \left(a_m\lambda^m m - a_{m-1}\lambda^{m-1}(m-1) - \ldots - a_2\lambda^2 2 - a_1\lambda\right) +$$
$$+ q_{t-1}\left(a_m\lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \ldots - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0\right) = 0$$

Тому

$$\binom{s}{1} q_t(a_m\lambda^m m - a_{m-1}\lambda^{m-1}(m-1) - \ldots - a_2\lambda^2 2 - a_1\lambda) = 0.$$

Оскільки $q_t \neq 0$ і $\lambda \neq 0$, то λ є коренем

$$\mathcal{X}_1(x) = a_m x^{m-1} m - a_{m-1} x^{m-2}(m-1) - \ldots - 2a_2 x - a_1$$

Продовжуючи ці міркування, ми отримуємо що для того, щоб $\lambda^n \sum_{j=0}^{t} q_j n^j$ було розв'язком рівняння (3.34), необхідно щоб λ була коренем полінома $\mathcal{X}(x)$ та всіх поліномів

$$\mathcal{X}_i(x) = a_m x^{m-1} m^i - a_{m-1} x^{m-2}(m-1)^i - \ldots - 2^i a_2 x - a_1,\ 1 \leq i \leq t.$$

Оскільки $\mathcal{X}_1(x) = \mathcal{X}'(x)$ і ми також можемо записати $\mathcal{X}^{(k)}(x)$ як комбінацію $\mathcal{X}_i$, де $0 \leq i \leq k$, це також означає, що $\mathcal{X}(x)$ матиме λ коренем t-того степеня, або ж однорідне рівняння (3.34) не матиме розв'язком квазіполіном (3.35). ■

Наслідок 3.13. *Нехай K – область цілісності з нульовою характеристикою. Нехай $a_0, a_1 \in K$ такі, що a_0 не ділиться на a_1, $\lambda \neq 0$ і $p_j \in K$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ Тоді існує не більше одного квазіполіноміального з параметром λ розв'язку рівняння*

$$a_1 w_{n+1} = a_0 w_n + \lambda^n \sum_{j=0}^{s} p_j n^j.$$

Доведення. Дійсно, якщо a_0 не ділиться на a_1, λ не може бути коренем характерістичного полінома цього рівняння $\mathcal{X}(x) = a_1 x - a_0 = 0$. ■

Теорема 3.21. *Нехай K є областю цілісності характеристики нуль. Нехай існують елементи $\alpha_j \in K$ такі що $p_j = \alpha_j \mathcal{X}(\lambda)^{j+1}$. Тоді існує єдиний розв'язок вигляду (3.35) рівняння (3.33).*

Доведення. З умов теореми випливає, що $\mathcal{X}(\lambda) \neq 0$, тому за попередньою теоремою, існує не більше одного розв'язку виду (3.35) рівняння (3.33).

Позначимо $p_r = 0,\ r \geq s+1$ і будемо шукати розв'язок виду (3.35), де $t \geq s$. Підставляючи (3.35) в рівняння (3.33) так само, як і в доведенні попередньої теореми та розглядаючи коефіцієнти при однакових степенях n, маємо

$$\sum_{j=r}^{t} \binom{j}{r} q_j \left(a_m \lambda^m m^{j-r} - \ldots - a_2 \lambda^2 2^{j-r} - a_1 \lambda\right) - a_0 q_r = p_r,\ r \geq 0$$

Якщо $t > s$, то для $r = t$ отримуємо $q_t \mathcal{X}(\lambda) = p_t = 0$, що неможливо для $q_t \neq 0$, тому $t = s$. Тому можемо переписати рівність як

$$\sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} q_j \left(a_m \lambda^m m^{j-r} - \ldots - a_2 \lambda^2 2^{j-r} - a_1 \lambda\right) + \mathcal{X}(\lambda) q_r = p_r,\ r = 0, 1, \ldots, s.$$

Згадавши означення $\mathcal{X}_i(x)$, можемо також переписати його на

$$\sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} q_j \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda) + \mathcal{X}(\lambda) q_r = p_r,\ r = 0, 1, \ldots, s$$

Доведемо за індукцією, що для кожного $0 \leq i \leq s$ існує $q_i \in K$, виражений через $q_{i+1}, \ldots, q_s$, і існує таке β_i, що $q_i = \beta_i \mathcal{X}(\lambda)^i$. Для $r = s$ отримуємо

$$q_s \mathcal{X}(\lambda) = p_s,$$

тоді позаяк $p_s = \alpha_s \mathcal{X}(\lambda)^{s+1}$, то $q_s \mathcal{X}(\lambda) - \alpha_s \mathcal{X}(\lambda)^{s+1} = 0$, тому $\mathcal{X}(\lambda)(q_s - \alpha_s \mathcal{X}(\lambda)^s) = 0$. Оскільки $\mathcal{X}(\lambda) \neq 0$, отримуємо $\beta_s = \alpha_s$ і $q_s = \alpha_s \mathcal{X}(\lambda)^s$.

Нехай для всіх $r+1 \leq i \leq s$ існує таке β_i, що $q_i = \beta_i \mathcal{X}(\lambda)^i$. Для $i = r$ маємо

$$\mathcal{X}(\lambda) q_r = p_r - \sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} q_j \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda)$$

Підставляючи $q_i = \beta_i \mathcal{X}(\lambda)^i,\ r+1 \leq i \leq s$ та $p_r = \alpha_r$, отримуємо

$$\mathcal{X}(\lambda) q_r = \alpha_r \mathcal{X}(\lambda)^{r+1} - \sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} \beta_j \mathcal{X}(\lambda)^j \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda).$$

Це означає, що

$$\mathcal{X}(\lambda)\left(q_r - \alpha_r \mathcal{X}(\lambda)^r + \sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} \beta_j \mathcal{X}(\lambda)^{j-1} \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda)\right) = 0,$$

тому

$$\beta_r = \alpha_r - \sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} \beta_j \mathcal{X}(\lambda)^{j-r-1} \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda).$$

Отже,

$$q_r = \alpha_r \mathcal{X}(\lambda)^r - \sum_{j=r+1}^{s} \binom{j}{r} \beta_j \mathcal{X}(\lambda)^{j-1} \lambda \mathcal{X}_{j-r}(\lambda),$$

що завершує доведення. ■

Наслідок 3.14. *Нехай K – область цілісності з нульовою характеристикою. Нехай $a_0, a_1, \lambda, p_j \in K$ $(j = 0, 1, \dots, r), \lambda \neq 0$ такі, що p_r ділиться на $(a_0\lambda - a_1)^r$. Тоді рівняння*

$$a_1 w_{n+1} = a_0 w_n + \lambda^n \sum_{j=0}^{r} p_j n^j$$

має єдиний квазіполіноміальний розв'язок з параметром λ.

З теорем 3.12 і 3.21 випливає наступні теореми, що є основними результатами стосовно різницевих рівнянь з квазіполіноміальною неоднорідністю:

Теорема 3.22. *Нехай $\mathcal{I}$ є ідеалом області цілісності з нульовою характеристикою K і $\bigcap_{n\geq 0} \mathcal{I}^n = \{0\}$. Нехай a_0 і $\mathcal{X}(\lambda)$ – оборотні, $a_1, a_2, \dots, a_m \in I$. Тоді існує єдиний розв'язок в $K^{\mathbb{N}_0}$ рівняння (3.33). Кожен його елемент буде квазіполіномом λ*

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^{n+k} \sum_{j=0}^{s} p_j (n+k)^j, \;\; n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.38}$$

де ряд збігається за I-адичною топологією.

Доведення. За теоремою 3.21, існує розв'язок виду (3.35) рівняння (3.33). За наслідком 3.3, цей розв'язок є єдиним і дорівнює (3.2). ■

Теорема 3.23. *Нехай K є локальною нетеровою областю характеристики нуль (означення 1.9 і 1.10). Нехай a_0 оборотний, а $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не є оборотними елементами. Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (3.33). Він є послідовністю квазіполіномів з коефіцієнтом λ, і дорівнює $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, де w_n знаходиться за формулою (3.38).*

Доведення. Нагадаємо, що будь-яка локальна нетерова область має єдиний максимальний ідеал. Позначимо його $\mathcal{I}$. Тоді $a_0 \notin I$ і $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$. За теоремою Крулля (теорема 1.2), $\bigcap_{n\geq 0} I^n = \{0\}$. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$, то $a_m\lambda^m + \ldots + a_1\lambda$ необоротний. Елемент $\mathcal{X}(\lambda) - a_m\lambda^m - \ldots - a_1\lambda$ дорівнює a_0, тому він оборотний. Отже, $\mathcal{X}(\lambda)$ оборотний. Тепер достатньо скористатися попередньою теоремою для завершення доведення. ■

Висновки до розділу 3

У цьому розділі ми розглянули неоднорідне різницеве рівняння m-того порядку. Для довільних кілець знайдено повну відповідь на питання 1.3 для випадку фінітної неоднорідності. Для кілець, в яких можна ввести неархімедове нормування або квазі нормування, були сформульовані достатні умови єдиності і існування розв'язку цього рівняння, тобто дана часткова відповідь на питання 1.3. Також були вивчені такі рівняння для неоднорідностей, що є значеннями квазіполінома в цілих точках. Також були сформульовані достатні умови єдиності і існування розв'язку такого рівняння і був знайдений цей розв'язок у явному вигляді для локальної нетерової області.

Крім того були вивчені різницеві рівняння першого порядку в кільці поліномів і досліджені властивості поліноміальних розв'язків таких рівнянь

Основні результати розділу:

- Теореми 3.5, 3.9 та 3.13, де сформульовані достатні умови єдиності розв'язку для випадків різних кілець.

- Теореми 3.6, 3.10 та 3.14, в яких сформульовані достатні умови існування розв'язку для випадку, коли поле часток кільця повне, а також знайдений загальний вигляд розв'язку у вигляді рядів, збіжних за неархімедовою топологією.

- Теореми 3.18 і 3.19 про рівняння в кільці поліномів, що дозволяють простіше знаходити розв'язки таких рівнянь, чи доводити неіснування розв'язку

Результати розділу були опубліковані в [5] і частково в розділі 4 статті [9]. Деякі результати, що стосуються кільця цілих чисел, були опубліковані в [4].

ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА НЕЯВНЕ ЛІНІЙНЕ РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

В цьому розділі вивчається операторне рівняння першого порядку, що є узагальненням як диференціального рівняння, так і різницевого, які розглядалися у попередніх розділах.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ – це послідовність додатних цілих чисел, таких що виконуються наступні умови:

Умова 4.1. *нескінченно багато членів α_i цієї послідовності більше одиниці;*

Умова 4.2. *для будь-якого простого p, або жодне з α_i не ділиться на p, або існує нескінченно багато α_i, що діляться на p.*

Нехай оператор оператор A діє на кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами на кшталт

$$A(w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots.$$

Розглядатимемо рівняння

$$(Aw)(x) + f(x) = w(x), \tag{4.1}$$

де $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots \in \mathbb{Z}[[x]]$. Будемо шукати розв'язок цього рівняння в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$.

Зазначимо, що якщо розглядатимемо $\alpha = (1, 2, 3, 4, \ldots)$, тоді описані вище умови 4.1 і 4.2 виконуватимуться, при чому A буде диференціальним оператором, і рівняння (4.1) матиме вигляд $w'(x) + f(x) = w(x)$.

У випадку, якщо $\alpha = (b, b, b, b, \ldots)$, $b \neq 1$, так само виконуватимуться умови 4.1 і 4.2, і $A = b \cdot S^*$, де S^* – оператор лівого зсуву над кільцем $\mathbb{Z}[[x]]$.

4.1 Лінійні рівняння з узагальненим оператором лівого зсуву

Почнемо з доведення єдиності розв'язку рівняння (4.1) в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$.

Лема 4.1. *Рівняння (4.1) має не більше як один розв'язок в* $\mathbb{Z}[[x]]$.

Доведення. Достатньо довести, що однорідне рівняння $Aw(x) = w(x)$ має тільки тривіальний розв'язок. Нехай $w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots$ є розв'язком цього рівняння. Тоді

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots .$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо, що $w_n = \alpha_{n+1} w_{n+1}$ для всіх n. Тобто маємо ланцюжок рівнянь

$$w_n = \frac{w_{n-1}}{a_n} = \frac{w_{n-2}}{a_n a_{n-1}} = \ldots .$$

Отже, $w_n = \frac{w_0}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ для будь-якого n. Оскільки всі коефіцієнти формального степеневого ряду $w(x)$ цілі, а серед цілих коефіцієнтів α_i нескінченно багато таких, що не дорівнюють одиниці, то послідовність $\{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ необмежена. Отже, існуватиме n таке, що $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ більше за w_0. Тоді $w_n = \frac{w_0}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ може бути цілим тільки за умови, що $w_0 = 0$. Тоді будь-яке $w_n = 0$, що означає, що $w(x) = 0$. ∎

Зауваження 4.1. *Доведення попередньої леми спиралося на той факт, що послідовність* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *має нескінченно членів, що більше за 1 (умова 4.1). Ця умова дійсно є істотною для єдиності. Існує нескінченно багато розв'язків рівняння (4.1) в* $\mathbb{Z}[[x]]$ *якщо* $\alpha_n = 1$ *для всіх* n *більших за деяке* n_0*. Дійсно, розв'язуючи однорідне рівняння* $Aw(x) = w(x)$ *ми отримуємо*

$$w_n = \frac{w_0}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \frac{w_0}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n_0}}$$

для всіх $n \geq n_0$*. Обираючи будь-яке* w_0*, що ділиться на* $\alpha_1 \alpha_2 \ldots a_{n_0}$*, ми отримуємо розв'язок однорідного рівняння.*

Наступна лема описує просту ситуацію, в якій неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок.

Лема 4.2. *Рівняння* (4.1), *де* $f(x) = f_0 + f_1x + \ldots + f_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ *є поліномом, має рівно один розв'язок з кільця* $\mathbb{Z}[x]$.

Доведення. Для всіх $i \geq n$ $(A^i f)(x)$ дорівнює нулю. Розглянемо суму

$$\sum_{i=0}^{\infty}(A^i f)(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots.$$

Вона дорівнює

$$\sum_{i=0}^{n}(A^i f)(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots,$$

тому вона є поліномом. Також нескладно перевірити, що ця сума є розв'язком. Дійсно,

$$\begin{aligned} A\left[f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots\right] + f(x) = \\ = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.2}$$

■

Зауваження 4.2. *Зазначимо, що суму з доведення попередньої леми можна знайти, застосовуючи такі самі міркування, як і для випадку диференційного та різницевого рівнянь, що були описані в доведенні теореми* 2.1 *та теореми* 3.1. *Якщо позначимо* $P(x) = x - I$, *то рівняння* (4.1) *перепишеться у вигляді* $P(A)w = -f$. *В кільці формальних степеневих рядів поліном* $P(x)$ *є оборотним. Тому розв'язком цього рівняння буде* $-P(A)^{-1}f$. *Оскільки зворотний елемент до поліному* $-P(A)$ *дорівнює*

$$-P(x) {-} 1 = (I - x)^{-1} = I + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

то

$$-P(A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \ldots.$$

Як було вже доведено, $(I + A + A^2 + A^3 + \ldots)f$ *є поліномом. Тому він і є розв'язком рівняння* (4.1).

З лем 4.1 та 4.2 випливає наступне твердження.

Теорема 4.1. *Множина формальних степеневих рядів $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, такими що рівняння (4.1) має розв'язок з цілими коефіцієнтами, є незліченною. Крім того, це є щільний підмодуль простору формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами за топологією Крулля.*

Доведення. Дійсно, можна побудувати неоднорідність, якщо ми знаємо розв'язок, у наступний спосіб: $f(x) = w(x) - (Aw)(x)$. Для різних $w(x)$ ми отримаємо різні $f(x)$, інакше це означало б, що рівняння з такою неоднорідністю мало б хоча б два розв'язки. Оскільки множина множина формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами є незліченною, то ми маємо незліченно рядів, які можуть бути розв'язками, а отже, незліченно рядів $f(x)$, для яких рівняння (4.1) має розв'язок. Також для всіх поліноміальних неоднорідностей рівняння має розв'язок (і він також є поліномом), і множина поліномів є щільною в $\mathbb{Z}[[x]]$ за топологією Крулля. Тому множина формальних степеневих рядів $f(x)$ з цілими коефіцієнтами таких, що рівняння (4.1) має розв'язок з цілими коефіцієнтами, є щільною за топологією Крулля. ■

Приклад 4.1. Розглянемо рівняння (4.1), де $a = (2, 2, 2, 2, \ldots)$ і $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$,

$$2(S^*y)(x) + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = w(x). \tag{4.3}$$

Нескладно перевірити, що $w(x) = -1-x-x^2-x^3-\ldots = -f(x)$ є розв'язком цього рівняння з $\mathbb{Z}[[x]]$. Дійсно, $-2f(x) + f(x) = -f(x)$. За теоремою 4.1 цей розв'язок є єдиним.

Наступні приклади демонструють, що рівняння (4.1) не обов'язково має розв'язок з $\mathbb{Z}[[x]]$.

Приклад 4.2. Розглянемо рівняння (4.1) з $a = (3, 3, 3, 3, \ldots)$ і $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, тобто

$$3(S^*y)(x) + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = w(x). \tag{4.4}$$

Доведемо, що воно не має жодного розв'язку з $\mathbb{Z}[[x]]$. Якщо $w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots$ є розв'язком цього рівняння, то виконується наступна рівність:

$$3w_1 + 3w_2 x + 3w_3 x^2 + \ldots + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots.$$

Розв'язання такого рівняння зводиться до знаходження послідовності $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, $w_n \in \mathbb{Z}$ такої що для всіх n виконуються рівності $3w_{n+1} + 1 = w_n$. Зазначимо, що послідовність $\{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ також має задовольняти ці рівності. Оскільки розв'язок є єдиним за теоремою 4.1, послідовність $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, що задовольняє рівності також має бути єдиною. Тому послідовності $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ і $\{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ повинні збігатися. Оскільки $w_n = w_{n+1}$ для всіх n, то $w_n = -\frac{1}{2}$, що не є цілим числом. Робимо висновок, що це рівняння не має розв'язків з цілими коефіцієнтами.

Приклад 4.3. Розглянемо рівняння (4.1), де $a = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ і $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, тобто

$$w'(x) + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = w(x). \tag{4.5}$$

Доведемо, що це рівняння не має жодного розв'язку з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$. Якщо $w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots$ є розв'язком цього рівняння, то маємо

$$w_1 + 2w_2 x + 3w_3 x^2 + 4w_4 x^3 \ldots + 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots.$$

Тоді для послідовності $\{w_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, $w_n \in \mathbb{Z}$ мають виконуватися рівності $nw_n + 1 = w_{n-1}$ для всіх n. Тобто, $w_{n+1} = \frac{w_n - 1}{n+1}$ для всіх n.

Жоден з коефіцієнтів w_i не має дорівнювати нулю. Дійсно, якщо $w_0 = 0$, то $w_1 = -1, w_2 = -1, w_3 = -\frac{2}{3}$. Але ми припускали, що коефіцієнти цілі. Так само, якщо $w_n = 0$, то $w_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, що не є цілим числом для будь-якого $n \geq 1$.

Нехай тепер $w_n \neq 0$ для всіх n. Розглянувши $|w_n|$ отримуємо, що

$$|w_n| \leq \frac{1}{n}(|w_{n-1}|+1) = \frac{1}{n}|w_{n-1}| + \frac{1}{n},$$

оскільки $w_n = \dfrac{w_{n-1}-1}{n}$ для всіх n. Для $n > 2$ маємо

$$\frac{1}{n}|w_{n-1}| + \frac{1}{n} < \frac{1}{n}|w_{n-1}| + \frac{n-1}{n}|w_{n-1}| = |w_{n-1}|,$$

оскільки $\frac{1}{n} < \frac{n-1}{n}$ при $n > 2$, а $|w_{n-1}| \geq 1$. Загалом маємо, що $|w_n| < |w_{n-1}|$ для будь-якого $n > 2$, тобто $\{|w_n|\}_{n=0}^{\infty}$ є спадною послідовністю натуральних чисел, чого не може бути.

Зауваження 4.3. *Існує нескінченно багато розв'язків рівняння (4.1) в кільці $\mathbb{Q}[[x]]$: ми можемо знайти єдиний розв'язок цього рівняння для кожного початкового значення $y(0) \in \mathbb{Q}$.*

4.2 Збіжність розв'язку за α-адичною топологією

Позначимо за $\hat{\alpha}$ послідовність, що отримана з послідовності $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ видаленням всіх елементів a_k, що дорівнюють одиниці. (Наприклад, з послідовності $\alpha = (3,1,1,4,1,5,6,\ldots)$, то $\hat{\alpha} = (3,4,5,6,\ldots)$.) Оскільки α відповідає умові 4.1, $\hat{\alpha}$ є нескінченною послідовністю цілих чисел, більших за 1. Нехай $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ – кільце $\hat{\alpha}$-адичних цілих чисел (побудова таких чисел описана в Розділі 1.3). Оскільки $\hat{\alpha}$-адична метрика є неархімедовою, а кільце $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ – повне, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, де $x_n \in \mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ є збіжним в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ тоді і тільки тоді, коли $x_n \to 0$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$.

Спочатку розглянемо питання щодо розв'язуваності рівняння $Aw + f(x) = w$ в кільці $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$.

Теорема 4.2. *Рівняння (4.1) має такий єдиний розв'язок в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$:*

$$w(x) = f(x) + (Af)(x) + (A^2 f)(x) + (A^3 f)(x) + \ldots, \tag{4.6}$$

де сума в правій частині рівності є збіжною в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ в топології покоефіцієнтної збіжності.

Доведення. Доведемо спочатку єдиність. Розв'язуючи однорідне рівняння $Aw = w$, ми отримуємо рекурентну формулу $w_n = \alpha_{n+1}w_{n+1}$. Тобто $w_0 = \alpha_1 \dots \alpha_n w_n$. Відмітимо, що послідовність $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ прямує до нуля в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$, бо $\sigma(\alpha_1 \dots \alpha_n, 0) = 2^{-n}$. Тому $w_0 = 0$. За рекурентною формулою, ми отримуємо $w_n = 0$ для всіх $n \geq 1$. Отже, $w = 0$.

Тепер розглянемо неоднорідне рівняння. Нехай

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Розглянемо формальну суму

$$f(x) + (Af)(x) + (A^2f)(x) + (A^3f)(x) + \ldots.$$

Будь-який формальний степеневий ряд $g(x)$ може бути представлений у вигляді

$$g(x) = g(0) + \frac{(Ag)(0)}{\alpha_1}x + \frac{(A^2g)(0)}{\alpha_1\alpha_2}x^2 + \frac{(A^3g)(0)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}x^3 + \ldots.$$

Це деякий аналог розкладу в ряд Тейлора. Розкладемо кожний член ряду таким чином і перегрупуємо доданки. Отримаємо

$$\begin{aligned}
&f(x) + (Af)(x) + (A^2f)(x) + (A^3f)(x) + \ldots \\
&= \left[f(0) + \frac{Af(0)}{\alpha_1}x + \frac{A^2f(0)}{\alpha_1\alpha_2}x^2 + \ldots\right] + \left[Af(0) + \frac{A^2f(0)}{\alpha_1}x + \frac{A^3f(0)}{\alpha_1\alpha_2}x^2 + \ldots\right] \\
&\qquad + \left[A^2f(0) + \frac{A^3f(0)}{\alpha_1}x + \frac{A^4f(0)}{\alpha_1\alpha_2}x^2 + \ldots\right] + \ldots \\
&= \left[f(0) + Af(0) + A^2f(0) + \ldots\right] + \left[\frac{Af(0)}{\alpha_1} + \frac{A^2f(0)}{\alpha_1} + \frac{A^3f(0)}{\alpha_1} + \ldots\right]x \\
&\qquad + \left[\frac{A^2f(0)}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{A^3f(0)}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{A^4f(0)}{\alpha_1\alpha_2} + \ldots\right]x^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Спочатку покажемо, що кожен ряд, що відіграє роль коефіцієнта при степені x, збігатиметься в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$. Дійсно, n-тий доданок з коефіцієнту при x^m матиме вигляд

$$\frac{(A^{m+n}f)(0)}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot a_m} = a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{m+n}f_{m+n}.$$

Зазначимо, що він прямує до нуля в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ при $n \to \infty$. Дійсно, для будь-якого j існує n таке, що $a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_{m+n}$ ділиться на a_j, тому що за умовою

4.2 кожен простий дільник a_j також є дільником нескінченної кількості α_i. Оскільки кожен з членів ряду прямує до нуля, ряд збігається. Тобто коефіцієнт при x^m належить $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ для будь-якого m. Маємо, що права частина (4.6) є коректно визначеною як елемент з $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$. Аналогічно до (4.2) перевіряємо, що цей ряд є розв'язком (4.1). ■

Наступна теорема є критерієм того, що рівняння (4.1) має розв'язок в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$.

Теорема 4.3. *Нехай* $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots$. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1. $f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}$ *в* $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$*;*
2. *Рівняння* $Aw + f(x) = w$ *має розв'язок в* $\mathbb{Z}[[x]]$.

Доведення. За теоремою 4.2, єдиний розв'язок рівняння $Aw + f(x) = w$ має вигляд (4.6). Доведемо, що при виконанні твердження 1, цей розв'язок належить $\mathbb{Z}[[x]]$, тобто що коефіцієнт при x^n в розв'язку (4.6) є цілим для будь-якого n. Доводитимемо за індукцією по n. Для w_0 маємо

$$w_0 = f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1\alpha_2 f_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 f_3 + \ldots.$$

Воно ціле за припущенням. Нехай k-тий коефіцієнт

$$w_k = f_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} f_{k+2} + \ldots$$

є цілим. Доведемо, що $k+1$-ший коефіцієнт

$$w_{k+1} = f_{k+1} + \alpha_{k+2} f_{k+2} + \alpha_{k+2}\alpha_{k+3} f_{k+3} + \ldots$$

також є цілим. Можна виразити $w_{k+1} = \frac{w_k - f_k}{\alpha_{k+1}}$. Оскільки $f_k \in \mathbb{Z}$, робимо висновок, що

$$w_k - f_k = \alpha_{k+1} f_{k+1} + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} f_{k+2} + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3} f_{k+3} + \ldots$$

є цілим. Треба довести, що сума цього ряду ділиться на α_{k+1}. Для цього доведемо наступну лему.

Лема 4.3. *Нехай* $\{r_n\}$ *є послідовністю елементів* $\mathbb{Z}$. *Якщо* $\alpha_k r_n \to l$ *в* $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ *при* $n \to \infty$, *то* $\alpha_k | l$.

Доведення. Оскільки $\alpha_k r_n \to l$, то $\sigma_\alpha(\alpha_k r_n, l) \to 0$, де σ_α – стандартна метрика в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ (див. Розділ 1.3). Тоді існує n_0 таке що $\alpha_k r_n - l$ ділиться на α_k для всіх $n > n_0$. Отже, l ділиться на α_k і $r_n \to \frac{l}{\alpha_k}$. ■

Отже, якщо кожний елемент ряду, що розглядається в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$, ділиться на α_k, тоді сума цього ряду також ділиться на α_k. Більше того, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k r_n = l$, то $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{l}{\alpha_k}$.

Повернемося до доведення теореми. Всі доданки ряду

$$\alpha_{k+1} f_{k+1} + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2} f_{k+2} + \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\alpha_{k+3} f_{k+3} + \ldots,$$

сума якого дорівнює $w_k - f_k$, діляться на α_{k+1}. Використовуючи лему послідовно для всіх доданків α_{k+1}, отримуємо, що сума цього ряду також ділиться на α_{k+1}. Отже, сума ряду

$$f_{k+1} + \alpha_{k+2} f_{k+2} + \alpha_{k+2}\alpha_{k+3} f_{k+3} + \ldots = \frac{w_k - f_k}{\alpha_{k+1}}$$

є цілою. ■

4.3 Диференціальні рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел

Якщо $a = (b, 2b, 3b, 4b, 5b, \ldots)$, то рівняння (4.1) є диференціальним і записується у вигляді

$$bw'(x) + f(x) = w(x). \tag{4.7}$$

За теоремою 4.3 розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді ряду

$$w(x) = f(x) + bf'(x) + b^2 f''(x) + b^3 f'''(x) + \ldots, \tag{4.8}$$

що збігається в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$ і рівняння має розв'язок в $\mathbb{Z}[[x]]$ тоді і тільки тоді, коли

$$f_0 + bf_1 + 2!b^2 f_2 + 3!b^3 f_3 + 4!b^4 f_4 + \ldots \in \mathbb{Z}.$$

Крім того, в цьому випадку можна сформулювати іншу умову існування розв'язку цього рівняння. Для цього доведемо наступну лему.

Лема 4.4. *Нехай $c \in \mathbb{Z}$ і $\{r_n\}$ є послідовностями з $\mathbb{Z}$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. *$r_n \to c$ в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$, де $a = (b, 2b, 3b, 4b, \ldots)$;*
2. *$r_n \to c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх простих p.*

Доведення. Твердження (1) означає, що $\sigma_\alpha(r_n, c) \to 0$. Тоді для кожного натурального m існує n_0, таке що $r_n - c$ ділиться на $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m = m!b^{m+1}$ для всіх $n > n_0$. Тобто для будь-якого степеня k простого числа p існує n_0, таке що $r_n - c$ ділиться на p^k для всіх $n > n_0$. Це означає, що $||r_n - c||_p \to 0$, де $||\cdot||_p$ є стандартною p-адичною нормою в $\mathbb{Z}_p$.

Зворотну імплікацію можна довести так само, оскільки $m!b^{m+1}$ записується як добуток простих чисел. ■

З цієї леми і теореми 4.3 прямо випливає наступний результат.

Теорема 4.4. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1. *Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $f_0 + 1!bf_1 + 2!b^2f_2 + \ldots = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх простих p.*
2. *Рівняння $bw' + f(x) = w$ має розв'язок з $\mathbb{Z}[[x]]$.*

Приклад 4.4. Розглянемо рівняння (4.5). За теоремою це рівняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли існує таке ціле число, що

$$1 + 1! + 2! + 3! + 4! + \ldots$$

збігається до нього в $\mathbb{Z}_p$ для всіх p. В прикладі (4.3) показано, що воно не має жодного розв'язку з $\mathbb{Z}[[x]]$.

З цього маємо, що якщо для всіх простих p ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ збігається до є цілого числа в $\mathbb{Z}_p$, то це не може бути одне і те саме ціле число.

Зауваження 4.4. Наскільки нам відомо, питання, чи збігається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ до раціонального числа в $\mathbb{Q}_p$, залишається відкритим, однак, Драговіч в [46] показав, що цей ряд не може збігатися до одного і того самого раціонального числа для всіх $\mathbb{Q}_p$.

Приклад 4.5. Розглянемо рівняння $w'(x)+x+2x^2+3x^3+\ldots = w(x)$.

Добре відомо, що $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+\ldots = -1$ в $\mathbb{Z}_p$ для будь-якого p. Дійсно, неважко довести за індукцією, що

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+4\cdot 4!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1.$$

В будь-якому $\mathbb{Z}_p$ послідовність $(n+1)!$ прямує до нуля, тому $(n+1)!-1$ прямує до -1. Звідси випливає, що розглянуте рівняння має розв'язок. Неважко перевірити, що розв'язком буде ряд

$$w(x) = -1-x-x^2-x^3-\ldots.$$

4.4 Різницеві рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел

Нехай $b \in \mathbb{N}$ і $\alpha = (b, b, b, b, \ldots)$. Тоді $A = bS^*$, де S^* є оператором лівого зсуву на кільці формальних степеневих рядів і рівняння (4.1) можна записати як

$$b(S^*w)(x)+f(x) = w(x). \tag{4.9}$$

Зазначимо, що у разі, коли $b=1$, рівняння (4.9) має нескінченно багато розв'язків в $\mathbb{Z}[[x]]$, тоді як в інших випадках – не більше як один розв'язок. Будемо розглядати випадок, коли $b>1$, оскільки інакше умова 4.1 не буде виконуватись. Тоді $\hat{\alpha}$ збігається з a, тому $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}} = \mathbb{Z}_a$.

За теоремою 4.3 рівняння має розв'язок з $Z[[x]]$ тоді і тільки тоді, коли $f_0+bf_1+b^2f_2+b^3f_3+\ldots \in \mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}_\alpha$, і цей розв'язок записується у вигляді

$$w(x) = f(x)+bS^*(f)(x)+b^2(S^*)^2(f)(x)+b^3(S^*)^3(f)(x)+b^4(S^*)^4(f)(x)+\ldots.$$

В цьому випадку можемо переформулювати теорему 4.3, скориставшись наступною лемою.

Лема 4.5. *Нехай $c \in \mathbb{Z}$ і $\{r_n\}$ є послідовністю з $\mathbb{Z}$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. $r_n \to c$ в $\mathbb{Z}_\alpha$, де $\alpha = (b, b, b, \ldots)$;

2. $r_n \to c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх простих дільників b.

Доведення. Твердження (1) означає, що $\sigma_\alpha(r_n, c) \to 0$. Тоді для кожного натурального m існує n_0, таке що $r_n - c$ ділиться на $\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m = b^m$ для всіх $n > n_0$. Якщо p є дільником b, то $r_n - c$ ділиться на p^m. Тоді для всіх степенів k простого числа $p|b$ існує таке n_0, що $r_n - c$ ділиться на p^k для всіх $n > n_0$. Отже, $||r_n - c||_p \to 0$.

Зворотну імплікацію можна довести так само, оскільки b^m записується як добуток простих дільників b. ■

З цього прямо випливає наступний результат.

Теорема 4.5. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1. *Існує таке $c \in \mathbb{Z}$, що $f_0 + bf_1 + b^2 f_2 + b^3 f_3 + \ldots = c$ в $\mathbb{Z}_p$ для всіх p, які є простими дільниками b.*
2. *Рівняння $b(S^* w) + f(x) = w$ має розв'язок в $\mathbb{Z}[[x]]$.*

Приклад 4.6. Розглянемо рівняння (4.3). В цьому випадку

$$f_0 + bf_1 + b^2 f_2 + b^3 f_3 + \ldots = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots.$$

Оскільки

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1 \to -1 \text{ в } \mathbb{Z}_2$$

при $k \to \infty$, то $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots = -1$ в $\mathbb{Z}_2$.

Приклад 4.7. Тепер розглянемо рівняння (4.4). В цьому випадку

$$f_0 + bf_1 + b^2 f_2 + b^3 f_3 + \ldots = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots \notin \mathbb{Z}$$

в $\mathbb{Z}_3$. Оскільки

$$1+3+3^2+3^3+\ldots+3^k = \frac{3^{k+1}-1}{2} \to -\frac{1}{2} \text{ в } \mathbb{Z}_3,$$

то $1+3+3^2+3^3+\ldots = -\frac{1}{2}$ в $\mathbb{Z}_3$. Отже, ми показали в інший спосіб, що це рівняння не має розв'язків $\mathbb{Z}[[x]]$.

4.5 Згортка над $\mathbb{Z}_a$ і фундаментальний розв'язок оператора $A-I$

В Розділі 2.4 була описана конструкція, яка дозволяла записати розв'язок диференціального рівняння у вигляді згортки фундаментального розв'язку, який залежав тільки від лівої частини рівняння з неоднорідністю. В цьому розділі ми у подібний спосіб означимо фундаментальний розв'язок оператора $A-I$ і запишемо розв'язок рівняння 4.1 у вигляді згортки.

Означимо згортку ряду Лорана

$$Q(x) = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \frac{q_3}{x_3} \ldots \in \frac{1}{x}\mathbb{Z}[[\frac{1}{x}]]$$

з формальним степеневим рядом

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots \in \mathbb{Z}[[x]]$$

над $\mathbb{Z}_\alpha$ подібно до формули (2.19).

Означення 4.1. *Нехай q_i ділиться на $\alpha_1\alpha_2\ldots a_{i-1}$. Покладемо за означенням*

$$(Q*f)_A = q_1 f - \frac{q_2 A(f)}{\alpha_1} + \frac{q_3 A^2(f)}{\alpha_1\alpha_2} - \frac{q_4 A^3(f)}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \ldots. \tag{4.10}$$

Коефіцієнт при x^n в (4.10) дорівнює

$$q_1 f_n - \frac{q_2 \alpha_{n+1} f_{n+1}}{\alpha_1} + \frac{q_3 \alpha_{n+1} a_{n+2} f_{n+2}}{\alpha_1\alpha_2} - \frac{q_4 \alpha_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} f_{n+3}}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \ldots.$$

Оскільки $\frac{q_i}{\alpha_1\ldots a_{i-1}}$ є цілим і $\alpha_{n+1}a_{n+2}\cdot\ldots\cdot a_{n+i-1}$ прямує до нуля в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$ при $i\to\infty$, цей ряд збігається в $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$. Тому згортка належить $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}[[x]]$.

За теоремою 4.2, отримуємо наступний результат.

Теорема 4.6. *Нехай існує розв'язок рівняння* (4.1), *який належить* $\mathbb{Z}[[x]]$. *Тоді цей розв'язок має вигляд* $\mathcal{E} * f$, *де*

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{x} - \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{x^3} - \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{x^4} + \dots . \tag{4.11}$$

Тобто, ми можемо розглядати ряд (4.11) як фундаментальний розв'язок оператора $A - I$.

Для часткового випадку, тобто для рівняння (4.9), можна переписати ці означення і теорему наступним чином:

Означення 4.2. *Нехай* $Q(x) = \frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x^2} + \frac{q_3}{x^3} + \dots$, *де* q_i *прямує до нуля в* $\mathbb{Z}_p$ *і* $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots$. *За означенням покладемо*

$$(Q * f)(x) = q_1 f(x) - q_2 S^* f(x) + q_3 (S^*)^2 f(x) - q_4 (S^*)^3 f(x) + \dots . \tag{4.12}$$

Коефіцієнт при x^n в (4.12) дорівнює $q_1 f_n - q_2 f_{n+1} + q_3 f_{n+2} - q_4 f_{n+3} + \dots$. Оскільки $q_{i+1} f_{n+i}$ прямує до нуля при $i \to \infty$ в $\mathbb{Z}_p$, то ряд (4.12) збігається, тому ця згортка є коректно визначене відображення $\frac{1}{x}\mathbb{Z}[[\frac{1}{x}]] \times \mathbb{Z}[[x]] \to \mathbb{Z}_p$.

Теорема 4.7. *Нехай існує розв'язок рівняння* (4.9), *який належить* $\mathbb{Z}[[x]]$. *Тоді цей розв'язок має вигляд згортки* $\Delta_b * f$, *де*

$$\Delta_b(x) = \frac{1}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} - \frac{b^3}{x^4} + \dots . \tag{4.13}$$

Доведення. Коефіцієнт при x^n в $\Delta_b * f$ дорівнює

$$f_n + b f_{n+1} + b^2 f_{n+2} + b^3 f_{n+3} + \dots .$$

Тобто ця теорема також є прямим наслідком теореми 4.2. ■

Таким чином ми можемо розглядати ряд (4.13) як фундаментальний розв'язок оператора $b\Delta - I$.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглядалося лінійне неоднорідне операторне рівняння першого порядку $Aw(x)+f(x) = w(x)$ над кільцем цілих чисел, частковими випадками якого є різницеві і диференціальні рівняння першого порядку. Було знайдено єдиний розв'язок цього рівняння в поповненні кільця цілих чисел відносно деякої неархімедової метрики (теорема 4.2), який є цілим розв'язком цього рівняння, якщо всі його коефіцієнти збігаються до елементів з кільця $\mathbb{Z}$. Доведено, що для цього достатньо, щоб тільки перший коефіцієнт збігався до цілого числа (теорема 4.3). Ці теореми уточнені для часткових випадків різницевого і диференціального рівнянь.

Також описані відповідні згортки і фундаментальні розв'язки для операторного і різницевого рівнянь першого порядку.

Основні результати розділу:

- Теорема 4.2 про існування, єдиність і загальний вигляд розв'язку операторного рівняння $Aw(x) + f(x) = w(x)$.

- Теорема 4.3 про збіжність коефіцієнтів в кільці цілих чисел.

- Теорема 4.6 про фундаментальний розв'язок оператора $A - I$.

Результати цього розділу дають можливість поєднати розглянуті класи лінійних різницевих і диференціальних рівнянь як часткові випадки операторного рівняння.

Результати розділу були опубліковані в [8].

ПРАВИЛО КРАМЕРА

В цьому розділі буде розглянуто розв'язання за допомогою аналога метода Крамера

5.1 Для різницевого рівняння

Нехай F – поле нульової характеристики з неархімедовим нормуванням $|\cdot|$ і для рівняння (3.1) виконуються умови теореми 3.6. Це рівняння можна представити як нескінченну систему лінійних рівнянь. Оскільки, на відміну від звичайної, в нашій ситуації (над кільцем K – кільцем нормування поля F) вона має єдиний розв'язок, є сенс шукати його за допомогою методів, що підходять для систем з єдиним розв'язком, наприклад, правила Крамера. Будемо доводити, що єдиний розв'язок рівняння над кільцем K може бути знайдений за допомогою аналога правила Крамера.

Оскільки a_0 є оборотним, без втрати загальності можемо розглядати наступне рівняння замість (3.1):

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \ldots + a_1 w_{n+1} + w_n = f_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.1)$$

Тоді, позначивши вектор $(f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \ldots)^\intercal$ за $\mathbf{f}^i$, можемо записати це рівняння у вигляді нескінченної лінійної системи рівнянь

$$\mathcal{A}\mathbf{w}^0 = \mathbf{f}^0, \text{ де } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Будемо позначати за $\mathcal{A}_{n,\mathbf{x}}$ матрицю, отриману з матриці $\mathcal{A}$ заміною $n+1$-того стовпця на вектор $\mathbf{x}$.

Позначимо за Δ_j головний кутовий мінор $(j+1)$-ого порядку (тобто такий, що в ньому викреслені всі рядки і стовпці окрім перших $(j+1)$-

ого) матриці $\mathcal{A}$. Відповідно, за $\Delta_{n,\mathbf{f}^0;j}$ позначимо головний кутовий мінор $(j+1)$-ого порядку матриці $\mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0}$.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови теореми 3.6. Тоді єдиний розв'язок рівняння (3.1) над кільцем K можна знайти за допомогою аналога правила Крамера:*

$$w_n = \frac{\det \mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0}}{\det \mathcal{A}}, \ n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.2}$$

де визначники матриць $\mathcal{A}$ і $\mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0}$ означені як наступні границі послідовностей в K за нормуванням $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r, \quad \det \mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0} = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,\mathbf{f}^0;r}, \ n = 0, 1, 2, \dots$$

Доведення. З теорем 3.5 та 3.6 випливає, що рівняння (3.1) має єдиний розв'язок над кільцем K, і цей розв'язок дорівнює (3.2). Покажемо, що цей розв'язок збігається з розв'язком, що ми отримуємо, застосовуючи формули Крамера (5.2).

Зазначимо, що $\Delta_r = 1$ для будь-яких r, тому $\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r = 1$, тому достатньо перевірити, що $w_n = \det \mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, де w_n знайдений за формулами (3.2), а $\det \mathcal{A}_{n,\mathbf{f}^0} = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,\mathbf{f}^0;r}$.

Розглянемо спочатку

$$\mathcal{A}_{1,\mathbf{f}^0}, = \begin{pmatrix} f_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots \\ f_1 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots \\ f_3 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Позначимо за B_k визначник, утворений з перших k стовпців та рядків матриці

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

та додамо за означенням $B_0 = 1$. Якщо додатково означити $a_i = 0$ для всіх $i > m$, то для будь-якого k, визначник матиме вигляд

$$B_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи $\Delta_{0,\mathbf{f}^0;j}$ за першим стовпцем, ми отримуємо часткові суми ряду

$$f_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j f_j B_j,$$

тому, за означенням маємо

$$\det \mathcal{A}_{1,\mathbf{f}^0} = \lim_{r\to\infty} f_0 + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j f_j B_j = f_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j f_j B_j.$$

Тепер доведемо, що часткові суми цього ряду збігаються з сумами $\sum_{k=0}^{r} y_k f_k$, тобто що $y_k = (-1)^k B_k$ для $k \geq 1$.

Нескінченна система рівнянь

$$\begin{cases} y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_k y_0 = 0, & k = 1, \ldots, m-1 \\ y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = 0, & k = m, m+1, m+2, \ldots \end{cases} \tag{5.3}$$

з початковим значенням $y_0 = 1$ має єдиний розв'язок $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тому достатньо довести, що $\{(-1)^k B_k\}_{k=0}^{\infty}$ є розв'язком цієї системи.

Розкладаючи B_k відносно першого рядка, отримуємо

$$\begin{cases} B_k = a_1 B_{k-1} - a_2 B_{k-2} + a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^{m-1} a_m B_{k-m} & \text{, якщо } k \geq m \\ B_k = a_1 B_{k-1} - a_2 B_{k-2} + a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^{k} a_k B_0 & \text{, якщо } k < m \end{cases}$$

Тому,

$$\begin{cases} B_k - a_1 B_{k-1} + a_2 B_{k-2} - a_3 B_{k-3} - \ldots + (-1)^{k+1} a_k B_0 = 0 & \text{, якщо } k < m \\ B_k - a_1 B_{k-1} + a_2 B_{k-2} - a_3 B_{k-3} + \ldots + (-1)^{m} a_m B_{k-m} = 0 & \text{, якщо } k \geq m \end{cases}$$

Згадаємо, що ми означили $B_0 = 1$, тобто $\{(-1)^k B_k\}_{k=0}^{\infty}$ є розв'язком (5.3) з початковим значенням $B_0 = 1$. Звідки $y_k = (-1)^k B_k$ для будь-якого k. Отримуємо, що

$$\det \mathcal{A}_{1,\mathbf{f}^0} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k f_k = w_0.$$

Тепер розглянемо $\mathcal{A}_{j+1,\mathbf{f}^0}$ і його головний кутовий мінор i-того порядку. Зауважимо, що нас цікавить границя цих мінорів при i, що прямує до нескінченності, тому достатньо розглянути i, для яких $i > j+1$ та $i > m$. В цьому випадку мінор має вигляд

$$\left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{j-2} & a_{j-1} & f_0 & a_{j+1} & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\
0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{j-3} & a_{j-2} & f_1 & a_j & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots \\
0 & 0 & 1 & \cdots & a_{j-4} & a_{j-3} & f_2 & a_{j-1} & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 & f_{j-1} & a_3 & \cdots & a_{m-j-1} & a_{m-j} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & f_j & a_2 & \cdots & a_{m-j-2} & a_{m-j-1} & \cdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+1} & a_1 & \cdots & a_{m-j-3} & a_{m-j-2} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+2} & 1 & \cdots & a_{m-j-4} & a_{m-j-3} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_{j+3} & 0 & \cdots & a_{m-j-5} & a_{m-j-4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right|$$

Головний кутовий мінор j-того порядку цієї матриці дорівнює 1, тому, із загального вигляду цієї матриці очевидно, що її визначник дорівнює визначнику матриці, яку можна отримати з матриці $\mathcal{A}$ заміною першого стовпця на вектор $\mathbf{f}^{j+1}$. Тобто

$$\det \mathcal{A}_{j,\mathbf{f}^0} = \det \mathcal{A}_{0,\mathbf{f}^{j+1}}.$$

Повторюючи попередні міркування для $\mathbf{f}^{j+1}$ замість $\mathbf{f}^0$, маємо, що

$$\Delta_{j,\mathbf{f}^{j+1};i} = \sum_{k=0}^{i} y_k f_{j+k},$$

тому

$$\det \mathcal{A}_{j,\mathbf{f}^{j+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k f_{j+k} = w_j,$$

що завершує доведення. ■

5.2 Для диференціального рівняння

В цьому розділі вважатимемо, що в рівнянні (2.1) елемент a_0 є оборотним. Без втрати загальності, можемо розглядати тільки випадок, коли $a_0 = 1$. Тоді послідовність $\{c_k\}$, що задовольняє (2.2), є розв'язком наступної лінійної системи:

$$\begin{cases} c_0 & = & 1 \\ c_0 + \sum_{i=0}^{j-1} a_i c_{j-i} & = & 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, m \\ \sum_{i=0}^{m} a_i c_{j-i} & = & 0, \quad j = m+1, m+2, \ldots \end{cases} . \tag{5.4}$$

Перепишемо (2.1) як нескінченну лінійну систему. Отримуємо:

$$a_0 w_k + a_1 \frac{(k+1)!}{k!} w_{k+1} + \ldots + a_j \frac{(k+j)!}{k!} w_{k+j} + \ldots + a_m \frac{(k+m)!}{k!} w_{k+m} = f_k, \tag{5.5}$$

де $w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_n x^n$.

За означенням, покладемо $a_i = 0$ для будь-якого $i > m$. Тоді в матричній формі цю систему можна записати у вигляді $Aw = f$, де

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots \\ 0 & 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ and } f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \end{pmatrix} . \tag{5.6}$$

Тобто, членами цієї нескінченної верхньотрикутної матриці $\mathcal{A}$ є $\alpha_{ij} = \dfrac{(j-1)!}{(i-1)!} a_{j-i}$ для $0 \leq i \leq j$ і $\alpha_{ij} = 0$ для $0 < j < i$.

Для будь-якого $n \geq 0$ позначимо за $\mathcal{A}_n$ матрицю, що отримана з матриці $\mathcal{A}_n$ заміною $(n+1)$-го стовпця на вектор f. Для $j \geq 0$ позначимо за $\tilde{\Delta}_j$

головний кутовий мінор $(j+1)$-го порядку матриці $\mathcal{A}$. Відповідно, за $\tilde{\Delta}_{n,j}$ позначимо головний кутовий мінор $(j+1)$-го порядку матриці $\mathcal{A}_n$.

Теорема 5.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.6. Тоді коефіцієнти єдиного розв'язку рівняння (2.1) з кільця $K[[x]]$ можна знайти за допомогою правила Крамера:*

$$w_n = \frac{\det \mathcal{A}_n}{\det \mathcal{A}} = \det \mathcal{A}_n, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.7}$$

де визначники знаходяться, як наступні границі послідовностей в K за нормуванням $|\cdot|$:

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_r, \quad \det \mathcal{A}_n = \lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_{n,r}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Доведення. Зазначимо, що $\tilde{\Delta}_r = 1$ для будь-якого r, тобто $\det \mathcal{A} = 1$. За теоремою 2.6 рівняння (2.1) має єдиний розв'язок в K, і цей розв'язок має вигляд (2.3). Покажемо, що $\det \mathcal{A}_n = w_n$.

За $\tilde{B}_r$ позначатимемо визначник

$$\tilde{B}_r = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots & r!a_r \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots & r!a_{r-1} \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{4!}a_{r-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix}. \tag{5.8}$$

Розглянемо

$$\tilde{\Delta}_{0,r} = \begin{vmatrix} f_0 & a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & 5!a_5 & \cdots & r!a_r \\ f_1 & 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & 5!a_4 & \cdots & r!a_{r-1} \\ f_2 & 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \frac{5!}{2}a_3 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ f_3 & 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \frac{5!}{3!}a_2 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5!}{4!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{4!}a_{r-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \\ f_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи цей визначник за першим стовпцем, отримуємо

$$\tilde{\Delta}_{0,r} = f_0 - f_1 a_1 + f_2 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 \\ 1 & 2a_1 \end{vmatrix} - f_3 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 \end{vmatrix} + f_4 \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= f_0 - f_1 a_1 + f_2 \tilde{B}_2 - f_3 \tilde{B}_3 + f_4 \tilde{B}_4 - \ldots = f_0 - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} f_i \tilde{B}_i. \quad (5.9)$$

Визначники

$$B_r = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

були розглянуті в Розділі 5 і було показано, що $B_r = (-1)^r c_r$, де послідовність $\{c_r\}$ є розв'язком системи (5.4).

Зазначимо, що

$$\tilde{B}_r = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3!a_3 & 4!a_4 & \cdots & k!a_r \\ 1 & 2a_1 & 3!a_2 & 4!a_3 & \cdots & r!a_{r-1} \\ 0 & 1 & \frac{3!}{2}a_1 & \frac{4!}{2}a_2 & \cdots & \frac{r!}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4!}{3!}a_1 & \cdots & \frac{r!}{3!}a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r!}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 3!\cdot\ldots\cdot r!\cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_r \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r-1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 & \cdots & \frac{1}{2}a_{r-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3!} & \frac{1}{3!}a_1 & \cdots & \frac{1}{3!}a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{(r-1)!}a_1 \end{vmatrix} = \frac{2\cdot 3!\cdot\ldots\cdot r!}{2\cdot 3!\cdot\ldots\cdot(r-1)!} B_r = r! B_r. \quad (5.11)$$

Тоді $\tilde{B}_r = r!(-1)^r c_r$. Маємо

$$\tilde{\Delta}_{1,r} = f_0 - \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1} f_i \tilde{B}_i = f_0 + \sum_{i=1}^{r} f_i i! c_i = \sum_{i=0}^{r} f_i i! c_i. \tag{5.12}$$

Тому

$$\frac{\det \mathcal{A}_0}{\det \mathcal{A}} = \frac{\lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_{0,r}}{\lim_{r\to\infty} \tilde{\Delta}_r} = \lim_{r\to\infty} \sum_{i=0}^{r} i! f_i c_i = \sum_{i=0}^{\infty} i! f_i c_i. \tag{5.13}$$

Це співпадає з w_0, що знайдено в зауваженні 2.3.

Розглянемо тепер $\mathcal{A}_n$ для деякого $n \geq 1$ і її мінор i-того порядку $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$. Для того щоб знайти границю мінорів при $i \to +\infty$, достатньо розглянути такі i що $i > n$ і $i > m$. Тоді головний кутовий мінор $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ дорівнюватиме

$$\left|\begin{array}{c|ccccccc}
 & f_0 & (n+1)!a_{n+1} & \cdots & m!a_m & 0 & \cdots & * \\
 & f_1 & (n+1)!a_n & \cdots & m!a_{m-1} & (m+1)!a_m & \cdots & * \\
 & f_2 & \frac{(n+1)!}{2}a_{n-1} & \cdots & \frac{m!}{2}a_{m-2} & \frac{(m+1)!}{2}a_{m-1} & \cdots & * \\
{}^{n}\overline{\mathcal{A}} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\
 & f_{n-2} & \frac{(n+1)!}{(n-2)!}a_3 & \cdots & \frac{m!}{(n-2)!}a_{m-n+2} & \frac{(m+1)!}{(n-2)!}a_{m-n+3} & \cdots & * \\
 & f_{n-1} & \frac{(n+1)!}{(n-1)!}a_2 & \cdots & \frac{m!}{(n-1)!}a_{m-n+1} & \frac{(m+1)!}{(n-1)!}a_{m-n+2} & \cdots & * \\
\hline
\ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & f_n & (n+1)a_1 & \cdots & \frac{m!}{n!}a_{m-n} & \frac{(m+1)!}{n!}a_{m-n+1} & \cdots & * \\
 & f_{n+1} & 1 & \cdots & \frac{m!}{(n+1)!}a_{m-n-1} & \frac{(m+1)!}{(n+1)!}a_{m-n} & \cdots & * \\
0 & f_{n+2} & 0 & \cdots & \frac{m!}{(n+2)!}a_{m-n-2} & \frac{(m+1)!}{(n+2)!}a_{m-n-1} & \cdots & * \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} \quad \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & f_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right|,$$

де останній i-тий стовпець має вигляд

$$\left(0,\ \cdots,\ 0,\ \frac{(i-1)!}{(i-m-1)!}a_m,\ \cdots,\ \frac{(i-1)!}{(i-3)!}a_2,\ \frac{(i-1)!}{(i-2)!}a_1,\ 1\right)^{\top}$$

і за ${}^{n}\overline{\mathcal{A}}$ позначено квадратну матрицю, що утворюється з $\mathcal{A}$ видаленням всіх рядків і стовпців, за виключенням перших $n-1$.

Отримуємо, що її визначник $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ дорівнює

$$\begin{vmatrix} f_n & (n+1)a_1 & \frac{(n+2)!}{n!}a_2 & \cdots & \frac{m!}{n!}a_{m-n} & \cdots & \frac{(i-1)!}{n!}a_{i-n-1} \\ f_{n+1} & 1 & (n+2)a_1 & \cdots & \frac{m!}{(n+1)!}a_{m-n-1} & \cdots & \frac{(i-1)!}{(n+1)!}a_{i-n-2} \\ f_{n+2} & 0 & 1 & \cdots & \frac{m!}{(n+2)!}a_{m-n-2} & \cdots & \frac{(i-1)!}{(n+2)!}a_{i-n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \tag{5.14}$$

Нехай $\check{B}_0 = 1$ і

$$\check{B}_r = \begin{vmatrix} (n+1)a_1 & \frac{(n+2)!}{n!}a_2 & \frac{(n+3)!}{n!}a_3 & \frac{(n+4)!}{n!}a_4 & \cdots & \frac{(n+r)!}{n!}a_r \\ 1 & (n+2)a_1 & \frac{(n+3)!}{(n+1)!}a_2 & \frac{(n+4)!}{(n+1)!}a_3 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+1)!}a_{r-1} \\ 0 & 1 & (n+3)a_1 & \frac{(n+4)!}{(n+2)!}a_2 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+2)!}a_{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & (n+4)a_1 & \cdots & \frac{(n+r)!}{(n+3)!}a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n+r)a_1 \end{vmatrix}. \tag{5.15}$$

Розкладаючи $\tilde{\Delta}_{n,i-1}$ за першим стовпцем, отримуємо

$$\tilde{\Delta}_{n,i-1} = \sum_{s=1}^{i-n} (-1)^{s-1} f_{n+s-1} \check{B}_{s-1}. \tag{5.16}$$

Зазначимо, що

$$\check{B}_r = \frac{(n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \ldots \cdot (n+r)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot \ldots \cdot (n+r-1)!} B_r = \frac{(n+r)!}{n!} B_r.$$

Тоді

$$\tilde{\Delta}_{n,i-1} = \sum_{s=1}^{i-n} (-1)^{s-1} f_{n+s-1} \frac{(n+s-1)!}{n!} B_{s-1} = \sum_{s=0}^{i-n-1} f_{n+s} \frac{(n+s)!}{n!} c_s.$$

Отримуємо

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\Delta}_{n,i} = \sum_{s=0}^{\infty} f_{n+s} \frac{(n+s)!}{n!} c_s = w_n.$$

Доведення теореми завершено. ■

5.3 Для операторного рівняння першого порядку

За теоремою 4.2 розділу 4, рівняння (4.1) має не більше як один розв'язок з $\mathbb{Z}[[x]]$, але може не мати жодного. Будемо шукати розв'язок (4.1), припустивши, що він існує.

Підставивши розв'язок $w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots$ в рівняння $A(x)w + f(x) = w(x)$, отримуємо

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 x + \alpha_3 w_3 x^2 + \ldots + f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \ldots,$$

що призводить до неявної рекурентної формули для коефіцієнтів $w(x)$:

$$\alpha_{n+1} w_{n+1} + f_n = w_n.$$

Її можна записати як нескінченну лінійну систему

$$\mathcal{A}y = f \text{ , where } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Нехай $\mathcal{A}_i$ – матриця, що отримана з матриці $\mathcal{A}$ заміною i-того стовпця на f. Тоді

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} f_1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \ldots \\ f_2 & 1 & -\alpha_2 & 0 & \ldots \\ f_3 & 0 & 1 & -\alpha_3 & \ldots \\ f_4 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & f_2 & -\alpha_2 & 0 & \ldots \\ 0 & f_3 & 1 & -\alpha_3 & \ldots \\ 0 & f_4 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ldots.$$

Означимо головний мінор порядку k матриці $\mathcal{A}$ за Δ_r. Означимо головний мінор порядку k матриць $\mathcal{A}_i$)за $\Delta_{i,r}$.

Теорема 5.3. *Нехай виконуються умови теореми 4.2. Тоді коефіцієнти единого розв'язку рівняння* (4.1)*, що належить* $\mathbb{Z}[[x]]$*, можуть бути* *знайдені за допомогою формули Крамера* $w_k = \frac{\det \mathcal{A}_k}{\det \mathcal{A}}$, *де визначники знаходяться як наступні границі в* $\mathbb{Z}_{\hat{\alpha}}$*:*

$$\det \mathcal{A} = \lim_{r\to\infty} \Delta_r,\ \det \mathcal{A}_k = \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}.$$

Доведення. За теоремою рівняння має розв'язок 4.6. Коефіцієнт при x^n дорівнюватимуть

$$f_n + f_{n+1}\alpha_{n+1} + f_{n+2}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \dots .$$

Перевіримо, що коефіцієнти розв'язку, отримані за допомогою правила Крамера, співпадатимуть з цими.

Знайдемо спочатку $\Delta_{n,k}$. Очевидно,

$$\Delta_{n,n} = \det \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & f_0 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & \dots & f_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_n \end{pmatrix} = f_n.$$

Якщо $k > n$, то

$$\Delta_{n,k} = \det \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & \dots & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{k-1} & 0 & \dots & -\alpha_k \\ 0 & 0 & \dots & f_k & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Delta_{n,k-1} + f_k\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdot \ldots \cdot \alpha_k.$$

Отже,

$$\Delta_{n,k} = f_n + \sum_{s=n+1}^{k} f_s\alpha_{n+1}\cdot \ldots \cdot \alpha_s = \sum_{s=n}^{k} f_s\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdot \ldots \cdot \alpha_s.$$

Оскільки $\Delta_k = 1$ для будь-якого k, то

$$w_n = \frac{\lim_{k\to\infty} \Delta_{n,k}}{\lim_{k\to\infty} \Delta_k} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+j}\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n+j}. \tag{5.18}$$

■

Зауваження 5.1. Також можна розв'язувати систему (5.17), знаходячи оборотну матрицю $\mathcal{A}$. Можемо знайти її "алгебраїчно" за допомогою приєднаних матриць:

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_3\alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_4 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Бачимо, що при знаходженні добутку цієї матриці і вектора f, виникають нескінченні суми (5.18).

Висновки до розділу 5

У цьому розділі ми розглядали лінійні різницеві, диференціальні та операторні рівняння, що вивчалися у попередніх розділах, як нескінченні лінійні системи рівнянь. Ми розв'язували ці системи за допомогою правила Крамера, для якого спеціальним чином рахувалися визначники нескінченних матриць. Було доведено, що у випадку існування і єдиності розв'язку таких рівнянь, ряд, знайдений за допомогою методу Крамера і буде тим самим єдиним розв'язком.

Основні результати розділу:

- Теорема 5.1 про правило Крамера для різницевого рівняння.
- Теорема 5.2 про правило Крамера для диференціального рівняння.

- Теорема 5.3 про правило Крамера для операторного рівняння першого порядку.

Результати розділу були опубліковані в [5] і [6].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертаційній роботі розглядаються лінійні диференціальні та неявні лінійні різницеві неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами над комутативними кільцями. Нас цікавлять умови існування та єдиності розв'язку, способи його знайти, а також побудування аналогів конструкцій, притаманних звичайній теорії диференціальних рівнянь. Перший розділ містить коротку історію вивчення питань, розглянутих в дисертації, стислий опис вищезгаданих конструкцій і інших аналогічних до них побудов, а також відомі результати, що використовуються в дисертації. Другий розділ присвячений вивченню лінійного диференціального рівняння. В цьому розділі повністю описаний випадок, коли неоднорідність є поліномом, сформульовані умови існування і єдиності поліноміального розв'язку та знайдено цей розв'язок. Для рівняння з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду введено поняття формального розв'язку, за допомогою якого знайдено достатні умови існування і єдиності розв'язку для деяких типів кілець. Отримані умови єдиності розв'язку для кільця нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням та умови існування розв'язку для кільця нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням, повного відносно цього нормування. Кожний коефіцієнт розв'язку знайдений у вигляді ряду, збіжного за цим нормуванням. Знайдені умови уточнені для випадку кільця цілих p-адичних чисел, що пов'язує існування розв'язку над кільцем цілих чисел із питаннями щодо збіжності деяких рядів до цілих чисел в p-адичній метриці. Також в цьому розділі знайдено аналог фундаментального розв'язку диференціального оператора, що дозволяє знаходити розв'язок у вигляді згортки деякого формального ряду Лорана, що залежить тільки від лівої частини, з неоднорідністю. В третьому розділі розглядалися лінійні різницеві рівняння. Подібно до попереднього розділу, повністю вивчений випадок фінітної неоднорідності, а для нефінітної неоднорідності введено поняття формального розв'язку, за допомогою якого сформульовані достатні умови існування і єдиності розв'язку для деяких кілець. Так само, як і в попередньому розділі, знайдені умови єдиності розв'язку для кільця нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням та умови існування розв'язку для кільця нормування поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням, повного відносно цього нормування. Крім того, доведено, що за деяких умов і за умови існування розв'язку, його можна знайти навіть у випадку неповних відносно неархімедового нормування кілець. Ці результати уточнені для факторіальних кілець. У якості прикладу розглянуто рівняння з квазіполіноміальною неоднорідністю. Більш детально розібрано випадок кільця формальних степеневих рядів, для цього кільця умови переформульовані для рівняння першого порядку. З цього для рівняння першого порядку отримано умови існування розв'язку, всі елементи якого є поліномами. За деяких умов доведено, що якщо перший елемент є поліномом, то і всі інші також є поліномами, і отриманий результат про оцінку степенів поліномів, що має спростити знаходження розв'язку або доведення його неіснування. Слід зазначити, що отримані умови існування і єдиності розв'язку для диференціальних рівнянь вищого порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду і для різницевих рівнянь вищого порядку з нефінітною неоднорідністю навіть у повних кільцях є доволі жорсткими. Знаходження більш м'яких умов є відкритим питанням, що потребує дослідження. В четвертому розділі більш детально розглядаються рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел. Для цього вводиться деяка конструкція, що дозволяє поєднати лінійні різницеве і диференціальне рівняння, розглядаючи їх як окремі випадки операторного рівняння. В п'ятому розділі розглянуті в дисертації різницеві і диференціальні рівняння були представлені у вигляді нескінченних лінійних систем, і було доведено, що за умови існування і єдиності розв'язку, вони можуть бути розв'язані за допомогою аналога метода Крамера.

У дисертаційній роботі отримані наступні нові результати:

1) Для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

з комутативного кільця характеристики нуль з одиницею:

– наведено умови існування і єдиності поліноміального розв'язку, знайдено в явному вигляді розв'язок лінійного диференціального рівняння m-того порядку з поліноміальною неоднорідністю;

– введено поняття формального розв'язку лінійного диференціального рівняння m-того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над комутативним кільцем характеристики нуль з одиницею, встановлено зв'язок формального розв'язку цього рівняння з фактичним розв'язком;

– доведено, що формальний розв'язок буде коректно визначеним формальним степеневим рядом тоді і тільки тоді, коли неоднорідність поліноміальна;

– отримані умови існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m-того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням;

– ці умови уточнені для випадку кільця цілих p-адичних чисел;

– для випадку кільця нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням введено спеціальну згортку формального ряду Лорана з від'ємними степенями з формальним степеневим рядом. Знайдений аналог фундаментального розв'язку диференціального оператора, пов'язаного з лівою частиною рівняння. Доведено, що для будь-якої неоднорідності, що є формальним степеневим рядом, розв'язок розв'язок лінійного диференціального рівняння можна представити у вигляді згортки цього фундаментального розв'язку з неоднорідністю.

2) Для неявного лінійного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами з комутативного кільця характеристики нуль з одиницею:

– наведено умови існування і єдиності фінітного розв'язку, знайдено в явному вигляді розв'язок неявного лінійного різницевого рівняння m-того порядку з фінітною неоднорідністю;

– аналогічно до випадку диференціального рівняння введено поняття формального розв'язку і доведено, що він буде коректно визначеним тоді і тільки тоді, коли неоднорідність фінітна;

– отримані умови існування і єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння m-того порядку з неоднорідністю у вигляді формального степеневого ряду над кільцем нормування повного поля характеристики нуль з неархімедовим нормуванням;

– ці умови уточнені для випадку факторіального кільця, кільця цілих p-адичних чисел і кільця формальних степеневих рядів;

– лінійного різницевого рівняння першого порядку в кільці поліномів для знайденого розв'язку з кільця формальних степеневих рядів за деяких умов доведено, що якщо його нульовий елемент є поліномом, то і всі інші також є поліномами. Також отриманий результат про оцінку степенів поліномів, що дає змогу знаходити поліноміальні розв'язки деяких типів рівнянь.

3) Знайдені умови існування та єдиності розв'язку лінійного операторного рівняння першого порядку в кільці цілих чисел. Ці умови уточнені для часткових випадків, тобто різницевого і диференціального рівнянь.

4) У випадку існування розв'язку для лінійних диференціальних і різницевих рівнянь, доведено, що ці розв'язки можна знайти за допомогою деякого аналога метода Крамера.

Всі результати дисертаційної роботи наведені з повними і строгими математичними доведеннями. Результати мають теоретичний характер та розширюють наше уявлення про лінійні диференціальні та різницеві рівняння.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Gefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Fundamental Solution of an Implicit Linear Inhomogeneous First Order Differential Equation Over an Arbitrary Ring, J Math Sci **219**(6), 922–935 (2016) DOI: 10.1007/s10958-016-3155-9

[2] Gefter, S.L., Goncharuk, A.B.: The Hurwitz Product, p-Adic Topology on $\mathbb{Z}$, and Fundamental Solution to Linear Differential Equation in the Ring $\mathbb{Z}[[x]]$, J Math Sci **228**(6), 633–638 (2018) DOI: 10.1007/s10958-017-3651-6

[3] Gerasimov, V.A., Gefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Application of the p-Adic Topology on to the Problem of Finding Solutions in Integers of an Implicit Linear Difference Equation, J Math Sci **235**, 256–261 (2018) DOI: 10.1007/s10958-018-4072-x

[4] Гефтер С.Л., Гончарук А.Б., Півень О.Л.: Цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння. Доповіді НАН України **11**, 11–18 (2018) DOI: 10.15407/dopovidi2018.11.011

[5] Goncharuk, A.: Implicit linear difference equation over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **93**, 18–33 (2021) DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03

[6] Goncharuk, A.: Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **95**, 39–48 (2022) DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04

[7] Hefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Linear Differential Equation with Inhomogeneity in the Form of a Formal Power Series Over a Ring with Non-Archimedean Valuation. Ukr Math J **74**, 1463–1477 (2022) DOI: 10.1007/s11253-023-02163-0

[8] Gefter, S., Goncharuk, A.: Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: Böttcher, A., Potts, D., Stollmann, P., Wenzel, D. (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Birkhäuser, Cham. pp. 247–259 (2018) DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13

[9] Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenović, M.R.S., Kalabušić, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham. pp. 199–216 (2023) DOI: 10.1007/978-3-031-25225-9_10

[10] Gefter, S., Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formula for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of Abstracts of V International Conference "Analisis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine (2017) DOI: 10.13140/RG.2.2.24135.80805

[11] Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formulas for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of abstracts of The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, pp. 57-58 (2017)

[12] Goncharuk A.: Implicit linear differential equation over the ring of polynomials. Збірник тез доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, с. 5 (2020)

[13] Goncharuk A., Gefter S.: Non-homogeneous implicit linear differential equation over the ring of formal power series. Збірник тез доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, с. 50 (2021)

[14] Goncharuk A.: Implicit difference equation over the ring of polynomials. In: Book of abstracts of Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, p. 29 (2021)

[15] Gonmcharuk, A., Gefter, S., Piven', A.: Implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, p. 154 (2021)

[16] Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series over a topologicl ring. Збірник тез Міжнародної конференції з комплексного і функціонального аналізу, присвяченої пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, с. 19 (2021)

[17] Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series. In: Book of Abstracts of The 5-th International Conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT 2021), Kharkiv, p. 19 (2021)

[18] Gefter, S.L., Goncharuk, A.B., Piven', A.L.: Quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over a local commutative ring. In: Book of Abstracts of The International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", Ivano-Frankivsk, p. 32 (2022)

[19] Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Periodic and quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 27th International Conference on Difference Equations and Applications, Paris, p. 137 (2022)

[20] Gefter, S., Stulova, T.: On Holomorphic Solutions of Some Implicit Linear Differential Equations in a Banach Space. In: Adamyan, V.M., et al. Modern Analysis and Applications. Operator Theory: Advances and Applications **191**, 331–340 (2009) DOI: 10.1007/978-3-7643-9921-4_20

[21] Gefter, S., Stulova, T.: On Solutions of Zero Exponential Type for Some Inhomogeneous Differential-Difference Equations in a Banach Space. In: Ibáñez, S., Pérez del Río, J., Pumariño, A., Rodríguez, J. (eds) Progress and Challenges in Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **54**, 253–263. Springer, Berlin, Heidelberg (2013) DOI: 10.1007/978-3-642-38830-9_15

[22] Gefter, S., Stulova, T.: On entire solutions of exponential type for some implicit linear differential-difference equation in a banach space. J Math Sci **202**(4), 541–545 (2014) DOI: 10.1007/s10958-014-2060-3

[23] Gefter, S., Stulova, T.: Fundamental Solution of the Simplest Implicit Linear Differential Equation in a Vector Space. J Math Sci **207**(2), 166–175 (2015) DOI: 10.1007/s10958-015-2363-z

[24] Gefter, S., Piven', A.: Implicit linear nonhomogeneous difference equation in banach and locally convex spaces. Журн. мат. фіз. анал. геом. **15**, 336–353 (2019) DOI: 10.15407/mag15.03.336

[25] Hefter, S., Piven', A.: Entire Solutions of One Linear Implicit Differential-Difference Equation in Banach Spaces. Ukr Math J **70**(8), 1205–1220 (2019) DOI: 10.1007/s11253-018-1563-3

[26] Buckingham, P.: Factorial-type recurrence relations and p-adic incomplete gamma functions. ArXiv (2022) DOI:10.48550/arXiv.2206.12726

[27] Gorbachuk, V. I., Gorbachuk V. M.: On holomorphic solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a banach space over a non-archimedean field. P-Adic Num Ultrametr Anal Appl **2**, 114–121 (2010) DOI:10.1134/S2070046610020032

[28] Горбачук, В. М.: Про розв'язність диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі в класі аналітичних вектор-функцій. Доповіді НАН України **12**, 7–13 (2010) url: dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/31099

[29] Самойленко А.М., Перестюк, М.О., Парасюк І.О.: Диференціальні рівняння. “Либідь”, Київ (2003)

[30] Cartan, H.: Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables, Dover books on Math., Dover Publ. (2013)

[31] Герасимов, В., Гефтер, С., Рибалко, А.: Неявне лінійне неоднорідне функціональне рівняння з оператором Помм’є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$. Буковинський математичний журнал **4**(3-4), 36–39 (2017) url: bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/205

[32] Gerasimov, V. A., Gefter, S. L., Goncharuk, A. B.: Application of the p-adic topology on $\mathbb{Z}$ to the problem of finding solutions in integers of an implicit linear difference equation. J Math Sci **235**, 256–261 (2018) DOI: 10.1007/s10958-018-4072-x

[33] Гефтер, С. Л., Марценюк, В. В., Півень, О. Л.: Цілочисельні розв’язки неявного лінійного різницевого рівняння другого порядку. Буковинський математичний журнал **6**(3-4), 40–46 (2019). DOI: 10.31861/bmj2018.03.040

[34] Gefter, S. L., Martseniuk, V. V., Goncharuk, A. B., Piven’, A. L.: Analogue of the Cramer Rule for an Implicit Linear Second Order Difference Equation Over the Ring of Integers. J Math Sci **244**(4), 601–607 (2020) DOI: 10.1007/s10958-019-04635-w

[35] Berestovskiĭ, V.N., Nikonorov, Y.G.: Continued fractions, the group $GL(2, \mathbb{Z})$, and Pisot numbers. Sib. Adv. Math. **17**, 268–290 (2007) DOI: 10.3103/S1055134407040025

[36] Martseniuk, V., Gefter, S.L., Piven’, A.: Uniqueness Criterion and Cramer’s Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over $\mathbb{Z}$. In: Baigent, S., Bohner, M., Elaydi, S. (eds) Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. ICDEA 2019. Spri-

nger Proceedings in Mathematics & Statistics **341**, 311–325. Springer, Cham. (2020) DOI: 10.1007/978-3-030-60107-2_16

[37] Elaydi, S.: An Introduction to Difference Equations. Springer, New York (2005) DOI: 10.1007/0-387-27602-5

[38] Everest, G., Poorten A., Shparlinski I., Wand T.: Recurrence Sequences. Mathematical Surveys and Monographs. vol. 104, AMS (2015)

[39] Brisson, B.: Sur l'intégrazion des équations différentielles partielles. Journal de l'École polytechnique **14**, 191–261 (1808) url: gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433670m/f192.item

[40] Kamke, E.: Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Springer Vieweg Verlag (2013) DOI: 10.1007/978-3-663-05925-7

[41] Lang, S.: Algebra. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York (2012). DOI: 10.1007/978-1-4613-0041-0.

[42] Anjom Shoa, M.H., Hosseini, M.H.: Quasi Valuation and Valuation Derived from Filtered Ring and their Properties. Asian Journal of Algebra **8**, 1–5. (2015) DOI: 10.3923/aja.2015.1.5

[43] Bosch, S., Güntzer, U., Remmert R.: Non-Archimedean Analysis: A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1984)

[44] Bourbaki, N.: Commutative algebra. Hermann, Paris (1972)

[45] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H.: Locally Convex Spaces over Non-Archimedean Valued Fields. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press (2010) DOI: 10.1017/CBO9780511729959

[46] Dragovich, B.: On p-Adic Power Series. Lecture notes in pure and applied mathematics. p-adic Functional Analysis **207**, 65-75 (1999)

[47] Лінчук, С.С.: Оператори у просторах аналітичних функцій. Рута, Чернівці (2011)

[48] Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract Harmonic Analysis, Volume I: Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1963) DOI: 10.1007/978-1-4419-8638-2

[49] Green, G.: An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham (1828) DOI: 10.48550/arXiv.0807.0088

[50] Kythe, P.: Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications. Birkhäuser, Boston (2012) DOI: 10.1007/978-1-4612-4106-5

[51] Ortner, N., Wagner, P.: Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators Theory and Practice. Springer Cham (2015) DOI: 10.1007/978-3-319-20140-5

[52] Kac, V.G.: Vertex Algebras for Beginners (second edition), Univ. Lecture Ser., **10**, AMS, Providence, RI (1998)

[53] Bieberbach, L.: Analytische Fortsetzung. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1955) DOI: 10.1007/978-3-662-01270-3

[54] Balser, W.: Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations. Springer, New York (2000) DOI: 10.1017/10.1007/b97608

[55] Malgrange, B.: Sur les points singuliers des équations différentielles. L'Enseignement Mathématique **20**, 147–176 (1974) url: eudml.org/doc/111548

[56] Singer M.F.: Formal solutions of differential equations. J. Symbolic Computation **10**, 59–94 (1990) DOI: 10.1016/S0747-7171(08)80037-5

[57] Dwork, B.: Lectures on p-adic Differential Equations. Adiwes international series in mathemathics. Springer, New York (1982) DOI: 10.1007/978-1-4613-8193-8

[58] Dwork B., Gerotto G., Sullivan, F.J.: An Introduction to G-Functions. (AM-133), vol. 133, Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press (2016) DOI: 10.1515/9781400882540

[59] Kedlaya, Ê.S.: p-Adic Differential Equations. Cambridge University Press (2010) DOI: 10.1017/CBO9780511750922.

[60] Khrennikov, A. Yu., Kozyrev, S. V., Zúñiga-Galindo, W. A.: Ultrametric Pseudodifferential Equations and Applications. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press (2018) DOI:10.1017/9781316986707

[61] Kochubei, A. N.: Analysis in Positive Characteristic. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press (2009) DOI: 10.1017/CBO9780511575624

[62] Robba, P., Christol, G.: Equations différentielles p-adiques: applications aux sommes exponentielles, vol. 12, Actualités Mathématiques. Hermann, Éditeurs des sciences et des arts (1994)

[63] Combes, J.: Sur la résolution de certains systémes infinis d'équations linéaires. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques **28**(1), 149–159 (1964)

[64] Cooke, R.G.: Infinite Matrices and Sequence Spaces. Dover, New York (1955)

[65] Shivakumar, P. N., Shivakumar, K. C.: A rewiew of infinite matrices and their applications. Linear Algebra and its Applications **430**, 976–998 (2009) DOI: 10.1016/j.laa.2008.09.032

[66] Eilenberg, S.: Automata, languages and machines. Volume A. In: Pure and Applied Mathematics. Academic Press, NY (1974)

[67] Grauert H., Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren, vol. 176. In: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin, Heidelberg (1971) DOI: 10.1007/978-3-642-65033-8

Додаток А: список публікацій здобувача

Публікації у фахових виданнях України:

1. Гефтер С.Л., Гончарук А.Б., Півень О.Л.: Цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння. Доповіді НАН України **11**, 11–18 (2018) DOI: 10.15407/dopovidi2018.11.011
2. Goncharuk, A.: Implicit linear difference equation over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **93**, 18–33 (2021) DOI: 10.26565/2221-5646-2021-93-03
3. Goncharuk, A.: Cramer's rule for implicit linear differential equations over a non-Archimedean ring, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **95**, 39–48 (2022) DOI: 10.26565/2221-5646-2022-95-04

Публікації у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз:

4. Hefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Linear Differential Equation with Inhomogeneity in the Form of a Formal Power Series Over a Ring with Non-Archimedean Valuation. Ukr Math J **74**, 1463–1477 (2022) DOI: 10.1007/s11253-023-02163-0

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертаційної роботи:

5. Gefter, S., Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formula for solving infinite linear systems, and p-adic integers. In: Book of Abstracts of V International Conference "Analisis and mathematical physics" dedicated to Vladimir A. Marchenko's 95th birthday, Kharkiv, Ukraine (2017) DOI: 10.13140/RG.2.2.24135.80805
6. Goncharuk A.: The generalized backward shift operator on $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's formulas for solving infinite linear systems, and p-adic integers.

In: Book of abstracts of The 28th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA), Chemnitz, Germany, pp. 57-58 (2017)

7. Goncharuk A.: Implicit linear differential equation over the ring of polynomials. Збірник тез доповідей XV Міжнародної наукової конференції студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», Харків, с. 5 (2020)
8. Goncharuk A., Gefter S.: Non-homogeneous implicit linear differential equation over the ring of formal power series. Збірник тез доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, с. 50 (2021)
9. Goncharuk A.: Implicit difference equation over the ring of polynomials. In: Book of abstracts of Conference on Rings and Polynomials, Graz, Austria, p. 29 (2021)
10. Gonmcharuk, A., Gefter, S., Piven', A.: Implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 26th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2021), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, p. 154 (2021)
11. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series over a topologicl ring. Збірник тез Міжнародної конференції з комплексного і функціонального аналізу, присвяченої пам'яті Богдана Винницького, Дрогобич, с. 19 (2021)
12. Gefter, S., Goncharuk, A.: Linear differential equations in the ring of formal power series. In: Book of Abstracts of The 5-th International Conference "Differential Equations and Control Theory" (DECT 2021), Kharkiv, p. 19 (2021)
13. Gefter, S.L., Goncharuk, A.B., Piven', A.L.: Quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over a local commutative ring. In: Book of Abstracts of The International online conference "Current trends

in abstract and applied analysis", Ivano-Frankivsk, p. 32 (2022)

14. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Periodic and quasi-polynomial solutions of implicit linear difference equations over commutative rings. In: Book of Abstracts of The 27th International Conference on Difference Equations and Applications, Paris, p. 137 (2022)

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертаційної роботи (опубліковані праці конференцій):

15. Gefter, S., Goncharuk, A.: Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer's rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: Böttcher, A., Potts, D., Stollmann, P., Wenzel, D. (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Birkhäuser, Cham. pp. 247–259 (2018) DOI: 10.1007/978-3-319-75996-8_13
16. Gefter, S., Goncharuk, A., Piven', A.: Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenović, M.R.S., Kalabušić, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, Cham. pp. 199–216 (2023) DOI: 10.1007/978-3-031-25225-9_10

Онлайн сервіс створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

ПРОТОКОЛ
створення та перевірки кваліфікованого та удосконаленого електронного підпису

Дата та час: 23:32:21 03.10.2023

Назва файлу з підписом: Goncharuk_diss.pdf.asice
Розмір файлу з підписом: 682.6 КБ

Перевірені файли:
Назва файлу без підпису: Goncharuk_diss.pdf
Розмір файлу без підпису: 1003.2 КБ

Результат перевірки підпису: Підпис створено та перевірено успішно. Цілісність даних підтверджено

Підписувач: ГОНЧАРУК АННА БОРИСІВНА
П.І.Б.: ГОНЧАРУК АННА БОРИСІВНА
Країна: Україна
РНОКПП: 3536604229
Організація (установа): ФІЗИЧНА ОСОБА
Час підпису (підтверджено кваліфікованою позначкою часу для підпису від Надавача): 23:32:20 03.10.2023
Сертифікат виданий: АЦСК АТ КБ «ПРИВАТБАНК»
Серійний номер: 248197DDFAB977E504000000793F1E013B986704
Алгоритм підпису: ДСТУ-4145
Тип підпису: Удосконалений
Тип контейнера: Підпис та дані в архіві (розширений) (ASiC-E)
Формат підпису: З повними даними для перевірки (XAdES-B-LT)
Сертифікат: Кваліфікований